



GÖMBHÉJAK KVÁZI-IZOMETRIKUS POLIGONÁLIS HORPADÁSI ALAKJÁNAK VIZSGÁLATA

*A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen
a PhD fokozat követelményeinek részleges teljesítéseként
benyújtott disszertáció rövid összefoglalója*

Vető Dániel

Témavezető:
Sajtos István

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2016

Bevezetés

A rugalmas anyagú vékony héjak nagy elmozdulásainak vizsgálata fontos szerepet játszik a mechanikában és más tudományterületeken, például kolloidrészecskékkel (*Tsapis et al, 2005*), gömb alakú nanoszerkezetekkel (*Falco et al, 2011*) és egysejtűekkel (*Hutchinson et al, 2016*) kapcsolatos kutatások esetén. A héjak teher-elmozdulás összefüggésének meghatározása nem egyszerű feladat, még jelenleg is jelentős eltérés tapasztalható az elméleti és a kísérleti eredmények között. Ez az eltérés nem csak a geometriai imperfekciók, anyagi nemlinearitás és egyéb, figyelembe nem vett hatások következménye. Az eltérés nagyrészt az elméleti modellek tökéletlenségéből származik.



1. ábra: Pingponglabda horpadási alakja: kisebb benyomódásnál kör alakú, nagyobb benyomódásnál sokszög alakú él látható (a szerző fényképe)

A kutatók a közelmúltig általában körszimmetrikus horpadási alakot feltételeztek (*Evkin, 2005, Kollár-Dulácska, 1984, Pogorelov, 1988, Thang, 1989, Wolmir, 1962, Zhu et al, 2002*), annak ellenére, hogy a horpadási alak a valóságban sokszor nem körszimmetrikus, hanem sokszög alaprajzú, ahogy számos újabb publikációban (*Antman, 2005, Audoly-Pomeau, 2010, Galpin et al, 2008, Grolleau et al, 2008, Knoche-Kierfeld, 2014, Pauchard-Rica, 1998, Vaziri-Mahadevan, 2008, Vaziri, 2009*)

látható. A mindennapi életben is számos esetben ez utóbbit látjuk igazolódni, például pingponglabdák horpadása esetén, 1. ábra. A publikációk tanúsága szerint a kutatók véleménye az, hogy a gömbhéjak horpadásának vizsgálata még nincs lezárva, a terület további kutatást igényel (*Audoly-Pomeau, 2010, Vaziri, 2009*). Számos kutatási eredményt találhatunk koncentrált erővel terhelt gömbhéjakra vonatkozóan az irodalomban, melyek nem-körszimmetrikus, általában szabályos sokszög alaprajzú horpadási alak feltételezésével születtek. Bár lényegében ugyanazt a jelenséget tárgyalják, az eredmények néha nagy mértékben eltérnek. A gömbhéjak horpadásának vizsgálata még mindig aktuális, hiszen sok alapvető kérdésre nincs válasz, illetve jelentősen eltérő megállapítások lelhetők fel az irodalomban.

A kutatásom célja, hogy a koncentrált erővel terhelt gömbhéjak horpadási alakját meghatározzam. További cél a koncentrált teherhez tartozó teher-elmozdulás függvény meghatározása. Ezeknek az eredményeknek az eléréséhez analitikus modellt fejlesztettem ki, mely megmutatja a lehetséges horpadási alakokat és megadja a teher és az elmozdulás közötti összefüggést. Kutatásom során a nem-körszimmetrikus horpadási alakok közül csak a szabályos sokszög alaprajzúakat vizsgáltam, melyeket diszkrét forgásszimmetrikusnak nevezek. Egy közelítő modell is bemutatásra kerül a disszertációban, mely – mérnöki intuícióra alapozva – kizárólag azt az állapotot vizsgálja, amelynél a horpadási alak forgásszimmetrikusból diszkrét forgásszimmetrikussá változik. Ebből a modelltől az válik láthatóvá, hogy a héj mely sokszöget választja ebben az esetben. Kísérleti és végeselemes vizsgálati eredmények igazolják a modellek helyességét.

