

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2  
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

*PH.D. ÉRTEKEZÉS*

**MAGASHŐMÉRSÉKLETŰ SZUPRAVEZETŐS ESZKÖZÖK NUMERIKUS  
MODELLEZÉSE**

ÍRTA:

**TIHANYI VIKTOR ROLAND**  
OKLEVELES VILLAMOSMÉRNÖK

TÉMAVEZETŐ:

**DR. VAJDA ISTVÁN**  
EGYETEMI TANÁR

BUDAPEST

2011

## TARTALOM

1	Bevezető.....	5
2	MHS induktív típusú zárlati áramkorlátozók és önkorlátozó transzformátorok modellezése.....	7
2.1	MHS zárlati áramkorlátozók.....	7
2.1.1	Induktív típusú MHS ZÁK.....	7
	Normál működési állapot.....	8
	Szupravezetési állapot határai.....	8
	Korlátozó állapot.....	9
2.1.2	Önkorlátozó transzformátor.....	9
2.2	Irodalmi áttekintés.....	9
2.2.1	MHS anyag modellek.....	10
	Power-law modell.....	11
	Bean-modell.....	11
	Flux-flow, creep modell.....	12
2.2.2	Zárlati áramkorlátozó szimulációk.....	12
2.2.3	Numerikus megoldók MHS anyagmodellekhez.....	13
2.3	Sajátfejlesztésű végeelem program jellemzői.....	14
2.4	Elektromágneses véges elemes modul.....	14
2.4.1	Geometriai modell.....	14
2.4.2	Vas anyagmodell.....	16
2.4.3	Szupravezető anyagmodell.....	17
	Alap modell.....	17
	Kerületi inhomogenitás.....	18
2.4.4	Hálózás.....	19
2.5	Hálózat szerkesztő modul.....	19
2.6	3D termikus modul.....	22
2.6.1	Hálózás.....	22
2.7	Alapegyenletek.....	23
2.7.1	Elektromágneses alapegyenletek.....	23
2.7.2	Hálózati alapegyenletek.....	24

2.7.3	Termikus alapegyenletek.....	25
2.8	Numerikus tranziens elektromágneses, hálózati és termikus egyenletek.....	25
2.8.1	Elektromágneses elemegyenlet .....	25
2.8.2	Hálózati elem egyenletek .....	27
2.8.3	Csatolt tekercs áramának külön egyenlete .....	29
2.8.4	Termikus elem egyenletek .....	29
2.9	Tranziens numerikus megoldás .....	31
2.9.1	Csatolt elektromágneses és hálózati egyenletek megoldása .....	31
	Nemlineáris egyenletrendszer megoldása Newton-Raphson módszerrel .....	31
	Inicializálás, előbecslés .....	32
	Newton-Raphson módszer lassítása .....	33
	Lineáris egyenletrendszerek megoldása.....	33
2.9.2	Termikus egyenletek megoldása .....	35
2.10	Szupravezető modell numerikus megvalósítása.....	35
2.10.1	Konverziók az elektromágneses és termikus számítás között.....	36
2.10.2	I. módszer .....	37
2.10.3	II. módszer.....	38
2.10.4	A Jacobi-mátrix előállítása.....	40
2.11	Eredmények összevetése a számításokkal.....	42
2.11.1	20KVA teljesítményű önkorlátozó transzformátor .....	42
2.11.2	ZÁK MHS szalaggal .....	49
	A vizsgált zárlati áramkorlátozó .....	49
	Geometria .....	49
	A szupravezető szalag .....	50
	A ZÁK statikus karakterisztika mérésének összevetése a szimulációval .....	52
	Dinamikus számítások.....	53
	Összegzés .....	57
2.12	Összegzés .....	58
2.13	Tézisek .....	59
3	MHS mágneses csapályák modellezése .....	60
3.1	MHS csapályák.....	60
3.2	Irodalmi áttekintés.....	61
3.3	Sajátfejlesztésű programok MHS csapályák szimulációjához .....	62
3.4	2D véges differenciás program.....	62

3.4.1	Geometria és rács készítés.....	62
3.4.2	Alapegyenletek.....	63
3.4.3	Numerikus egyenletek.....	63
	Síkbeli egyenlet.....	63
	Forgásszimmetrikus egyenlet.....	64
3.4.4	Numerikus megoldó.....	65
3.4.5	Eredmények megjelenítése.....	65
3.5	3D véges differenciás program.....	66
3.5.1	Geometria és rács készítés.....	66
3.5.2	Alapegyenletek.....	66
3.5.3	Numerikus egyenletek.....	67
3.5.4	Megoldás és eredmények.....	68
3.6	Szupravezető anyag modell.....	68
3.6.1	A makro (térszámításban alkalmazott) modell.....	69
3.6.2	Valós fizikai jelenségeken alapuló kritikus állapot modell.....	70
3.6.3	Összehasonlítás a Bean-moddellel.....	73
3.6.4	Különböző hűtési módok kezelése.....	73
3.6.5	A fluxus átrendezés folyamata.....	74
3.7	A kritikus gradiens meghatározása közvetett módszerrel.....	76
3.8	Eredmények összevetése a számításokkal.....	76
3.9	Összegzés.....	77
3.10	Tézis.....	78
4	Új tudományos eredmények.....	79
5	További kutatási feladatok.....	80
6	Irodalomjegyzék.....	81

# 1 Bevezető

A különböző numerikus számítási módszerek használata a mérnöki tervezésben ma már szinte elengedhetetlen. Az előforduló geometriai sokféleség, az anyagi nemlinearitások, tranzien folyamatok megfelelő minőségű vizsgálatához az analitikus módszerek nem adnak megfelelő támpontot. A numerikus térszámítás lehetőséget nyújt mindezen jelenségek együttes számításához.

A kereskedelemben forgalmazott térszámító szoftverek legtöbbje egyáltalán nem, néhány csak erősen korlátozottan képes a szupravezető anyagok kezelésére. Mindezek alapján két lehetőség van a szupravezetős alkalmazások szimulációjára: használhatunk kereskedelmi szoftvert, mely a felhasználói felületen túl alkalmas külső programozásra, melynek előnye, hogy a térszámítási módszerek nehézségeinek többségét elrejtí elölünk, hátránya, hogy könnyen korlátokba ütközhetünk. A másik lehetőség teljesen saját program fejlesztése, melynél nyilvánvalóan az összes térszámítással kapcsolatos problémával meg kell küzdeni, azonban a kód bármely részén tudunk változtatni, így a beavatkozási lehetőségeink sokkal kevésbé korlátosak. Mindegyik általam kidolgozott modellezési módszerhez saját térszámító programot készítettem.

A doktori munkám fő célja szupravezető anyagokat, alkatrészeket tartalmazó elektrotechnikai alkalmazások, szupravezetős csapágyak, zárlati áramkorlátozók és önkorlátozó transzformátorok olyan modellezési módszereinek kidolgozása, melyek segítséget nyújtanak ezen eszközök tervezésében. A kétféle eszköz (csapágyak, áramkorlátozók), különböző számításokat, vizsgálatokat igényel, ezért az értekezésben is erősen szétválasztom őket.

Az induktív típusú MHS zárlati áramkorlátozók, önkorlátozó transzformátorok analíziséhez mindenképpen tranzien szimulációt kell végezni, mely a szupravezető anyag különleges viselkedésének és ezen alkalmazásokban a határokig történő kihasználásának következtében összetett, multifizikális jellegű kell, hogy legyen. Az elektromágneses jelenségeken felül mindenképp figyelembe kell venni a termikus hatásokat is. A modellezéshez a csatolt véges elemes módszert alkalmaztam, melyhez saját kódot fejlesztettem. A szimulációban

közvetlenül csatolt 2D mágneses véges elemes és hálózati modell, továbbá ezekhez szekvenciálisan csatolt 3D termikus modell található.

A MHS lebegtetett csapágyak esetében a szimulációk a lebegtetési erők, mechanikai merevség számítására korlátozódtak. Ezen mennyiségek számításához speciális statikus szimulációt végeztem. A számításokhoz kidolgoztam egy saját, valós fizikai jelenségeket tükröző modellt, mely megfeleltethető az ismert kritikus állapot modellel. A modell megvalósításához a véges differenciák módszerét alkalmazó programokat készítettem, az egyik 2D-ben a másik 3D-ben számol. A véges differenciák módszere jól illeszthető a modellhez.

Az általam végzett szimulációs munka szorosan kapcsolódik a BME Villamos Energetika Tanszéken végzett szupravezetős eszközök kísérleti kutatásaihoz, ezáltal lehetőség volt minden esetben a szimulációs eredményeket valós MHS eszközökön végzett mérések eredményeivel összevetni.

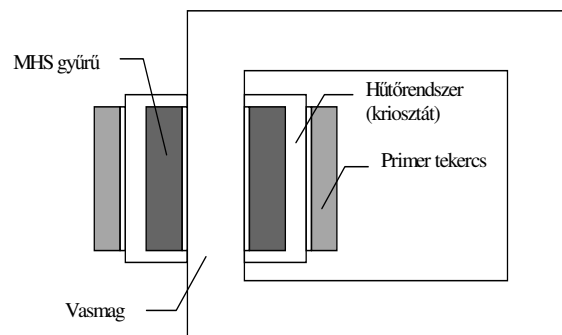
## 2 MHS induktív típusú zárlati áramkorlátozók és önkorlátozó transzformátorok modellezése

### 2.1 MHS zárlati áramkorlátozók

A Magas Hőmérsékletű Szupravezetős (MHS) Zárlati Áramkorlátozóknak (ZÁK) számos típusa van [1](rezisztív, induktív, híd típusú...). Az én munkámban csak az induktív típusal foglalkoztam, ezért a többit nem kívánom bemutatni.

#### 2.1.1 Induktív típusú MHS ZÁK

Az induktív típusú MHS ZÁK a szupravezetőnek azt a tulajdonságát használja ki, hogy adott paraméterek mellett (áramsűrűség, hőmérséklet, indukció) a szupravezető anyag elveszti szupravezető képességét, majd normál állapotba megy át. Természetesen ez egy összetett folyamat, ahol az átmenet lehet éles, vagy elkenet karakterisztikájú, melyet legnagyobb mértékben az MHS anyag határoz meg. Az 1. ábrán egy egyszerű MHS ZÁK elrendezés látható [2].



1. ábra. Induktív típusú MHS ZÁK felépítése (zárt vasmagos)

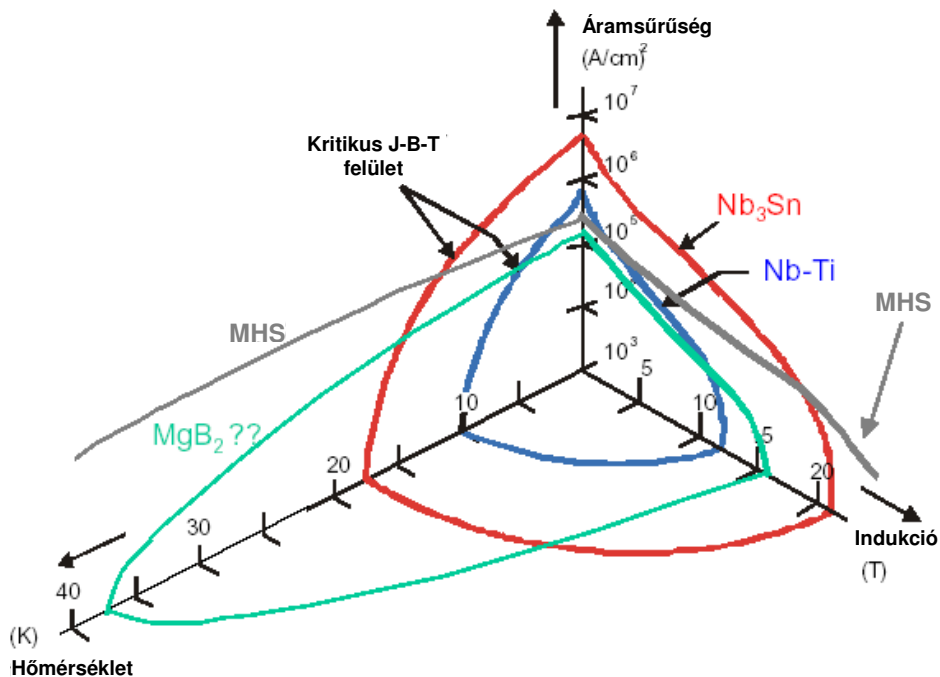
Az 1. ábra szerint egy zárt vasmagra egy MHS gyűrűt helyeznek el az egyik oszlopon, melyet természetesen valamely hűtési rendszerrel a kívánt hőmérsékletre kell hűteni. A gyűrű köré egy tekercset tesznek. A gyűrű és a tekercs ebben az elrendezésben azonos vasmagon található, ezzel minimalizálható a mágneses szórás. A tekercset a váltakozó áramú hálózatra sorosan kötik be, melynek ellenállása elhanyagolható a hálózati impedanciához képest, ezzel csökkentve a normál állapotú veszteségeket és a hálózatra gyakorolt hatást.

### Normál működési állapot

Megfelelően méretezett ZÁK esetén a névleges terhelésig a tekercsben folyó áram által gerjesztett mágneses tér nem tud behatolni a vasmagba, mert az MHS gyűrű mérnöki szempontból zérus ellenállásával teljesen leárnyékolja azt. Egy zárt hurokban az indukált feszültség a fluxus változással arányos, ami fordítva is igaz. Mivel a gyűrű rövidre van zárva, nulla ellenállás esetén bármekkora áram is folyik, nulla lesz a feszültség, ezáltal a fluxus változás is, tehát maga a fluxus is. Ilyenkor a tekercs induktivitása kicsi, a szórással megegyező, a hálózat szempontjából elhanyagolható.

### Szupravezetési állapot határai

Az szupravezető anyag állapotát (szupravezető, normál) alapvetően három paraméter határozza meg; hőmérséklet, áramsűrűség és indukció, melyek kritikus értékei ( $T_c, J_c, B_c$ ) egymástól függenek. A 2. ábrán néhány szupravezető anyag jellegzetes felületei láthatók [2], amennyiben a munkapont az anyagra jellemző felületen belül van, az anyag szupravezető állapotban van.



2. ábra. A szupravezető anyagok jellegzetes felületei

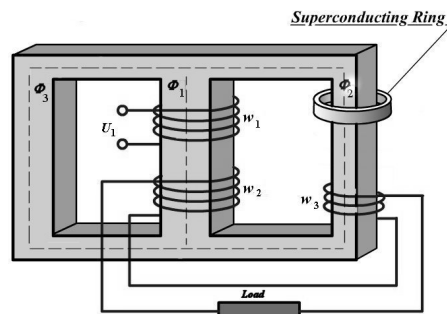
Az MHS ZÁK normál-korlátozó üzemi átmenetét, mint az később bemutatásra kerül, okozhatja túláram, vagy túlmelegedés egyaránt, természetesen az indukció is befolyásoló tényező, ami azonban ebben az esetben erősen az adott áram függvénye, mivel külső hozzáadott mágneses tér nincs jelen.

### ***Korlátozó állapot***

Egy esetleges hálózati zárlat esetén a tekercsben olyan nagy áramok folynak, amit már nem képes az MHS gyűrű leárnyékolni, mivel kibillen a szupravezetési állapotból, az MHS gyűrű normál állapotba kerül, megnő az ellenállása. Ekkor a fluxus könnyedén áthatol rajta, a tekercs inductivitása számottevően megnő. Az MHS ZÁK impedanciája meghatározó lesz a hálózatban, lényegesen csökkentve annak zárlati áramát.

### **2.1.2 Önkorlátozó transzformátor**

Az MHS önkorlátozó transzformátor egy speciális transzformátor, mely magába foglalja az MHS ZÁK-ot, közös vasmagjuk van. Egy lehetséges elrendezés látható a 3. ábrán. Amennyiben megfigyeljük a bal oldali oszlopról, egy egyfázisú transzformátort kapunk, melynek primer és szekunder tekercse a középső oszlopra van feltekerve. A jobb oldali oszlopon található egy kiegészítő tekercs, ami a szekunder tekercssel van sorba kötve és egy MHS gyűrű. Ez az eszköz ily módon magába foglalja egy egyfázisú transzformátort és egy MHS ZÁK-ot közös vasmagon. A különböző elrendezésekről, működési elvekről részletesen lehet olvasni Györe Attila disszertációjában [1]



3. ábra. Önkorlátozó transzformátor elrendezése

## **2.2 Irodalmi áttekintés**

Az irodalmakban számos munka található MHS anyagok numerikus modellezésével kapcsolatban. Alkalmazást tekintve az induktív típusú zárlati áramkorlátozóra és az önkorlátozó transzformátorra vonatkozóan azonban kevés numerikus számítás található, mivel jelenleg kevesen foglalkoznak ezekkel a típusokkal. Az I. Táblázatban [1] található egy összefoglalás, mely a világban jelenleg futó fontosabb ZÁK kutatási projekteket mutatja be. A

táblázatban jól látható, hogy mindössze egyetlen jelentős induktív típusú ZÁK projekt van folyamatban.

I. Táblázat. Jelenleg futó fontosabb MHS ZÁK projektek

Vezető társaság	Ország/év <sup>1)</sup>	Típus	Adatok <sup>2)</sup>	fázis	szupravezető
ACCEL / Nexans SC	D/2004	rezisztív	12 kV, 600 A	3-f. ✓	Bi 2212 tömb
CAS	Kína/2005	diódahíd	10,5 kV, 1,5 kA	3-f. ✓	BI 2223 szalag
CESI RICERCA	Olaszország/2005	rezisztív	3,2 kV, 220 A	3-f.	Bi 2223 szalag
CESI RICERCA	Olaszország/2005	rezisztív	0,6 kV, 270 A	1-f.	MgB2 huzal
Siemens/AM SC	D/USA/ 2007	rezisztív	7,5 kV, 300 A	1-f.	YBCO szalag
LSIS	Korea/2007	hibrid	24 kV, 630 A	3-f.	YBCO szalag
Hyundai/AMSC	Korea/2007	rezisztív	13,2 kV, 630A	1-f.	YBCO szalag
KEPRI	Korea/2007	rez-hibrid	22,9 kV, 630 A	1-f.	Bi 2212 tömb
Innopower	C/2008	DC előfeszített vas	35 kV, 90 MVA	3-f. ✓	Bi 2223 szalag
Toshiba	J/2008	rezisztív	6,6 kV, 72A	3-f. ✓	YBCO szalag
Nexans SC	D/2009	rezisztív	12 kV, 100 A	3-f. ✓	Bi 2212 tömb
Zenergy Power	USA/2009	DC előfeszített vas	12 kV, 1,2 kA	3-f. ✓	Bi 2223 szalag
Zenergy Power	USA/2009	DC előfeszített vas	15 kV, 1,2 kA	3-f. ✓	Bi 2223 szalag
Nexans SC	D/2009	rezisztív	12 kV, 800 A	3-f. ✓	Bi2212 tömb
Innopower	C/2010	DC előfeszített vas	220 kV, 300 MVA	3-f. ✓	Bi 2223 szalag
ERSE	I/2010	rezisztív	9 kV, 250 A	3-f. ✓	Bi 2223 szalag
ERSE	I/2010	rezisztív	9 kV, 1 kA	3-f. ✓	YBCO szalag
KEPRI	Korea/2010z	rezisztív	22,9 kV, 3 kA	3-f. ✓	YBCO szalag
AMSC / Siemens	USA/D/2012	rezisztív	115 kV, 1,2 A	3-f. ✓	YBCO szalag
Rolls Royce	UK/ -	rezisztív	11,5 kV, 400 A	3-f.	MgB2 huzal
Areva + 5 partner, köztük a BME VET	UK+D+F+Hu	induktív	2,5 kV, 24 A, 60kVA	1 f	Bi2223 szalag és Bi2212 gyűrű

## 2.2.1 MHS anyag modellek

Az MHS anyagok különleges viselkedésének modellezésére számos lehetőséget dolgoztak ki eddig, attól függően, milyen mélységig kíván valaki behatolni az anyag belső viselkedésébe. A szupravezetés jelensége megfelelő precizitással a kvantummechanika segítségével kezelhető. Egy makroszkopikus numerikus térszámításban ezen jelenségek figyelembe vételére nincs lehetőség, ahogyan a legtöbb esetben egy ferromágneses anyag modelljében

sem foglalkozunk a doménszerkezet sajátosságaival, egyszerűen egy makro B-H jelleggörbével közelítjük az anyag mágneses térbeli viselkedését. A szupravezető anyagokat leggyakrabban az E-J görbével szokás modellezni, mely makro szempontból a legtöbb esetben kielégítő közelítés.

