BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
Természettudományi Kar
Differenciálegyenletek Tanszék

TÉZISFÜZET

Új Ai–Zhang típusú hosszúlépéses belsőpontos algoritmusok bevezetése az algebrailag ekvivalens átalakítások módszerének alkalmazásával

Varga Anita

Témavezető:
Dr. Eisenberg-Nagy Marianna

2022

1. Bevezetés

A belsőpontos algoritmusok (IPA-k[1]) kutatása igen aktív területté vált az elmúlt évtizedekben, sokféle különböző algoritmusvariáns implementációja megtalálható a legmodernebb megoldó szoftverekben. Ezen jelentős érdeklődés ellenére még mindig számos nyitott kérdés van mind az elméletükkel, mind az implementációjukkal kapcsolatban.

Lépéshossz alapján az IPA-k két fő csoportra oszthatók: rövid- és hosszúlépéses módszerekre. Annak ellenére, hogy a hosszúlépéses módszerek hatékonyabbak a gyakorlatban, sokáig rosszabb elméleti komplexitási eredményeket tudtak igazolni ezekre az algoritmusokra, mint a rövidlépéses változatokra. Az egyik első kivétel volt Ai és Zhang [1] 2005-ben megjelent hosszúlépéses módszere.

2002-ben Darvay [3] bevezette az algebrailag ekvivalens átalakítások (AET[2]) technikáját . A módszer célja új keresési irányok meghatározása IPA-k esetén, és a fő ötlete, hogy egy folytonosan differenciálható és invertálható függvényt hattatunk a centrális út feladatban szereplő centralitási egyenletre.

Munkánk során ezt a két megközelítést kombináltuk, azaz új, Ai–Zhang típusú IPA-kat vezettünk be az AET módszer alkalmazásával két problémaosztály, lineáris programozási (LP) feladatok és lineáris komplementaritási feladatok (LCP-k[3]) esetén. Kutatásunk fő kérdése az volt, hogy melyek azok a transzformációs függvények, amelyekkel az AET módszert alkalmazva Ai–Zhang típusú IPA-k esetén igazolható a kapott algoritmusra a legjobb ismert komplexitási eredmény.

1.1. A dolgozat felépítése és fő eredményei

Ebben az alfejezetben összegezzük a dolgozatban szereplő új eredményeket és a hozzájuk kapcsolódó publikációkat.

A disszertáció 2. fejezetében bevezettünk egy új Ai–Zhang típusú hosszúlépéses IPA-t, az AET módszert a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ transzformációs függvénnyel alkalmazva. Igazoltuk, hogy az algoritmus konvergens és a rövidlépéses IPA-kra jellemző jobb komplexitással rendelkezik. Az itt közölt elemzés a [11] folyóiratcikkben megjelent eredmények továbbfejlesztett változata.

A 3. fejezetben megadtuk az első olyan Ai–Zhang típusú IPA-t $\mathcal{P}_*(\kappa)$-LCP-k megoldására, amely alkalmazza az AET technikát. Itt szintén a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ transzformációs függvényt használtuk, ezáltal ez az eredmény tekinthető a 2. fejezetben szereplő algoritmus LCP-kre való általánosításának. Igazoltuk, hogy a módszer konvergens, és az iterációszámra adott felső korlát megegyezik a rövidlépéses algoritmusokra ismert legjobb eredménnyel. A fejezet alapját a [9] cikk képezi.

A 4. fejezetben definiáltunk egy új, általános Ai–Zhang típusú hosszúlépéses keretalgoritmust LP feladatok megoldására, ahol az AET módszer esetén alkalmazott transzformációs függvény (pontosabban a skálázott Newton-rendszer jobb oldalából származtatható $p(t)$ függvény) a bemenet része. Meghatároztuk $p(t)$-re vonatkozóan szükséges feltételek egy rendszerét, és igazoltuk, hogy ha ezek fennállnak, akkor a keretalgoritmus konvergens és a legjobb ismert komplexitással rendelkezik. Ezáltal megadtunk egy új, AET módszerhez kapcsolódó függvényosztályt.

Az elemzésben magának a $\varphi(t)$ transzformációs függvénynek nem volt szerepe, de a teljesség kedvéért a szükséges feltételek rendszerét átfogalmaztuk $\varphi(t)$-re is. Megadtunk továbbá olyan konstrukciós szabályokat, amelyek segítségével a tulajdonságokat kielégítő transzformációs függvények felhasználásával új, a feltételeknek megfelelő függvényeket állíthatunk elő.

Kiterjesztettük továbbá az AET módszert a szakaszonként folytonosan differenciálható transzformációs függvények esetére is. Ezek az eredmények a [10] kéziratban találhatók.

Az 5. fejezetben ismertettük a bevezetett algoritmusokhoz kapcsolódó numerikus eredményeket. Minden algoritmusvariánst MATLAB-ban implementáltunk, és megoldottunk számos LP feladatot, továbbá elégséges és nem elégséges LCP-ket. LP feladatok és LCP-k esetén is kétféle lépéshosszal

[1] A rövidítés az angol *interior point algorithm* elnevezésből származik.
[2] A rövidítés az angol *algebraic equaivalent transformation* elnevezésből származik.
[3] Az angol *linear complementarity problem* elnevezés alapján.

dolgoztunk, az egyik az elméleti elemzésben szereplő, a másik egy mohó változat. Vizsgáltuk a környezeti és frissítési paraméterek különböző beállításainak hatását az algoritmusok teljesítményére a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ transzformációs függvény esetén, mind LP feladatokra, mind LCP-kre. Egy IPA-k által numerikusan nehezen kezelhető feladat, a Csizmadia-LCP esetén teszteltük, hogy a kezdőpont és a jobb oldal módosításának milyen hatása van a futási időre és az iterációszámra. Az általános keretalgoritmus működését 10 különböző függvény esetén hasonlítottuk össze. Vizsgáltuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái hogyan változnak az algoritmus futása során az elméleti és a mohó lépéshossz esetén. Bevezettünk továbbá különböző nemlineáris programozási modelleket mátrixok elégségességének eldöntésére. A BARON megoldó segítségével vizsgáltuk ezek gyakorlati alkalmazhatóságát. A fejezetben szereplő eredmények a [7–11] publikációkban közöltek bővített és továbbfejlesztett változatai.

1.2. A lineáris programozási feladat

Az LP probléma a szakirodalomban leggyakrabban előforduló optimalizálási feladat. A *standard lineáris programozási feladatpár* a következő alakban írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \max \mathbf{b}^T\mathbf{y}, \\ A^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ahol az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes sorrangú mátrix, a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok adottak.

1.2.1. A centrális út feladat lineáris programozási feladatokra

Az (1) primál-duál feladatpárra vonatkozó optimalitási kritériumokat a következőképpen adhatjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ A^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}\mathbf{s} = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\}$$

Jelölje $\mathcal{F}^{LP} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) : A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ A^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}$ a primál-duál megengedett megoldások halmazát, $\mathcal{F}^{LP}_{+} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}^{LP} : \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{s} > \mathbf{0}\}$ pedig a szigorúan megengedett megoldások halmazát.

IPA-k bevezetésekor az optimalitási kritériumok utolsó egyenletét, a *komplementaritási feltételt* relaxáljuk azáltal, hogy a nullvektor helyére a $\nu\mathbf{e}$ vektort írjuk, ahol $\nu > 0$ adott pozitív paraméter, és $\mathbf{e}$ jelöli azt a vektort, amelynek minden koordinátája egy.

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ A^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}\mathbf{s} = \nu\mathbf{e}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A (2) rendszert *centrális út feladat*nak, az ebben szereplő utolsó feltételt pedig *centralitási egyenlet*nek nevezzük.

Sonnevend [23] igazolta, hogy amennyiben $\mathcal{F}^{LP}_{+} \neq \emptyset$, azaz az LP feladatnak van szigorúan megengedett megoldása, akkor minden $\nu > 0$ esetén a (2) centrális út feladatnak létezik egyértelmű megoldása, amelyet *ν-centrum*nak nevezünk. Továbbá, ha ν tart 0-hoz, akkor a megfelelő ν-centrumok sorozata az (1) LP feladat egy optimális megoldásához konvergál. A ν-centrumok halmaza egy sima, analitikus görbét alkot, amelyet *centrális út*nak nevezünk:

$$\mathcal{C} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}^{LP} : \exists\, \nu > 0, \text{ amelyre } \mathbf{x}\mathbf{s} = \nu\mathbf{e}\right\}.$$

1.3. A lineáris komplementaritási feladat

Tekintsük az LCP-t a következő alakban:

$$\left.\begin{aligned} -M\mathbf{x}+\mathbf{s} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{x}\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x},\mathbf{s} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ahol $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ adottak, és a cél a rendszert kielégítő $(\mathbf{x},\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vektorpár meghatározása.

Az LCP-k alkalmazási területe igen széles, például ilyen modellre vezet az Arrow-Debreu-féle cseregazdasági egyensúlyi modell Leontief hasznosságfüggvények esetén [25], bimátrix játékok egyensúlyi pontjainak meghatározása [21], és számos mérnöki alkalmazást találhatunk például a [12] összegző cikkben.

Az LP esethez hasonlóan, jelölje $\mathcal{F}^{LCP} = \{(\mathbf{x},\mathbf{s}) : \ -M\mathbf{x}+\mathbf{s} = \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}$ a megengedett megoldások halmazát, $\mathcal{F}^{LCP}_{+} = \{(\mathbf{x},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}^{LCP} : \ \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{s} > \mathbf{0}\}$ a szigorúan megengedett megoldások halmazát, és $\mathcal{F}^{LCP}_{*} = \{(\mathbf{x},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}^{LCP} : \mathbf{x}\mathbf{s} = \mathbf{0}\}$ az LCP megoldásainak halmazát.

Ha tekintjük a szakirodalomban az LCP-k megoldására különböző algoritmusokat bevezető cikkeket, a legtöbb esetben elmondható, hogy a szerzők felteszik, hogy az együtthatómátrix rendelkezik valamilyen speciális tulajdonsággal, amely lehetővé teszi hatékony módszerek bevezetését. Az elégséges mátrixosztályt Cottle és szerzőtársai definiálták [2]. Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *oszlopelégséges*nek nevezünk, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül rá az alábbi implikáció:

$$x_i(M\mathbf{x})_i \leq 0 \quad \forall\, i \in \mathcal{I} \Longrightarrow x_i(M\mathbf{x})_i = 0 \quad \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

M *sorelégséges*, ha M^T oszlopelégséges, és az M mátrix *elégséges*, ha egyszerre sor- és oszlopelégséges is.