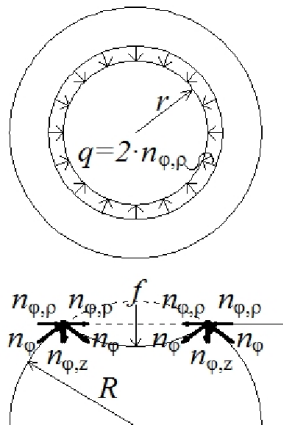
Körszimmetrikus horpadási alakok vizsgálata

A nyúlásmentes (izometrikus) alakváltozásokkal kapcsolatosan az irodalomban sok érdekes és lényeges megállapítás olvasható (*Audoly, 2000, Croll, 1975, Hegedűs, 1998, Ivanova-Pastrone, 2002, Pogorelov, 1988*). A gömbhéjak horpadási alakja közelítőleg az eredeti héjfelület izometrikus transzformáltjaként feltételezhető. A valóságban a héjak véges vastagsággal rendelkeznek. Vékony felületszerkezetek esetén tipikusan lokálisan nyúlásmentes (lokálisan izometrikus) vagy kvázi-nyúlásmentes (kvázi-izometrikus) alakváltozásokat láthatunk. Egyszerűen belátható, hogy a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok közötti átmenet nem jöhet létre folytonos nyúlásmentes alakváltozásokon keresztül (*Vető-Sajtos, 2016b*).

A gömbhéjak horpadásával kapcsolatos publikációk nagy része körszimmetrikus horpadási alakot feltételez. A héj horpadt alakját az eredeti gömbfelület egy részének inverzeként feltételezhetjük (*Pogorelov, 1988, Knoche, 2014*), ezáltal a teherelmozdulás összefüggés meghatározható. Koncentrált erő esetén Pogorelov eredményei használhatók (*Pogorelov, 1988*), azonban párhuzamosan megoszló teher esetére új eredmény vezethető le (*Vető-Sajtos, 2009*). Az általam adott összefüggés szerint a teherelmozdulás diagramnak minimumpontja van, mely a héj alsó kritikus terhéhez tartozik. Ez az alsó kritikus teherérték jó egyezést mutat az irodalomban (*Kollár-Dulácska, 1984, Dulácska, 1987*) található kritikus teherértékekkel. Az eredményeket az 1. és a 2. tézis tartalmazza.

A horpadási él modellezése síkbeli nyomott gyűrűként

A gömbhéjak kör alakú horpadási éle általában valamilyen sokszöggel jellemezhető alakzattá alakul át a teher növekedésének hatására. A gömbhéjak horpadása során megjelenő kör alakú horpadási él és a síkbeli, középpontja irányában ható megoszló teherrel terhelt, rugalmasan ágyazott gyűrű között mérnöki szempontból jól indokolható analógia áll fenn. Így egy síkbeli nyomott gyűrű stabilitásvesztését, kihajlását vizsgálhatjuk. A horpadási élben a héj terhelése gyűrűirányú nyomóerőt okoz, 2. ábra. A gyűrűként modellezett kör alakú horpadási élről az feltételezhető, hogy a környező héjrészek rugalmasan ágyazzák, illetve rendelkezik hajlítómerevséggel is, melyet a horpadási él nem zérus szélessége biztosít.



2. ábra: A koncentrált teherrel terhelt gömbhéj kör alakú horpadási élére ható erők a membránelmélet szerint

A közelítő modell megmutatja, hogy adott sugár-vastagság aránnyal rendelkező héj esetén a körszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó kör alakú horpadási él milyen diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó sokszöggé

alakulhat át a horpadás folyamata során. A modell csak a kör és a sokszög közötti átmenetről ad információt, a sokszögek oldalszámának a horpadás során történő megváltozásával kapcsolatosan nem szolgáltat eredményt. A horpadási sokszög oldalainak számával kapcsolatosan a modell által szolgáltatott eredmények összhangban vannak a kísérleti eredményekkel (*Vető-Sajtos, 2014, Vető-Sajtos, 2016a*). Az eredményeket a 3. tézis tartalmazza.

