



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

Tézisfüzet

---

# KÉTKERESKŰ JÁRMŰVEK STABILIZÁLÁSA: VONTATMÁNYOK ÉS ELEKTROMOS ROLLEREK

---

Szerző:

HORVÁTH Hanna Zsófia

Témavezető:

TAKÁCS Dénes, PhD

Benyújtva a

PATTANTYÚS-ÁBRAHÁM GÉZA  
GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA  
számára

Budapest, 2025



# BEVEZETÉS

---

## Motiváció

A járművek kezelhetősége és stabilitása kritikus tényezők a közlekedésben. Sajnos naponta számos közúti baleset történik, amelyek közül sok a járművek oldalirányú stabilitásával függ össze. A járművezetők gyakran nem a közlekedési szabályoknak, a jármű dinamikai tulajdonságainak és a környezeti körülményeknek megfelelően választják meg a sebességet. Más esetekben olyan nemkívánatos rezgések alakulhatnak ki a valós forgalomban, amelyek nem voltak sejthetőek a jármű tervezése és tesztelése során. A járműdinamikában továbbra is fontos téma a klasszikus járműkombinációk (teherautó, teherautó-vontatmány, stb.) mechanikai modellezése, annak érdekében, hogy a hozzájuk kapcsolódó súlyos balesetek kockázatát csökkenteni lehessen. Ezen felül, a mikromobilitási járművek (elektromos rollerek, elektromos egykerekek, segway-ek, gördeszkák, stb.) elterjedésével egy új járműdinamikai kutatási irány kialakulásának igénye alakult ki, hogy megértsük, hogyan mozognak ezek a járművek és hogyan lehet őket irányítani. A disszertáció mindkét témában törekszik eredményeket elérni, nevezetesen, a kutatás középpontjában kétkerekű vontatmányok és elektromos rollerek dinamikája áll.

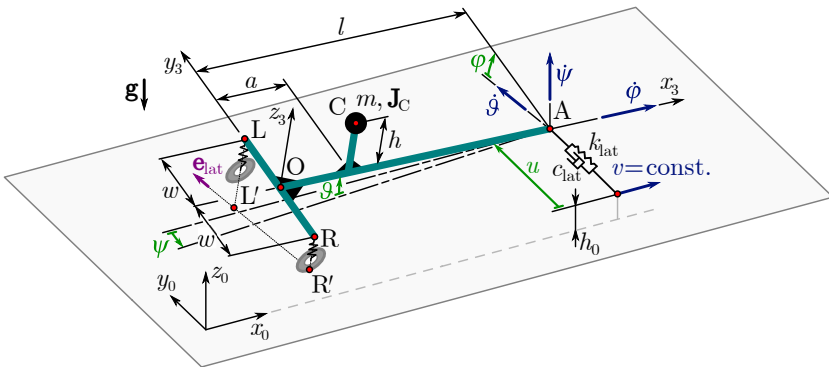
Ezeknek a járműrendszereknek a megfelelő mechanikai és matematikai modellezése és a megfelelő matematikai eszközökkel történő vizsgálata számos szempontból kihívást jelentő mérnöki feladatokhoz vezethet. A kérdéses járműrendszerek gyakran bonyolult többszabadságfokú dinamikai rendszerek kapcsolt rezgési módusokkal. Emellett a nemlineáris dinamika megfelelő leírásához gyakran térbeli mechanikai modellre van szükség. A jármű kerekei és a talaj közötti kontaktkapcsolat bonyolult jellegét is kezelni kell, ami meglehetősen komplex feladat. Ezért a legtöbb korábbi tanulmány numerikus vizsgálatokra korlátozódik, például többtestdinamikai szoftverek és kereskedelmi számítógépes kódok használatával. A disszertációban kétkerekű járművek olyan kis szabadságfokú modelljeit készítjük el és vizsgáljuk meg, amelyek analitikusan kezelhetőek, de mégis megragadják a járművek térbeli dinamikáját és releváns rezgéseit. A disszertáció célja betölteni az egyszerű síkbeli és a komplex többtest modellek közötti kutatási rést.