1991-ben Kojima és szerzőtársai [17] bevezették a $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrixok osztályát. Legyen κ egy adott nemnegatív szám. $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\mathcal{P}_*(\kappa)$*-mátrix*, ha

$$\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} + 4\kappa \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(x_i(M\mathbf{x})_i\right)^+ \geq 0$$

teljesül minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén, ahol a felső indexben szereplő pluszjel a pozitív részt jelöli. Ez a mátrixosztály a pozitív szemidefinit (PSD) mátrixok[4] általánosításának tekinthető, ugyanis $\kappa = 0$ esetén a pozitív szemidefinitség definícióját kapjuk.

A legkisebb κ értéket, amelyre M $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrix, M *handicap*-jének nevezzük. A $\mathcal{P}_*$ mátrixosztályt pedig a következőképpen definiálhatjuk:

$$\mathcal{P}_* := \bigcup_{\kappa\geq 0} \mathcal{P}_*(\kappa).$$

Kojima és szerzőtársai [17] igazolták, hogy ha egy mátrix $\mathcal{P}_*$, akkor oszlopelégséges is. Később Guu és Cottle [14] bizonyították, hogy a $\mathcal{P}_*$-mátrixok sorelégségesek is, azaz minden $\mathcal{P}_*$-mátrix elégséges. 1996-ban Väliaho [24] igazolta a másik irányú tartalmazást, tehát az elégséges mátrixok osztálya ekvivalens a $\mathcal{P}_*$ mátrixosztállyal.

[4] Ahogy az LCP-k elméletében szokásos, nem tesszük fel, hogy a PSD mátrixok szimmetrikusak. Tehát az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix PSD, ha $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \geq 0$ teljesül minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén.

1.3.1. A centrális út feladat lineáris komplementaritási feladatokra

LCP-k esetén a centrális út feladat a következő alakban írható:

$$\left.\begin{aligned} -M\mathbf{x}+\mathbf{s} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{x}\mathbf{s} &= \nu\mathbf{e}, \\ \mathbf{x},\ \mathbf{s} &> \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ahol $\nu > 0$ adott paraméter.

Az (5) rendszernek nem mindig létezik megoldása, és ha igen, akkor sem feltétlenül egyértelmű. Egy 1997-es kéziratban Illés, Roos és Terlaky [15] elemi bizonyítását adta néhány fontos, a $\mathcal{P}_*(\kappa)$-LCP-kre vonatkozó állításnak. A bizonyítások megtalálhatók Nagy doktori disszertációjában [22].

1.1. Tétel ([15], Corollary 4.1). *Tekintsünk egy LCP-t, és tegyük fel, hogy az M együtthatómátrix $\mathcal{P}_*(\kappa)$ tulajdonságú. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. $\mathcal{F}_+^{LCP} \neq \emptyset$.
2. $\forall\, \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n\ \ \exists!\ (\mathbf{x},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LCP} : \mathbf{x}\mathbf{s} = \mathbf{w}$.
3. $\forall\, \nu > 0\ \ \exists!\ (\mathbf{x},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LCP} : \mathbf{x}\mathbf{s} = \nu\mathbf{e}$.

Az utolsó állítás szerint $\mathcal{P}_*(\kappa)$-LCP-k esetén, ha $\mathcal{F}_+^{LCP} \neq \emptyset$, a centrális út létezik és egyértelmű. Továbbá, ha ν tart nullához, a (5) centrális út feladat megoldásai az LCP egy megoldásához konvergálnak. A fenti állítások egy másik bizonyítása és más, az elégséges LCP-khez kapcsolódó fontos eredmények is megtalálhatók Kojima és szerzőtársai [17] könyvében.

1.4. Az algebrailag ekvivalens átalakítások módszere

Az AET módszert Darvay [3, 4] vezette be 2002-ben. Először áttekintjük a módszert LP feladatok esetén, majd ismertetjük az LCP-kre való általánosítását.

1.4.1. Az AET alkalmazása LP feladatok esetén

Hogy az IPA-k megadásakor új keresési irányokat határozhasson meg, Darvay a centrális út feladat alábbi ekvivalens alakját tekintette:

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b}, &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ A^T\mathbf{y}+\mathbf{s} = \mathbf{c}, &\quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\ \varphi\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\nu}\right) = \varphi(\mathbf{e}), & \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ahol $\varphi : (\xi,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható és invertálható függvény, és $\xi \in [0,1)$ adott paraméter.

A továbbiakban a ν paraméter értékét a $\tau\mu$ értékre rögzítjük, ahol $\mu = (\mathbf{x}^T\mathbf{s})/n$ a dualitásrés, és $0 < \tau < 1$ adott paraméter.[5] Pontosabban, ha jelenleg az $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP}$ pontban vagyunk és a $\nu = \tau\mu$-center felé lépünk, akkor a Newton-módszert a (6) rendszerre alkalmazva kapjuk, hogy a

[5] Az Ai–Zhang típusú módszerek jellemzésekor általában a τ frissítési paraméter szerepel a Newton-rendszer felírásában. A dolgozatban az AET és az Ai–Zhang-féle megközelítés ötvözése a célunk, emiatt már az AET módszer jellemzésekor áttérünk erre a jelölésrendszerre.

$(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{s})$ keresési irányok az alábbi rendszer megoldásai:

$$\left.\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ A^T\Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} &= \tau\mu\frac{\varphi(\mathbf{e}) - \varphi\left(\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}\right)}{\varphi'\left(\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}\right)} =: \mathbf{a}_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mivel feltettük, hogy A teljes sorrangú, továbbá $\mathbf{x}$ és $\mathbf{s}$ szigorúan pozitív vektorok, a (7) rendszernek létezik egyértelmű megoldása.

Hogy leegyszerűsítsük az IPA-k elemzését, általában a (7) rendszer egy skálázott változatát tekintjük. Legyen

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}}, \quad \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{ds} = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}}, \text{ és } \bar{A} = A \operatorname{diag}\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{s}}\right).$$

Ezen jelölések segítségével a skálázott Newton-rendszer az alábbi alakban írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}\mathbf{dx} &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y} + \mathbf{ds} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{dx} + \mathbf{ds} &= \mathbf{p}_\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ahol

$$\mathbf{p}_\varphi = \frac{\varphi(\mathbf{e}) - \varphi(\mathbf{v}^2)}{\mathbf{v}\varphi'(\mathbf{v}^2)}.$$

Jelölje p azt a függvényt, amelyre $p(v_i) = (p_\varphi)_i$ teljesül minden $v_i \in (\xi, \infty)$ esetén, azaz

$$p(t) = \frac{\varphi(1) - \varphi(t^2)}{t\varphi'(t^2)}. \tag{9}$$

A legtöbb szakirodalomban szereplő IPA az AET technika speciális esetének tekinthető, ha az identitásfüggvényt választjuk transzformációs függvénynek. Darvay a módszer általános jellemzése után a $\varphi(t) = \sqrt{t}$ eset elemzésével foglalkozott a [3, 4] cikkeiben. A $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt először Darvay és szerzőtársai alkalmazták a [5, 6] tanulmányokban, a $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})}$ transzformációs függvényt pedig Kheirfam és Haghighi [16] vezette be először az AET módszerrel kapcsolatban. Az AET szakirodalmában alkalmazott függvényekről és az ezek segítségével bevezetett új IPA-król a dolgozatban adtunk részletes áttekintést.

1.4.2. AZ AET módszer alkalmazása LCP-k esetén

Az AET módszert számos problémaosztályra általánosították, ide tartozik az LCP feladatosztály is. Az LP esethez hasonlóan egy invertálható és folytonosan differenciálható $\varphi : (\xi, \infty) \to \mathbb{R}$ (ahol $\xi \in [0, 1)$ adott) transzformációs függvényt hattatunk az (5) centrális út feladat centralitási egyenletére:

$$\left.\begin{aligned} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{q}, \\ \varphi\left(\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}\right) &= \varphi(\mathbf{e}), \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &> \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ha a Newton-módszert alkalmazzuk a (10) rendszerre, a keresési irányokra az alábbi rendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} -M\Delta\mathbf{x}+\Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x}+\mathbf{x}\Delta\mathbf{s} &= \tau\mu\frac{\varphi(\mathbf{e})-\varphi\left(\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}\right)}{\varphi'\left(\frac{\mathbf{xs}}{\tau\mu}\right)} =: \mathbf{a}_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ha feltesszük, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{s}$ szigorúan pozitív vektorok, és M $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrix, akkor a rendszernek minden $\mathbf{a}_\varphi \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik egyértelmű megoldása [18, Lemma 4.1.].

Az előző alfejezetben bevezetett jelölések használatával felírhatjuk a skálázott Newton-rendszert:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{M}\mathbf{dx}+\mathbf{ds} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{dx}+\mathbf{ds} &= \mathbf{p}_\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ahol $\overline{M} = DMD$. Ha M $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrix, akkor $\overline{M}$ szintén $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrix [18, Theorem 3.5.]. Tehát a (12) skálázott rendszernek is létezik egyértelmű megoldása minden $\mathbf{p}_\varphi \in \mathbb{R}^n$ esetén.

Ahogy a fenti képletekből látható, $\mathbf{a}_\varphi$ és $\mathbf{p}_\varphi$ definíciója azonos az LP esetben megadottal.

1.5. Ai és Zhang módszere

Annak ellenére, hogy gyakorlatban a hosszúlépéses IPA-k hatékonyabbak, sokáig a szakirodalomban a rövidlépéses módszerek esetén jobb komplexitási eredményeket tudtak igazolni, tehát az elmélet és gyakorlat között ellentmondás állt fenn. Az első hosszúlépéses IPA, amelyre a szerzők igazolni tudták a rövidlépéses módszerekre jellemző jobb komplexitási eredményt, Ai és Zhang [1] által került bevezetésre 2005-ben. Mivel a dolgozatban Ai–Zhang típusú IPA-kat vezettünk be, fontos áttekinteni ezen megközelítés fő jellemzőit.