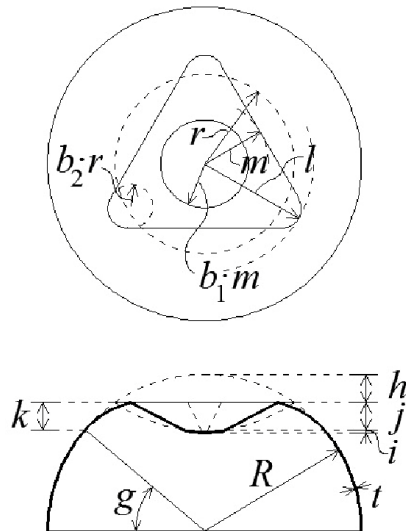
Diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok vizsgálata

Analitikus modellt dolgoztam ki gömbhéjak horpadásának vizsgálatához (*Vető-Sajtos, 2014, Vető-Sajtos, 2016a, Vető-Sajtos, 2016b*) a horpadási alakot az eredeti héjfelület kvázi-izometrikus transzformált alakjaként feltételezve. A modell az irodalomban (*Audoly-Pomeau, 2010, Ben Amar-Pomeau, 1997, Lobkovsky, 1996, Pauchard-Rica, 1998, Pogorelov, 1957, Pogorelov, 1988, Zhu et al, 2002*) található kutatási eredmények felhasználásával készült. A kvalitatív modellben, melyet MATLAB környezetben implementáltam, nem csak körszimmetrikus, hanem diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok figyelembevétele is lehetséges. A körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok közötti folytonos átmenet a csúcossági és lekerekítettségi paraméterek, azaz b_1 és b_2 által valósul meg, 3. ábra (*Vető-Sajtos, 2014, Vető-Sajtos, 2016a, Vető-Sajtos, 2016b*). A rendelkezésre álló modelleket tanulmányozva látható, hogy ez a tulajdonság egyedülálló, a kutatók az említett alakok közötti átmenetet hirtelen, ugrásszerű változásként veszik figyelembe.

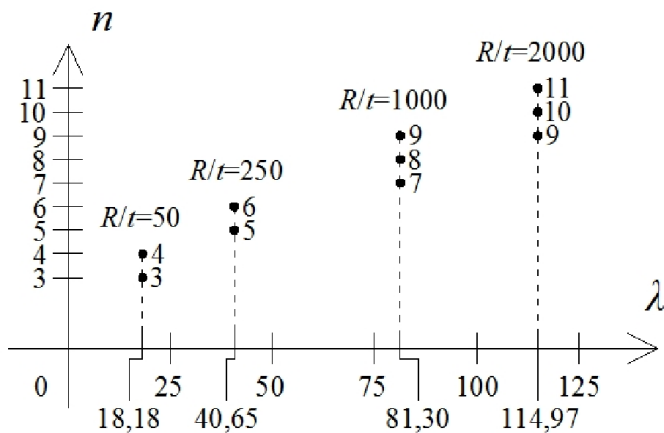
A körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokhoz tartozó teher-elmozdulás összefüggések egymástól különböznek. Az ezekhez az összefüggésekhez tartozó diagramok közötti eltérés a héj benyomódásának növelésével

növekszik. Az eredmények azt mutatják, hogy gömbhéjak horpadásának vizsgálata során szükség van a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak figyelembevételére. A modell pontosabb (a kísérletekhez közelebb álló) teher-elmozdulás összefüggést ad gömbhéjak esetén, mint a jelenleg rendelkezésre álló modellek (Vető-Sajtos, 2014, Vető-Sajtos, 2016a, Vető-Sajtos, 2016b).