Annak ellenére, hogy a járműveket mindig átfogóan tesztelik, kialakulhatnak

nemkívánatos rezgések a tervezési szakasz után. Általánosságban elmondható, hogy a járművek tervezése olyan optimalizálási problémához kapcsolódik, amely számos szempontot kell, hogy figyelembe vegyen. Így a végső kialakítás kompromisszumot jelent a geometriai, inerciális és szabályozási paraméterek tekintetében. Például előfordulhat, hogy egy paraméterbeállítás előnyös lehet a nemkívánatos rezgések elkerülését tekintve, de más szempontból nem megfelelő, például kényelem vagy manőverezhetőség szempontjából. A menetstabilizáló szabályozások fejlesztése emiatt a probléma miatt került előtérbe. Ez új lehetőségeket nyit azáltal, hogy új, valamelyest független paramétereket vezet be a járműrendszerbe. A valós alkalmazásokban a jelek érzékelése, feldolgozása és a beavatkozás mind időt vesz igénybe; ezért a szabályozás időkésést is eredményez. A disszertáció vizsgálja és kiemeli az időkésésnek a járműszabályozás teljesítményére való jótékony hatását is.

## A disszertáció áttekintése

A disszertáció első részében a kétkerekű vontatmányok nemlineáris dinamikáját vizsgáljuk egy térbeli 4 szabadságfokú (DoF) mechanikai modell segítségével (ld. az 1. ábrát). Nevezetesen, figyelembe vesszük a legyezési-, a bólintási- és a dőlési mozgásokat is. Számításba vesszük a kerekek talajtól való elválásából adódó nem-sima kerékerőkarakterisztikát és más geometriai nemlinearitásokat.



1. ábra. Kétkerekű vontatmányok térbeli, 4 szabadságfokú mechanikai modellje az általános koordinátákkal és a geometriai paraméterekkel.

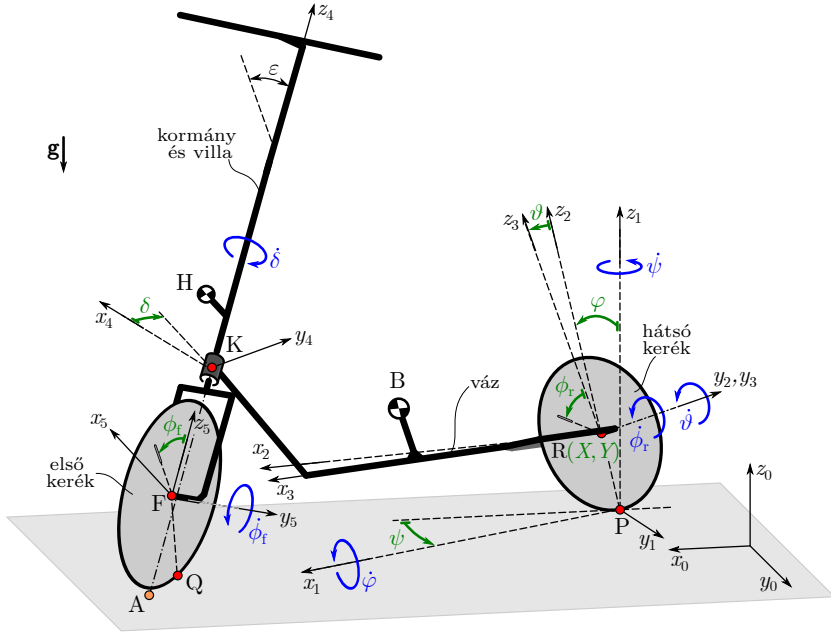
Megmutatjuk, hogy a vontatmány egyenes vonalú mozgásának lineáris stabilitását egy 3 DoF alrendszer uralja. Ezzel szemben, a lineárisan független bólintó mozgás befolyásolja a lineáris stabilitási határon a Hopf bifurkáció jellegét, a mozgásegyenletekben megjelenő, kerékerőkből származó vegyes másodfokú tagokon keresztül (*1. Tézis*).