Ai és Zhang fő ötlete az volt, hogy a ($\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{y}$, $\Delta\mathbf{s}$) Newton-irányokat két részre bontották (rendre $\Delta\mathbf{x}_+$ és $\Delta\mathbf{x}_-$, $\Delta\mathbf{y}_+$ és $\Delta\mathbf{y}_-$, $\Delta\mathbf{s}_+$ és $\Delta\mathbf{s}_-$), és a két komponenshez különböző lépéshosszt rendeltek. Ha ezt a megközelítést a (7) rendszerre alkalmazzuk, az alábbi két rendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x}_- &= \mathbf{0}, \\ A^T\Delta\mathbf{y}_-+\Delta\mathbf{s}_- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_-+\mathbf{x}\Delta\mathbf{s}_- &= \tau\mu\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^- = \mathbf{a}_\varphi^-, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x}_+ &= \mathbf{0}, \\ A^T\Delta\mathbf{y}_++\Delta\mathbf{s}_+ &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_++\mathbf{x}\Delta\mathbf{s}_+ &= \tau\mu\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^+ = \mathbf{a}_\varphi^+, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ahol $\mathbf{p}_\varphi^-$, $\mathbf{a}_\varphi^-$ és $\mathbf{p}_\varphi^+$, $\mathbf{a}_\varphi^+$ rendre a $\mathbf{p}_\varphi$ és $\mathbf{a}_\varphi$ vektorok negatív és pozitív részei. Az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ lépéshosszak esetén az új pontot a következőképpen határozhatjuk meg: $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha_1\Delta\mathbf{x}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{x}_+$, $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} + \alpha_1\Delta\mathbf{y}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{y}_+$ és $\mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{s} + \alpha_1\Delta\mathbf{s}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{s}_+$. Fontos megjegyezni, hogy $\Delta\mathbf{x}_+$ nem $\Delta\mathbf{x}$ pozitív része (a pluszjel most nem felső, hanem alsó indexként szerepel), hanem annak a rendszernek a megoldása, ahol $\mathbf{p}_\varphi^+$ szerepel a jobb oldalon. $\Delta\mathbf{x}_-$ pedig a másik rendszer megoldása, tehát ahol a jobb oldalon $\mathbf{p}_\varphi^-$ szerepel. A jelölés hasonló a többi Newton-irány-komponens esetében is.

A (13) rendszerek skálázott változatának megadásához bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{dx}_- = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{x}_-}{\mathbf{x}},\ \mathbf{ds}_- = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{s}_-}{\mathbf{s}},\ \mathbf{dx}_+ = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{x}_+}{\mathbf{x}},\ \mathbf{ds}_+ = \frac{\mathbf{v}\Delta\mathbf{s}_+}{\mathbf{s}}.$$

Ezek segítségével a skálázott rendszerek az alábbi alakban írhatók:

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}\mathbf{dx}_- &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y}_-+\mathbf{ds}_- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{dx}_-+\mathbf{ds}_- &= \mathbf{p}_\varphi^-, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \bar{A}\mathbf{dx}_+ &= \mathbf{0}, \\ \bar{A}^T\Delta\mathbf{y}_++\mathbf{ds}_+ &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{dx}_++\mathbf{ds}_+ &= \mathbf{p}_\varphi^+, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ahol $\bar{A} = A \operatorname{diag}\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{s}}\right)$.

1.6. Ai és Zhang módszere LCP-k esetén

LCP-k esetén az előző szakaszban leírtakhoz hasonlóan az alábbi két rendszert tekintjük:

$$\left.\begin{aligned} -M\Delta\mathbf{x}_- + \Delta\mathbf{s}_- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_- + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s}_- &= \tau\mu\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^- = \mathbf{a}_\varphi^-, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -M\Delta\mathbf{x}_+ + \Delta\mathbf{s}_+ &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_+ + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s}_+ &= \tau\mu\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^+ = \mathbf{a}_\varphi^+. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

A (15) rendszerek skálázott változatának meghatározásához az előző szakaszban bevezetett jelöléseket használjuk:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{M}\mathbf{d}\mathbf{x}_- + \mathbf{d}\mathbf{s}_- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}\mathbf{x}_- + \mathbf{d}\mathbf{s}_- &= \mathbf{p}_\varphi^-, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -\overline{M}\mathbf{d}\mathbf{x}_+ + \mathbf{d}\mathbf{s}_+ &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}\mathbf{x}_+ + \mathbf{d}\mathbf{s}_+ &= \mathbf{p}_\varphi^+, \end{aligned}\right\}$$

ahol $D = diag(\mathbf{d})$ és $\overline{M} = DMD$.

1.6.1. Az alkalmazott széles környezet

A Newton-irányok felbontásán kívül Ai és Zhang módszerének másik kulcsfontosságú eleme a centrális út egy új széles környezetének bevezetése volt:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\tau,\beta) = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP} : \|\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^+\| = \left\|\frac{1}{\tau\mu}\mathbf{a}_\varphi^+\right\| \le \beta\right\},$$

ahol $\beta, \tau \in (0,1)$ adott paraméterek. Mivel nem alkalmazták az AET módszert, a [1] cikkükben valójában a $\mathbf{p}_\varphi = \mathbf{v}^{-1} - \mathbf{v}$ speciális esetet tekintették.

Legyen $\mathcal{I}_+ = \{i \in \mathcal{I} : \tau\mu - x_i s_i > 0\} = \{i \in \mathcal{I} : v_i < 1\}$, és $\mathcal{I}_- = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_+$. Az AET szakirodalmában szereplő összes függvény és a dolgozat 4. fejezetében bevezetett függvényosztály esetén is fennáll a következő ekvivalencia:

$$(p_\varphi)_i > 0 \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad i \in \mathcal{I}_+. \tag{16}$$

A dolgozatban a $\widetilde{\mathcal{W}}(\tau,\beta)$ általánosított Ai-Zhang típusú környezet egy módosított változatát alkalmaztuk, nevezetesen a

$$\mathcal{W}(\tau,\beta) = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP} : \|\mathbf{p}_\varphi^+\| \le \beta \text{ és } \mathbf{v} > \xi\mathbf{e}\right\}$$

környezetet, ahol $\beta, \tau \in (0,1)$ adottak. A $\mathbf{v} > \xi\mathbf{e}$ technikai feltétel bevezetésének célja annak biztosítása, hogy $\mathbf{p}_\varphi$ jól definiált legyen. A $\mathbf{v}\mathbf{p}_\varphi^+$ vektor normája helyett pedig a $\mathbf{p}_\varphi^+$ vektor normáját tekintettük bizonyos becslések egyszerűsítése céljából.

2. Új hosszúlépéses belsőpontos algoritmus lineáris programozási feladatok megoldására

A disszertáció 2. fejezetében egy új Ai–Zhang típusú hosszúlépéses IPA-t vezettünk be LP feladatok megoldására. Az AET módszert a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ transzformációs függvénnyel alkalmaztuk. Igazoltuk, hogy az algoritmus konvergens és rendelkezik a rövidlépéses IPA-kra jellemző legjobb ismert elméleti komplexitással. A 4. fejezetben szereplő általános keretalgoritmus segítségével is lehetséges lenne egy ilyen típusú IPA bevezetése a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvény esetén, azonban az itteni elemzésben kihasználjuk ennek a függvénynek olyan tulajdonságait is, amellyel a 4. fejezetben megadott

függvényosztály elemei általában nem rendelkeznek. Ezáltal jobb becsléseket, és így jobb paraméterbeállításokat kaphatunk.

2.1. Az alkalmazott széles környezet és az új módszer jellemzése

A $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvény esetén $\mathbf{p}_\varphi = \frac{2(\mathbf{v}-\mathbf{v}^2)}{2\mathbf{v}-\mathbf{e}}$ és $\xi = 1/2$. Tehát ebben a speciális esetben az 1.6.1 alfejezetben bevezetett $\mathcal{W}(\tau,\beta)$ környezet a következőképpen adható meg:

$$\mathcal{W}(\tau,\beta) = \left\{ (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP} : \left\| \left(\frac{2(\mathbf{v}-\mathbf{v}^2)}{2\mathbf{v}-\mathbf{e}} \right)^+ \right\| \leq \beta \text{ és } \mathbf{v} > \frac{1}{2}\mathbf{e} \right\}. \tag{17}$$

Feltesszük, hogy $0 < \beta < 1$ adott paraméter.

A (9) összefüggés segítségével meghatározhatjuk a $p(t)$ függvényt $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esetén:

$$p : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, \quad p(t) = \frac{2(t-t^2)}{2t-1}.$$

Az elemzés során felhasználtuk a $p(t)$ függvényre vonatkozó alábbi becsléseket, amelyek minden $t \in (1/2, \infty)$ esetén teljesülnek:

$$p(t) \geq 2(1-t), \tag{18}$$
$$p(t) \geq -t, \tag{19}$$
$$p(t) \geq (1-t^2)/t. \tag{20}$$

(18) és (20) általában nem érvényesek a 4. fejezetben megadott függvényosztály elemeire, emiatt az elemzés számos ponton eltér az általános keretalgoritmusétól.

A $\mathbf{v} > \mathbf{e}/2$ technikai feltétel szerepe a transzformációs függvény invertálhatóságának biztosítása. Emellett a feltevés mellett igaz, hogy

$$i \in \mathcal{I}_+ \iff v_i < 1 \iff (p_\varphi)_i > 0.$$

Mindegyik új módszer esetén Ai és Zhang [1] eredeti elemzésének főbb lépéseit követjük. Hogy igazoljuk, hogy $\mathcal{W}(\tau,\beta)$ valóban széles környezet, összehasonlítjuk a Kojima és szerzőtársai [19] által definiált $\mathcal{N}_\infty^-(1-\tau)$ széles környezettel:

$$\mathcal{N}_\infty^-(1-\tau) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP} : \mathbf{xs} \geq \tau\mu\mathbf{e}\}. \tag{21}$$

2.1. Lemma. *Legyenek $0 < \beta < 1$ és $0 < \tau < 1$ adott paraméterek, és legyen $\gamma = \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2 \tau$. Ekkor*

$$\mathcal{N}_\infty^-(1-\tau) \subseteq \mathcal{W}(\tau,\beta) \subseteq \mathcal{N}_\infty^-(1-\gamma).$$

A $\mathbf{v}$ vektor koordinátáira vonatkozó alábbi becsléseket az elemzés számos pontján használjuk.

2.1. Következmény. *Legyen $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau,\beta)$, ekkor*

$$1 - \frac{\beta}{2} \leq v_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}_+,$$
$$1 \leq v_i \leq \sqrt{n/\tau} \qquad \forall i \in \mathcal{I}_-.$$

A $\sqrt{\frac{n}{\tau}}$ felső korlátnak nagyon fontos szerepe van az Ai-Zhang típusú IPA-k elemzésekor, hiszen maga a környezet nem korlátozza v_i értékét az $\mathcal{I}_-$-beli indexek esetén. Ennek megfelelően ezt a korlátot mindhárom vizsgált esetben használjuk a dolgozatban.