A bemutatott modell segítségével igazolható, hogy a különböző sugárral és vastagsággal rendelkező gömbhéjak polygonális horpadási alakja különböző. A kisebb sugár-vastagság aránnyal rendelkező gömbhéjak esetén alacsonyabb oldalszámú sokszögeket, míg a nagyobb sugár-vastagság aránnyal rendelkező gömbhéjak esetén magasabb oldalszámú sokszögeket láthatunk, 4. ábra. Összegzésként megállapíthatjuk, hogy a gömbhéjak horpadásakor létrejövő sokszögek oldalainak számát a héj geometriai paraméterei határozzák meg (Vető-Sajtos, 2016a). Az eredményeket a 4. (kivéve 4.3 altézis) és az 5. tézis tartalmazza.



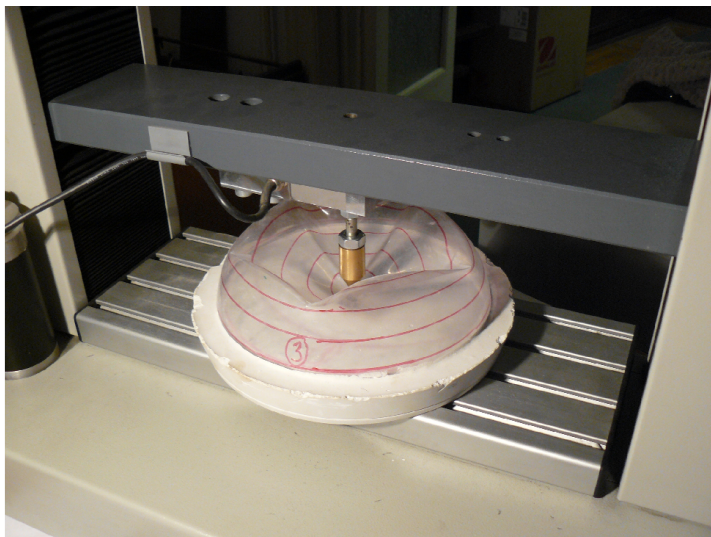
3. ábra: Diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak felülnézete és metszete a modell szerint (a horpadt héjfelület geometriáját leíró változók jelölésével)



4. ábra: Létrejövő horpadási sokszög-oldalszámok a héj λ relatív vastagsági paraméterének függvényében

Kísérletek és végeleges vizsgálatok

Az analitikus úton kapott eredmények kísérleti verifikációja minden kutatás esetén nagyon fontos. Az általam elvégzett kísérletekben pingponglabdákat és úgynevezett Lénárt-gömböket vizsgáltam (Vető-Sajtos, 2014, Vető-Sajtos, 2016a), 5. ábra. A pingponglabdák esetén tökéletes egyezés volt tapasztalható a kísérleti és az analitikus úton kapott eredmények között. A Lénárt-gömbök esetén az egyezés nem volt tökéletes, ennek oka számomra nem ismert. Számos hatás, melyet az analitikus modell nem vesz figyelembe (anyagi nemlinearitás, megtámasztás hatása, terhelési sebesség, stb.), befolyásolhatja a horpadási sokszögeket. További eltérést okozhat a horpadási sokszögek nem szabályos volta, illetve a horpadási él szélességének változása, mely hatásokat a modell nem tartalmazza.



5. ábra: A Lénárt-gömbbel folytatott kísérlet (3. számú próbatest)

Végeselemes vizsgálatokat is végeztem koncentrált terheléssel terhelt gömbhéjakra vonatkozóan. Az ANSYS szoftver segítségével a pingponglabda geometriájával és mechanikai jellemzőivel rendelkező héjak esetén kapott eredmények megegyeznek az analitikus úton általam kapott eredményekkel (Vető-Sajtos, 2016a). Az eredményeket a 4.3. tézis tartalmazza.

Tézisek

1. tézis

(kapcsolódó publikáció: (Vető-Sajtos, 2009))

Párhuzamosan (vízszintes vetület mentén egyenletesen) megoszló terheléssel terhelt gömbhéjak esetére, a horpadási alakot a héjfelület körszimmetrikus kvázi-izometrikus transzformáltjaként feltételezve, analitikus úton meghatároztam a horpadt állapothoz tartozó teher-elmozdulás függvényt és az alsó kritikus terhet. A

kritikus teher értéke összhangban van az irodalomban található, különböző módszerekkel kapott analitikus eredményekkel.