### ***Power-law modell***

A tranziens számításokban jelenleg legelterjedtebb az E-J görbén alapuló „power-law” modell [23]. Az alapmodell kiegészíthető a különböző értékek hőmérséklet és indukció függésével, amivel szintén több megközelítés használható, melyek általában analitikus kifejezéssel próbálják közelíteni a valós anyagokon mért görbéket. Ezen összefüggések egyfajta gyakran használt megközelítésben jól összeszedve megtalálhatók az [3] cikkben. A cikk egy konkrét alkalmazási területtel, MHS tömb impulzus mágnesezéssel foglalkozik. Alkalmazás szempontjából lényegesen eltér a MHS zárlati áramkorlátozóktól, modellezés felől viszont gyakorlatilag nagyon hasonló feladat, hiszen az impulzus mágnesezés során is nagyon gyors elektromágneses és termikus tranziens folyamatok játszódnak le, hasonlóan, mint egy zárlati áramkorlátozóban a zárlati jelenségnél. A cikkben egy összehasonlítást végeznek, és bemutatják, hogy ilyen gyors tranzienseknél hatalmas különbségek adódnak a szimulációs eredményekben a különböző paraméterfüggések (hőmérséklet, indukció) esetén, melyekből természetesen messzemenő következtetéseket lehet levonni a valós fizikai jelenségekre vonatkozóan. A numerikus megoldáshoz saját kódot használtak, véges differenciás módszert alkalmazva.

### ***Bean-modell***

Fontos megemlíteni a Bean-modellt [21], [22], mely a legegyszerűbb kritikus állapot modell. Bean modellje a következő:

- 1)  $\mu_r = 1$ , a relatív permeabilitás tehát egységnyi a szupravezető anyagban
- 2)  $J = \begin{cases} 0 \leftarrow B = 0 \\ J_c \leftarrow B \neq 0 \end{cases}$

A modellben  $J_c$  a kritikus áramsűrűség. A Bean-modell és a kritikus állapot modelleket leggyakrabban analitikus számításokban alkalmazzák, leginkább 1D elrendezésekben. A kritikus állapot modell alkalmazása numerikus 2D, 3D számításokban igen nehézkes. A 3. fejezetben részletesen bemutatom egy általam fejlesztett kritikus állapot modell

megvalósítását 2D-3D véges differenciák módszerével, kifejezetten lebegtetett MHS csapágyak erő és merevség számításához.

### *Flux-flow, creep modell*

Bean kritikus állapot modellje nem alkalmas a dinamikus hatások figyelembe vételére, a lezajló mágneses folyamatok a modell szerint függetlenek az időbeli sebességtől. A dinamikus hatások figyelembe vétele végett az eredeti modellt sok esetben kiegészítik a „flux-flow” hatással [34]. Ekkor a szupravezetőben a fluxusszálak viszkózus mozgásakor a kritikus áramsűrűségnél nagyobb értékek is előfordulnak az elektromos térerősség növekedésével, ami arányos az időegység alatti fluxus változással. A kritikus áramsűrűségnél kisebb áramok esetén az alap modell szerint az elektromos térerősség nulla. A valóságban ezen a szakaszon is van fluxusszál mozgás, melyet „flux-creep” szakasznak neveznek. Ez igen kicsi veszteséget jelent, hosszú távon azonban például egy felmágnesezett szupravezetőben relaxációt okoz, a szupravezető mágnes veszít mágneszettségéből. A korábban említett „power-law” karakterisztika mérnöki szempontból mindkét szakaszt kielégítően kezeli.

## **2.2.2 Zárlati áramkorlátozó szimulációk**

A következőkben bemutatnák néhány olyan munkát, melyek szintén multifizikális jellegű numerikus ZÁK szimulációk. Legtöbbjükben rezisztív típust szimulálnak. Természetesen korábban voltak egyszerűbb, inkább 2D számítások, melyek nem vették figyelembe a melegedés hatását.

Az általam végzett munkához közel áll [5]. Ebben a cikkben a szerzők egy rezisztív típusú áramkorlátozó multifizikális modellezését mutatják be. A modellben szerepel egy teljes 3D szupravezető modell, mely magába foglalja az elektromágneses és termikus modellt egyaránt, továbbá tartalmaz egy csatolt hálózati modellt is. A megoldáshoz egy kereskedelmi szoftvert használnak (FLUX). A termo-elektromágneses csatolást szintén szekvenciális csatolással oldották meg. Az E-J karakterisztika modellezéséhez a power-law modellt használják, ami a FLUX szoftverben elérhető.

A [24] szintén egy rezisztív típusú ZÁK numerikus termo-elektromos szimulációját mutatja be 2D ben, szintén egy kereskedelmi szoftvert alkalmazva (COMSOL).

Szintén 3D termo-elektromos szimulációkat végeztek rezisztív típusú ZÁK analíziséhez [25] és [26]-ban. A számításokhoz az ANSYS szoftvert használták. [25]-ben összehasonlították az eredményeket egy speciális véges differenciás 2D programmal is.

A [27] ben egy saját fejlesztésű 2D elektromágneses szimulációt végeztek szalag típusú rezisztív ZÁK-hoz, melyhez csatoltak szekvenciálisan egy COMSOL programmal végzett termikus számítást.

Induktív típusú ZÁK szimulációt készítettek [28] ban. A számítások inkább a termikus részekre vannak kiélezve, továbbá a mechanikai erőhatásokra a gyűrűben a zárlatkor fellépő elektromágneses erők miatt. A szimulációkhoz a FLUX2D programot alkalmazták, kiegészítve saját kódjukkal.

### **2.2.3 Numerikus megoldók MHS anyagmodellekhez**

Az MHS anyagok numerikus modellezése, szimulációja rengeteg nehézséget rejt magában. Ez leginkább a nagyon erős nemlinearitásból, szupravezető állapotbeli közel zérus fajlagos ellenállásából következik. A problémával jelenleg rengeteg kutató, matematikus, programozó foglalkozik. Az általam felkutatott irodalmak alapján nincs jelenleg egyértelműen elfogadott módszer, amely minden problémára megfelelő megoldást adna. Általánosságban nemlineáris megoldónak leggyakrabban a Newton-Raphson módszert alkalmazzák, mely pl. lágymágneses anyagok esetén nagyon jó konvergenciát mutat. Az MHS anyag power-law modelljével azonban az alapszámítás nem igazán tud mit kezdeni, nem mutat konvergenciát, mert túl meredek a karakterisztika. A módszert ki lehet egészíteni lassítással, ami gyakorlatilag minden lépésben egy adott szorzó tényezővel kisebb ugrást jelent az eredetihez képest. A lassító faktor megválasztásához számos módszert találni az irodalmakban, melyek általában egy adott specifikus tesztprobléma esetén nagyon komoly eredményeket mutatnak, azonban más esetekben egyáltalán nem használhatók. Én többféle módszert kipróbáltam, legjobb eredményeket a [6] cikkben található módszerrel sikerült elérnem. A cikkben a maradék minimalizálására adnak egy paraméterezzhető algoritmust, melyet különböző paraméteres beállításokkal bemutatnak néhány tesztprobléma esetén.

A [29] cikkben található egy összehasonlítás a jelenleg használt numerikus formulákra az MHS anyagok modellezéséhez. A cikk megemlíti többek között az általam használt, a későbbiekben bemutatásra kerülő  $A - \varphi$  módszert.

## **2.3 Sajátfejlesztésű végeelem program jellemzői**

Az MHS ZÁK-ok szimulációjához egy teljesen saját fejlesztésű programot készítettem. A program Delphi fejlesztői környezetben készítettem. Az elvárások a programmal szemben a következők voltak:

- a) Tranziens 2D véges elemes mágneses térszámítás hálózattal közvetlenül csatolva;
- b) Tranziens 3D véges elemes termikus számítás a gyűrűre („hot spotok” miatt) szekvenciálisan csatolva az előzőekkel;
- c) Általános vasmagos ZÁK és önkorlátozó transzformátor geometriák gyors, automatikus szerkesztése;
- d) Teljesen általános hálózat szerkesztő;
- e) E-J görbén alapuló szupravezető modell, mely megfelelően írja le az anyag tranziens elektromágneses és termikus viselkedését;
- f) Gyors megoldó;
- g) A teljes modell és az eredmények megfelelő megjelenítése.

## **2.4 Elektromágneses véges elemes modul**

Az általam fejlesztett elektromágneses modul, ahogy korábban említettem 2 dimenziós. A geometriai modell elkészítése nem teljesen általános, mivel azonban a program kifejezetten zárlati áramkorlátozók és önkorlátozó transzformátorok számítására készült, ez kifejezetten előnyös.

### **2.4.1 Geometriai modell**

A geometriai modell alappillére a **vasmag**, mely lehet tetszőleges lábszámú, melyek különböző szélességűek. A mágneses térszámításhoz tartozó mélységet célszerűen a vasmag mélységével vesszük egyenlőnek. Megadható továbbá a háló sűrűség a vasmagon belül. A vasmag adatai:

- Oszlopszám;
- Oszlopok szélessége;
- Mélység;
- Járom vastagság;
- Járom szélesség;
- Oszlop magasság;
- Háló sűrűség.

A vizsgált tartomány **pereme** a vasmag köré van felvéve, definiálni csak a szélességet és a magasságot kell. A peremen a vektorpotenciálra Dirichlet típusú határfeltételt kényszerítünk. A perem adatai:

- Szélesség;
- Magasság.

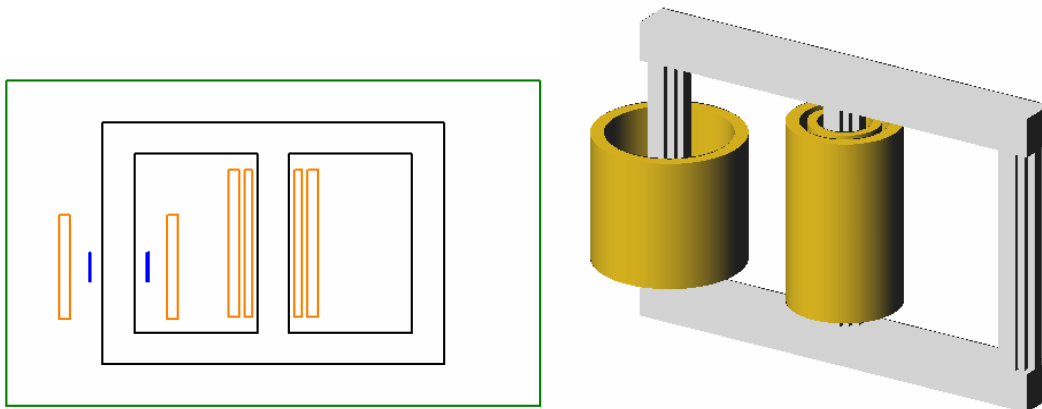
A vasmag oszlopai köré **tekerceket** lehet tenni. A tekercek adatai:

- Oszlop száma (vasmag oszlopa melyre a tekercs kerül);
- Külső sugár;
- Belső sugár;
- Magasság;
- Menetszám;
- Középpont y koordináta;
- Háló sűrűség.

A **szupravezető gyűrűk** szintén az oszlopokon helyezkednek el. A gyűrűk adatai:

- Oszlop száma (vasmag oszlopa melyre a tekercs kerül);
- Külső sugár;
- Belső sugár;
- Magasság;
- Anyag index (a gyűrű anyagának tulajdonságaira vonatkozik);
- Középpont y koordináta;
- Háló sűrűség.

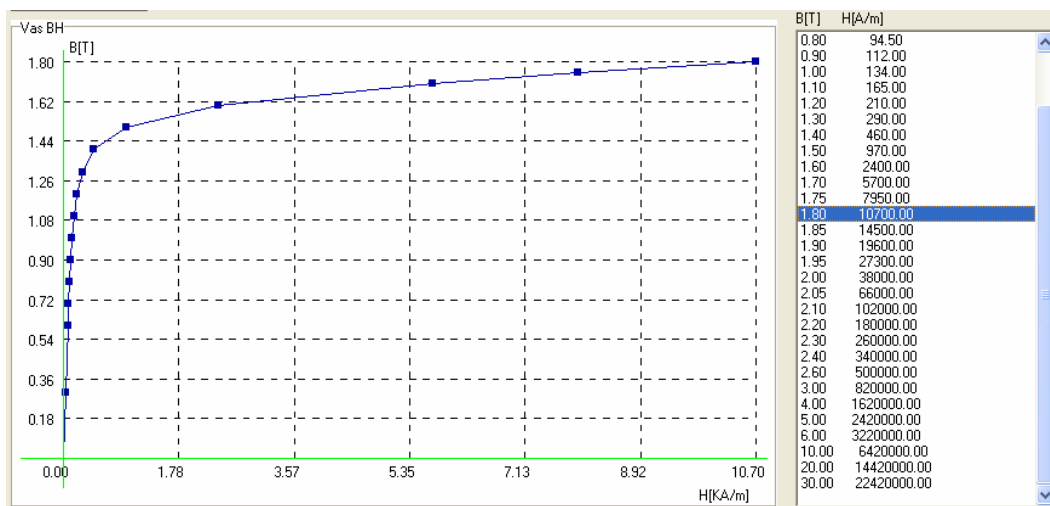
Az elkészült geometriai modellt leellenőrizhetjük és módosíthatjuk. Az elrendezést a program megjeleníti 2D-ben, és a jobb szemléltetés végett 3D-ben is (4. ábra).



4. ábra. Geometria megjelenítés 2D-ben és a modellezett elrendezés 3D-ben

## 2.4.2 Vas anyagmodell

A vas anyagának modellje egyértékű B-H görbével van jellemezve. Ez fájlból olvasható be, majd a program lehetőséget nyújt az ellenőrzésre (5. ábra). A pontok között lineáris interpolációval közelítem a görbét.



5. ábra. Vas B-H görbéjének megjelenítése

### 2.4.3 Szupravezető anyagmodell

Több szupravezető anyag típus definiálható, mivel több szupravezető gyűrű együttes működését is szeretnénk vizsgálni, melyek egymástól eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek.

#### *Alap modell*

Az elektromágneses szupravezető anyagmodell alapja az úgynevezett „Power law” modell (1), mely az anyagra jellemző E-J görbét közelíti zárt matematikai alakban. Az általunk készített modell figyelembe veszi ennek függését a hőmérséklettől, az indukciótól, az indukció irányától (2)-(3).

$$E = E_0 \left( \frac{J}{J_c(\underline{B}, T)} \right)^{n(\underline{B}, T)} \quad (1)$$

$$J_c(\underline{B}, T) = \frac{J_{c0}}{1 + |\underline{B}|/B_0} \cdot \frac{1 - T/T_c}{1 - T_0/T_c} \cdot F(\underline{B}) \quad (2)$$

$$n(\underline{B}, T) = n_1 + \frac{n_0 - n_1}{1 + |\underline{B}|/B_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (3)$$

Az (1) összefüggésben szereplő  $J_c$  kritikus áramsűrűség (2) és az  $n$  (3) kitevő függ a hőmérséklettől és az indukciótól. Az  $F(\underline{B})$  függvény a kritikus áramsűrűség indukció irányfüggésére vonatkozik, mely lehet egy pontonként megadott tetszőleges karakterisztika.  $T_c$  az anyag kritikus hőmérséklete,  $T_0$  a hűtőközeg hőmérséklete. Ezen alapösszefüggésen kívül a modell figyelembe veszi a kezdeti ellenállást, mely numerikus stabilitás szempontjából elengedhetetlen. A kezdeti ellenállás mellett hozzávesszük a nagy áramsűrűségeknél kialakuló szaturációs, normál állapotú ellenállást [5]. Az (1) összefüggéssel kifejezve a vezetőképességet a (4) kifejezést kapjuk.

$$\sigma = \frac{\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{n(\underline{B}, T)}\right) J_c(\underline{B}, T)}{E} \quad (4)$$

Ehhez hozzávesszük a már említett  $\sigma_0$  kezdeti, és a  $\sigma_{norm}$  normál állapotú vezetőképességet (5).

$$\sigma = \frac{1}{\frac{E}{\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{n(\underline{B}, T)\right)} J_c(\underline{B}, T) + \frac{1}{\sigma_0}} + \sigma_{norm} \quad (5)$$

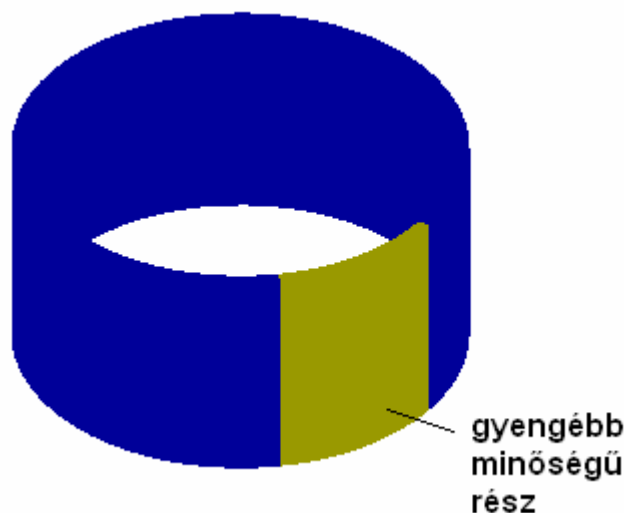
### ***Kerületi inhomogenitás***

A tömbi szupravezető anyagoknál igen gyakori problémát okoznak a különböző inhomogenitások a tömbön belül. Mivel ezek előfordulása véletlenszerű, lokálisan erősen befolyásolják az elektromágneses és termikus viselkedést, a fent említett kis mintákon mért anyagi jellemzőkkel gyakorlatilag nem lehet modellezni a teljes tömbi anyagot. Az anyag teljes feltérképezése szintén reménytelennek tűnő feladat. A jelen modellünkben azonban szeretnénk valamilyen egyszerűsített módon kezelni a problémát.

Két további modellparamétert vezetek be, mely a gyűrű formájú tömbi anyagot jellemzi:

- a) Kerületi hiba;
- b) Felületi hiba.

A gyűrű kerülete mentén az anyagot két részre osztom, az egyiket az anyag valós, mért karakterisztikájával, a másikat ettől valamivel rosszabb anyagi tulajdonságokkal jellemzem. A két fenti paraméter határozza meg azt, hogy a kerületnek hány százaléka rendelkezik a rosszabb paraméterekkel (kerületi hiba), és ebben a részben a valós geometriai felületnek hány százaléka vesz részt a vezetésben (felületi hiba), mely a 6. ábrán szemléletesen látszik.



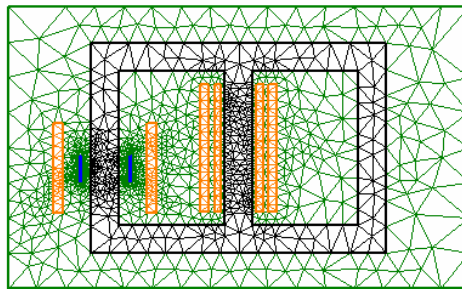
6.ábra. Kerületi inhomogenitás modellezése

Amennyiben kisebb felületen vezet az anyag azonos áramot, akkor a felületek arányában a  $J$  áramsűrűség növekszik. Az (1) kifejezésben a  $J$  áramsűrűség növekedése egyenértékű a  $J_c$  kritikus áramsűrűség azonos mértékű csökkenésével. A (2) összefüggés ekkor egy további  $F_h$  tényezővel bővül (6), mely egy nulla és egy közötti viszonyszám, ami a már említett felületi hibával egyezik meg.

$$J_c(\underline{B}, T) = \frac{J_{c0}}{1 + |\underline{B}|/B_0} \cdot \frac{1 - T/T_c}{1 - T_0/T_c} \cdot F(\underline{B}) \cdot F_h \quad (6)$$

#### 2.4.4 Hálózás

A hálózót ezúttal nem saját magam fejlesztettem. Egy megfelelő minőségű hálózó elkészítése önmagában is többéves fejlesztést igényel. Mivel az interneten keresztül vannak nyílt forráskódú, megfelelő, jól működő hálózók, én is választottam egy ilyet, mely „Triangle” néven ismert [7]. A programnak megadható a teljes geometria, mely elvégzi a hálózást, lekezeli az anyagtulajdonságokat, továbbá állítható az egyes tartományokban a háló sűrűség. A 7. ábrán egy, az említett programmal generált háló látható.



7. ábra. 2D háló

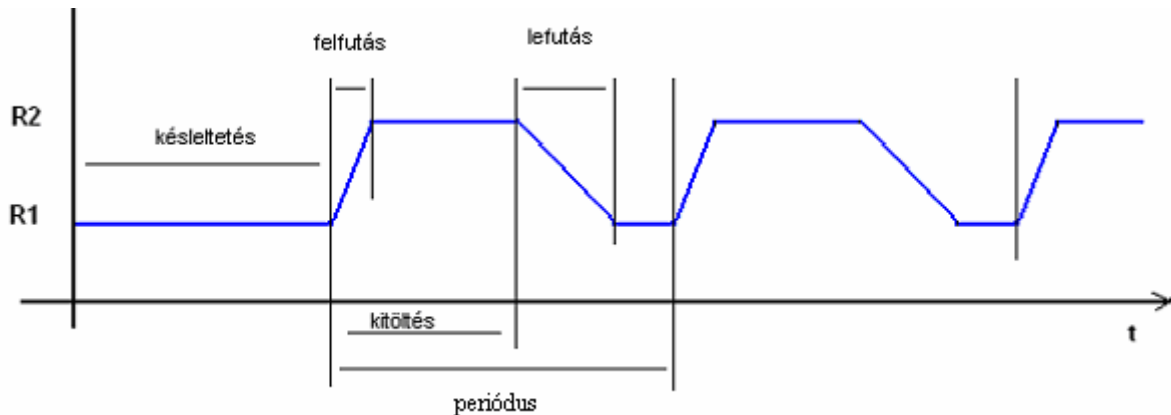
## 2.5 Hálózat szerkesztő modul

A csatolt villamos hálózat egyszerű kezelése érdekében egy teljesen általános hálózatszerkesztő modult fejlesztettem. Ennek segítségével könnyen modellezhetünk bármilyen kapcsolást, függetlenül attól, hogy zárlati áramkorlátozót, vagy éppen önkorlátozó transzformátort szeretnénk szimulálni.