Az elemzés főbb lépéseinek ismertetése előtt megadjuk a IPA pszeudokódját:

Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
$0 < \tau < 1$ frissítési paraméter, $0 < \beta < 1$ környezeti paraméter,
$\varepsilon > 0$ pontossági paraméter,
$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ kezdőpont.
$\mathbf{x} := \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}_0$, $\mathbf{s} := \mathbf{s}_0$ és $\mu := \mu_0 = \mathbf{x}_0^T\mathbf{s}_0/n$.
while $\mathbf{x}^T\mathbf{s} > \epsilon$ **do**
  Határozzuk meg a $\Delta\mathbf{x}_+, \Delta\mathbf{s}_+, \Delta\mathbf{y}_+$ és $\Delta\mathbf{x}_-, \Delta\mathbf{s}_-, \Delta\mathbf{y}_-$ vektorokat a (13) rendszerek megoldásával;
  Legyen $\alpha_2 = 1$ és $\alpha_1 = \max\{\alpha_1 \in (0,1] : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{y}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) \in \mathcal{W}(\tau,\beta)\}$,
  ahol $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha_1\Delta\mathbf{x}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{x}_+$, $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} + \alpha_1\Delta\mathbf{y}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{y}_+$ és $\mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{s} + \alpha_1\Delta\mathbf{s}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{s}_+$;
  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) := (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{y}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha))$;
  $\mu := \mathbf{x}^T\mathbf{s}/n$;
end

ALGORITMUS 1: A $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvénnyel bevezetett IPA LP feladatok megoldására

2.2. Az algoritmus elemzése

Mostantól feltesszük, hogy adott egy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ pont.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{dx}(\alpha) = \alpha_1\mathbf{dx}_- + \alpha_2\mathbf{dx}_+, \quad \mathbf{ds}(\alpha) = \alpha_1\mathbf{ds}_- + \alpha_2\mathbf{ds}_+,$$

ahol $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ a választott lépéshossz, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ adottak. Ezeket a jelöléseket gyakran alkalmazzák az Ai-Zhang típusú módszerek szakirodalmában, ezáltal mindegyik elemzés esetén használni fogjuk őket.

Fontos megjegyezni, hogy a keresési irányok merőlegesek, ahogy általában LP feladatok esetén, mivel

$$\mathbf{dx}(\alpha)^T\mathbf{ds}(\alpha) = \alpha_1^2\mathbf{dx}_-^T\mathbf{ds}_- + \alpha_1\alpha_2(\mathbf{dx}_-^T\mathbf{ds}_+ + \mathbf{dx}_+^T\mathbf{ds}_-) + \alpha_2^2\mathbf{dx}_+^T\mathbf{ds}_+,$$

továbbá $\mathbf{dx}_+$ és $\mathbf{dx}_-$ az $\bar{A}$ mátrix nullterében, míg $\mathbf{ds}_+$ és $\mathbf{ds}_-$ $\bar{A}$ sorterében vannak (ez könnyen látható a (14) rendszerből), így az előző kifejezésben szereplő mind a négy skaláris szorzat értéke 0.

Az elemzésben az $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ és $\alpha_2 = 1$ lépéshosszakat használjuk. A következő lemma pozitív alsó korlátot ad a $\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha)$ vektorra, ez az első lépés az új pont szigorú megengedettségének igazolása során.

2.2. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha) \geq \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\tau\mu\mathbf{e}.$$

Az $\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha)$ vektorra meghatározott alsó korlát minden $\beta \in (0,1)$ esetén szigorúan pozitív.

Az alábbi állítás az Ai és Zhang [1] cikkében szereplő 3.2 állítás LP feladatokra vonatkozó változata (a cikkben monoton LCP-k esetén kerül kimondásra, de a bizonyítás azonos marad).

2.3. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LP}$ *és legyen* $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{s})$ *az alábbi rendszer megoldása:*

$$\left.\begin{aligned} A\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ A^T\Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} &= \mathbf{z}. \end{aligned}\right\}$$

Ha $\mathbf{z} + \mathbf{x}\mathbf{s} > 0$ *és* $(\mathbf{x} + t_0\Delta\mathbf{x})(\mathbf{s} + t_0\Delta\mathbf{s}) > 0$ *teljesül valamely* $t_0 \in (0, 1]$ *esetén, akkor* $\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x} > 0$ *és* $\mathbf{s} + t\Delta\mathbf{s} > 0$ *minden* $t \in (0, t_0]$ *esetén.*

Az $\mathbf{x}(\alpha)$ és $\mathbf{s}(\alpha)$ új vektorok pozitivitásának igazolásakor a 2.3 lemmát alkalmazzuk a $\mathbf{z} = \tau\mu(\alpha_1\mathbf{v}\mathbf{p}^- + \alpha_2\mathbf{v}\mathbf{p}^+)$ speciális esetben.

A következő két állítás az új pont dualitásrésére, azaz $\mu(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha)^T\mathbf{s}(\alpha)/n$ értékére ad korlátokat.

2.4. Lemma. *Legyen* $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$, *ekkor* $\mu(\alpha) \geq (1 - \alpha_1)\,\mu$.

A következő lemma biztosítja a dualitásrés megfelelő mértékű csökkenését.

2.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mu(\alpha) \leq \left(1 - \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}\left[\frac{8}{9}(1-\tau) - \sqrt{\beta\tau}\right]\right)\mu. \tag{22}$$

Megfelelő paraméterbeállításokkal biztosíthatjuk, hogy a dualitásrés szigorúan monoton csökkenjen, azaz $\mu(\alpha) < \mu$ teljesüljön.

2.2. Következmény. *Legyen* $\tau \leq 1/2$ *és* $\beta \leq 1/4$. *Ha* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$, *akkor* $\mu(\alpha) < \mu$ *teljesül.*

Az új pont szigorú megengedettsége mellett azt is igazolnunk kell, hogy a $\mathbf{v}(\alpha) = \sqrt{\frac{\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha)}{\tau\mu(\alpha)}} > \frac{1}{2}\mathbf{e}$ technikai feltétel teljesül.

2.6. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor* $\mathbf{v}(\alpha) > \frac{1}{2}\mathbf{e}$.

Jelöljük az egy iteráció után a (14) skálázott Newton-rendszer jobb oldalán szereplő vektort $\mathbf{p}_\varphi(\alpha)$-val. Az alábbi lemma igazolásához azt kell bizonyítanunk, hogy $\|\mathbf{p}_\varphi(\alpha)^+\| \leq \beta$ teljesül. Ez a 2.6 lemmával együtt azt jelenti, hogy az új pont a $\mathcal{W}(\tau, \beta)$ környezetben marad.

2.7. Lemma. *Legyen* $\tau \leq 1/2$ *és* $\beta \leq 1/4$. *Ha* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$, *akkor az új pont a környezetben marad, azaz* $(\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{y}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ *teljesül.*

2.3. Komplexitás

2.1. Tétel. *Legyen* $\tau \leq 1/2$ *és* $\beta \leq 1/4$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$, *és tegyük fel, hogy adott egy* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ *kezdőpont. Ekkor az algoritmus* ε*-optimális megoldást állít elő*

$$O\left(\sqrt{n}\log\frac{\mathbf{x}_0^T\mathbf{s}_0}{\varepsilon}\right)$$

iteráció alatt.

Az elemzésben a rögzített $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$ lépéshosszakat használtuk. Az 1. algoritmus pszeudokódjának megadásakor viszont α_1 értékét a lehető legnagyobbra választottuk úgy, hogy az új pont a $\mathcal{W}(\tau, \beta)$ környezetben maradjon. Mivel a dualitásrés α_1-ben szigorúan monoton csökken és $\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ alsó korlát a pszeudokódbeli α_1 értékére, a 2.1 tételben szereplő komplexitási eredmény az 1. algoritmus esetén is teljesül.

3. Új hosszúlépéses belsőpontos algoritmus elégséges lineáris komplementaritási feladatok megoldására

A dolgozat 3. fejezetében általánosítottuk a 2. fejezetben LP feladatokra bevezetett módszert elégséges LCP-k megoldására. A kapcsolódó eredmények a [9] cikkben jelentek meg.

Mostantól feltesszük, hogy az M együtthatómátrix elégséges, pontosabban $\mathcal{P}_*(\kappa)$ tulajdonságú, továbbá $\mathcal{F}_+^{LCP} \neq \emptyset$ és adott egy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{F}_+^{LCP}$ kezdőpont.

A 2. fejezethez hasonlóan itt is a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ transzformációs függvénnyel alkalmazzuk az AET módszert, azaz $p(t) = \frac{2(t-t^2)}{2t-1}$ minden $t \in (1/2, \infty)$ esetén.

3.1. Az algoritmus és az alkalmazott széles környezet

Ismét egy Ai-Zhang típusú széles környezetet alkalmazunk, azonban a definíció eltér az LP esetben ismertetettől.

$$\mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LCP} : \left\| \mathbf{p}_\varphi^+ \right\| \leq \frac{\beta}{1+4\kappa} \text{ és } \mathbf{v} > \frac{1}{2}\mathbf{e} \right\},$$

ahol $\beta, \tau \in (0,1)$ adott paraméterek. Ahogy látható, most a környezetdefiníció nem csupán a β és τ paraméterektől, hanem az együtthatómátrix handicap-jének értékétől is függ.

Először ellenőriznünk kell, hogy $\mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ valóban széles környezet minden nemnegatív κ érték esetén. Ehhez ismét az $\mathcal{N}_\infty^-(1-\tau)$ környezettel való összehasonlítást alkalmazunk.

3.1. Lemma. *Legyenek $0 < \tau < 1$ és $0 < \beta < 1$ adott paraméterek, és legyen $\gamma = \tau \left(1 - \frac{\beta}{2(1+4\kappa)}\right)^2$. Ekkor*

$$\mathcal{N}_\infty^-(1-\tau) \subseteq \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa) \subseteq \mathcal{N}_\infty^-(1-\gamma).$$

Az alábbi következményben alsó és felső korlátokat adunk $\mathbf{v}$ koordinátáinak értékére.