2. tézis

(kapcsolódó publikáció: (*Vető-Sajtós, 2016b*))

Bebizonyítottam, hogy egy síkkal kettévágott gömbhéj önmagában nyúlásmentesen deformálható részeit a nyitott perem mentén összeillesztve (úgy, hogy a gömbsüvegrészek az illesztési sík azonos oldalára esnek) nem lehetséges nyúlásmentesen deformálni, kivéve, ha két félgömböt illesztünk össze ilyen módon. Ebből következik, hogy a gömbhéj poligonális horpadási alakja nem állítható elő nyúlásmentesen a forgásszimmetrikus horpadási alakból, ha a horpadt rész a gömb felénél kisebb.

3. tézis

(kapcsolódó publikációk: (*Vető-Sajtós, 2014, Vető-Sajtós, 2016a*))

A koncentrált erővel terhelt gömbhéj horpadási éle és a síkbeli, középpontja irányában ható megoszló teherrel terhelt, rugalmasan ágyazott, nyomott gyűrű közötti analógiára alapozva kvalitatív modellt dolgoztam ki. Az analógiát a gömbhéjak fizikai viselkedése szolgáltatja. Megmutattam, hogy a sokszög alaprajzú horpadási élhez tartozó oldalszám a modell segítségével meghatározható. A modell csak a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak közötti átmenetre vonatkozik. Az eredményeket az irodalomban található kísérletek alátámasztják.

4. tézis

(kapcsolódó publikációk: (*Vető-Sajtós, 2014, Vető-Sajtós, 2016a, Vető-Sajtós, 2016b*))

A horpadási alakot a héjfelület kvázi-izometrikus transzformáltjaként feltételezve energiafüggvényt határoztam meg

analitikus úton, melyet numerikusan kezelve a héj horpadt állapota vizsgálható, körszimmetrikus és diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak esetén.

4.1 A bemutatott modell segítségével a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak közötti átmenet vizsgálható. Az átmenet a horpadási alakhoz tartozó lekerekítettségi és csúcsossági paraméterek folytonos változásának lehetőségével valósul meg.

4.2 A modell segítségével megmutattam, hogy a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokhoz tartozó teher-elmozdulás függvények a körszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó egyensúlyi útról ágaznak el. A diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok alacsonyabb energiaszinthez tartoznak, mint a körszimmetrikus horpadási alak.

4.3 A modell segítségével kapott eredmények összhangban vannak az elvégzett kísérletek és végeselemes vizsgálatok eredményével a gömbhéj horpadási alakjához tartozó sokszögek oldalszámának tekintetében. Az elvégzett kísérletekhez tartozó teher-elmozdulás diagramok jól illeszkednek a modell segítségével kapott analitikus eredményekre, amennyiben a héj benyomódása nem éri el a gömb sugarának egyharmadát.

5. tézis

(kapcsolódó publikáció: *(Vető-Sajtos, 2016a)*)

Numerikus vizsgálatok segítségével megmutattam, hogy gömbhéjak horpadása esetén a horpadási sokszögek lehetséges oldalszáma a sugár-vastagság arány monoton növekvő függvénye.