A hálózatban a következő elemek használhatók:

- Ellenállás;
- Induktivitás;
- Kapacitás;
- Csatolt elosztott tekercs;
- Csatolt tömör vezető;
- Feszültséggenerátor;
- Áramgenerátor;
- Kapcsoló;
- Ideális vezeték;
- Rögzített potenciál.

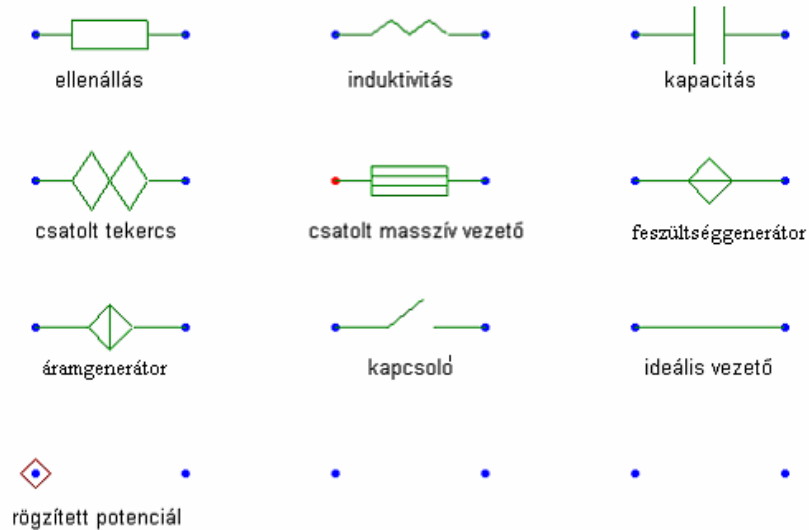
Az ellenállás, induktivitás és kapacitás teljesen hagyományos hálózati elemek, ezek funkcióját és tulajdonságait nem kell részletezni. A feszültséggenerátor szinuszos forrás, Dc komponenssel kiegészítve, állítható a frekvencia, amplitúdó, fázis és a belső, soros ellenállás. Az áramgenerátor ugyanez, kivétel az ellenállás, ami párhuzamos. A kapcsoló gyakorlatilag egy ellenállás, aminek az értéke időben változik. Paraméterei két ellenállás érték, frekvencia, késleltetés, kitöltés, felfutás és lefutás (8. ábra).



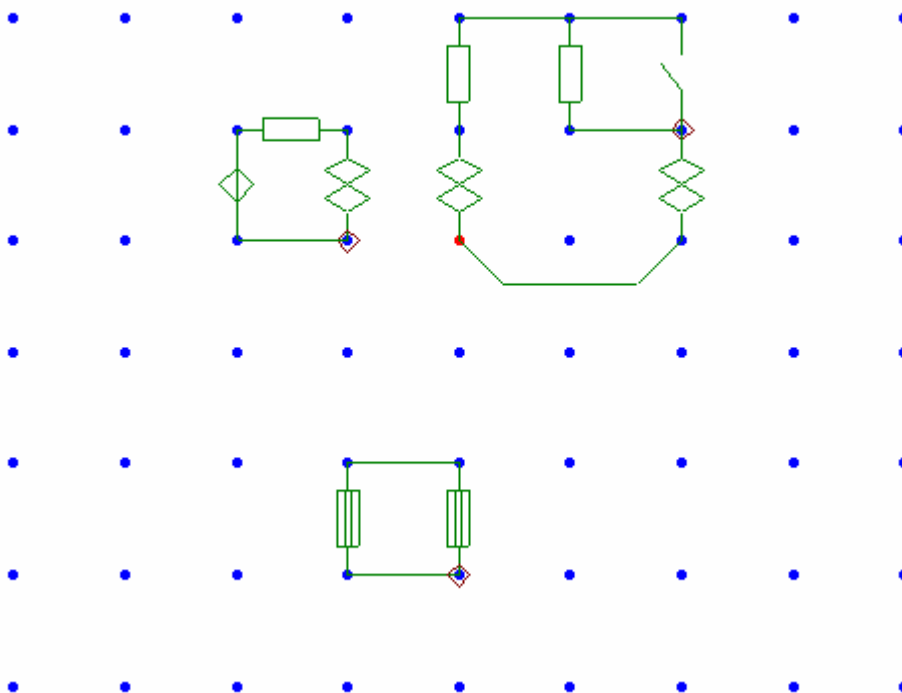
8. ábra. Kapcsoló elvi működése

A csatolt elosztott tekercs és a csatolt tömör vezető különleges hálózati elemek, melyek kapcsolatot teremtenek a 2D mágneses tér és a hálózati egyenletek között. Mindkét elem feszültsége és árama közötti kapcsolatban a mágneses vektor és az elektromos skalár potenciál egyaránt szerepet játszik. Mindkét hálózati elem típushoz tartozik egy hozzá tartozó terület a 2D modellben. A tekercs teljes területén azonos áramsűrűség található, a tömör vezető minden elemére azonos elektromos feszültség jut. Az egyes elem típusok szimbólumai a 9. ábrán láthatók, melyek eltérnek a szabványos ábrázolásmódtól.

A 10. ábrán egy önkorlátozó transzformátor hálózati modellje látható, melyben szerepel feszültségforrás a primer oldalon, egy primer, két szekunder tekercs, lezáró ellenállások, rövidre záró kapcsoló, és a szupravezető gyűrű, melyet két tömör vezető reprezentál. Ez esetben a tömör vezető fajlagos ellenállása nem konstans, hanem az aktuális szupravezető modellnek megfelelő nemlineáris karakterisztikával jellemezhető. A hálózatban természetesen minden független részben található egy, ebben az esetben nulla rögzített potenciál.



9. ábra. Hálózati elem szimbólumok



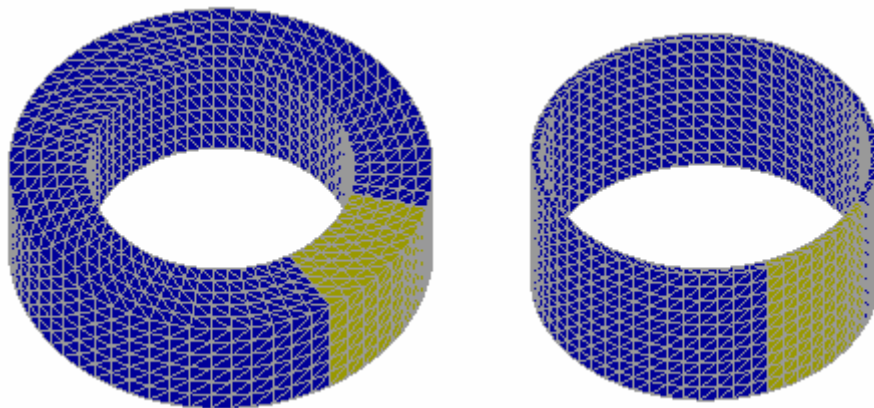
10. ábra. Egy önkorlátozó transzformátorhoz tartozó hálózati modell

## 2.6 3D termikus modul

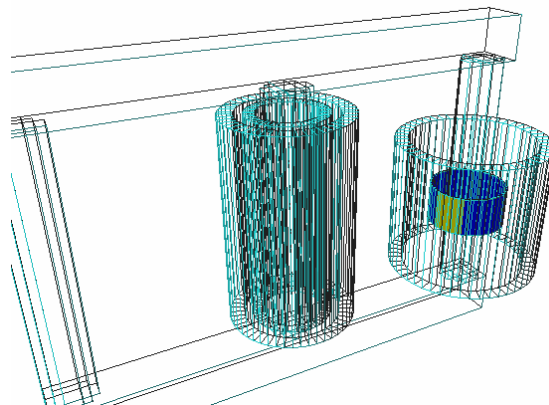
A háromdimenziós termikus számításban a szupravezető gyűrűk vannak modellezve. A számítás ebben az esetben lineáris, tranziens. A modellben beállítható a gyűrű anyagának fajlagos hőkapacitása, a hővezetőképessége, továbbá az anyag és a hűtőközeg (folyékony nitrogén) határán levő hőátadási tényező.

### 2.6.1 Hálózás

A 3D hálózás a rögzített (gyűrű) geometria miatt igen egyszerű, paraméterként megadható az egyes hengerkoordináta rendszerben levő irányok szerinti felosztási sűrűség, mely minden egyes modellezett gyűrűre különböző lehet. A háló tetraéder elemekre osztja fel geometriát. A 11. és 12. ábrákon hálózott gyűrűket láthatunk.



11. ábra. Két különböző gyűrűhöz tartozó 3D tetraéder háló



12. ábra. Hálózott gyűrű elhelyezkedése a teljes geometriában

## 2.7 Alapegyenletek

A felhasznált elektromágneses és termikus véges elemes egyenleteket, továbbá hozzájuk kapcsolódó numerikus megoldási módszereket a jelenleg elérhető legújabb irodalmak alapján igyekeztem kidolgozni.

### 2.7.1 Elektromágneses alapegyenletek

Az elektromágneses modulban az  $A-\phi$  módszert alkalmazom, melyben  $A$  a mágneses vektor,  $\phi$  az elektromos skalárpotenciál. A megoldásnál mindkettőt meg kell határoznunk. Két dimenziós, Descartes koordináta-rendszerbeli problémák esetén a vektorpotenciálnak a  $z$  irányú komponensével elegendő számolni. A 2D véges elemes modell csak külső, hálózati részből eredő forrást használok, azon térrészekben, melyek nem tömör vezetőkhöz és nem elosztott tekercsekhez csatolódnak a (7) egyenlettel jellemezhető a mágneses tér,

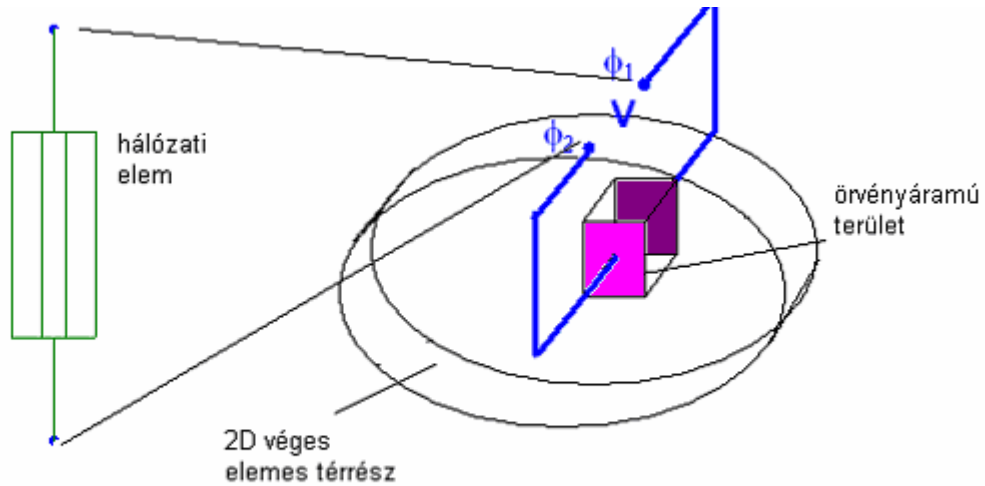
$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

ahol  $\nu$  az anyag reluktanciája. Az örvényáramú, tömör vezető térrészben a (8) összefüggést alkalmazom.

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma \frac{V}{h} \quad (8)$$

$$V = \phi_1 - \phi_2$$

$\sigma$  az anyag vezetőképessége,  $h$  a probléma  $z$  irányú kiterjedése,  $V$  a térrészen eső elektromos feszültség, mely kifejezhető a hálózati modellben levő csatolt tömör vezető elem két csomópontján levő skalárpotenciállal. A 13. ábrán szemléletesen látható a tömör vezetőre vonatkozó hálózati elem és 2D mágneses térrész közötti csatolás.



13. ábra. Csatolás a mágneses tér és hálózati elemek között

Csatolt tekercs esetén a (9) összefüggést alkalmazom.

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = J_{teker cs} \quad (9)$$

$$J_{teker cs} = \frac{N \cdot I_{teker cs}}{S}$$

Amint az észrevehető, csatolt tekercs esetén nem szerepel a skalárpotenciál az egyenletben, helyette a tekercs árama, vagy áramsűrűsége van feltüntetve. Mivel a tekercs árama szintén ismeretlen, a vektor és skalárpotenciál ismeretleneken kívül meg kell határozni még a tekercs áramokat, ami tekercsenként egy plusz ismeretlent jelent.

## 2.7.2 Hálózati alapegyenletek

A hálózati egyenletekben a csomóponti potenciálok módszerét alkalmazom, mely szerint minden csomópontba a befolyó (vagy kifolyó) áramok eredője nulla. Az egyes elemtípusokra vonatkozó karakterisztikák a következők;

Ellenállás:  $I = \frac{U}{R} \quad (10)$

Induktivitás:  $U = L \frac{di}{dt} \quad (11)$

Kapacitás:  $I = C \frac{dU}{dt} \quad (12)$

Csatolt tekercs: 
$$I_{tek} = \frac{U}{R_{tek}} - \frac{N}{R} \frac{\partial \phi_{tek}}{\partial t} \quad (13)$$

Csatolt tömör vezető: 
$$I_{tv} = \frac{U}{R_{dc}} - \sigma \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} dS \quad (14)$$

Feszültséggenerátor: 
$$I = \frac{U_b - U_k}{R_b} \quad (15)$$

Áramgenerátor: 
$$I_k = I_b - \frac{U_k}{R_b} \quad (16)$$

### 2.7.3 Termikus alapegyenletek

A termikus alapegyenlet (17) a teljes tartományban azonos [8] .

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

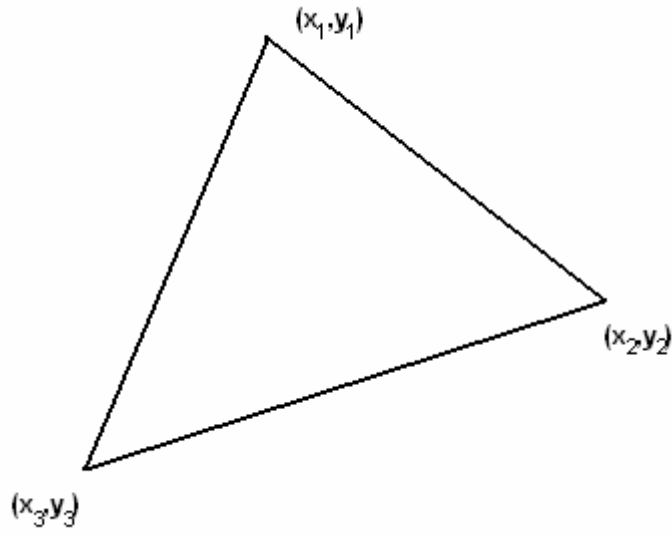
$\lambda$  az anyag hővezetőképessége,  $f$  a keletkező teljesítménysűrűség,  $c$  az anyag fajlagos hőkapacitása,  $\rho$  az anyag sűrűsége. A gyűrű felületén harmadfajú határfeltételt írok elő, konstans felületi hőátadási tényezőt alkalmazva.

## 2.8 Numerikus tranziens elektromágneses, hálózati és termikus egyenletek

### 2.8.1 Elektromágneses elemegyenlet

A lineáris háromszögre vonatkozó elemegyenlet (18) normál területre (7) alapján a 14. ábra segítségével kifejezhető [9], [10].

$$\underline{\underline{S}}^e \cdot \underline{\underline{A}}^e = 0 \quad (18)$$



14. ábra. Lineáris háromszög elem

$$\underline{\underline{S}}^e = \frac{1}{4\Delta^e \mu_e} \begin{bmatrix} \Delta x_{23}^2 + \Delta y_{23}^2 & \Delta x_{23}\Delta x_{31} + \Delta y_{23}\Delta y_{31} & \Delta x_{12}\Delta x_{23} + \Delta y_{12}\Delta y_{23} \\ \Delta x_{23}\Delta x_{31} + \Delta y_{23}\Delta y_{31} & \Delta x_{31}^2 + \Delta y_{31}^2 & \Delta x_{31}\Delta x_{12} + \Delta y_{31}\Delta y_{12} \\ \Delta x_{12}\Delta x_{23} + \Delta y_{12}\Delta y_{23} & \Delta x_{31}\Delta x_{12} + \Delta y_{31}\Delta y_{12} & \Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Delta x_{ij} = x_i - x_j, \Delta y_{ij} = y_i - y_j \quad (20)$$

$$\mu_e = \mu_0 \mu_{re} \quad (21)$$

$$\underline{\underline{A}}^e = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

A (19) összefüggésben  $\Delta_e$  a háromszög területe.

Az örvényáramú területre vonatkozó elemegyenlet (23) a (8) kifejezésből kiindulva, hátralépő Euler idő-differencia sémát alkalmazva:

$$\underline{\underline{S}}^e + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}^e + \underline{\underline{b}}_1 \phi = \underline{\underline{b}}_2 A_{t-\Delta t}^e \quad (23)$$

$$\underline{\underline{P}} = \sigma \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\underline{\underline{b}}_1 = \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ -\phi_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\underline{\underline{b}}_2 = \frac{\sigma}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A tekercs területre (28) az egyenlet (9) alapján írható fel.

$$\underline{\underline{S}}^e \cdot \underline{\underline{A}}^e - \underline{\underline{b}}_3 \cdot \underline{\underline{J}}_{tek} = 0 \quad (28)$$

$$\underline{\underline{b}}_3 = \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

## 2.8.2 Hálózati elem egyenletek

Az alábbiakban a különböző hálózati elemekre vonatkozó egyenletek láthatók. A egyenleteknél a csomóponti potenciálok módszerét alkalmazom.

Ellenállás:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Induktivitás:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{L} & \frac{\Delta t}{L} \\ \frac{\Delta t}{L} & -\frac{\Delta t}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{t-\Delta t} \\ -I_{t-\Delta t} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Kapacitás:

$$\begin{bmatrix} -\frac{C}{\Delta t} & \frac{C}{\Delta t} \\ \frac{C}{\Delta t} & -\frac{C}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C}{\Delta t} \cdot U_{t-\Delta t} \\ \frac{C}{\Delta t} \cdot U_{t-\Delta t} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Áramgenerátor:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b} \\ \frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Is(t) \\ -Is(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Feszültséggenerátor:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b} \\ \frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Us(t) \\ Us(t) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Csatolt tekercs:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_p} & \frac{1}{R_p} \\ \frac{1}{R_p} & -\frac{1}{R_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_{tek} \frac{S}{N} \\ J_{tek} \frac{S}{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Csatolt tömör vezető:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{DC}} & \frac{1}{R_{DC}} \\ \frac{1}{R_{DC}} & -\frac{1}{R_{DC}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_i^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \\ -\sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_i^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_{i,t-\Delta t}^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \\ -\sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_{i,t-\Delta t}^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Látható, hogy minden egyenletben szerepel a főátlóban tag. Ez a feszültséggenerátor és áramgenerátor esetében a belső ellenállások figyelembe vételével érhető el. Csatolt tekercs esetén egy külön a tekercssel párhuzamosan kapcsolt ellenállással sikerült ezt elérni. Kézi megoldás esetében nem okozna problémát a főátlóbeli tag hiánya, a numerikus solveknél azonban előfordulhatna nullával való osztás.

### 2.8.3 Csatolt tekercs áramának külön egyenlete

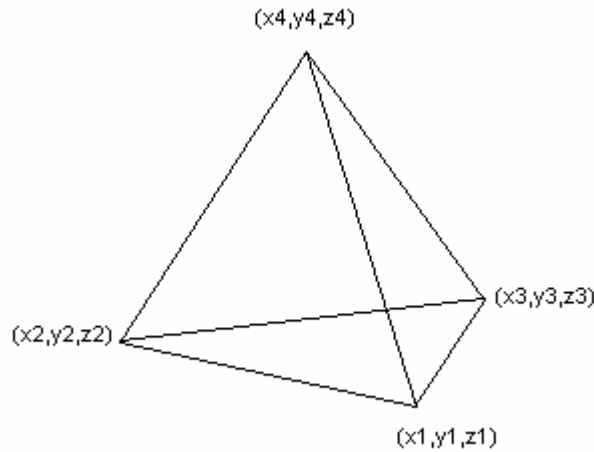
Már korábban említettem, hogy a csatolt tekercs árama tekercsenként egy plusz ismeretlent ad, aminek következtében ugyanennyi plusz egyenletet kell felvennünk az egyértelmű megoldhatóságához.