3.1. Következmény. *Ha $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, akkor*

$$1 - \frac{\beta}{2(1+4\kappa)} \leq v_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}_+,$$
$$1 \leq v_i \leq \sqrt{n/\tau} \qquad \forall i \in \mathcal{I}_-.$$

Az elemzés ismertetése előtt áttekintjük a vizsgált módszer pszeudokóját:

Input: $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, $M \in \mathcal{P}_*(\kappa)$ egy adott $\kappa \geq 0$ értékre és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$
$0 < \tau < 1$ frissítési paraméter, $0 < \beta < 1$ környezeti paraméter,
$\varepsilon > 0$ pontossági paraméter,
egy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ kezdőpont, amelyre $\mu_0 = \frac{\mathbf{x}_0^T \mathbf{s}_0}{n}$.
$\mathbf{x} := \mathbf{x}_0$, $\mathbf{s} := \mathbf{s}_0$ és $\mu := \mu_0$
while $\mathbf{x}^T\mathbf{s} > \varepsilon$ **do**
  Határozzuk meg a $\Delta\mathbf{x}_+, \Delta\mathbf{s}_+$ és $\Delta\mathbf{x}_-, \Delta\mathbf{s}_-$ vektorokat;
  $\alpha_2 := 1$ és
  $\alpha_1 := \underset{\alpha_1 \in (0,1]}{\operatorname{argmin}} \left\{ \mu(\alpha) = (\mathbf{x}(\alpha)^T \mathbf{s}(\alpha))/n : \ (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa) \right\}$,
  ahol $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha_1 \Delta\mathbf{x}_- + \alpha_2 \Delta\mathbf{x}_+$ és $\mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{s} + \alpha_1 \Delta\mathbf{s}_- + \alpha_2 \Delta\mathbf{s}_+$;
  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\alpha)$;
  $\mathbf{s} := \mathbf{s}(\alpha)$;
  $\mu := \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{s}}{n}$;
end

ALGORITMUS 2: IPA $\mathcal{P}_*(\kappa)$-LCP-k megoldására a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvény alkalmazásával

3.2. Az algoritmus elemzése

Az elemzés során az $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ és $\alpha_2 = 1$ lépéshosszakat használjuk.

Igazolnunk kell, hogy az új pont szigorúan megengedett, azaz $\mathbf{x}(\alpha) > \mathbf{0}$ és $\mathbf{s}(\alpha) > \mathbf{0}$ teljesül. Először alsó korlátot adunk a két vektor koordinátánkénti szorzatára:

3.2. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha) \geq \left(1 - \frac{\beta + \beta^2}{4(1+4\kappa)}\right)\tau\mu\mathbf{e}.$$

A pozitivitás bizonyításához ismét Ai és Zhang [1] cikkének 3.2 állítását használjuk. Annak ellenére, hogy monoton LCP-ket vizsgálnak, az eredmény itt is alkalmazható, mivel a bizonyítás érvényes ebben az általánosabb esetben is.

3.1. Állítás ([1, Proposition 3.2.]). *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+^{LCP}$ *és* $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ *a következő rendszer megoldása:*

$$\left.\begin{aligned} -M\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{s} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} &= \mathbf{z}. \end{aligned}\right\}$$

Ha $\mathbf{z} + \mathbf{xs} > 0$ *és* $(\mathbf{x} + t_0\Delta\mathbf{x})(\mathbf{s} + t_0\Delta\mathbf{s}) > 0$ *teljesül valamely* $t_0 \in (0, 1]$ *esetén, akkor* $\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x} > 0$ *és* $\mathbf{s} + t\Delta\mathbf{s} > 0$ *minden* $t \in (0, t_0]$ *esetén.*

Az új pont szigorú megengedettségének igazolásakor a 3.1. állítást használjuk a $\mathbf{z} = \tau\mu(\alpha_1\mathbf{vp}_\varphi^- + \alpha_2\mathbf{vp}_\varphi^+)$ speciális esetben.

A következő lemma az új pont dualitásrésére, azaz $\mu(\alpha) = \frac{\mathbf{x}(\alpha)^T\mathbf{s}(\alpha)}{n}$ értékére ad felső korlátot.

3.3. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mu(\alpha) \leq \left(1 - \alpha_1\left[\frac{8}{9}(1-\tau) - \sqrt{\beta\tau} - \frac{1+\beta}{4}\right]\right)\mu.$$

Az algoritmus helyességéhez biztosítanunk kell, hogy a dualitásrés minden iterációban szigorúan monoton csökken.

3.2. Következmény. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$ *és* $\beta = \tau = \frac{1}{4}$. *Ekkor*

$$\mu(\alpha) < \mu.$$

A $\mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ környezetben maradás igazolásához alsó korlátot is meg kell adnunk az új pont dualitásrésére vonatkozóan.

3.4. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ *és* $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$, *ekkor*

$$\mu(\alpha) \geq \left(1 - \alpha_1 - \kappa\tau\left[\frac{\alpha_1^2}{\tau} + \frac{\alpha_2^2\beta^2}{n(1+4\kappa)^2}\right]\right)\mu.$$

Biztosítanunk kell, hogy a $\mathbf{v}(\alpha) = \sqrt{\frac{\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha)}{\tau\mu(\alpha)}}$ vektor minden koordinátája 1/2-nél nagyobb, azaz a technikai feltételünk az új pontra is teljesül.

3.5. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mathbf{v}(\alpha) > \frac{1}{2}\mathbf{e}.$$

Végül meg kell mutatnunk, hogy $\left\|\mathbf{p}_\varphi(\alpha)^+\right\| \leq \frac{\beta}{1+4\kappa}$. Ez az előző lemma eredményével együtt biztosítja, hogy az új pont valóban a $\mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ környezetben lesz.

3.6. Lemma. *Legyen* $\beta = \tau = \frac{1}{4}$. *Ha* $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$ *és* $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$, *akkor* $(\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ *teljesül.*

3.3. Komplexitás

3.1. Tétel. *Legyen* $\beta = \tau = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = \frac{1}{1+4\kappa}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$, *és tegyük fel, hogy adott egy* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{W}_{LCP}(\tau, \beta, \kappa)$ *kezdőpont. Ekkor az algoritmus* ε*-optimális megoldást állít elő*

$$O\left((1+4\kappa)\sqrt{n}\log\frac{\mathbf{x}_0^T\mathbf{s}_0}{\varepsilon}\right)$$

iteráció alatt.

A 3.1. tételből az is következik, hogy a 2. algoritmus pszeudokódjában szereplő lépéshosszakkal ugyanez a komplexitási eredmény teljesül.

4. Egy új hosszúlépéses belsőpontos algoritmusosztály lineáris programozási feladatok megoldására

A disszertáció 4. fejezetében egy általános Ai–Zhang típusú hosszúlépéses IPA keretrendszert és egy ehhez kapcsolódó függvényosztályt vezettünk be. Az AET módszer esetén alkalmazott transzformációs függvény (pontosabban a skálázott rendszer jobb oldalából származtatott $p(t)$ függvény) a bemenet része. Bevezetünk egy függvényosztályt (szükséges feltételek egy halmazát $p(t)$-re vonatkozóan), amelyre a keretalgoritmus konvergenciája és a legjobb ismert komplexitási eredmény igazolható.

A 4.3 alfejezetben a feltételrendszert átfogalmazzuk a $\varphi(t)$ transzformációs függvényre is, a 4.4 alfejezetben pedig kiterjesztjük az AET módszert szakaszonként folytonos transzformációs függvényekre.

Ezek az eredmények a [10] kéziratban szerepelnek.

4.1. Az általános keretalgoritmus és elemzése

A 2. fejezetben szereplő IPA elemzésekor a 2.1. következményben láttuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáira vonatkozóan az alábbi felső korlát adható:

$$v_i \leq t^* := \sqrt{\frac{n}{\tau}} \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Ez a felső korlát nem függ sem a vizsgált algoritmustól, sem a transzformációs függvénytől, ezáltal általánosan alkalmazható. A (9) képlet szerint a $p(t)$ függvény értelmezési tartománya a (ξ, ∞) intervallum. Mivel $p(t)$ argumentumában mindig a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái szerepelnek, az előbbi megfigyelés szerint elég, ha $p(t)$-t a $(\xi, t^*]$ intervallumon értelmezzük, és csak erre vonatkozóan adjuk meg a szükséges alsó és felső korlátokat.

Az elemzés lépéseinek ismertetése előtt megadjuk az általános keretalgoritmus pszeudokódját. A $p(t)$ függvény a bemenet része, ezáltal különböző p függvények esetén más és más hosszúlépéses algoritmust kapunk.

Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, egy $p(t) : (\xi, t^*] \to \mathbb{R}$ függvény,
$0 < \tau < 1$ frissítési paraméter, $0 < \beta < 1$ környezeti paraméter,
$\varepsilon > 0$ pontossági paraméter,
$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{s_0}) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ kezdőpont, amelyre $\mu_0 = \frac{\mathbf{x}_0^T \mathbf{s}_0}{n}$.

$\mathbf{x} := \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}_0$, $\mathbf{s} := \mathbf{s}_0$ és $\mu := \mu_0$

while $\mathbf{x}^T\mathbf{s} > \epsilon$ **do**
  Határozzuk meg a $\Delta\mathbf{x}_+, \Delta\mathbf{y}_+, \Delta\mathbf{s}_+$ és $\Delta\mathbf{x}_-, \Delta\mathbf{y}_-, \Delta\mathbf{s}_-$ vektorokat (13) megoldásával ;
  $(\alpha_1, \alpha_2) := \operatorname{argmin}\{\mu(\alpha) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{y}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)\}$,
  ahol $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha_1\Delta\mathbf{x}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{x}_+$, $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} + \alpha_1\Delta\mathbf{y}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{y}_+$ és
  $\mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{s} + \alpha_1\Delta\mathbf{s}_- + \alpha_2\Delta\mathbf{s}_+$;
  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\alpha)$;
  $\mathbf{y} := \mathbf{y}(\alpha)$;
  $\mathbf{s} := \mathbf{s}(\alpha)$;
  $\mu := \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{s}}{n}$;
end

ALGORITMUS 3: Az LP feladatok megoldására szolgáló általános keretalgoritmus

Mostantól feltesszük, hogy $p(t) : (\xi, t^*] \to \mathbb{R}$ teljesíti az alábbi feltételeket:

(P_1) $p(t) \geq 1 - t^2$ minden $(\xi, 1)$ esetén.

(P_2) Létezik $c > 0$ konstans, amelyre $p(t) \geq -c(t - 1/t)$ teljesül minden $t \in [1, t^*]$ esetén.

(P_3) Létezik $r > 0$ konstans, amelyre $p(t) \leq -r(t - 1/t)$ teljesül minden $t \in [1, t^*]$ esetén.

(P_4) Léteznek $\varrho \in [1, 2)$ és $\eta \in (\xi, 1)$ konstansok, amelyekre $p(t) \leq \varrho(1 - t^2)$ teljesül minden $t \in (\eta, 1)$ esetén.

A (P_2) és (P_3) feltételekből következik, hogy $p(1) = 0$. Ez a két tulajdonság alsó és felső korlátokat ad a $p(t)$ függvényre az $[1, t^*]$ intervallumon. A (P_1) és (P_4) tulajdonságok a $p(t)$ függvény $(\xi, 1)$ intervallumon felvett értékeire vonatkoznak. A (P_4) tuajdonság nem szükséges az elemzés egyes lépéseinek igazolásához, azonban szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzenek megfelelő frissítési és környezeti paraméterek.