Alacsony tömegközéppont értékek esetén egy gyakorlati szempontból releváns veszélyes sebességtartomány található. Azok a gyakran használt, egyszerűbb vontatmány modellek, amelyekben a vontatmány bólintása és/vagy dőlése elhanyagolásra kerül, nem konzervatívak a biztonság szempontjából és korlátozottan alkalmazhatóak. A teljes térbeli modell realizistikusabb, amelyet futószalagra helyezett, kis-skálájú vontatmányon végzett kísérletekkel igazoltunk. A teljes térbeli vontatmány modell alkalmas a kerékelválással járó, pattogó mozgások kritikus tartományainak feltárására is. Ezért a teljes térbeli modell használata ajánlott annak érdekében, hogy feltárásra kerüljön a kétkerekű vontatmányok összes lehetséges, biztonság szempontjából releváns nemlineáris rezgése (*2. Tézis*).

Egy lineáris állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozót is terveztünk a vontatmány differenciális fékezésével annak érdekében, hogy megszüntessük a veszélyes sebességtartományt. Figyelembe vesszük a szabályozó holsávját és időkésését. Adott vontatási sebesség esetére meghatározzuk a szabályozó paraméterek megfelelő értékét. Egy alacsony tömegközépponttal rendelkező valóságos vontatmány esetén a szabályozó még mérsékelt időkésés és holsáv mellett is képes megszüntetni a veszélyes sebességtartományt. Azonban ugyanez a szabályozó rosszul teljesít magasra helyezett tömegközéppont esetén (*3. Tézis*).

A disszertáció második részében önvezető elektromos roller stabilitását vizsgáljuk. A használt térbeli mechanikai modell a Whipple-féle bicikli modellen alapul (ld. a 2. ábrát). A merevtest rendszer négy testből áll, számos geometriai és kinematikai kényszerrel. Ezért a nemlineáris mozgásegyenleteket Kane-egyenletekkel vezetjük le. Az elektromos roller nulla hosszirányú sebességnél való egyensúlyozását hierarchikus, lineáris, folytonos idejű állapotvisszacsatoláson alapuló, több időkésést tartalmazó szabályozók segítségével valósítjuk meg. A kormányzással való szabályozás esetén a kormányra ható kormánynyomaték alkalmazásával egyensúlyozzuk az elektromos rollert. Az első kerék hajtásával történő szabályozás esetén az első kereket a  $\pi/2$  kormányzögbe fordítjuk és hajtó nyomatékot

vezérlünk ki az első kerékre.



2. ábra. Elektromos roller térbeli mechanikai modellje az általános koordinátákkal, a szögsebességekkel és a koordinátarendszerekkel.

A modellben megjelenő egyik geometriai kényszer egy bonyolult nemlineáris egyenlet formájában jelenik meg a dőlési-, a kormány- és a bólintási szögek között. Ennek a geometriai kényszernek a kiküszöbölésére közelítő képleteket írunk fel a bólintó mozgásra. Megmutatjuk, hogy a közelítéseink az egzakt linearizált mozgásegyenleteket eredményezik (4. Tézis).

Egyszerű, többszörös késleltetésű, lineáris állapotviszacsatoláson alapuló szabályozókat valósítunk meg és részletesen vizsgáljuk az időkések és a roller geometriai paramétereinek hatását. Az optimalizálási folyamatnak köszönhetően kiválasztjuk a hierarchikus szabályozó optimális szabályozóparamétereit. A kormány súlypontjának pozícióját kulcsfontosságú paraméterként azonosítjuk, amellyel a szabályozók teljesítménye hangolható (5. Tézis).

Ha a hierarchikus egyensúlyozó szabályozásban többszörös időkésest veszünk figyelembe, akkor a magasabb szintű és az alacsonyabb szintű időkések síkjában

rajzolt stabilizálhatósági térképek azt mutatják, hogy a legstabilabb beállítás nem a késésmentes esetnek felel meg. Ha az alacsonyabb szintű időkésést növeljük, akkor a magasabb szintű időkésést is arányosan növelni kell, hogy a rendszer robusztussága megmaradjon a perturbációkkal szemben (*6. Tézis*).