A tekercs áramát kifejezhetjük a (37) egyenlettel [11].

$$I_{tek} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R_{tek}} - \frac{N \cdot h}{R_{tek} \cdot S} \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,coil}} \sum_{i=1}^3 (A_i - A_{i,t-\Delta t}) \frac{\Delta_e}{3} \quad (37)$$

### 2.8.4 Termikus elem egyenletek

A 3D tetraéder elem a 15. ábrán látható a csúcspontok koordinátáinak feltüntetésével.



15. ábra. Lineáris tetraéder elem

A tetraéder elemre felírandó egylet a korábbiak figyelembe vételével [12]:

$$\underline{\underline{K}}_1^e \underline{T}^e + \underline{\underline{K}}_2^e \underline{T}^e + \underline{\underline{K}}_3^e \underline{T}^e = \underline{P}_1^e + \underline{P}_2^e \quad (38)$$

A  $\underline{\underline{K}}_1^e$  mátrix felírásához a jobb átláthatóság érdekében bevezetünk néhány segédváltozót (39-50).

$$b_1 = (y_2 - y_4)(z_3 - z_4) - (y_3 - y_4)(z_2 - z_4) \quad (39)$$

$$b_2 = (y_3 - y_4)(z_1 - z_4) - (y_1 - y_4)(z_3 - z_4) \quad (40)$$

$$b_3 = (y_1 - y_4)(z_2 - z_4) - (y_2 - y_4)(z_1 - z_4) \quad (41)$$

$$b_4 = -(b_1 + b_2 + b_3) \quad (42)$$

$$c_1 = (x_3 - x_4)(z_2 - z_4) - (x_2 - x_4)(z_3 - z_4) \quad (43)$$

$$c_2 = (x_1 - x_4)(z_3 - z_4) - (x_3 - x_4)(z_1 - z_4) \quad (44)$$

$$c_3 = (x_2 - x_4)(z_1 - z_4) - (x_1 - x_4)(z_2 - z_4) \quad (45)$$

$$c_4 = -(c_1 + c_2 + c_3) \quad (46)$$

$$d_1 = (x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_2 - y_4) \quad (47)$$

$$d_2 = (x_3 - x_4)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_3 - y_4) \quad (48)$$

$$d_3 = (x_1 - x_4)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_4) \quad (49)$$

$$d_4 = -(d_1 + d_2 + d_3) \quad (50)$$

$$\underline{\underline{K}}_1^e = \frac{\lambda}{36 \cdot V^e} \begin{bmatrix} (b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) & (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) & (b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3) & (b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4) \\ (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) & (b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) & (b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3) & (b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4) \\ (b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3) & (b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3) & (b_3^2 + c_3^2 + d_3^2) & (b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4) \\ (b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4) & (b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4) & (b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4) & (b_4^2 + c_4^2 + d_4^2) \end{bmatrix} \quad (51)$$

Az (51) egyenletben  $V^e$  a tetraéder térfogata.

$$\underline{\underline{K}}_2^e = \frac{\alpha A_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

A  $\underline{\underline{K}}_2^e$  mátrix felírásánál feltételezzük, hogy tetraéder 123 pontok által közrefogott oldalán van felületi hőátadás a környezet felé. A többi oldalra értelemszerűen állítható elő a mátrix (52) alapján.

A  $\underline{\underline{K}}_3^e$  (53) tranziens tag felírásánál a Crank-Nicolson idő differencia sémát alkalmazzuk.

$$\underline{\underline{K}}_3^e \cdot \dot{\underline{T}} = \frac{2}{\Delta t} \frac{c \rho V^e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot (\underline{T} - \underline{T}_{t-\Delta t}) \quad (53)$$

Az (54) egyenlet segítségével a térfogatban keletkező hőmennyiséget vesszük figyelembe.

$$\underline{P}_1^e = \frac{q_0 V^e}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$q_0$  az egységnyi térfogatban keletkező veszteségi teljesítmény.

$\underline{P}_2^e$  (55) kifejezésénél (52) egyenlethez hasonlóan az 123 pontok által közrefogott felületre írjuk fel a mátrixot.

$$\underline{P}_2^e = \frac{\alpha T_\infty A_{123}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

## 2.9 *Tranziens numerikus megoldás*

### 2.9.1 **Csatolt elektromágneses és hálózati egyenletek megoldása**

A tranziens, erősen nemlineáris csatolt elektromágneses és hálózati egyenletrendszert a Newton-Raphson módszerrel oldom meg. A következőkben egy rövid bemutatást adok a módszerről.

#### *Nemlineáris egyenletrendszer megoldása Newton-Raphson módszerrel*

A egyenletrendszerünk az (56) formában adható meg.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (56)$$

Ahol  $\underline{\underline{A}}$  a koefficiens mátrix,  $\underline{x}$  az ismeretlen vektor,  $\underline{b}$  a gerjesztés vektor. Amennyiben az  $\underline{\underline{A}}$  koefficiens mátrix együtthatók függenek az  $\underline{x}$  eredmény vektortól, az egyenletrendszerünk nemlineáris. A Newton-Raphson módszer [13] lényege, hogy a nemlineáris egyenletrendszer megoldását visszavezeti lineáris egyenletrendszer megoldásra több iterációs lépésben. Az algoritmus a következő:

- 1)  $\underline{x} = \underline{x}_0$  ahol  $\underline{x}_0$  egy kezdeti érték
- 2)  $\underline{r} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} - \underline{b}$  ahol  $\underline{r}$  a maradékvektor

- 3)  $\underline{\underline{A}}'\underline{\Delta x} = -\underline{r}$  lineáris egyenletrendszert megoldjuk, ahol  $\underline{\underline{A}}'$  a Jacobi-mátrix
- 4)  $\underline{x} = \underline{x} + \underline{\Delta x}$  az aktuális eredmény vektorhoz hozzáadjuk a  $\underline{\Delta x}$  vektort
- 5) Amennyiben megfelel a megoldás, leállunk, ha nem akkor a 2) lépéssel folytatjuk

Az  $\underline{\underline{A}}'$  Jacobi, vagy derivált mátrixot a következőképp állíthatjuk elő; az  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} - \underline{b} = 0$  kifejezés esetünkben egy többváltozós függvénysor, a Jacobi-mátrix  $A'_{i,j}$  eleme a függvénysor  $i$ -edik sorának az  $x_j$  szerint deriváltjával lesz egyenlő (57)

$$A'_{i,j} = \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} \quad (57)$$

Az így előállított Jacobi-mátrix struktúrája a mi esetünkben megegyezik az eredeti koefficiens mátrix struktúrájával, tehát nem kell többlet műveleteket végezni a felépítés vizsgálatához a tárolás optimalizációjánál.

Amennyiben az egyenletrendszer lineáris, a módszer az első lépésben megadja a végeredményt.

### ***Inicializálás, előbecslés***

A Newton-Raphson módszernél az 1) lépésben fel kell venni egy adott vektort, mely egy kiindulási állapot. Legegyszerűbb eset, ha nulla vektort írunk elő, tehát minden elem nulla értékű. A kezdeti érték erősen befolyásolja a szükséges iterációk számát, hiszen ha pl. amennyiben a kezdeti érték megegyezne a keresett eredménnyel, akkor egyetlen mátrixegyenlet megoldást sem kellene elvégezni.

Ennek megfelelően a számítások során a programban alkalmaztam egy előbecslő módszert, ami megpróbálja megbecsülni az előző időlépések eredményeit felhasználva az aktuális eredményvektort. A módszerben az előző három időpontot veszem figyelembe, Taylor sor segítségével előállítom a várható vektort, mely természetesen tartalmazza a vektorpotenciál, skalárpotenciál és tekercs áram értékeket.

Az előbecslés természetesen az első három lépésben nem elérhető, ekkor nulla vektort alkalmazok inicializálásként.

Amennyiben adott iterációs szám után nem konvergál a módszer, automatikusan visszaugrik a nulla vektorra, természetesen csak előbecslés alkalmazás esetén. Az általam választott iteráció szám 50 volt. A legtöbb esetben az iterációk száma ennél kevesebb volt előbecslés után. Az időpillanatok legfeljebb 2-3%-ában érte el a maximális 50 iteráció számot. Összehasonlítván

az előbecslés nélküli és előbecsléssel történt átlagos iterációszámot, az előbecslés alkalmazása leggyakrabban drasztikus csökkenéshez vezetett, sokszor 5-10 szeres gyorsítást eredményezett.

### ***Newton-Raphson módszer lassítása***

A Newton-Raphson módszer nagy előnye a többi nemlineáris megoldóval szemben, hogy négyzetesen konvergál. Túl éles nemlinearitás esetén, mint amilyen az MHS anyagokban jellemző, az alaplódszer túl nagy ugrásokat tesz egy lépésben, aminek következtében nem képes konvergálni. Ennek javítására többféle módszert dolgoztak ki, melyekben leggyakrabban valamely elv szerint a módszer 4) lépésében a  $\Delta x$  vektort valamely 0 és 1 közötti faktorial megszorozzák, mely eredményeképpen az ugrások mértékét csökkenteni lehet.

Az említett szorzó faktor megválasztására rengeteg irodalom található. Különböző stratégiákat dolgoztak ki, az egyik leggyakrabban használt módszer a maradék csökkentésére vonatkozik. Ekkor az alaplódszer 2) lépésében az  $r$  maradékvektor négyzetösszegét vizsgálják, a szorzó faktort addig csökkentik, amíg a négyzetösszeg kisebb lesz, mint az előző iterációs lépésben. Én szintén ezt a módszert alkalmazom a [6] szerint.

### ***Lineáris egyenletrendszerek megoldása***

A fent említett Newton-Raphson módszer során a 3) lépésben egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Erre az irodalmakban számos módszert találunk, melyek két fő típusra bonthatók:

- Direkt megoldók
- Iteratív megoldók

A direkt megoldók általában a Gauss elimináción alapulnak, melyet kombinálhatnak a szimmetria kihasználásával, továbbá különböző módszerekkel meggyorsítják, mely lehet például ismeretlen újraszámolás, memória kezelés optimalizálás.

Az iteratív megoldásra szintén rengeteg lehetőség van, ezek nagy előnye a direkt megoldással szemben, hogy legtöbbjüknel csak az eredeti mátrix elemeit kell tárolni. A korai iteratív megoldók (Jacobi, Gauss-Siedel) hátránya volt, hogy nagyon lassan konvergáltak. A később kidolgozott módszerek már lényegesen gyorsabbak (pl. Konjugált Gradiens), nemcsak tárolás igényben, de megoldási sebességben is felveszik a versenyt a direkt megoldókkal.

Az általam készített programban három megoldót implementáltam, melyek közül a felhasználó választhatja ki a problémához a legmegfelelőbbet [14].

#### *Ritka Gauss megoldó Cuthill-Mckee újrendezéssel*

A tárolt adatmennyiség csökkentése végett a mátrix felírása előtt újraszámolja az ismeretleneket a Cuthill-Mckee algoritmus használatával. A megoldásnál csak a minimálisan szükséges memória mennyiséget foglalja le, kihasználván a mátrixnak a rendezés utáni főátló körüli sávós jellegét. Az újrendezés akár több nagyságrenddel meggyorsíthatja a megoldást. A megoldó alkalmas nem szimmetrikus és indefinit mátrixok megoldására is.

#### *Konjugált Gradiens megoldó SSOR előkondicionálással*

A megoldó [15] használatának feltétele, hogy a mátrix szimmetrikus és pozitív definit legyen. Az általunk felírt egyenletek egyik feltételnek sem tesznek eleget. A szimmetria teljesítéséhez igen kevés művelet szükséges, mindössze az néhány elemet meg kell szorozni egy-egy konstanssal. A fentebb már említett csatolt tekercsek külön egyenletei okozzák az indefinit tulajdonságot. A mátrix pozitív definitté tételéhez ezeket az egyenleteket eliminálnunk kell a mátrixból, melynek következtében, attól függően, hogy hány 2D elem tartozik tekercs tartományba, további mátrix elemek lesznek nullától különbözőek, ami memória igény többlettel jár. Az elimináció és a több mátrix elem további műveletszám növekedést jelent, ami a futási időt növeli.

A megoldó nagyon robusztus, a szükséges feltételek esetén minden esetben konvergens.

Az iterációs lépések csökkentése végett előkondicionálást alkalmazok, melyre szintén számos megoldás található az irodalomban. A program az SSOR előkondicionáló algoritmust használja, mely viszonylag kis energia befektetéssel erősen csökkenti az iterációk számát.

#### *BiKonjugált Gradiens megoldó SSOR előkondicionálással*

A megoldó [15] képes nem szimmetrikus és nem pozitív definit mátrixok megoldására. A konvergencia azonban nem garantált, előfordulhat olyan eset, amikor nem képes megoldani az egyenletrendszert. A program ebben az esetben egy iteráció szám korlát után áttér a fentebb

említett Gauss megoldóra, mely mindenképp megoldja az egyenleteket. Használata során gyakran hasonló sebességgel dolgozik, mint a Konjugált Gradiens megoldó.

Az előkondicionálás szintén SSOR módszerrel történik.

## **2.9.2 Termikus egyenletek megoldása**

A termikus tranziens egyenletek lineárisak, továbbá a mátrix szimmetrikus és pozitív definit, minden lépésben a korábban említett SSOR előkondicionált Konjugált Gradiens megoldót [15] alkalmazza a program. A mátrix természetesen indexelve van tárolva, ezáltal kevés memóriát igényel az iteratív megoldó használatakor.

## **2.10 Szupravezető modell numerikus megvalósítása**

A szupravezető gyűrűk elektromágneses és termikus tranziens számításánál, mint azt korábban említettem, egy csatolt modellt alkalmazok, mely tartalmaz egy 2D elektromágneses véges elemes, egy hálózati és egy 3D termikus véges elemes modellt. A valós geometria természetesen 3 dimenziós, legegyszerűbb volna mind az elektromágneses és termikus számításokat 3D-ben végezni. A jelenlegi számítógép kapacitásokat figyelembe véve azonban egy ilyen csatolt tranziens megoldás rengeteg időt venne igénybe, mely nyilvánvalóan jelentős mértékben csökkenti a hatékonyságot a tervezés és az analízis során, optimalizációs eljárásokra tehát nem alkalmas.

A jelenleg használt tömbi szupravezető anyagok az aktuális gyártási technológiákkal sajnos nem tehetők homogénné a teljes térfogatban, előfordulnak jobb és rosszabb minőségű részek egy adott gyűrűn belül. A fentebb említett szupravezető alap anyagmodell (5) nyilvánvalóan egy kis térfogategységre vonatkozik. A kétdimenziós modell csak abban az esetben ad megfelelő eredményeket, ha a gyűrű anyagminősége nem változik a kerület mentén. Ez egyszerűen belátható, hiszen egy rossz anyagminőségű szakaszon azonos áramnál nagyobb elektromos térerősség jelentkezik, aminek következtében jobban emelkedik a lokális hőmérséklet, ami még rosszabb elektromos szupravezető tulajdonságot eredményez. A folyamat tehát önmagát gerjeszti.

Annak érdekében, hogy ezen inhomogenitások hatását figyelembe tudjuk venni a szimulációban, továbbá mindezt a mai számítástechnikai eszközökkel megfelelő gyorsasággal

meg tudjuk valósítani, létrehoztam egy saját eljárást, mellyel össze tudjuk csatolni a 2D elektromágneses véges elemes és a 3D véges elemes modelleket.

### 2.10.1 Konverziók az elektromágneses és termikus számítás között

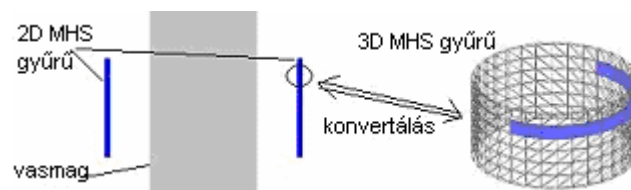
Az elektromágneses és termikus egyenletek között nincs közvetlen kapcsolat. A két számítás szekvenciálisan fut, minden lépésben felhasználják egymás legutóbbi eredményeit.

Két fontos konverziót kell elvégezni minden időlépésben:

-Az elektromágneses számítás eredményéből meg kell határozni a 3D gyűrű egyes elemeiben keletkező veszteségi teljesítményt;

-A termikus számítás eredményeképp létrejött hőmérséklet eloszlásból meg kell határozni a 2D elemekre az aktuális nem lineáris E-J görbét.

A gyűrű geometria sajátosságai következtében is létrejönnek eltérések a karakterisztikákban. Egy gyűrű fele (kerület mentén) csatolódik egy hálózati elemhez, melyhez hozzá tartozik a 3D félgűrű és egy 2D hasáb. A 2D elektromágneses számításban a probléma  $z$  irányú kiterjedése megegyezik a vasmag vastagságával. Mindez a vas telítéséig nagyon jó közelítést ad, hiszen szinte az egész fluxus a magban van. Tehát további módosítást kell bevezetni a nem-lineáris E-J karakterisztikában, mellyel megfelelően tudjuk kezelni a problémát.



16. ábra. Konverztálás a modellek között

A II. Táblázatban összefoglaltam a különböző villamos mennyiségek tulajdonságait az egyes egyenletrendszer alapján. A fiktív mennyiségek gyakorlatilag azt jelzik, hogy az adott egyenletrendszerben a mennyiség nem a valódi alap anyag karakterisztikával megegyező, hanem annak valamilyen transzformált változata.

## II. Táblázat

	2D EM FEM	3D TERM. FEM	HÁLÓZAT
$J$ (áramsűrűség)	Valós	Valós	Valós
$E$ (elektromos térerő)	Fiktív	Nem számolt	Nem számolt
$U$ (feszültség)	Valós	Nem számolt	Valós
$\sigma$ (fajlagos vezetőképesség)	Fiktív	Valós	Fiktív

Amint a táblázatból látható, a  $J$  áramsűrűség mindhárom modellben a valós értéket képvisel. A 2D számításban szereplő  $\sigma$  elektromos vezetőképességet és az  $E$  elektromos térerősséget egyaránt transzformálnunk kell. A hálózati egyenletekben  $\sigma$  szintén fiktív mennyiség.

Az összetett probléma miatt a konverziók megvalósítása elég nehézkes. Nem kizárólag elméleti egyenleteket kell felírunk, ezeket be kell illeszteni a numerikus környezetbe. A 2D számításhoz elő kell alítani a 3D hőmérséklet-eloszlás függvényében  $\sigma(E)$  és  $\partial\sigma/\partial E$  kifejezést egyaránt, melyek szükségét később a Jacobi-mátrix előállításánál mutatom be. Ennek megvalósítására két módszert dolgoztam ki.

### 2.10.2 I. módszer

Az alap „power law” (1) karakterisztikából indulunk ki. Ennek segítségével felírjuk a fél gyűrű egy adott  $R$  sugár és egy adott  $Z$  magasság (16. ábra jobb oldala) mellett a teljes feszültséget (58) diszkrétizált formában.

$$V = \sum_{k=1}^i \left( E_0 \left( \frac{J}{J_c(\underline{B}, T_k)} \right)^{n(\underline{B}, T_k)} \right) l_k \quad (58)$$

Az (58) egyenletben  $i$  a diszkrét szakaszok száma, melyre felbontjuk a fél gyűrűt,  $l_k$  az aktuális szakasz hossza,  $T_k$  az átlagos hőmérséklet az aktuális szakaszon,  $\underline{B}$  az indukcióvektor, melyet az előző 2D elektromágneses számítás eredményéből ismerünk. Ebből fel tudjuk írni a fiktív 2D elektromos térerősséget (59).

$$E_{2D} = \frac{\sum_{k=1}^i \left( E_0 \left( \frac{J}{J_c(\underline{B}, T_k)} \right)^{n(\underline{B}, T_k)} \right) l_k}{h} \quad (59)$$

Az (59) egyenletben  $h$  a 2D probléma  $z$  irányú kiterjedése. Annak érdekében, hogy  $\sigma(E)$  előállítsuk, az (59) egyenletet meg kell oldanunk  $J$ -re. Amint az látható,  $J$  többször szerepel a jobb oldalon különböző kitevőkkel, ez esetben sajnos nem tudjuk átrendezni az egyenletet. Amennyiben  $J$  azonos kitevővel rendelkezik minden tagban, akkor kiemelhető, és az egyenlet átrendezhető. **Ebben a módszerben tehát az  $n$  exponens nem lehet lokálisan hőmérsékletfüggő.**  $T_k$  helyett bevezetünk egy a félgyűrű szakaszra vonatkoztatott átlagos hőmérsékletet  $T_{\text{átlag}}$ , és ezzel számolunk. Ekkor a  $J$ -re átrendezett egyenlet (60).

$$J = \exp \left( \frac{\ln \left( \frac{E_{2D} \cdot h}{E_0 \sum_{k=1}^i \frac{l_k}{J_c(\underline{B}, T_k)^{n(\underline{B}, T_{\text{átlag}})}}} \right)}{n(\underline{B}, T_{\text{átlag}})} \right) \quad (60)$$

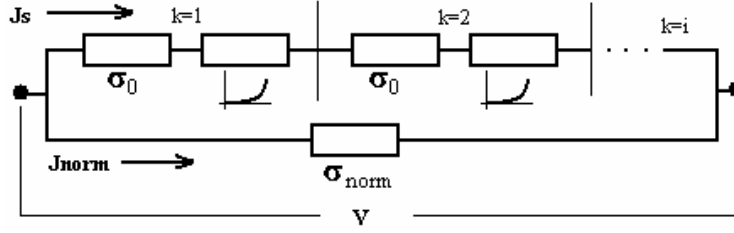
Ekkor előállítjuk a  $\sigma(E_{2D})$  kifejezést (61).

$$\sigma = \frac{1}{\frac{E_{2D}}{J} + \frac{1}{\sigma_0}} + \sigma_{\text{norm}} \quad (61)$$

$\partial \sigma / \partial E_{2D}$  (61) és (60) alapján előállítható.