A (P_1) és (P_3) tulajdonságokból adódik az alábbi fontos ekvivalencia:

$$p(t) > 0 \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad t \in (\xi, 1). \tag{23}$$

Az elemzésben sehol nem használjuk ki a φ és p függvények közötti kapcsolatot. Emiatt mostantól elhagyjuk az alsó indexet a $\mathbf{p}_\varphi$ vektor jelöléséből, és egyszerűen $\mathbf{p}$-t írunk.

Ahogy a bevezetésben már említésre került, az alábbi széles környezetet használjuk:

$$\mathcal{W}(\tau, \beta) = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}_+ : \|\mathbf{p}^+\| \leq \beta \text{ és } \mathbf{v} > \xi\mathbf{e}\right\},$$

ahol β és τ adott paraméterek. A definícióban a $\mathbf{v} > \xi\mathbf{e}$ technikai feltétel is szerepel, hogy biztosítsuk, hogy $\mathbf{p}$ jól definiált.

Hogy igazoljuk, hogy $\mathcal{W}(\tau, \beta)$ valóban széles környezet ebben az általános esetben is, az $\mathcal{N}_\infty^-(1 - \tau)$ széles környezettel hasonlítjuk össze.

4.1. Lemma. *1. Tegyük fel, hogy (P_3) teljesül, ekkor $\mathcal{N}_\infty^-(1 - \tau) \subseteq \mathcal{W}(\tau, \beta)$.*

2. *Tegyük fel, hogy* (P_1) *teljesül, és legyen* $\gamma = (1-\beta)\tau$. *Ekkor* $\mathcal{W}(\tau,\beta) \subseteq \mathcal{N}_\infty^-(1-\gamma)$.

A környezet definícióját felhasználva alsó és felső korlátokat adhatunk a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáira.

4.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy* (P_1) *teljesül és* $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\tau,\beta)$. *Ekkor*

$$\frac{x_i s_i}{\tau\mu} = v_i^2 \geq \frac{\gamma}{\tau} = 1-\beta \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Ahogy a pszeudokódból és a környezet definíciójából is látható, a β és τ paramétereknek fontos szerepe van az elemzésben. Emiatt a $p(t)$-re vonatkozó (P_1)-(P_4) tulajdonságok mellett a β és τ paraméterekre vonatkozóan az alábbi feltételeket vezetjük be:

(C_1) $0 < \beta < 2(1-\xi^2)/3 \quad$ és $\quad 0 < \tau < 1$,

(C_2) $\sqrt{\beta\tau} \leq \dfrac{r}{c}(1-\tau)$,

(C_3) $1-\sqrt{1-\beta} + \dfrac{1}{2(1-\sqrt{\beta\tau})} \leq \dfrac{1-t^2}{p(t)} \quad$ minden $t \in \left[\sqrt{1-\frac{3}{2}\beta}, 1\right)$ esetén,

ahol c és r rendre a (P_2) és (P_3) feltételeket kielégítő pozitív konstansok.

Annak ellenére, hogy (C_3) függ $p(t)$-től is, ez a feltétel β és τ értékére ad korlátokat. A (P_4) feltétel szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzenek a (C_3) feltételt kielégítő paraméterértékek.

4.1.1. Az algoritmus elemzése

Mostantól feltesszük, hogy $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s}) \in \mathcal{W}(\beta,\tau)$ adott.

Legyen $\mu(\alpha) = \frac{\mathbf{x}(\alpha)^T\mathbf{s}(\alpha)}{n}$ a Newton-lépés megtétele után kapott pont dualitásrése. A következő lemmák a dualitásrés megváltozását vizsgálják egy iteráció után. Először $\mu(\alpha)$ értékére adunk alsó korlátot.

4.2. Lemma. *Ha* (P_2) *teljesül, akkor*

$$\mu(\alpha) \geq (1-\alpha_1 c)\mu.$$

Ahogy ez általában megszokott az Ai–Zhang típusú módszerek elemzésekor, mostantól rögzítjük az $\alpha_2 = 1$ értéket (a pozitív irányba teljes Newton-lépést teszünk). Továbbá fixáljuk az $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ értékét is.

A következő lemma az új pont dualitásrésére vonatkozóan ad felső korlátot.

4.3. Lemma. *Legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Tegyük fel, hogy* (P_2) *és* (P_3) *teljesül. Ekkor*

$$\mu(\alpha) \leq \left(1 - \left[(1-\tau)r - c\sqrt{\beta\tau}\right]\alpha_1\right)\mu.$$

Továbbá ha (C_2) *is teljesül, akkor a dualitásrés csökken, azaz* $\mu(\alpha) \leq \mu$.

Hogy az új iteráltak szigorú megengedettségét igazolhassuk, alsó korlátot adunk az $\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha)$ vektorra vonatkozóan.

4.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy* (P_1)-(P_3) *teljesül, és legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, *valamint* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha) \geq \left(1 - \frac{3}{2}\beta\tau\right)\mu\mathbf{e}.$$

4.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy a (P₁)-(P₃) feltételek teljesülnek, és legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, $\alpha_2 = 1$. *Ha* $\beta < \frac{2}{3}$, *akkor* $\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha) > \mathbf{0}$.

A 2.3. lemma alkalmazásával igazolható, hogy az új pont szigorúan megengedett, azaz $\mathbf{x}(\alpha)$ és $\mathbf{s}(\alpha)$ minden koordinátája pozitív.

4.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy a (P₁)-(P₃) feltételek teljesülnek, és legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$, *továbbá* $\beta < \frac{2}{3}$. *Ekkor* $\mathbf{x}(\alpha) > \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{s}(\alpha) > \mathbf{0}$.

A 4.4. lemma segítségével szükséges feltételeket adhatunk meg a $\mathbf{v} > \xi\mathbf{e}$ technikai feltétel teljesülésére vonatkozóan egy iteráció után.

4.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (P₁)-(P₃), (C₁) és (C₂) feltételek, és legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$, *ekkor* $\mathbf{v}(\alpha) > \xi\mathbf{e}$.

Jelölje $\mathbf{p}(\alpha)$ a skálázott Newton-rendszer jobb oldalán szereplő vektort az $\alpha = [\alpha_1; \alpha_2]$ hosszúságú lépés megtétele után. Igazolható, hogy $\|\mathbf{p}(\alpha)^+\| \leq \beta$ teljesül, ez a 4.6. lemma eredményével együtt azt jelenti, hogy az új pont a $\mathcal{W}(\tau, \beta)$ környezetben marad.

4.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (P₁)-(P₃) és (C₁)-(C₃) feltételek. Legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$, *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor*

$$\|\mathbf{p}(\alpha)^+\| \leq \beta.$$

4.1.2. Komplexitás

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\beta, \tau \in (0, 1)$ *paraméterek és a* $p(t)$ *függvény adottak, és kielégítik a (P₁)-(P₄) és (C₁)-(C₃) feltételeket a* $c > 0$ *és* $r > 0$ *konstansokkal. Tegyük fel továbbá, hogy adott egy* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{s}_0) \in \mathcal{W}(\tau, \beta)$ *kezdőpont. Legyen* $\alpha_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta\tau}{n}}$ *és* $\alpha_2 = 1$. *Ekkor az algoritmus* ε*-optimális megoldást állít elő*

$$O\left(\sqrt{n}\log\frac{\mathbf{x}_0^T\mathbf{s}_0}{\varepsilon}\right)$$

iteráció alatt.

A 4.1. tételből az is következik, hogy a 3. algoritmus leírásában szerelő lépéshosszak esetén igazolható ugyanez a komplexitási eredmény.

4.2. A tulajdonságok vizsgálata speciális függvények esetén

Ebben a szakaszban olyan függvényeket adunk meg, amelyek a bevezetett függvényosztályba tartoznak. Az 1. táblázat első öt sorában az AET szakirodalmából ismert függvények láthatók. A többi függvény a [10] kéziratban és a disszertációban került először bevezetésre az AET módszerrel kapcsolatban. A 7-9. és a 12. sorok valójában függvényosztályokat adnak meg a k és m paraméterek értékei alapján. Az utolsó négy oszlopban a (C₁)-(C₃) feltételeket kielégítő lehetséges paraméterértékeket adtunk meg c, r, β, és τ esetén.

Az AET szakirodalmában szereplő összes korábban alkalmazott függvény esetén a $p(t)$ függvény folytonos volt. Az általunk alkalmazott elemzés azonban sehol nem használja fel $p(t)$ folytonosságát, ezáltal tekinthetünk nem folytonos függvényeket véges sok elsőfajú szakadással, feltéve, hogy a (P₂)-(P₄) feltételek teljesülnek. A táblázat tizedik sorában láthatunk példát ilyen függvényre. A tizenegyedik és tizenkettedik sorokban pedig olyan $p(t)$ függvényeket adtunk meg, amelyek nem szigorúan monoton csökkenőek az $[1, t^*]$ intervallumon.

	$\varphi(t)$	$p(t)$	Feltételek	ξ	c	r	β	τ
1.	t	$\frac{1}{t}-t$	-	0	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2.	$\sqrt{t}$	$2(1-t)$	-	0	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3.	$t-\sqrt{t}$	$\frac{2(t-t^2)}{2t-1}$	-	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4.	$\frac{\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})}$	$1-t^2$	-	0	$\nexists$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
5.	$t^2-t+\sqrt{t}$	$\frac{2(1-t^4+t^2-t)}{4t^3-2t+1}$	-	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
6.	$t\arctan t$	$\frac{\left(\pi/4-t^2\arctan t^2\right)}{t\left(\arctan t^2+\frac{t^2}{1+t^4}\right)}$	-	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
7.	$t^k\ln t$	$\frac{-2t\ln t}{2k\ln t+1}$	$k\geq 1$	$e^{-\frac{1}{2k}}$	1	$\frac{1}{2k}$	$\frac{1}{8k}$	$\frac{1}{8k}$
8.	t^k	$\frac{1-t^{2k}}{kt^{2k-1}}$	$k\geq 1$	0	1	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{8k}$	$\frac{1}{8k}$
9.	Nincs zárt alak	$\frac{mt^k}{mt^k-1}(1-t)$	$m\geq 2,\ k\geq 1$	$m^{-\frac{1}{k}}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{m}}\right)$	$\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{m}}\right)$
10.	$\begin{cases} t & \text{if } t\leq\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \\ \sqrt{t}+\sqrt{8}-\sqrt[4]{8} & \text{if } t>\frac{1}{\sqrt{\tau}} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{t}-t & \text{if } t\leq\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \\ 2\left(1-\frac{1}{t}\right) & \text{if } t>\frac{1}{\sqrt{\tau}} \end{cases}$	-	0	2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
11.	Nincs zárt alak	$-\cos t\ln\left(\frac{1}{2}t\right)-t+\cos 1\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1$	-	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
12.	Nincs zárt alak	$k(\cos t-\cos 1)-t+1$	$k\in[1,2]$	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. TÁBLÁZAT. A tulajdonságok és paraméterek vizsgálata speciális függvények esetén

4.3. A φ függvényre vonatkozó feltételek megadása

Ahogy már említésre került, az általános keretalgoritmus elemzése során csak a $p(t)$ függvény tulajdonságait használjuk, és nem szükséges, hogy ez a függvény (9) alakban legyen megadva valamely φ függvényre. Ha egy φ függvényre vonatkozóan szeretnénk eldönteni, hogy az elemzésünk alapján a keretalgoritmussal $O(\sqrt{n}L)$ komplexitású IPA-t kapunk-e, elég, ha (9) alapján meghatározzuk a megfelelő $p(t)$ függvényt, és erre ellenőrizzük, hogy rendelkezik-e a (P_1)-(P_4) tulajdonságokkal.