## Kétkerekű vontatmányok stabilitása

Tekintsük egy kétkerekű vontatmány teljes térbeli négy szabadságfokú (4 DoF) mechanikai modelljét. A modell általános koordinátái legyenek a  $\psi$  legyezési-, a  $\vartheta$  bólintási-, a  $\varphi$  dőlési szögek és a királycsap  $u$  oldalirányú elmozdulása. Vontassuk a királycsapot állandó  $v$  sebességgel hosszirányban, míg oldalirányban támasszuk meg egy rugó és egy csillapító elem segítségével a vontató jármű dinamikájának modellezéseként. A vontatmány kerékfelfüggesztéseit rugóból és csillapításból álló elemekként vegyük figyelembe; az oldalirányú kerékerőket a Pacejka-féle kúszási erők modelljével számítsuk ki a változó normálerők függvényeként. Vegyük figyelembe a kerékfelfüggesztés karakterisztikájának nem-sima jellegét és a kerekek elválását a talajtól.

### 1. Tézis

A bólintó mozgás nem befolyásolja a vontatmány egyenesvonalú mozgását, ha a következő kritériumok teljesülnek:

$$2kl^2 - mgh - \frac{mgh_0(l-a)}{l} > 0 \quad \text{és} \quad c > 0, \quad (1)$$

ahol  $k$  és  $c$  a felfüggesztés merevsége és csillapítása,  $l$  a vontatási hossz,  $m$  a vontatmány tömege,  $g$  a gravitációs gyorsulás,  $h$  és  $a$  jellemzik a vontatmány tömegközéppontjának függőleges és vízszintes pozícióját és  $h_0$  a királycsap magassága. A lineáris stabilitás egy 3 DoF alrendszer segítségével vizsgálható, amelynek általános koordinátái:  $\psi$ ,  $\varphi$  és  $u$ . Ezzel szemben a teljes térbeli modellen végzett szemi-analitikus és numerikus bifurkációanalízis alapján kijelenthető, hogy a bólintó mozgás befolyásolja a lineáris stabilitási határon a Hopf bifurkáció jellegét. Mindezt a harmadfokig sorfejtett mozgásegyenletekben megjelenő, kerékerőkből származó egyes másodfokú tagok eredményezik.

Kapcsolódó publikációk: [1–6].

## 2. Tézis

Egy valóságos vontatmánykonfiguráció esetén gyakorlati szempontból releváns, veszélyes sebességtartomány található, ha a tömegközéppontot alacsonyra helyezzük. Ez jelentősen lecsökkenti azt a sebességtartományt, ahol az egyenes vonalú mozgás globálisan stabil. Azok a gyakran használt, egyszerűbb vontatmány modellek, amelyekben a vontatmány bólintása és/vagy dőlése elhanyagolásra kerül, nem konzervatívák a biztonság szempontjából és korlátozottan alkalmazhatóak.

Szemi-analitikus és numerikus bifurkációanalízis alapján a teljes térbeli vontatmány modell alkalmas a kerékelválással járó, pattogó mozgások kritikus tartományainak feltárására is. Ezt futószalagra helyezett, kis-skálájú vontatmányon végzett laboratóriumi kísérletek igazolják. A teljes térbeli modell használata ajánlott annak érdekében, hogy feltárásra kerüljön a kétkerekű utánfutók összes lehetséges, biztonság szempontjából releváns nemlineáris rezgése.

Kapcsolódó publikációk: [1–7].

## 3. Tézis

Egy alacsony tömegközépponttal rendelkező valóságos vontatmány esetén egy lineáris, folytonos idejű állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozó képes a kerekek differenciális fékezésével megszüntetni a veszélyes sebességtartományt. Ez a megállapítás mérsékelt időkésés ( $\tau < 0.1$  s) és legyezési szögsebesség-holtsáv ( $\Omega_{dz} = 0.1$  rad/s) jelenlétében is érvényes. Azonban ugyanez a szabályozó nem hatásos magasra helyezett tömegközéppont esetén.  $\tau > 0.1$  s időkésések veszélyes (bistabil) tartományokhoz vezetnek olyan rakomány pozíciók esetén, amelyek eredetileg biztonságosak szabályozó nélkül.

Kapcsolódó publikációk: [1–6].