### 2.10.3 II. módszer

A II. módszerrel igyekeztem kiküszöbölni az I. módszer hibáját, mely szerint az  $n$  kitevő nem lehet lokálisan hőmérsékletfüggő a fél terület mentén. A módszerben használt numerikus modell a 17. ábrán látható.



17. ábra. A II módszerben alkalmazott modell

A modell szerint minden  $l_k$  kerületi szakaszon figyelembe vesszük a szupravezető jellegzetes nemlineáris karakterisztikáját és a kezdeti vezetőképességet. A normál állapoti szaturációs vezetőképességet a teljes fél kerületre adjuk hozzá. Mindezek alapján egy adott feszültség hatására két ágon indul meg az áram, melynek egyik összetevőjét vehetjük normál áramnak, a másikat szuperáramnak. A  $J_s$  szuperáram függvényében felírható a 2D fiktív elektromos térerősség (62) hasonlóan az I. módszerhez.

$$E_{2D} = \frac{\sum_{k=1}^i \left( E_0 \left( \frac{J_s}{J_c(\underline{B}, T_k)} \right)^{n(\underline{B}, T_k)} + \frac{J_s}{\sigma_0} \right) l_k}{h} \quad (62)$$

A Newton-Raphson iterációk során  $E_{2D}$  minden lépésben ismert, a vektorpotenciálból és a skalárpotenciálból közvetlenül számítható. **A módszerben  $J_s$  analitikus kifejezése helyett az  $E_{2D}$  ismeretében azt egyváltozós Newton-Raphson módszerrel határozom meg a (62) egyváltozós nemlineáris egyenletből.** Ekkor  $J_s$  ismeretében annak függvényeként is meghatározhatjuk  $\sigma$  értékét (63).

$$\sigma = \frac{J_s \cdot h}{\sum_{k=1}^i \left( E_0 \left( \frac{J_s}{J_c(\underline{B}, T_k)} \right)^{n(\underline{B}, T_k)} + \frac{J_s}{\sigma_0} \right) \cdot l_k} + \sigma_{norm} \quad (63)$$

$\partial \sigma / \partial E_{2D}$  előállítására alkalmazom a láncszabályt (64).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial E_{2D}} = \frac{\partial \sigma}{\partial J_s} \frac{\partial J_s}{\partial E_{2D}} \quad (64)$$

Ahol  $\frac{\partial J_s}{\partial E_{2D}}$  a (65) átrendezéssel átalakítható.

$$\frac{\partial J_s}{\partial E_{2D}} = \left( \frac{1}{\frac{\partial E_{2D}}{\partial J_s}} \right) \quad (65)$$

Mivel  $J_S$ -t már meghatároztuk, a (65) egyenlet jobboldala (62)  $J_S$  szerinti deriváltjából számolható.

#### 2.10.4 A Jacobi-mátrix előállítása

A Jacobi vagy másnéven derivált mátrix előállításáról már korábban esett szó. A koefficiens mátrixot az ismeretlen vektorral megszorozva és abból a gerjesztés vektort kivonva egy többváltozós függvénysort kapunk. (57) kifejezéssel tudjuk előállítani a Jacobi-mátrix elemeit. Belátható, hogy amennyiben az egyenletrendszer lineáris, tehát a koefficiens mátrix független az ismeretlen vektortól, akkor a Jacobi-mátrix és a koefficiens mátrix megegyezik. Mivel az elemegyenletek összegéből képezzük az eredő egyenletrendszert, a deriváltakat elemenként is előállíthatjuk. Ebben a munkában csak a szupravezető nemlinearitás kezelésével foglalkozom, a vas nemlinearitásra vonatkozóan számos irodalomban lehet megoldást találni.

A szupravezető tartomány egy elemében levő vezetőképesség két elemegyenletet befolyásol, az egyik a csatolt hálózati tömör vezető elem, a másik a saját háromszög elem egyenlete (2D mágneses).

Először vegyük a háromszög elemegyenletet. Az eredeti egyenlet (23). Ebből  $\sigma$  szerepel  $\underline{P}$ -ben,  $\underline{b}_1$ -ben és  $\underline{b}_2$ -ben. Írjuk fel a legelső sorát ezen mátrixok összegének (66).

$$f = \sigma \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3) + \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) - \sigma \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_{1(t-\Delta t)} + A_{2(t-\Delta t)} + A_{3(t-\Delta t)}) \quad (66)$$

Amint azt korábban említettem,  $\sigma$  az elektromos térerősség függvénye. Az elektromos térerősség meghatározható a vektorpotenciál és a skalárpotenciál segítségével (67).

$$E(A_1, A_2, A_3, \phi_1, \phi_2) = \frac{V}{h} - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{h} - \left( \frac{1}{3} \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\Delta t} - \frac{1}{3} \frac{A_{1(t-\Delta t)} + A_{2(t-\Delta t)} + A_{3(t-\Delta t)}}{\Delta t} \right) \quad (67)$$

A (66) kifejezésben 5 ismeretlen szerepel, a három vektorpotenciál, és két skalárpotenciál. A következőkben előállítom a (66) sor parciális deriváltjait (68-72).

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = \frac{\partial \sigma}{\partial A_1} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_{1(t-\Delta T)} - A_{2(t-\Delta T)} - A_{3(t-\Delta T)}) + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) \right) + \sigma \frac{2}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} \quad (68)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial A_2} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_{1(t-\Delta T)} - A_{2(t-\Delta T)} - A_{3(t-\Delta T)}) + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) \right) + \sigma \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} \quad (69)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A_3} = \frac{\partial \sigma}{\partial A_3} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_{1(t-\Delta T)} - A_{2(t-\Delta T)} - A_{3(t-\Delta T)}) + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) \right) + \sigma \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} \quad (70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_1} = \frac{\partial \sigma}{\partial \phi_1} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_{1(t-\Delta T)} - A_{2(t-\Delta T)} - A_{3(t-\Delta T)}) + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) \right) - \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta^e}{3} \quad (71)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial \phi_2} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta^e}{12} (2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_{1(t-\Delta T)} - A_{2(t-\Delta T)} - A_{3(t-\Delta T)}) + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{3} (\phi_2 - \phi_1) \right) + \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta^e}{3} \quad (72)$$

A maradék két sor hasonlóan kezelhető.  $\sigma$  deriváltjai láncszabállyal állíthatók elő  $\partial \sigma / \partial E$  ismeretében felhasználva a (67) összefüggést (73-77).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_1} = \frac{\partial \sigma}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial A_1} \quad (73)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial A_2} \quad (74)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_3} = \frac{\partial \sigma}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial A_3} \quad (75)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi_1} = \frac{\partial \sigma}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \quad (76)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \quad (77)$$

A tömör vezető hálózati egyenletét (36) ebben az esetben módosítjuk a (78) egyenletre, mivel a Dc ellenállás használata nem célszerű a nemlinearitás miatt.

$$\begin{bmatrix} -\sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} & \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} \\ \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} & -\sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} \end{bmatrix} \cdot [\phi_1 \quad \phi_2] + \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_i^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \\ -\sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_i^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_{i,t-\Delta t}^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \\ -\sigma \frac{1}{\Delta t} \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \sum_{i=1}^3 \left( A_{i,t-\Delta t}^e \frac{\Delta_e}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Látható, hogy az elemegyenlet minden tagjában szerepel  $\sigma$ . Hasonlóan az előzőkhöz, felírom az egyenlet első sorát (79).

$$f = \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \left( \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \sigma_e \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1^e + A_2^e + A_3^e - A_{1(t-\Delta t)}^e - A_{2(t-\Delta t)}^e - A_{3(t-\Delta t)}^e) \right) \quad (79)$$

Az így kapott függvénynek képezzük a parciális deriváltjait (80-84).

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_1} = \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi_1} \left( \frac{\Delta_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1^e + A_2^e + A_3^e - A_{1(t-\Delta t)}^e - A_{2(t-\Delta t)}^e - A_{3(t-\Delta t)}^e) \right) - \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} \right) \quad (80)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_2} = \sum_{e=1}^{n_{e,mc}} \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi_2} \left( \frac{\Delta_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1^e + A_2^e + A_3^e - A_{1(t-\Delta t)}^e - A_{2(t-\Delta t)}^e - A_{3(t-\Delta t)}^e) \right) + \frac{\Delta_e \sigma_e}{h} \right) \quad (81)$$

A vektorpotenciálok szerinti parciális deriváltak az összegzés elhagyásával egy háromszögelemre vonatkozóan írhatók fel, melyek mindegyikére el kell végezni a számítást.

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_1} = \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial A_1} \left( \frac{\Delta_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1 + A_2 + A_3 - A_{1(t-\Delta t)} - A_{2(t-\Delta t)} - A_{3(t-\Delta t)}) \right) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} \right) \quad (82)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_2} = \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial A_2} \left( \frac{\Delta_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1 + A_2 + A_3 - A_{1(t-\Delta t)} - A_{2(t-\Delta t)} - A_{3(t-\Delta t)}) \right) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} \right) \quad (83)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial A_3} = \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial A_3} \left( \frac{\Delta_e}{h} (-\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} (A_1 + A_2 + A_3 - A_{1(t-\Delta t)} - A_{2(t-\Delta t)} - A_{3(t-\Delta t)}) \right) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta_e}{3} \right) \quad (84)$$

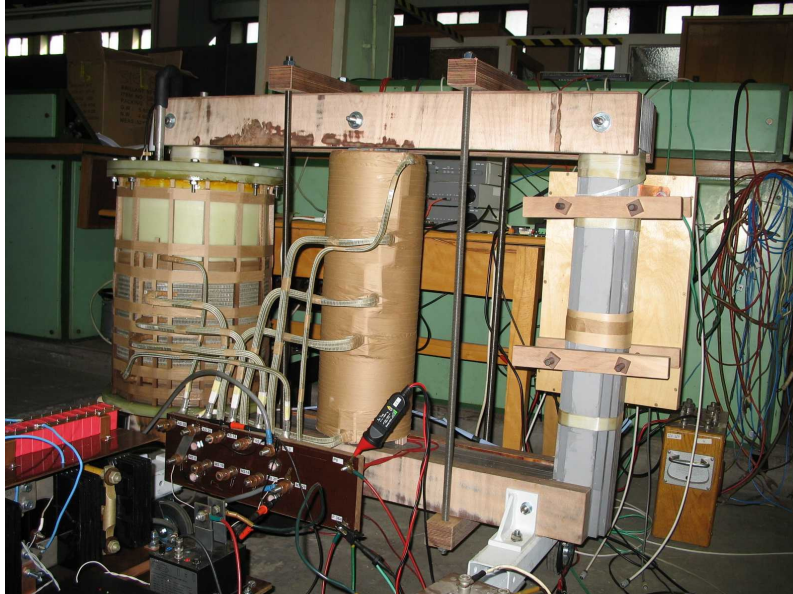
A második sor hasonlóan állítható elő.

## 2.11 Eredmények összevetése a számításokkal

A program által számított eredményeket két különböző eszközön teszteltem, az egyik egy MHS ZÁK, melyben nem a szokásos tömbi MHS gyűrű, hanem szupravezető szalag található. A másik egy 20KVA teljesítményű önkorlátozó transzformátor.

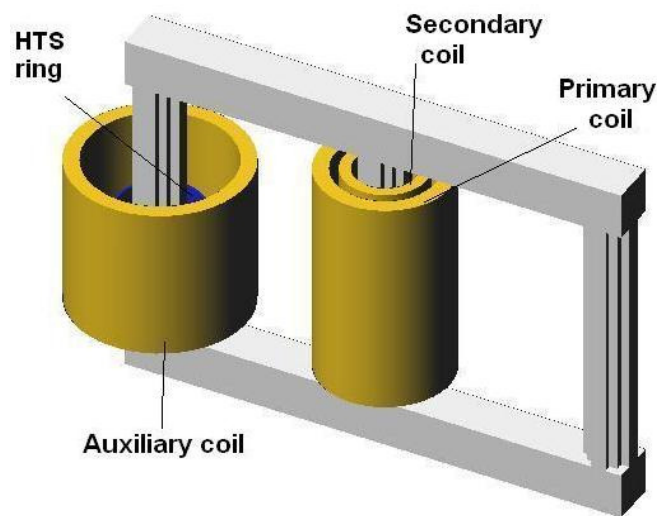
### 2.11.1 20KVA teljesítményű önkorlátozó transzformátor

Az eredmények összehasonlítása céljából összevetettük egy 20 KVA névleges teljesítményű önkorlátozó transzformátor mérési és szimulációs eredményeit. A 18. ábrán látható a mért egység fényképe. A méréseket a BME Villamos energetika tanszéken végeztük.



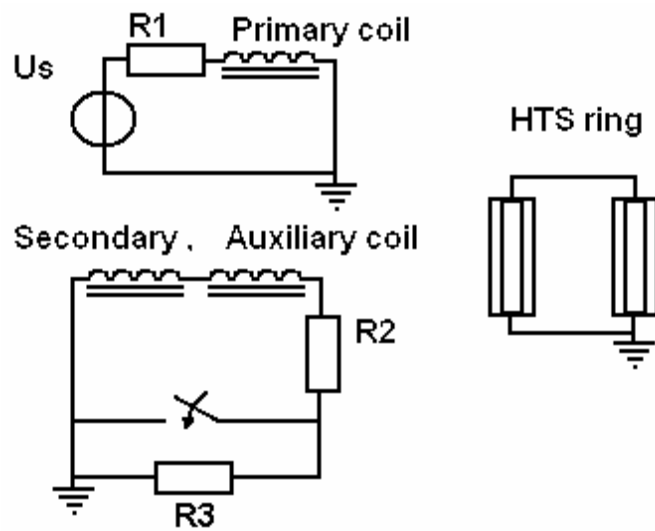
18. ábra. 20KVA teljesítményű önkorlátozó transzformátor

A tesztek során dinamikus zárlatokat mértünk. A 19. ábrán az önkorlátozó transzformátor 3D geometriai modellje látható.



19. ábra. Önkorlátozó transzformátor 3D modellje

A csatolt hálózati modell a 20. ábrán látható. A szekunder tekercs sorba van kötve a kiegészítő tekercseléssel, ami közös oszlopon található a szupravezető gyűrűvel. Az R3 terhelő ellenállás rövidre zárható egy kapcsolóval, ami gyakorlatilag a zárlatot jelenti. A mérésekben a kapcsoló egy mikrokontrollerrel vezérelt antiparalel tirisztorpár volt, melyet magam terveztem. A kapcsolóelem a 21. ábrán látható.

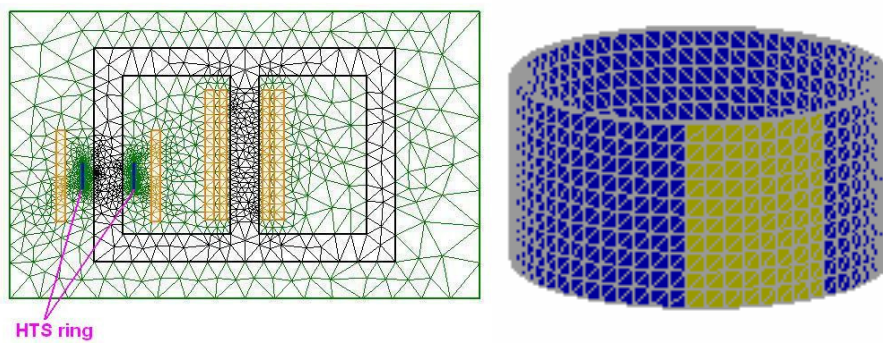


20. ábra. A csatolt hálózati modell



21. ábra. Záratképző kapcsoló

A 22. ábrán látható a 2D elektromágneses és a 3D termikus háló.



22. ábra. 2D és 3D háló

A szimulációs paraméterek a III.-V. Táblázatokban láthatók.

III. Táblázat. Geometria

	Név	Érték
	Oszlopok szélessége	107 mm
	Oszlopok magassága	820 mm
	Mag szélessége	1150 mm
	Járom vastagsága	107 mm
$h$	Probléma $z$ irányú kiterjedése	107 mm
	Zárlat időtartama	100ms

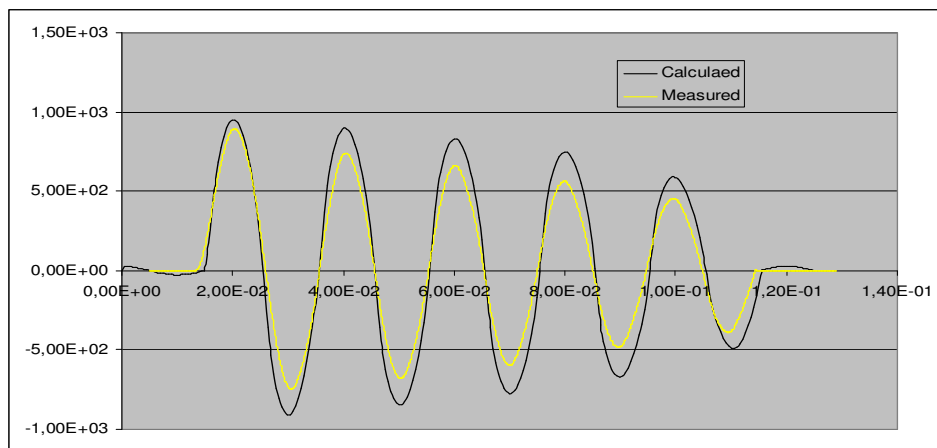
IV. Táblázat. Hálózat

	Név	Érték
$U_s$	Feszültség	1000Vrms, 1400Vrms – 50Hz
$R_1$	ellenállás	4 ohm
$N_p$	Primer menetszám	364
$N_s$	Szekunder menetszám	28
$N_a$	Szekunder 2. menetszám	20
$R_2$	Ellenállás	0.04 ohm
$R_3$	Ellenállás	4 ohm

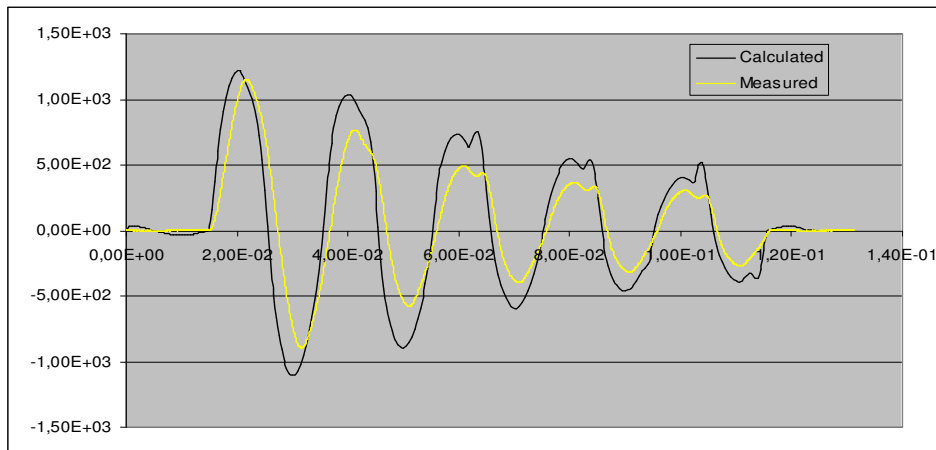
V. Táblázat. Anyag paraméterek (BI2212 Gyűrű)

$J_c$	Kritikus áramsűrűség	25 A/mm <sup>2</sup>
$n_0$	$n$ -kitevő, $ \mathbf{B} =0, T=T_0$	5
$n_1$	$n$ -kitevő, $ \mathbf{B}  \gg B_0, T=T_0$	1
$E_0$	Kritikus elektromos térerősség	0.1 V/m
$\sigma_0$	Vezető képesség alacsony áramsűrűségnél	1e 10 S/m
$\sigma_{norm}$	Normál állapotú vezető képesség	5 e3 S/m
$B_0$	Indukció konstans	0.02 T
$T_0$	Folyékony nitrogén hőmérséklet	77.3 K
$T_0$	Kritikus hőmérséklet	89 K
$K_h$	Kerületi hiba	12.5 %
$F_h$	Felületi hiba	95 %
$\lambda$	Hővezető képesség	2 W/(m K)
$\alpha$	Hőátadási tényező	2000 W/(m <sup>2</sup> K)
$c$	Fajhő	1.1 MJ/(m <sup>3</sup> K)

A szimulációt és a mérést két feszültségszinten végeztük, 1000 és 1400 volt effektív értéken. Összehasonlítási eredményképpen a szekunder áramokat mutatom be (23. és 24. ábra).