A tézisekhez kapcsolódó publikációk

- Vető, D., Sajtos, I. (2009) Application of geometric method to determine the buckling load of spherical shells, *Pollack Periodica*, **4/2**, 123-134
- Vető D., Sajtos I. (2014) Geometriai módszer alkalmazása gömbhéjak horpadásának vizsgálatához, *Építés-Építésztudomány*, **42/3-4**, 241-259
- Vető, D., Sajtos, I. (2016a) Theoretical, numerical and experimental analysis of polygonal buckling shapes of spherical shells, *Journal of the IASS – közlésre benyújtva*
- Vető D., Sajtos I. (2016b) Gömbhéjak poligonális horpadási alakjának vizsgálata, *Műszaki Szemle*, **68** – közlésre elfogadva

Hivatkozások

- Antman, S. (2005) *Nonlinear problems of elasticity*, Springer, New York
- Audoly, B. (2000) Élasticité et géométrie: de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de telephone, PhD thesis, École Normale Supérieure, Département de Physique, Paris, 2000
- Audoly, B., Pomeau, Y. (2010) *Elasticity and geometry*, Oxford University Press, Oxford
- Ben Amar, M., Pomeau, Y. (1997) Crumpled paper, *Proceedings of the Royal Society London A*, **453**, 729-755
- Croll, J. G. A. (1975) Towards simple estimates of shell buckling loads, *Der Stahlbau*, **9**, 283-285
- Dulácska E. (1987) Kupolahéjak horpadása, *Építés-Építésztudomány*, **19/3-4**, 305-309
- Evkin, A. Yu. (2005) Large deflections of deep orthotropic shells under radial concentrated load: asymptotic solution, *International Journal of Solids and Structures*, **42**, 1173-1186
- Falco, C., Baccile, N., Titirici, M-M. (2011) Morphological and structural differences between glucose, cellulose and lignocellulosic biomass derived hydrothermal carbons, *Green Chemistry*, **13**, 3273-3281
- Galpin, B., Grolleau, V., Umiastowski, S., Rio, G., Mahéo, L. (2008) Design and application of an instrumented projectile for load measurements during impact, *International Journal of Crashworthiness*, **13/2**, 139-148
- Grolleau, V., Galpin, B., Penin, A., Rio, G. (2008) Modeling the effect of forming history in impact simulations: evaluation of the effect of

- thickness change and strain hardening based on experiments, *International Journal of Crashworthiness*, **13/4**, 363-373
- Hegedűs I. (1998) *Héjszerkezetek*, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- Hutchinson, C. A. et al. (2016) Design and synthesis of a minimal bacterial genome, *Science*, **357/6280**, 1414/1-11
- Ivanova, J., Pastrone, F. (2002) *Geometric method for stability of non-linear elastic thin shells*, Kluwer Academic Publishers, Boston
- Knoche, S. (2014) Instabilities and shape analyses of elastic shells, PhD thesis, TU Dortmund, Faculty of Physics, Dortmund
- Knoche, S., Kierfeld, J. (2014) The secondary buckling transition: wrinkling of buckled spherical shells, *European Physical Journal E*, **37/7**, 1-21
- Kollár, L., Dulácska, E. (1984) *Buckling of shells for engineers*, Akadémiai Kiadó, Budapest
- Lobkovsky, A. E. (1996) Structure of crumpled thin elastic membranes, PhD thesis, University of Chicago, Department of Physics, Chicago
- Pauchard, L., Rica, S. (1998) Contact and compression of elastic spherical shells: the physics of a 'ping-pong' ball, *Philosophical Magazine B*, **78/2**, 225-233
- Pogorelov, A. V. (1957) *Die Verbiegung konvexer Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin
- Pogorelov, A. V. (1988) *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*, American Mathematical Society, Providence
- Thang, C. Q. (1989) A gömbhéj szimmetrikus horpadása, *Építés-Építészettudomány*, **21/1-2**, 95-108
- Tsapis, N. et al. (2005) Onset of buckling in drying droplets of colloidal suspensions, *Physical Review Letters*, **94**, 018302/1-4
- Vaziri, A., Mahadevan, L. (2008) Localized and extended deformations of elastic shells, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105/23**, 7913-7918
- Vaziri, A. (2009) Mechanics of highly deformed elastic shells, *Thin-Walled Structures*, **47**, 692-700
- Wolmir, A. S. (1962) *Biegsame Platten und Schalen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin
- Zhu, E., Mandal, P., Calladine, C. R. (2002) Buckling of thin cylindrical shells: An attempt to resolve a paradox, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, 1583-1601