## Önvezető elektromos rollerek stabilitása

Tekintsük egy elektromos roller térbeli mechanikai modelljét, amely négy merev testből áll: az első és hátsó kerekekből, az elektromos roller vázából és a kormányzott első villából. A modell általános koordinátái legyenek: a hátsó kerék középpontjának  $X$  és  $Y$  koordinátái, a váz  $\psi$  legyezési-, és  $\varphi$  dőlésszöge, a kormány  $\delta$  kormánysszöge, az első és a hátsó kerekek forgástengelyei körüli  $\phi_f$  és  $\phi_r$  szögelfordulásai. Vegyül alapul, hogy az elektromos roller kerekei gördülnek a vízszintes merev talajon. A  $\vartheta$  bólintási szög egy geometriai kényszer által meghatározott, amely a dőlési-, a kormány-, és a bólintási szögek között teremt kapcsolatot.

Az elektromos roller nulla hosszirányú sebességnél való egyensúlyozása lehetséges hierarchikus, lineáris, folytonos idejű állapotvisszacsatoláson alapuló, többszörös időkéleltetésű szabályozókkal a kormányra ható kormánynyomaték alkalmazásával (szabályozás kormányzással) vagy az első kerék  $\pi/2$  kormánysszögbe való fordításával és az azt hajtó nyomaték alkalmazásával (szabályozás az első kerék hajtásával).

### 4. Tézis

Léteznek olyan közelítések, amely kiküszöbölik az összetett geometriai kényszert a  $\varphi$  dőlési-, a  $\delta$  kormány- és a  $\vartheta$  bólintási szögek között, és egyszerűsítik az egzakt linearizált mozgásegyenletek levezetése során szükséges algebrai műveleteket.

Tekintsük azt az esetet, amikor az elektromos rollert kormányzással szabályozzuk és az első kerék forgása gátolva van. A függőleges helyzet körüli kis rezgések esetén a váz bólintási szögének közelítésére a következő képlet alkalmazható:

$$\vartheta \approx \frac{e}{4p} \delta^2 \sin 2\varepsilon - \frac{e}{p} \varphi \delta \cos \varepsilon, \quad (2)$$

ahol  $p$  a tengelytáv,  $e$  az utánfutás és  $\varepsilon$  az elektromos roller villaszöge.

Abban az esetben, ha az elektromos rollert az első kerék hajtásával szabályozzuk, miközben a kormány a  $\delta = \pi/2$  kormánysszöghelyzetben van rögzítve és a villaeltolás nulla, a váz bólintási szögének megfelelő

közelítése a következő:

$$\vartheta \approx \vartheta_0 + \vartheta_2 \varphi^2, \quad (3)$$

ahol

$$\vartheta_0 = \arccos \left( \frac{R^2 \cos \varepsilon + (R \sin \varepsilon + p) \sqrt{2Rp \sin \varepsilon + p^2}}{R^2 + 2Rp \sin \varepsilon + p^2} \right), \quad (4)$$

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{2} \frac{R + R \sin(\varepsilon - \vartheta_0) \tan(\varepsilon - \vartheta_0) - p \sin \vartheta_0}{R \sin(\varepsilon - \vartheta_0) + p \cos \vartheta_0}, \quad (5)$$

és  $R$  az első és hátsó kerekek sugara.

Kapcsolódó publikációk: [8–13].

## 5. Tézis

Az alkalmazott szabályozó működésének minősége javul a kormány-súlypont helyzetének két különböző módon való változtatásával:

- (a) A magasabb szintű szabályozóparaméterek stabil tartománya növekszik és a szabályozó robusztusabb a paraméterbizonytalanságokkal szemben, ha
- a kormány súlypontját előre toljuk a kormányzással való szabályozás esetén,
  - a kormány súlypontját megemeljük az első kerék hajtásával való szabályozás esetén.
- (b) A perturbációkkal szembeni robusztusság szempontjából a kormány súlypontjának van egy optimális pozíciója, amely esetén a legjobboldalibb karakterisztikus exponensnek a legkisebb a valós része. Ez az optimális pozíció a kereskedelmi forgalomban kapható elektromos rollerek esetében a gyakorlatban alkalmazható tartományban van.

Kapcsolódó publikációk: [8–13].