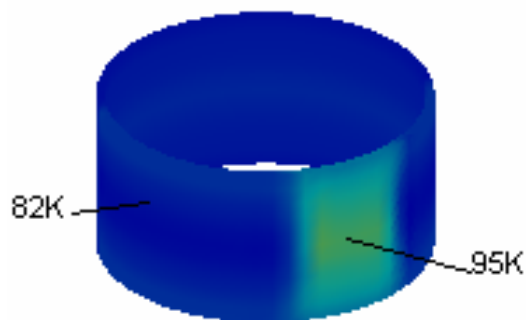
23. ábra. Szimulált és mért szekunder áramok az idő függvényében (1000V)



24. ábra. Szimulált és mért szekunder áramok az idő függvényében(1400V)

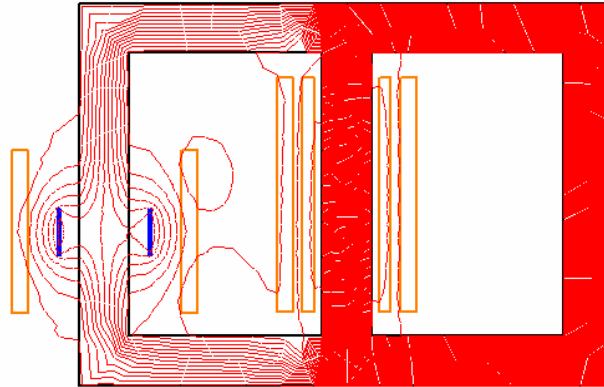
Az 1400 voltos eredményeknél látszik, hogy a zárlati áram mindkét eredményben a csökkenésen kívül a szinusztól eltérő jelalakot mutat. Ez a szimulációból kiderült, hogy a vastelítés következménye.

A 25. ábrán az 1000 voltos szimulációban létrejövő hőmérséklet eloszlás látható a zárlat végén.



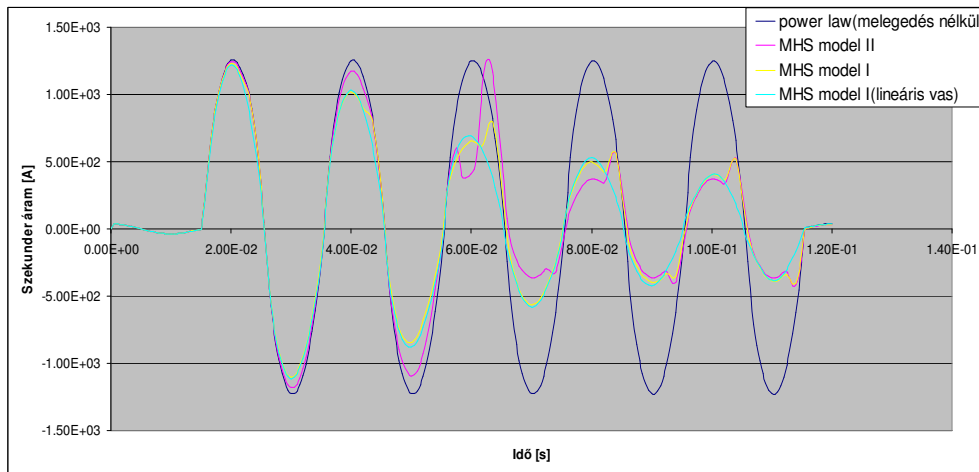
25. ábra. Hőmérséklet eloszlás a gyűrűben a zárlat után (1000V)

A 26. ábrán a 2D erővonalak láthatók a zárlat előtt. Jól látható, hogy a szupravezető gyűrű teljesen kiszorítja magából a fluxust.



26. ábra. Erővonalkép a zárlat előtt

A 27. ábrán egy összehasonlítás látható különböző modellek használata esetén.



27. ábra. Szimulált eredmények különböző modellekkel (1400V)

A különböző modellekkel eltérő áram jelalakokat kapunk. Jól látható, hogy a termikus hatások figyelembe vétele nélkül az első zárlati áram csúcs után gyakorlatilag egy állandósult zárlati áram alakul ki, melynek csúcsainak értékei, jelalakja nem változik az idővel. Az általam fejlesztett két modellezési eljárással kimutatható az MHS gyűrűben végbemenő melegedési folyamat hatása. A vastelítés hatása szintén kimutatható, hiszen a lineáris vas karakterisztikával végzett szimulációs eredményben a kisebb zárlati áramcsúcsoknál fellépő második csúcsok nem találhatók meg. A gyűrű melegedésének következtében egyre inkább átengedi a fluxust magán, ennek hatására a vasmagban egyre nagyobb indukció értékek jelentkeznek, ami a szimulált elrendezés esetén vastelítéshez vezet, ekkor egy második áramcsúcs keletkezik. A két modell-típussal végzett számításban, mely a termikus hatásokat is figyelembe veszi, számottevő különbségek nincsenek.

A szimuláció segítségével kimutatható, hogy az általunk vizsgált 20KVA teljesítményű önkorlátozó transzformátor hirtelen, rövid idejű zárlatakor erős melegedési folyamat zajlik le, mely meghatározó a zárlati áram amplitúdójának változásában.

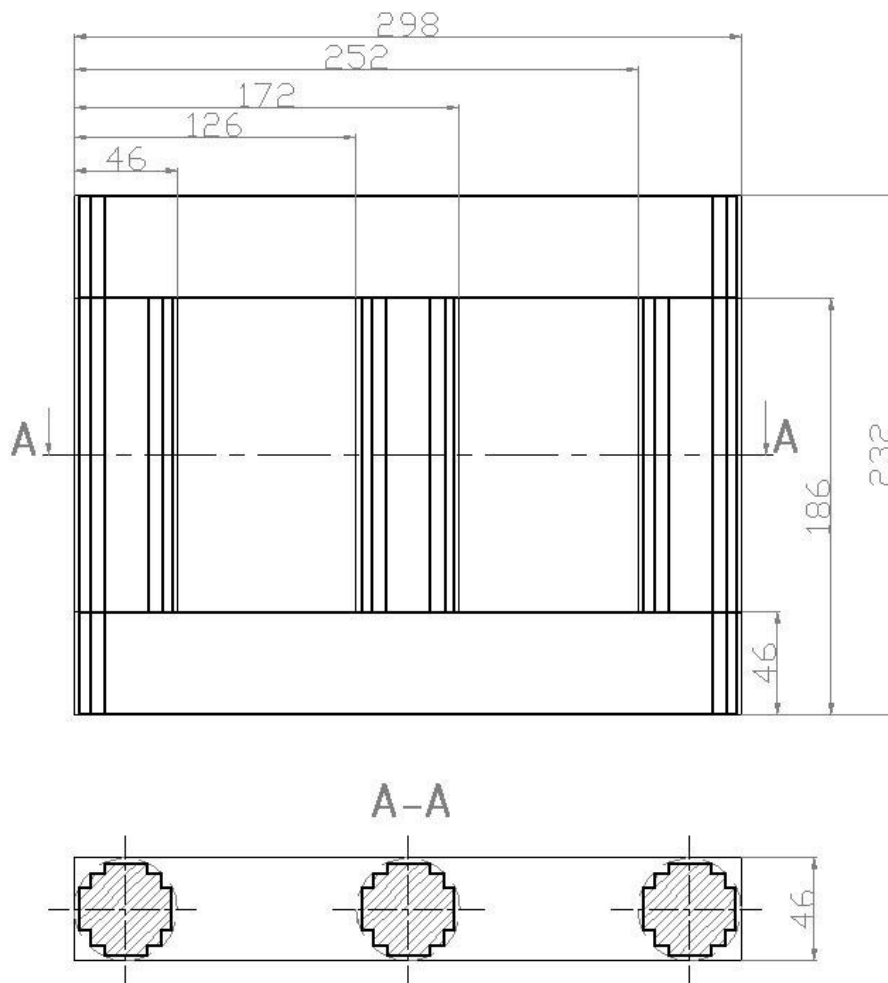
## 2.11.2 ZÁK MHS szalaggal

### *A vizsgált zárlati áramkorlátozó*

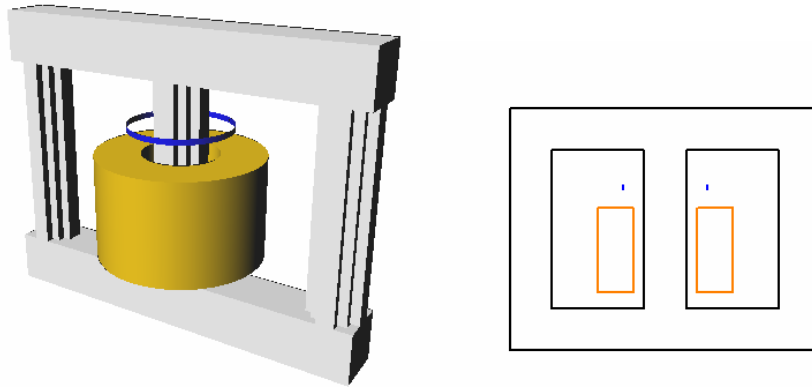
A vizsgált zárlati áramkorlátozó egy háromoszlopos vasmagból, egy tekercsből a középső oszlopon és egy szupravezető szalagból áll. A tekercs 250 menetes.

### *Geometria*

A szimulációkban modellezett ZÁK vasmagjának méretei a 28. ábrán, az ellenőrzés végett megjelenített modell a 29. ábrán látható, a szupravezető szalag kék, a tekercs sárga.



28. ábra. A vasmag méretei

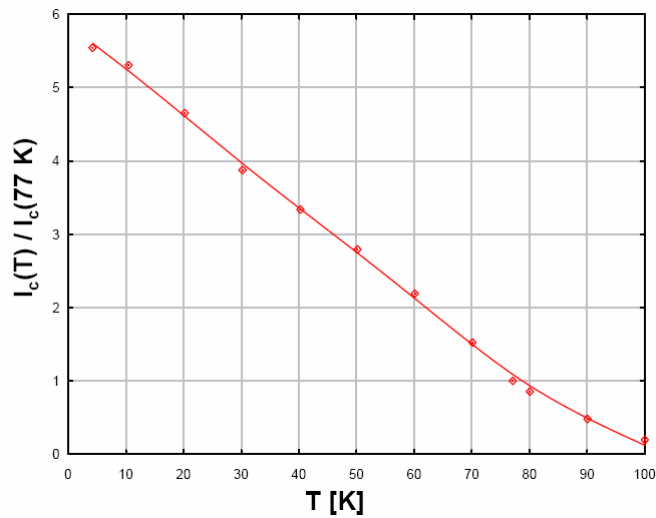


29. ábra. A modellezett geometria megjelenítése 3D, 2D

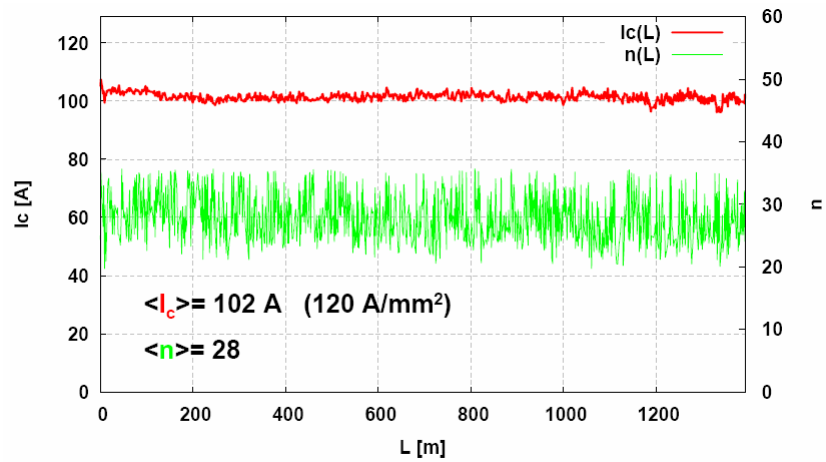
### *A szupravezető szalag*

A szupravezető szalagról részletes mérési dokumentáció áll rendelkezésünkre a gyártótól, ami erősen megkönnyíti a modellezést, hiszen számos olyan paraméter szükséges a számításhoz, melynek megfelelő minőségű mérésére a tanszéken nincs lehetőség.

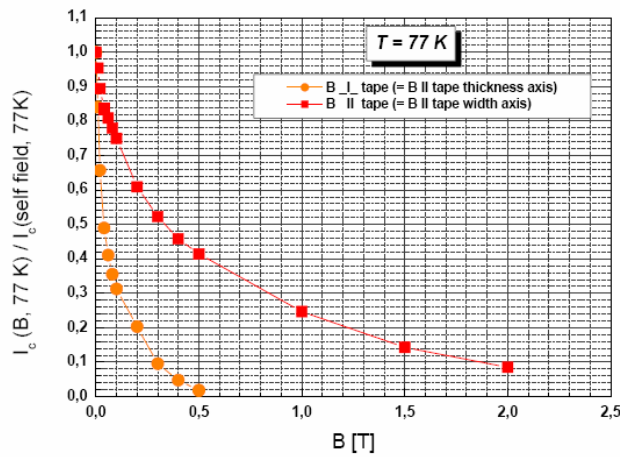
A szalag modellezett mérete **4,4x0,25mm**.



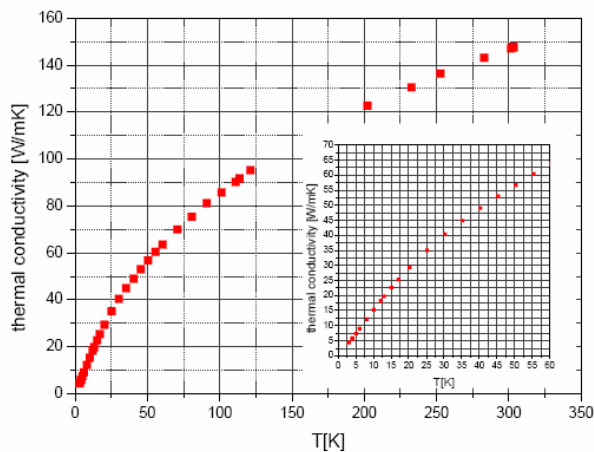
30. ábra. A kritikus áram relatív értékének hőmérsékletfüggése



31. ábra. Mérési eredmények a kritikus áramra és  $n$ -re a hossz függvényében 77K hőmérsékleten



32. ábra. A kritikus áram indukciófüggése 77K hőmérsékleten



33. ábra. Hővezetőképesség a hőmérséklet függvényében

A gyártó karakterisztikái segítségével a programba bevitt szupravezető anyag paramétereiket az VI. Táblázatban foglaltam össze.

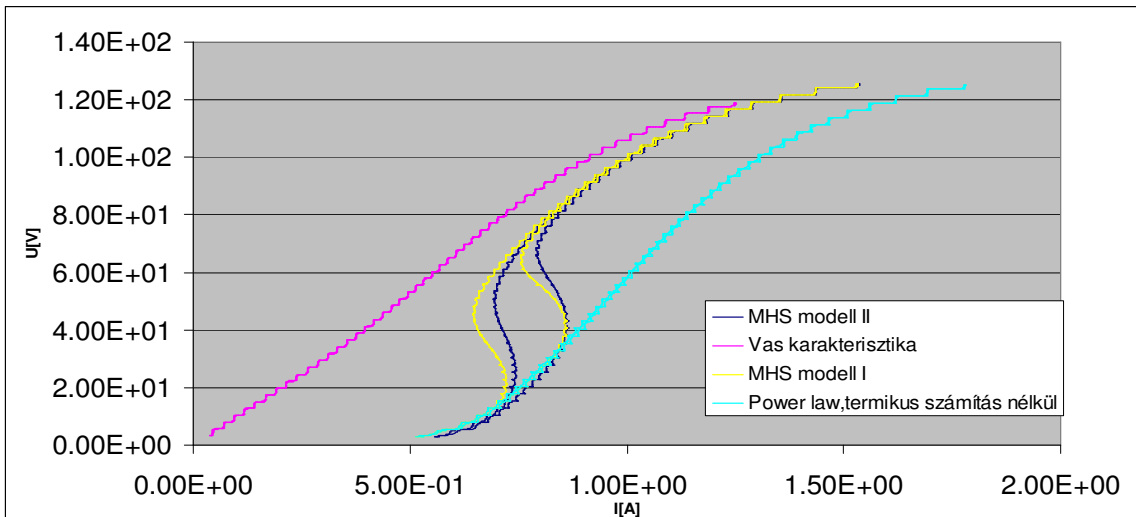
VI. Táblázat. Anyag paraméterek (BI-2223 szalag)

	Név	Érték
$J_c$	Kritikus áramsűrűség	110 A/mm <sup>2</sup>
$n_0$	$n$ -kitevő, $ \mathbf{B} =0, T=T_0$	25
$n_1$	$n$ -kitevő, $ \mathbf{B}  \gg B_0, T=T_0$	1
$E_0$	Kritikus elektromos térerősség	0.0001 V/m
$\sigma_0$	Vezető képesség alacsony áramsűrűségnél	1e 10 S/m
$\sigma_{norm}$	Normál állapotú vezető képesség	5 e6 S/m
$B_0$	Indukció konstans	0.5 T
$T_0$	Folyékony nitrogén hőmérséklet	77.3 K
$T_c$	Kritikus hőmérséklet	105 K
$K_h$	Kerületi hiba	0 %
$F_h$	Felületi hiba	100 %
$\lambda$	Hővezető képesség	90 W/(m K)
$\alpha$	Hőátadási tényező	7000 W/(m <sup>2</sup> K)
$c$	Fajhő	2.3 MJ/(m <sup>3</sup> K)

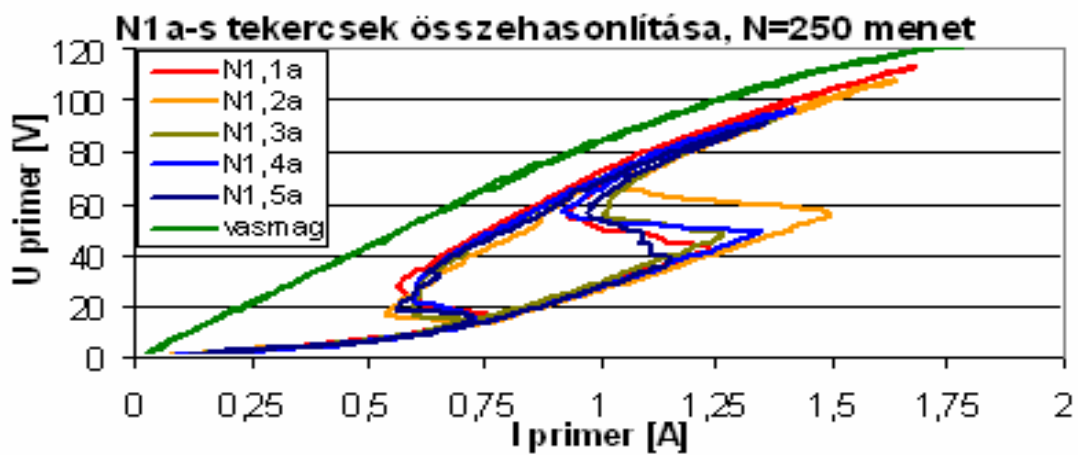
A szimulációkat mindhárom modellel lefutattam, melyből további értékes információkat nyerhetünk az eredmények alapján.

### ***A ZÁK statikus karakterisztika mérésének összevetése a szimulációval***

A statikus ZÁK U-I görbe számításánál 1s-os idő alatt a feszültség amplitúdót 0-ról 180V-ra emelem lineárisan, majd félidő után szintén lineárisan csökkentem vissza 0-ra. A kiértékelésnél a feszültség és áram effektív értékét jelenítem meg. A 34. ábrán a statikus számítás eredményei, a 35. ábrán a statikus mért görbék láthatók.