Mindemellett, mivel a keretalgoritmus az AET módszerrel kapcsolatban került bevezetésre, szeretnénk megfogalmazni néhány fontos megfigyelést a φ transzformációs függvényre vonatkozóan.

Ha a φ függvényt megszorozzuk egy nemnulla számmal vagy hozzáadunk egy konstans értéket, akkor a neki megfelelő $p(t)$ függvény nem változik. Ez azt is jelenti, hogy egy adott $p(t)$ függvény végtelen sok φ transzformációs függvényhez tartozik.

Az iménti megfigyelések alapján az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy $\varphi(u)$ szigorúan monoton növekvő és $\varphi(1)=0$. Ezen feltevések mellett egyszerűbben felírhatjuk a $\varphi(u)$-ra vonatkozó szükséges feltételeket. Ha megtartjuk a $\varphi(u)$-ra vonatkozó folytonos differenciálhatósági feltevést, akkor a (P_1)-(P_4) tulajdonságok a következőképpen fogalmazhatók át a $\varphi(u)$ transzformációs függvényre:

(P'_1) $\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\leq-\sqrt{u}(1-u)$ teljesül minden $u\in(\xi^2,1)$ esetén.

(P'_2) Létezik $c>0$ konstans, amelyre $\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\leq c(u-1)$ minden $u\in[1,(t^*)^2]$ esetén.

(P'_3) Létezik $r>0$ pozitív konstans, amelyre $\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\geq r(u-1)$ minden $u\in[1,(t^*)^2]$.

(P'_4) Léteznek ϱ és η konstansok, amelyekre $\varrho\in[1,2)$ és $\eta\in(\xi,1)$, és $\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\geq-\varrho\sqrt{u}(1-u)$ teljesül minden $u\in(\eta^2,1)$ esetén.

4.4. Módosított AET módszer bevezetése szakaszonként folytonosan differenciálható transzformációs függvények esetén

Korábban már említésre került, hogy amennyiben $p(t)$ kielégíti mind a négy megadott feltételt, akkor lehet véges sok helyen elsőfajú szakadása, vagy megváltozhat a monotonitása, mivel ezeket a tulajdonságokat sehol nem használjuk az elemzés során.

$p(t)$ definíciója alapján láttuk, hogy az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy φ folytonos, szigorúan monoton növekvő, és $\varphi(1) = 0$. Ebben a szakaszban azzal foglalkozunk, hogy mi történik, ha elhagyjuk a φ-re vonatkozó differenciálhatósági feltevést, és feltesszük, hogy a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pontokban nem differenciálható ($k \in \mathbb{N}$). Ha φ-t egy olyan p függvényből kiindulva határozzuk meg, amely teljesíti a (P_1)-(P_4) fetételeket, és véges sok elsőfajú szakadása van a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pontokban, akkor φ folytonosan differenciálható lesz a (ξ^2, t_1) és (t_i, t_{i+1}), $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ nyílt intervallumokon, és a féloldali deriváltak is léteznek a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pontokban. Ezáltal feltehető, hogy φ szakaszonként folytonosan differenciálható (PC^1) függvény.

Feltesszük továbbá, hogy a féloldali deriváltak értéke a töréspontokban nem 0.

Definiáljuk a következő függvényt:

$$d_\varphi(u) = \begin{cases} \varphi'(u), & \text{ha } \exists\, i \in \{1, \ldots, k-1\}, \text{ hogy } u \in (t_i, t_{i+1}), \\ \lim_{t \to t_i^+} \varphi'(u) & \text{ha } u \in \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}. \end{cases}$$

$d_\varphi(u)$ definíciója szerint azokban a pontokban, ahol $\varphi(u)$ nem differenciálható, $\varphi'(u)$-t az u pontbeli jobb oldali derivált értékével helyettesítjük, de valójában bármelyik féloldali deriváltat használhatnánk.

A $\varphi(u)$-ra vonatkozó feltételeket a folytonosan differenciálható esetben úgy kapjuk, hogy a (P_1')-(P_4') feltételekbe $\varphi'(u)$ helyett $d_\varphi(u)$-t írunk.

A Darvay által bevezetett eredeti AET módszer esetén van a transzformációs függvényre vonatkozóan folytonos differenciálhatósági feltétel, így a Newton-irányok meghatározására alkalmazható a Newton-módszer. Ha azonban elhagyjuk ezt a feltevést, általánosítanunk kell az AET módszert a PC^1 függvények esetére.

A Newton-módszer helyett ebben az esetben alkalmazhatjuk a Kojima és Shindo [20] által 1986-ban bevezetett általánosított Newton-módszert. Ehhez azt kellett igazolnunk, hogy a (6) rendszernek megfeleltethető nemlineáris leképezés szakaszonként folytonosan differenciálható leképezés $\mathbb{R}^{n+m+n}$-ről $\mathbb{R}^{n+m+n}$-re, ha φ PC^1 függvény.

Ezáltal a féloldali deriváltak alkalmazásával használható az AET módszer abban az esetben is, ha a transzformációs függvény nem differenciálható, de szakaszonként folytonosan differenciálható.

4.5. Konstrukciós szabályok

A disszertáció 4.3.2 alfejezetében különböző lemmákat igazoltunk arra vonatkozóan, hogy hogyan konstruálhatunk a feltételeket kielégítő φ függvényeket azon függvények segítségével, amelyekre már igazoltuk, hogy a tulajdonságok teljesülnek. Ahogy ezekből az eredményekből látható, a megfelelő transzformációs függvények halmaza jelentősen nagyobb annál, mint amelyek korábban az AET módszer szakirodalmában szerepeltek. A bevezetett konstrukciós szabályok a függvényosztály további bővítésére adnak lehetőséget.

5. Numerikus eredmények

Ebben a szakaszban ismertetjük a dolgozat 5. fejezetében szereplő numerikus eredmények legfontosabb tapasztalatait.

5.1. Lineáris programozási feladatok

Az LP esetben bevezetett különböző algoritmusok hatékonyságát a Netlib könyvtárból [13] származó tesztfeladatok esetén vizsgáltuk. Egyszerűbb előfeldolgozási módszerek alkalmazása után az önduális beágyazás módszerét alkalmaztuk, ezáltal a IPA-kat szigorúan megengedett megoldásból tudtuk elindítani.

Implementáltuk a dolgozat 4. fejezetében ismertetett általános keretalgoritmust, és különböző numerikus teszteket végeztünk az elméleti elemzésekben használt és egy mohó lépéshossz esetén is (ez utóbbi esetben a lehető legnagyobb lépést tesszük meg úgy, hogy még a környezetben maradjon az új pont). A 4.1. tételben igazolt komplexitási eredmény a mohó változat esetén is teljesül.

A $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvény esetén hat különböző paraméterbeállítást tekintettünk β és τ értékeire, és vizsgáltuk, hogy ezek változtatásával hogyan változik a feladatok megoldásához szükséges iterációszám és futási idő. A legjobb eredményeket akkor értük el, amikor a β környezeti paraméter értékét nagyra, a τ frissítési paraméter értékét pedig egy kisebb, de nem túl kicsi értékre állítottuk be.

Az általános keretalgoritmus működését tíz különböző transzformációs függvény esetén hasonlítottuk össze. Ezek közül néhány már jól ismert volt az AET módszer szakirodalmából, a többi a dolgozatban bevezetett új függvények közül került kiválasztásra. Ez utóbbi kategóriába tartozik az első AET függvény, amely végtelen sokszor vált monotonitást. Az AET módszer folytonosan differenciálható esetre való kiterjesztésével lehetőségünk nyílt PC^1 transzformációs függvények alkalmazására is. A kiválasztott függvények között így egy PC^1 függvény is szerepel. Az erre vonatkozó futási eredmények ígéretesek, az ebben az esetben kapott iterációszámok a legtöbb feladat esetén a legjobbak között voltak.

Amikor az elméleti lépéshossz esetén kapott eredményeket vizsgáltuk, azt tapasztaltuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái egy nagyon szűk intervallumban maradtak, amennyiben a kezdőpont közel volt a centrális úthoz. A mohó változat esetén a gyakorlatban kapott felső korlátok szintén nagyon távol maradtak az elméleti elemzésben szereplőtől, és úgy tűnik, hogy függetlenek a feladat méretétől. Ennek a jelenségnek a jobb megértése és elméleti alátámasztása fontos lépés lehet majd a módszerek továbbfejlesztésekor és általánosításakor.

5.2. Lineáris komplementaritási feladatok

Mivel elégséges LCP-k esetén az elemzést a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvény esetén végeztük el, minden numerikus tesztnél ezt a rögzített transzformációs függvényt tekintettük. Az LP esethez hasonlóan implementáltunk egy elméleti és egy mohó algoritmusvariánst is. Ahhoz, hogy a gyakorlatban is hatékony módszert kaphassunk, jelentősebb változtatásokra volt szükség az elméleti algoritmushoz képest, ahogy ez általában igaz LCP-k esetén. A κ-függő környezetdefiníció helyett a mohó algoritmusvariáns esetén egy κ-független környezetet használtunk.

Az LP esethez hasonlóan különböző paraméterbeállításokat hasonlítottunk össze β és τ értékeire. Itt a legjobb eredmények abban az esetben adódtak, amikor β a lehető legnagyobb és τ a lehető legkisebb volt. Az LP esethez képest tapasztalt eltérés oka lehet az, hogy az önduális beágyazás alkalmazásával kapott feladatok speciális struktúrával rendelkeznek, de ez a kérdés további vizsgálatokat igényel.