## 6. Tézis

Tekintsük a disszertációban vizsgált, kereskedelmi forgalomban kapható elektromos roller konkrét paramétereit és az optimális alacsonyabb szintű szabályozóparamétereket. Ha a hierarchikus egyensúlyozó szabályozásban többszörös időkésést veszünk figyelembe, akkor a  $\tau$  magasabb szintű és a  $\sigma$  alacsonyabb szintű időkésések síkjában rajzolt stabilizálhatósági térképek azt mutatják, hogy a legstabilabb beállítás nem a késésmentes esetnek felel meg. Ha az alacsonyabb szintű időkésést növeljük, akkor a magasabb szintű időkésést is arányosan növelni kell, hogy a rendszer robusztussága megmaradjon a perturbációkkal szemben. Ez az állítás akkor igaz a kormányzással való szabályozás esetén, ha az időkésések 50 ms alatt vannak, azaz ha  $\max\{\sigma, \tau\} < 50$  ms. Az első kerék hajtásával való szabályozás esetére az állítás csak kisebb időkésések esetén érvényes, azaz ha  $\max\{\sigma, \tau\} < 10$  ms.

Kapcsolódó publikációk: [8–13].

# HIVATKOZÁSOK

---

- [1] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Vontatmányok kigyózása, pattogása, felborulása”. *XXVII. Nemzetközi Gépészeti Konferencia*. ISSN 2065-1267. 2019, 209–212. old.
- [2] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Analogue Models of Rocking Suitcases and Snaking Trailers”. *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*. Szerk. W. Lacarbonara, B. Balachandran, J. Ma, J. Tenreiro Machado és G. Stepan. Springer, Cham, 2020, 117–126. old. ISBN: 978-3-030-34713-0. DOI: [10.1007/978-3-030-34713-0\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_12).
- [3] H. Z. Horvath és D. Takacs. „The Effect of Time Delay on the Stability Control of Trailers”. *ASME 2020 Dynamic Systems and Control Conference (DSCC2020) Proceedings*. DSCC2020. American Society of Mechanical Engineers, 2020. DOI: [10.1115/DSCC2020-3254](https://doi.org/10.1115/DSCC2020-3254).
- [4] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Numerical and Experimental Bifurcation Analysis of Trailers”. *ASME 2020 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC-CIE 2020) Proceedings*. 2. köt. DETC2020-22461. 2020. DOI: [10.1115/DETC2020-22461](https://doi.org/10.1115/DETC2020-22461).
- [5] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Stability and local bifurcation analyses of two-wheeled trailers considering the nonlinear coupling between lateral and vertical motions”. *Nonlinear Dynamics* 107.3 (2022), 2115–2132. old. DOI: [10.1007/s11071-021-07120-9](https://doi.org/10.1007/s11071-021-07120-9).
- [6] H. Z. Horvath, A. B. Feher és D. Takacs. „Nonlinear Dynamics of a Controlled Two-Wheeled Trailer”. *16th International Symposium on Advanced Vehicle Control*. Szerk. G. Mastinu, F. Braghin, F. Cheli, M. Corno és S. M. Savaresi. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024, 123–129. old. ISBN: 978-3-031-70392-8.
- [7] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Numerical Analysis on Shimming Wheels with Dry Friction Damper”. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 67.2 (2023), 118–126. old. DOI: [10.3311/PPme.21072](https://doi.org/10.3311/PPme.21072).

- [8] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Balancing riderless electric scooters at zero speed in the presence of a feedback delay”. *Multibody System Dynamics* (2024). DOI: [10.1007/s11044-024-10019-z](https://doi.org/10.1007/s11044-024-10019-z).
- [9] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Control Design for Balancing a Motorbike at Zero Longitudinal Speed”. *15th International Symposium on Advanced Vehicle Control*. 2022.
- [10] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Balancing Standstill Motorcycles by Steering Control with Feedback Delay”. *The Evolving Scholar - BMD 2023, 5th Edition*. 2023. DOI: [10.59490/647daeb569d559aa327d02f6](https://doi.org/10.59490/647daeb569d559aa327d02f6).
- [11] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Önvezető elektromos kétkerekű jármű egyensúlyozása”. *XIV. Magyar Mechanikai Konferencia*. ISBN 9789633583012. 2023.
- [12] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Stability analysis of a hierarchical steering controller with feedback delays for balancing electric scooters in vertical position”. *11th European Nonlinear Dynamics Conference, ENOC 2024*. Szerk. A. Metrikine és F. Alijani. 2024.
- [13] H. Z. Horvath és D. Takacs. „Stabilizing E-scooters at Zero Speed with Feedback Control”. *18th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. 2024.