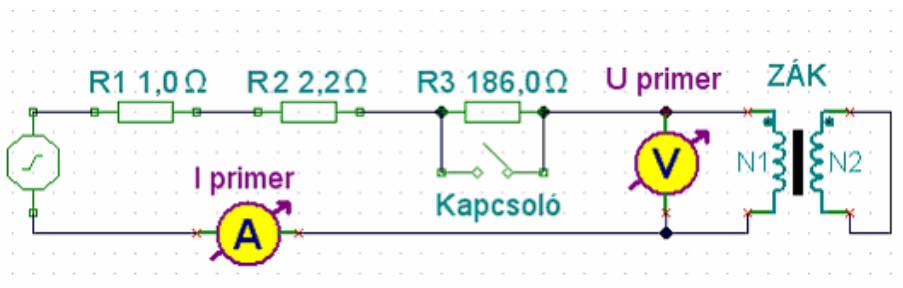
34. ábra. Szimulált statikus görbék



35. ábra. Mért statikus görbék különböző szalagokkal

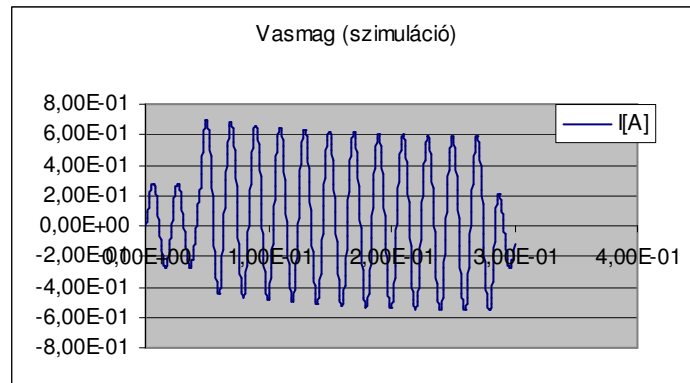
### Dinamikus számítások

A dinamikus számításoknál a 36. ábrán látható kapcsolás szerint végeztem a szimulációkat.

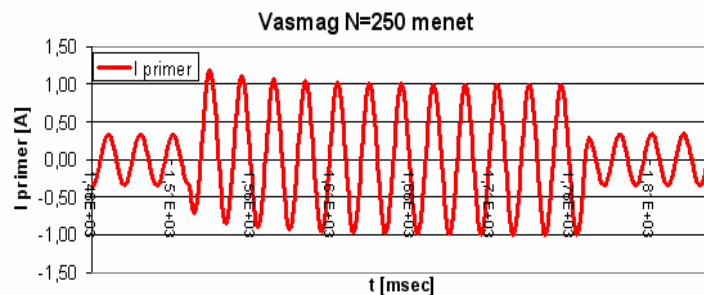


36. ábra. Kapcsolási elrendezés a dinamikus számításhoz

A feszültségforrás amplitúdója 60V. Először elvégeztem a számítást MHS szalag nélkül. Az eredmény a 37. ábrán látható. A 38. ábrán ugyanennek az elrendezésnek a mérési eredménye látható.

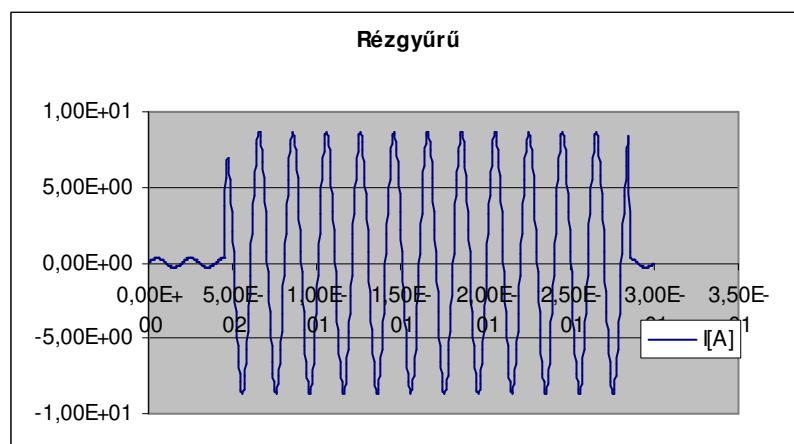


37. ábra. Szimuláció (vasmag)

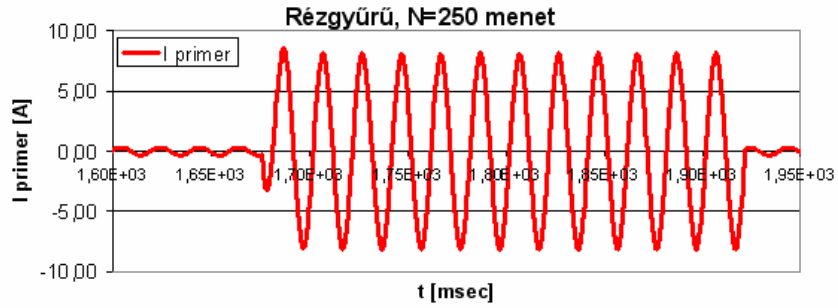


38. ábra. Mérési eredmény (vasmag)

A következő számítás egy rézgyűrű karakterisztikával történt. A rézgyűrű kritikus áram hiányában képes nagyon erősen leárnyékolni a vasmagot, ezáltal nagyon kis értéken tartja a zárlat alatt az impedanciát. A számított és mért eredmények a 39. és 40. ábrán láthatók.

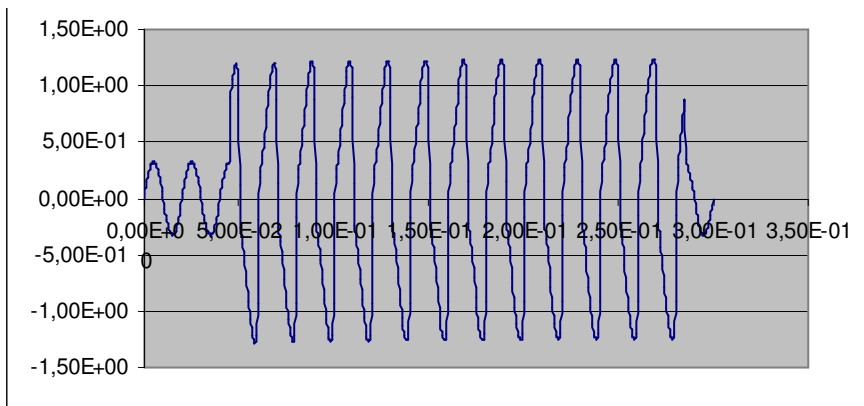


39. ábra. Számítás réz gyűrűvel

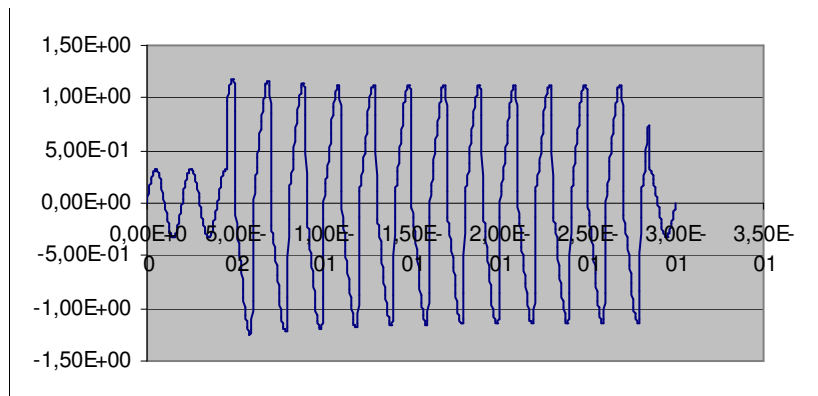


40. ábra. Mérés réz gyűrűvel

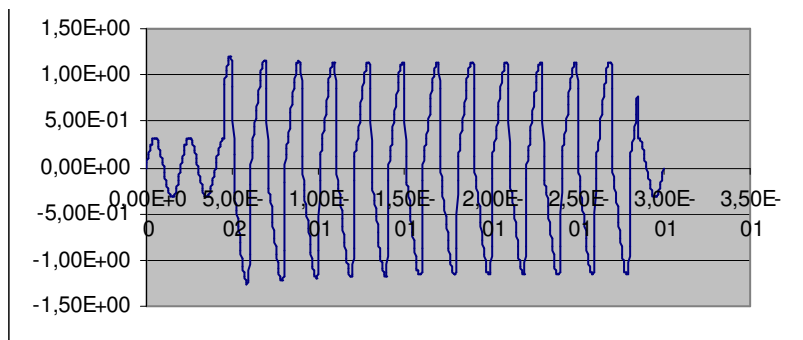
A következő számítás már szupravezető szalag modellezésével történt. Mindhárom szupravezető modellel elvégeztem a számítást, melyek eredményei a 41-43. ábrán láthatók.



41. ábra. Zárati áram Power law modellel (termikus számítás nélkül)

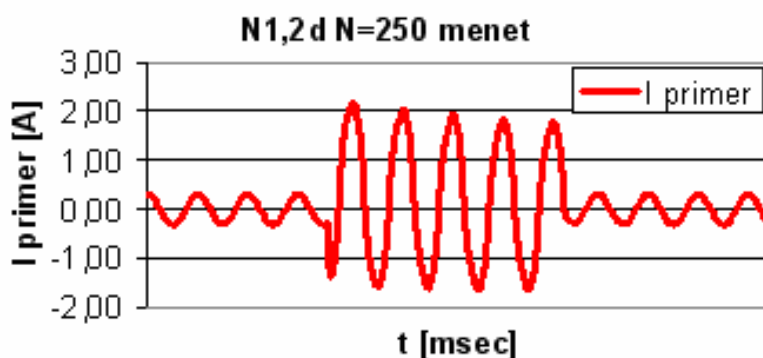


42. ábra. Zárati áram szimuláció I modellel



43. ábra. Zárlati áram szimuláció a II. modellel

A 44. ábrán egy mérési eredmény látható azonos elrendezésű kapcsolásnál, mint a szimulációkban.



44. ábra. Dinamikus zárlat mérési eredménye

VII Táblázat

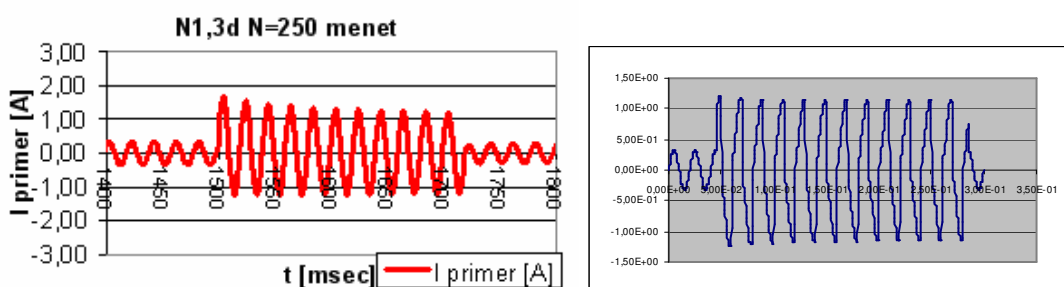
Tekercsek	Menetszám	I normál üzemi [A]	I zárlati [A]	I zárlati [%]
Vasmag	250	0,323	0,993	12,2
N1,3d	250	0,314	1,2	14,8
N1,1d	250	0,305	1,68	20,7
N1,2d	250	0,296	1,79	22,0
Rézugyűrű	250	0,315	8,13	100,0

Az VII. Táblázatban fel van tüntetve 3 különböző, de azonos típusú szupravezetős szalaggal mért zárlati áram csúcs, továbbá a vasmagon és a réz gyűrűvel mért zárlati áramok csúcsai egyaránt. A táblázatból leolvasható, hogy a három különböző szalag zárlati áramai között elég nagy eltérés van. A három közül az N1,3d jelzésű szalag dinamikus zárlati áram csúcsa áll legközelebb a szimulált értékhez. A vasmagon és a réz gyűrűvel végzett számítások eredményei jól visszaadják a mérésekben tapasztalt zárlati jelenséget.

## Összegzés

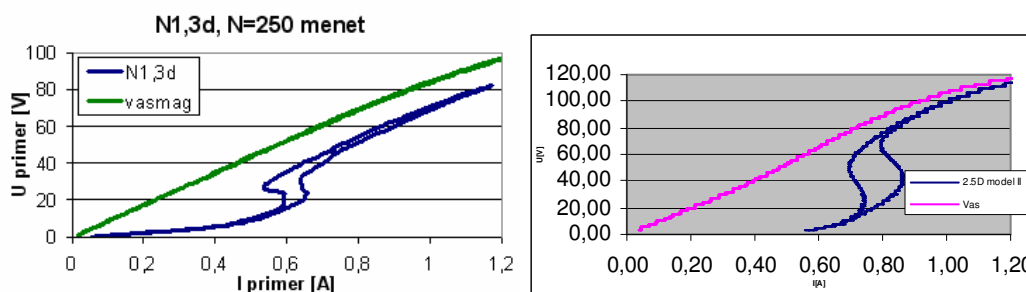
A statikus és dinamikus mérések és számítások összevetése után arra a következtetésre jutottam, hogy a gyártó által megadott garantált kritikus áram értéknél a szalagok valós kritikus áram értékei általában magasabbak. A dinamikus mérésorozatban volt egy olyan szalag, mely áram értékekre hasonló eredményeket adott, mint a szimuláció. Ezt a szalagot a következőkben részletesebben megvizsgálom, mind a statikus és a dinamikus számításokat is összevetem.

A 45. ábrán a dinamikus zárlat mérési és szimulált eredményei láthatók.



45. ábra. Az N1,3d jelzésű szalag mérési eredménye és a szimulált eredménye (2.5D II)

A 46. ábrán az N1,3d jelzésű szalag statikus mérési és szimulált jelleggörbéjének eredményei láthatók.



46. ábra. Statikus mérési eredmény (N1,3d jelű szalag) és a szimulált statikus görbe

Az eredményekben eltérés van annak ellenére, hogy a dinamikus számítások jó közelítéssel visszaadják a mért eredményeket. A statikus eredményeknél azonban figyelembe kell venni, hogy annak eredményei függenek a mérések körülményeitől (feszültség amplitúdó felfutási, lefutási ideje, időfüggvénye). Mivel ez a mérési eredményekben nem volt dokumentálva, nem lehet teljesen egyértelmű megfeleltetést végezni.

## **2.12 Összegzés**

A munka során egy speciális, mondhatjuk kettő és fél dimenziós zárlati áramkorlátozó modellt hoztam létre (2D mágneses, 3D termikus). Mindezt teljesen saját programba illesztettem, melyben felhasználtam a végeelem számítás legkorszerűbb módszereit mind elméleti és gyakorlati vonatkozásban. Az eredményekből kiderül, hogy a számítás megfelelően tükrözi a mérések eredményeit.

## 2.13 Tézisek

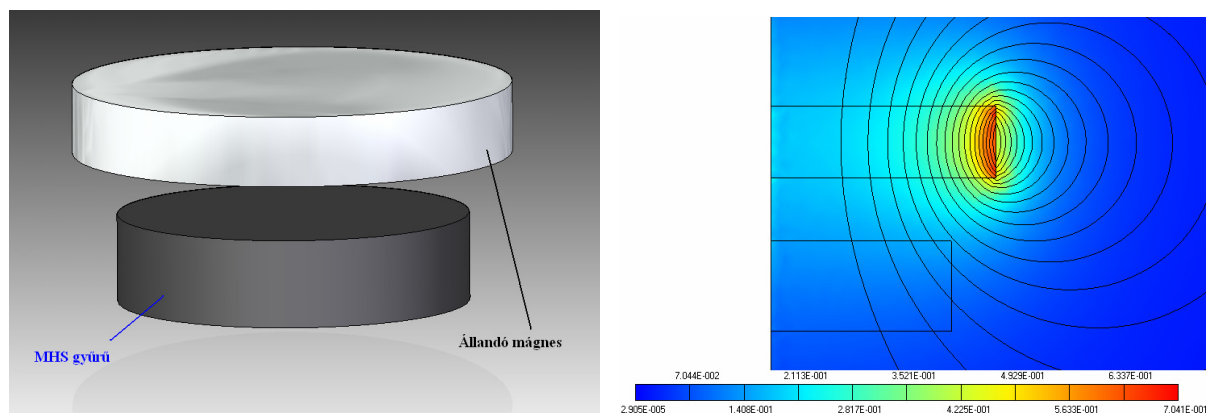
- Létrehoztam egy új numerikus modellezési eljárást, mely alkalmas MHS gyűrűk tranziens csatolt véges-elem modellezésére, mely magába foglal 2D mágneses véges-elem, 3D termikus véges-elem és elektromos hálózati modellt. Implementáltam az MHS E-J karakterisztikájából származó nemlinearitást a numerikus szimulációba, ezzel lehetővé tettem, hogy a kiadódó nemlineáris egyenleteket a Newton-Raphson iterációs eljárással oldjam meg. A szimulációban a vasmag nemlinearitását is figyelembe vettem. A numerikus megvalósításhoz 2 módszert dolgoztam ki a csatolt mágneses és termikus egyenletet szimultán megoldásához. [44], [55], [56].
- A kidolgozott modellezési módszer segítségével szimulációkat végeztem MHS ZÁK és MHS önkorlátozó transzformátorokon. A szimulációval kimutattam az egyes esetekben a melegedési folyamatok hatását a supra-normál átmenetre, ezáltal az eszköz működési karakterisztikáira, kitüntetetten az áram korlátozásának folyamatára. A számításaimat mérésekkel validáltam, a mérési eredmények mind a folyamatok jellegét, mind számszerűségét kielégítő hűséggel és pontossággal igazolták. [44], [55], [56].

### 3 MHS mágneses csapágyak modellezése

#### 3.1 MHS csapágyak

A magashőmérsékletű szupravezetős csapágyak egy fontos területét képezik a jelenlegi MHS alkalmazások kutatásának. A mechanikai kontaktus mentesség következtében az ilyen jellegű csapágyak súrlódási és egyéb veszteségei a hűtési teljesítményt is figyelembe véve nagyságrendekkel alacsonyabbak a hagyományos csapágyak veszteségeinél [16]. További előnye a szintén kontaktus mentes aktív mágneses csapágyakkal szemben, hogy nem igényel elektronikus vezérlést, beavatkozást.

A II. típusú kemény szupravezetők egyik igen fontos mágneses tulajdonsága, hogy képesek a fluxust csapdába ejteni, „megjegyezni”. Ez lényeges különbség a hagyományos kemény mágneses anyagokhoz képest, amelyekkel nem valósítható meg stabil lebegtetés. Amennyiben az MHS anyagot mágneses térben hűtjük le, az „megjegyzi” a hűtéskor a fluxust, és igyekszik megtartani azt, bármely irányba történő elmozdítás esetén mágneses erőhatással megpróbál visszatérni az eredeti pozíciójába. Az MHS csapágyak egy lehetséges elvi elrendezése a 47. ábra bal oldalán látható, a jobb oldalon az elrendezés mágneses tere van ábrázolva. Az ábrán alul egy MHS gyűrű látható, felette egy állandó mágnes. Amennyiben a mágnes axiálisan van felmágnesezve, annak körforgása esetén, mivel a mágneses tér forgásszimmetrikus, a szupravezető mágneses tere nem változik, tehát a forgást nem akadályozza.



47. ábra. Szupravezetős csapágyak elvi elrendezése, és az ehhez tartozó mágneses tér eloszlása

## 3.2 Irodalmi áttekintés

A makro számításokban használt elterjedt MHS anyag modelleket az előző fejezetben bemutattam. A lebegtető erő numerikus számításával kapcsolatban számos publikáció elérhető. A statikus lebegtető erő meghatározásához főleg a kritikus állapot modellt próbálták valamely módszerrel alkalmazni a numerikus módszerekben [31][32][35][36][37]. Több esetben a kritikus áramsűrűség indukció függését is figyelembe vették [38][39]. A kritikus állapot modellt igyekeztek kiterjeszteni a flux-flow szakasz figyelembe vételével [30][34], ami inkább a veszteségek pontosabb számításánál számít, a csapágymereség szempontjából kevésbé érdekes. A lebegtető erő számításánál sok esetben kielégítő egyfajta ideális vezető modell, mely minden esetben megtartja a fluxusát [33], mellyel jól lehet főleg FC (field cooling - a szupravezetőt mágneses térben hűtjük le) hűtésű elrendezéseket modellezni. Bizonyos esetekben, kizárólag ZFC (zero field cooling – a szupravezetőt nulla mágneses térben hűtjük le) hűtésnél, elegendő a Meissner-effektus modelljét alkalmazni, amennyiben nincs fluxus behatolás a szupravezető belsejébe. A számítástechnika fejlődésével elérhetővé váltak akár 3D tranziens modellezések a „power-law” karakterisztika alkalmazásával [40][41][42].