Egy másik érdekes kérdés, amit vizsgáltunk ebben a fejezetben, az a kezdőpont megválasztásának szerepe volt. Megnéztük, hogy milyen hatással van a kezdőpont (és bizonyos esetekben a jobb oldali vektor) módosítása az algoritmus teljesítményére egy olyan tesztfeladat esetén, amelyről ismert, hogy IPA-k számára numerikusan nehezen kezelhető (Csizmadia-LCP). Azt tapasztaltuk, hogy még kis módosítások esetén is igen jelentős javulást lehet elérni. Ezek az eredmények azt mutatják, hogy elégséges LCP-k esetén a paraméterek megfelelő megválasztása mellett a kezdőpont megválasztása is kulcsfontosságú kérdés, és ez önmagában meghatározhatja, hogy numerikusan tudunk-e kezelni egy feladatot.

A **v** vektor koordinátáira vonatkozóan az LP esethez hasonló eredményeket kaptunk.

Bevezettünk továbbá különböző nemlineáris programozási modelleket mátrixok elégségességének eldöntésére. A módszer gyakorlati alkalmazhatóságának tesztelésére a BARON globális nemlineáris megoldót használtuk. A tesztfeladatokat kis méretben (legfeljebb 10×10 méretig) tudtuk ezzel a megközelítéssel megoldani. A futási idők sokkal jobbak voltak akkor, amikor a vizsgált mátrix nem volt elégséges (tehát olyan vektor meghatározása volt a cél, amelyre a definícióban szereplő implikáció nem teljesül).

6. Összegzés, további kutatási irányok

A disszertációban Ai–Zhang típusú hosszúlépéses IPA-kat vezettünk be LP feladatok és LCP-k megoldására. Az új keresési irányok meghatározásához a Darvay által definiált AET módszert alkalmaztuk.

Először az AET módszert a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvénnyel alkalmazva adtunk meg egy új hosszúlépéses IPA-t LP feladatok megoldására. Igazoltuk, hogy a módszer konvergens és rendelkezik a legjobb ismert komplexitással.

Ezután ezt a módszert általánosítottuk elégséges LCP-k megoldására. Erre az IPA-ra szintén bizonyítottuk, hogy rendelkezik a rövidlépéses módszerek esetén ismert legjobb komplexitással.

A kutatásunk fő kérdése az volt, hogy milyen függvényekkel alkalmazhatjuk az AET módszert Ai-Zhang típusú módszerek bevezetésekor úgy, hogy a kapott módszerre igazolható legyen a rövidlépéses variánsokra jellemző jobb komplexitási eredmény. Bevezettünk egy általános Ai–Zhang típusú keretalgoritmust, ahol a transzformációs függvény (pontosabban a skálázott rendszerből származtatható $p(t)$ függvény) a bemenet része. A $p(t)$ függvényre vonatkozóan megadtunk olyan feltételeket, amelyek fennállása esetén a kívánt komplexitási eredményeket igazolni tudtuk.

Általánosítottuk az AET módszert szakaszonként folytonosan differenciálható transzformációs függvények esetére. Ehhez a Kojima és Shindo által bevezetett általánosított Newton-módszert alkalmaztuk. Továbbá megadtunk olyan konstrukciós szabályokat, amelyek segítségével a feltételeket kielégítő transzformációs függvények felhasználásával újakat állíthatunk elő.

A munkánk fontos része volt nem csupán az új algoritmusok elméleti elemzése, de numerikus tesztelése is. Az általános hosszúlépéses keretalgoritmust MATLAB-ban implementáltuk mind LP, mind LCP feladatok esetén. Mivel az elméleti változatok gyakorlatban általában nem hatékonyak, mindkét esetben vizsgáltunk mohó algoritmusvariánsokat is.

Kutatásunk során számos érdekes új kérdés felmerült az IPA-k elméletével és implementációjával kapcsolatban is. A következő célunk az LP esetben bevezetett keretalgoritmus és függvényosztály elégséges LCP-kre való általánosítása.

Szeretnénk továbbá összehasonlítani az általunk bevezetett függvényosztályt más, nem az AET módszeren alapuló függvényosztályokkal, például a kernelfüggvényes megközelítéssel.

A **v** vektor koordinátáira vonatkozó megfigyeléseink azt sejtetik, hogy amennyiben a kezdőpont közel van a centrális úthoz, az elméleti elemzésben használt környezet sokkal szélesebb, mint amelyben valójában az előállított pontsorozat halad. Szeretnénk megvizsgálni, adható-e konstans felső becslés a **v** vektor koordinátáira.

Az implementáció esetén szeretnénk még numerikus kísérleteket végezni további, a bevezetett osztályban szereplő függvényekkel. Láttuk, hogy a kezdőpont megválasztásának szintén kulcsfontosságú szerepe lehet LCP-k megoldásakor, ezen a területen is szeretnénk további vizsgálatokat folytatni.

A dolgozathoz kapcsolódó publikációk listája

1. M. E.-Nagy és A. Varga. "A new Ai-Zhang type interior point algorithm for sufficient linear complementarity problems". Journal of Optimization Theory and Applications (2022). DOI: https://doi.org/10.1007/s10957-022-02121-z.

2. M. E.-Nagy és A. Varga. "A new long-step interior point algorithm for linear programming based on the algebraic equivalent transformation". Central European Journal of Operations Research (2022). DOI: https://doi.org/10.1007/s10100-022-00812-6.

3. M. E.-Nagy és A. Varga. "A numerical comparison of long-step interior point algorithms for linear optimization". SOR '21 Proceedings - The 16th International Symposium on Operational Research in Slovenia (2021), pp. 75–80.

4. M. E.-Nagy és A. Varga. "A new class of large-update interior point algorithms for linear optimization". Előkészületben lévő kézirat. 2022.

5. M. E.-Nagy, T. Illés, J. Povh, A. Varga, és J. Žerovnik. "Testing sufficient matrices". Előkészületben lévő kézirat. 2022.

Hivatkozások

[1] W. Ai és S. Zhang. „An $O(\sqrt{n}L)$ iteration primal-dual path-following method, based on wide neighborhoods and large updates, for monotone LCP". *SIAM Journal on Optimization* 16.2 (2005), 400–417. old. DOI: https://doi.org/10.1137/040604492.

[2] R. W. Cottle, J.-S. Pang és V. Venkateswaran. „Sufficient matrices and the linear complementarity problem". *Linear Algebra and its Applications* 114 (1989), 231–249. old. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90463-1.

[3] Zs. Darvay. „A new algorithm for solving self-dual linear optimization problems". *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Series Informatica* 47.1 (2002), 15–26. old.

[4] Zs. Darvay. „New interior point algorithms in linear programming". *Advanced Modeling and Optimization* 5.1 (2003), 51–92. old.

[5] Zs. Darvay, Á. Felméri, N. Forró, I. Papp és P.-R. Takács. „Egy új belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálási feladatok megoldására". *Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XVII.*, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2012, 87–90. old.

[6] Zs. Darvay, I. M. Papp és P.-R. Takács. „Complexity analysis of a full-Newton step interior-point method for linear optimization". *Periodica Mathematica Hungarica* 73.1 (2016), 27–42. old. DOI: https://doi.org/10.1007/s10998-016-0119-2.

[7] M. E.-Nagy, T. Illés, J. Povh, A. Varga és J. Žerovnik. „Testing sufficient matrices". Manuscript in preparation. 2022.

[8] M. E.-Nagy és A. Varga. „A numerical comparison of long-step interior point algorithms for linear optimization". *SOR '21 Proceedings - The 16th International Symposium on Operational Research in Slovenia* (2021), 75–80. old.

[9] M. E.-Nagy és A. Varga. „A new Ai-Zhang type interior point algorithm for sufficient linear complementarity problems". *Journal of Optimization Theory and Applications* (2022). DOI: https://doi.org/10.1007/s10957-022-02121-z.

[10] M. E.-Nagy és A. Varga. „A new class of large-update interior point algorithms for linear optimization". Manuscript in preparation. 2022.

[11] M. E.-Nagy és A. Varga. „A new long-step interior point algorithm for linear programming based on the algebraic equivalent transformation". *Central European Journal of Operations Research* (2022). DOI: https://doi.org/10.1007/s10100-022-00812-6.

[12] M. C. Ferris és J.-S. Pang. „Engineering and economic applications of complementarity problems". *SIAM Review* 39.4 (1997), 669–713. old. DOI: https://doi.org/10.1137/S0036144595285963.

[13] D. M. Gay. „Electronic mail distribution of linear programming test problems". *Mathematical Programming Society COAL Newsletter* 13 (1985), 10–12. old.

[14] S.-M. Guu és R. W. Cottle. „On a subclass of $\mathcal{P}(0)$". *Linear Algebra and its Applications* 223 (1995), 325–335. old. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)00271-Z.

[15] T. Illés, C. Roos és T. Terlaky. „Simple approach for the interior point theory of linear complementarity problems with $\mathcal{P}_*$-matrices". Unpublished manuscript. 1998.

[16] B. Kheirfam és M. Haghighi. „A full-Newton step feasible interior-point algorithm for $\mathcal{P}_*(\kappa)$-LCP based on a new search direction". *Croatian Operational Research Review* (2016), 277–290. old. DOI: https://doi.org/10.17535/crorr.2016.0019.

[17] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma és A. Yoshise. „A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems". *Lecture Notes in Computer Science* (1991). DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-54509-3.

[18] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma és A. Yoshise. „A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems: A summary". *Oper. Res. Lett.* 10.5 (1991), 247–254. old. DOI: https://doi.org/10.1016/0167-6377(91)90010-M.

[19] M. Kojima, S. Mizuno és A. Yoshise. „A primal-dual interior point algorithm for linear programming". *Progress in mathematical programming*. Springer, 1989, 29–47. old. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9617-8_2.

[20] M. Kojima és S. Shindo. „Extension of Newton and quasi-Newton methods to systems of PC^1 equations". *Journal of the Operations Research Society of Japan* 29.4 (1986), 352–375. old. DOI: https://doi.org/10.15807/jorsj.29.352.

[21] C. E. Lemke és J. T. Howson Jr. „Equilibrium points of bimatrix games". *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 12.2 (1964), 413–423. old. DOI: https://doi.org/10.1137/0112033.

[22] M. Nagy. „Interior point algorithms for general linear complementarity problems". Dissz. Eötvös Loránd University, 2009.

[23] Gy. Sonnevend. „An "analytical centre" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming". *System Modelling and Optimization*. Springer, 1986, 866–875. old. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0043914.

[24] H. Väliaho. „$\mathcal{P}_*$-matrices are just sufficient". *Linear Algebra and its Applications* 239 (1996), 103–108. old. DOI: https://doi.org/10.1016/S0024-3795(96)90005-1.

[25] Y. Ye. „Exchange market equilibria with Leontief's utility: Freedom of pricing leads to rationality". *Theoretical Computer Science* 378.2 (2007), 134–142. old. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.02.016.