[43] ban található egy kiváló útmutató a lebegtetett csapágyak numerikus modellezéséhez, melyet négy különböző elvi megfontoláshoz lehet kötni. A továbbiakban bemutatnám ennek alapján a saját modellezési eljárásom kiindulási megfontolásait is:

- 1) **Hűtési mód**, ez lehet FC vagy ZFC hűtés. Az én általam használt modellben mindkét hűtési eljárás modellezésére van lehetőség.
- 2) **Relatíván kicsi, vagy nagy elmozdulások vannak a mágnes és szupravezető között.** Mivel a lebegtető erők vizsgálatával foglalkozom, melyek nagy elmozdulásoknál hiszterézist mutatnak, ennek következtében számomra szükséges a nagy elmozdulások vizsgálata, a rendszer újra rácsozása minden lépésben.
- 3) **Hiszterézises viselkedés, vagy nem.** Az előbbi pontban említettem a hiszterézises viselkedés fontosságát, tehát ez fontos. Amennyiben nem lenne fontos a hiszterézis vizsgálata, elegendő lenne valamely ideális vezető, fluxusát mindig megtartó modellel végezni a számításokat.
- 4) **Statikus vagy dinamikus modellezés.** A általam végzett számítások a lebegtető erők és a merevség számítására korlátozódnak, a dinamikus hatások figyelembe vételére ebben az esetben nincsen szükség.

### 3.3 Sajátfejlesztésű programok MHS csapágyak szimulációjához

Az MHS csapágyak lebegtetési karakterisztikájának számításához saját fejlesztésű programokat készítettem. Két ilyen program készült, az egyik két dimenzióban számol, a másik három dimenzióban, mindkettőben a véges differenciák módszerét alkalmazom [17]. Mindkét program Delphi fejlesztői környezetben készült. A programokban az MHS anyag modellezésére saját fejlesztésű modellt alkalmazok.

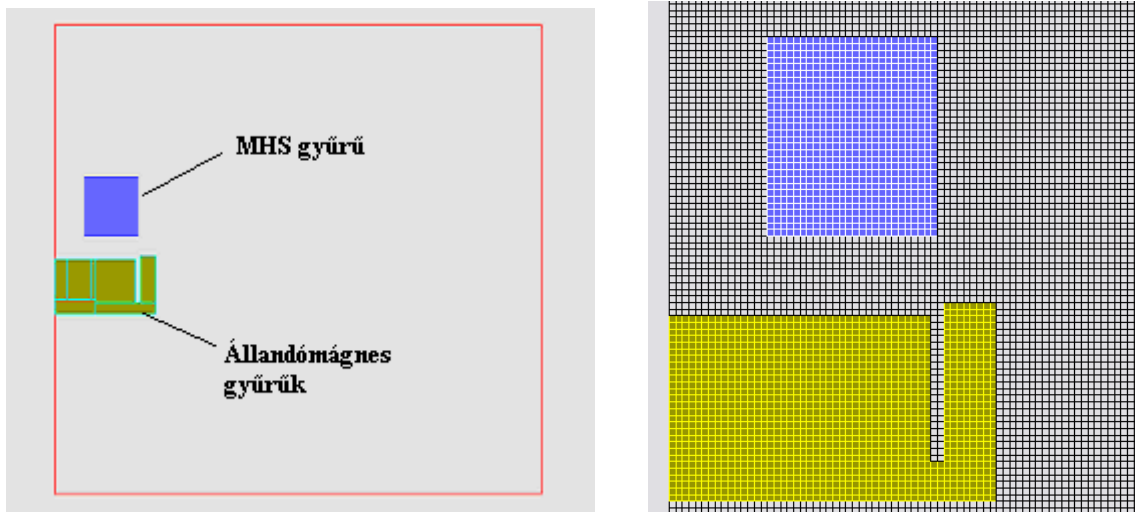
### 3.4 2D véges differenciás program

A program jellemzői a következők:

- a) Síkbeli és forgásszimmetrikus terek számítására egyaránt alkalmas;
- b) Mágneses vektorpotenciállal számol;
- c) Egyszerű, specifikus geometria szerkesztés;
- d) Lineáris anyagok, nemlineáris anyagok, állandó mágnesek, szupravezető anyagok kezelése;
- e) Statikus megoldó;
- f) Mágneses erőter megjelenítése, erőhatások automatikus számítása.

#### 3.4.1 Geometria és rács készítés

A programban a geometria egyszerűen gyakorlatilag téglalapok geometria és anyagi jellemzőinek megadásával történik. A 48. ábrán látható egy adott elrendezés geometriai modellje és a hozzá tartozó véges differenciás rács.



48. ábra. 2D forgásszimmetrikus geometria és rács

### 3.4.2 Alapegyenletek

A megoldáshoz a Maxwell-egyenletek magnetosztatikus alakját használom (85)(86)(87).

$$\text{rot} \underline{H} = \underline{J} \quad (85)$$

$$\text{div} \underline{B} = 0 \quad (86)$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H} + \underline{M} \quad (87)$$

A (85) kifejezésből látható, hogy áramsűrűség is megengedhető lenne, az MHS anyag modellje azonban nem tartalmaz áramokat, ezáltal az áramsűrűség a teljes tartományban zérus. Látható továbbá, hogy az állandómágnes annak mágnesezettségével és permeabilitásával van figyelembe véve, ahol a mágnesezettség az indukcióval azonos dimenziójú.

### 3.4.3 Numerikus egyenletek

A numerikus egyenletek felírásánál a síkbeli és forgásszimmetrikus eseteket külön kell kezelni.

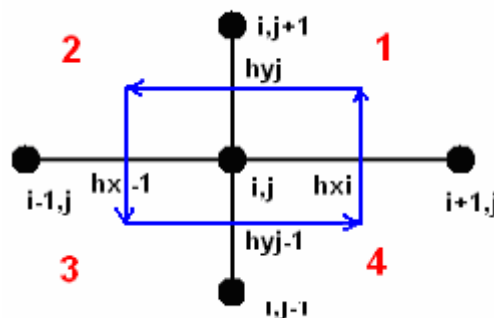
#### *Síkbeli egyenlet*

Vektorpotenciál alkalmazása esetén a (86) egyenlet automatikusan teljesül. (85) megoldásához induljunk ki annak integrális alakjából (88), felhasználva a (87)(89) kifejezést.

A rácsponti numerikus egyenlet felírásához segítségül szolgál a 49. ábra.

$$\oint_l H \, dl = \int J \, dA \quad (88)$$

$$B = \text{rot} A \quad (89)$$



49. ábra. Rácspontok és távolságok jelölése

A 49. ábra segítségével és (88) diszkrét formában történő felírásával az ábrán kézzel jelölt irányított vonal mentén előállítható a rácsponti véges differencia egyenlet (90).

$$\begin{aligned}
& \frac{(A_{i,j} - A_{i,j+1})/(hy_j) + M_x^1}{\mu_r^1} \cdot \frac{hx_i}{2} + \frac{(A_{i,j} - A_{i,j+1})/(hy_j) + M_x^2}{\mu_r^2} \cdot \frac{hx_{i-1}}{2} + \\
& \frac{(A_{i,j} - A_{i,j-1})/(hy_{j-1}) - M_x^3}{\mu_r^3} \cdot \frac{hx_{i-1}}{2} + \frac{(A_{i,j} - A_{i,j-1})/(hy_{j-1}) - M_x^4}{\mu_r^4} \cdot \frac{hx_i}{2} + \\
& \frac{(A_{i,j} - A_{i-1,j})/(hx_{i-1}) + M_y^2}{\mu_r^2} \cdot \frac{hy_j}{2} + \frac{(A_{i,j} - A_{i-1,j})/(hx_{i-1}) + M_y^3}{\mu_r^3} \cdot \frac{hy_{j-1}}{2} + \\
& \frac{(A_{i,j} - A_{i+1,j})/(hx_i) - M_y^4}{\mu_r^4} \cdot \frac{hy_{j-1}}{2} + \frac{(A_{i,j} - A_{i+1,j})/(hx_i) - M_y^1}{\mu_r^1} \cdot \frac{hy_j}{2} \\
& = \mu_0 (J^1 \cdot T^1 + J^2 \cdot T^2 + J^3 \cdot T^3 + J^4 \cdot T^4)
\end{aligned} \tag{90}$$

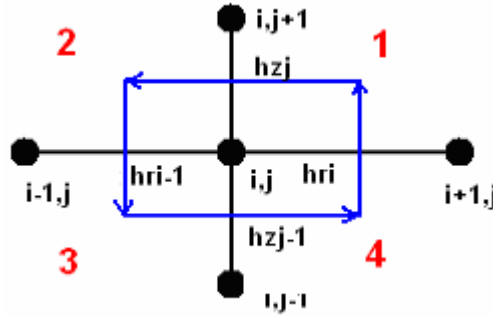
A a rácspontokban a vektorpotenciált,  $T$  az egyes negyedekben a kék vonal által körbefogott területet,  $h$  a rácspontok közötti távolságokat jelöli.

### Forgásszimmetrikus egyenlet

Forgásszimmetrikus esetben a rotáció kifejezése változik a síkbeli esethez képest [20], ebből következően az indukció a (91) egyenlettel fejezhető ki.

$$\vec{B} = \vec{e}_r \left( -\frac{\partial A}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \tag{91}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{M}}{\mu_0 \cdot \mu_r} \tag{92}$$



50. ábra. Rácspontok és távolságok forgásszimmetrikus esetben

A (88) kifejezést alkalmazva az 50. ábra szerint felhasználva a (91)(92) egyenleteket a forgásszimmetrikus véges differencia egyenlet (93) előállítható.

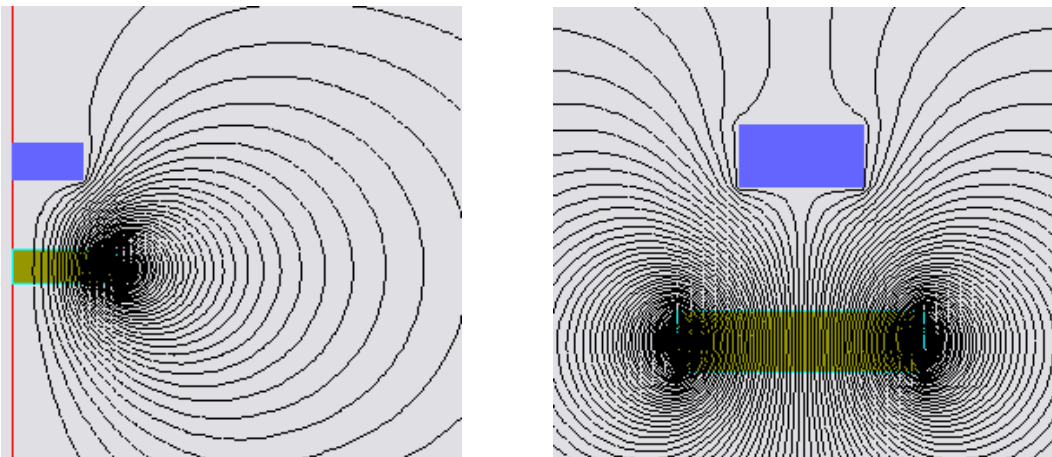
$$\begin{aligned}
& \frac{-(A_{i,j} - A_{i,j+1})/(hz_j) + M_r^1}{\mu_r^1} \cdot \frac{hr_i}{2} + \\
& \frac{-(A_{i,j} - A_{i,j+1})/(hz_j) + M_r^2}{\mu_r^2} \cdot \frac{hr_{i-1}}{2} + \\
& \frac{-(A_{i,j} - A_{i,j-1})/(hz_{j-1}) - M_r^3}{\mu_r^3} \cdot \frac{hr_{i-1}}{2} + \\
& \frac{-(A_{i,j} - A_{i,j-1})/(hz_{j-1}) - M_r^4}{\mu_r^4} \cdot \frac{hr_i}{2} + \\
& \frac{-A_{i,j}/R - (A_{i,j} - A_{i-1,j})/(hr_{i-1}) + M_z^2}{\mu_r^2} \cdot \frac{hz_j}{2} + \\
& \frac{-A_{i,j}/R - (A_{i,j} - A_{i-1,j})/(hr_{i-1}) + M_z^3}{\mu_r^3} \cdot \frac{hz_{j-1}}{2} + \\
& \frac{A_{i,j}/R - (A_{i,j} - A_{i+1,j})/(hr_i) - M_z^4}{\mu_r^4} \cdot \frac{hz_{j-1}}{2} + \\
& \frac{A_{i,j}/R - (A_{i,j} - A_{i+1,j})/(hr_i) - M_z^1}{\mu_r^1} \cdot \frac{hz_j}{2} \\
& = \mu_0 (J^1 \cdot T^1 + J^2 \cdot T^2 + J^3 \cdot T^3 + J^4 \cdot T^4)
\end{aligned} \tag{93}$$

### 3.4.4 Numerikus megoldó

Az egyenletek megoldására direkt, Gauss elimináción alapuló megoldót használtam, mely megfelelően tudja kezelni a ritka mátrixokat (legnagyobb főelem választás, indexelt mátrix tárolás és csökkentett memória felhasználás megoldás közben).

### 3.4.5 Eredmények megjelenítése

A megoldás során a program minden esetben automatikusan erőt számol (Maxwell stressz tenzor alapján [19]), továbbá a erővonalkép megjeleníthető (51. ábra).



51. ábra. Erővonalkép forgásszimmetrikus és síkbeli esetben

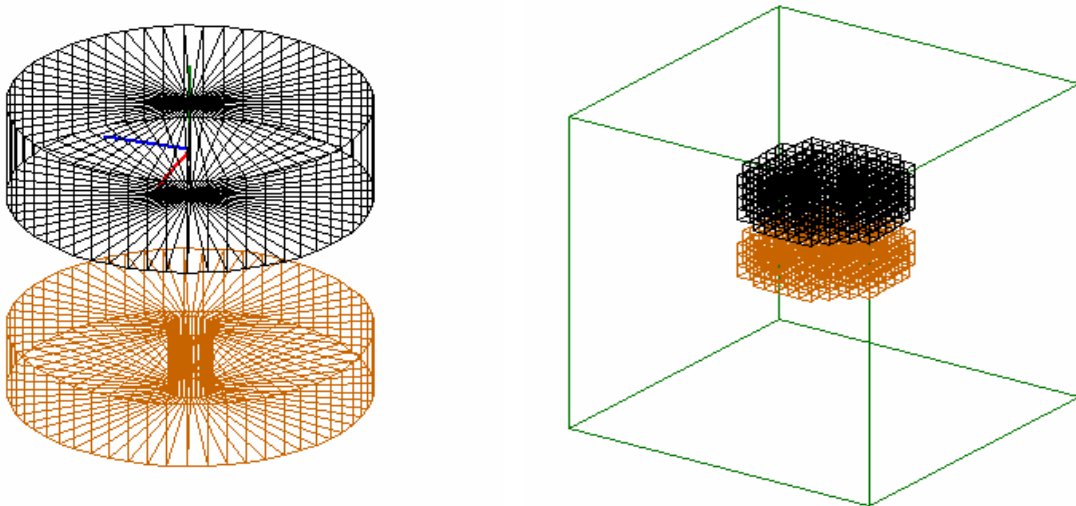
### 3.5 3D véges differenciás program

A program jellemzői a következők:

- a) 3D mágneses terek számítására alkalmas;
- b) Mágneses skalárpotenciállal számol;
- c) Egyszerű, specifikus geometria szerkesztés;
- d) Lineáris anyagok, állandó mágnesek, szupravezető anyagok kezelése;
- e) Statikus megoldó;
- f) Mágneses erőter megjelenítése, erőhatások automatikus számítása.

#### 3.5.1 Geometria és rács készítés

A programban a geometriai szerkesztés gyűrű formájú objektumok egyszerű bevitelére korlátozódik. Az 52. ábrán látható egy adott elrendezés geometriai modellje és a hozzá tartozó véges differencia rács.



52. ábra. 3D geometria és rács

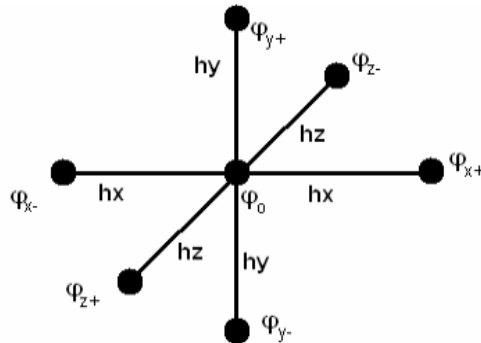
#### 3.5.2 Alapegyenletek

A megoldáshoz a Maxwell-egyenletek magnetosztatikus alakját használom (85)(86)(87), annyi eltéréssel, hogy (85) helyett (94) kifejezést alkalmazom, kihasználva a tér örvénymentességét, ezáltal skalárpotenciállal is lehet számolni, ami jelentősen csökkenti a számítási erőforrás igényeket, mivel rácspontonként csak egy ismeretlent kell meghatározni.

$$\operatorname{rot} \underline{H} = 0 \quad (94)$$

### 3.5.3 Numerikus egyenletek

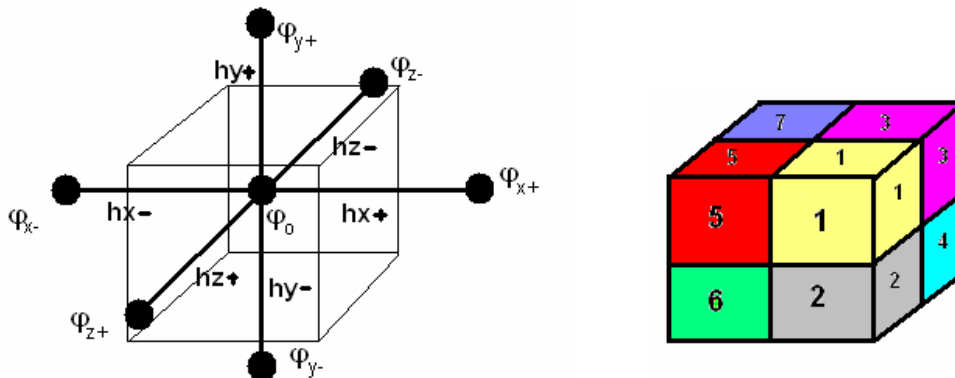
Az irodalmakban [18] állandó irányonkénti rácsosztás és homogén közegre vonatkozóan megtalálható a skalárpotenciálra vonatkozó véges differenciás rácsponti egyenlet (95) az 53. ábra szerinti jelölésekkel.



53. ábra. Rácspontok és jelölések 3D-ben

$$\frac{\varphi_{x+} + \varphi_{x-}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{y+} + \varphi_{y-}}{h_y^2} + \frac{\varphi_{z+} + \varphi_{z-}}{h_z^2} = \frac{2\varphi_0}{h_x^2} + \frac{2\varphi_0}{h_y^2} + \frac{2\varphi_0}{h_z^2} \quad (95)$$

Amennyiben állandó rácsosztás van minden irányban, az egyenlet tovább egyszerűsödik. Változó rácsosztás és különböző anyagok határán alkalmazható a (97) egyenlet az 54. ábra jelöléseivel, a (86) integrális alakjából (96) kiindulva.



54. ábra. Rácspontok és térfogatrészek

$$\oint_A B \, dA = 0 \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi_x^+ - \varphi_0}{h_x^+} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r1} \cdot h_y^+ \cdot h_z^+ + \mu_{r2} \cdot h_y^- \cdot h_z^+ + \mu_{r3} \cdot h_y^+ \cdot h_z^- + \mu_{r4} \cdot h_y^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{\varphi_x^- - \varphi_0}{h_x^-} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r5} \cdot h_y^+ \cdot h_z^+ + \mu_{r6} \cdot h_y^- \cdot h_z^+ + \mu_{r7} \cdot h_y^+ \cdot h_z^- + \mu_{r8} \cdot h_y^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{\varphi_y^+ - \varphi_0}{h_y^+} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r1} \cdot h_x^+ \cdot h_z^+ + \mu_{r3} \cdot h_x^+ \cdot h_z^- + \mu_{r5} \cdot h_x^- \cdot h_z^+ + \mu_{r7} \cdot h_x^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{\varphi_y^- - \varphi_0}{h_y^-} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r2} \cdot h_x^+ \cdot h_z^+ + \mu_{r4} \cdot h_x^+ \cdot h_z^- + \mu_{r6} \cdot h_x^- \cdot h_z^+ + \mu_{r8} \cdot h_x^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{\varphi_z^+ - \varphi_0}{h_z^+} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r1} \cdot h_x^+ \cdot h_y^+ + \mu_{r2} \cdot h_x^+ \cdot h_y^- + \mu_{r5} \cdot h_x^- \cdot h_y^+ + \mu_{r6} \cdot h_x^- \cdot h_y^-) + \\
& \frac{\varphi_z^- - \varphi_0}{h_z^-} \cdot \frac{1}{4} (\mu_{r3} \cdot h_x^+ \cdot h_y^+ + \mu_{r4} \cdot h_x^+ \cdot h_y^- + \mu_{r7} \cdot h_x^- \cdot h_y^+ + \mu_{r8} \cdot h_x^- \cdot h_y^-) + \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{x1} \cdot h_y^+ \cdot h_z^+ + M_{x2} \cdot h_y^- \cdot h_z^+ + M_{x3} \cdot h_y^+ \cdot h_z^- + M_{x4} \cdot h_y^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{x5} \cdot h_y^+ \cdot h_z^+ + M_{x6} \cdot h_y^- \cdot h_z^+ + M_{x7} \cdot h_y^+ \cdot h_z^- + M_{x8} \cdot h_y^- \cdot h_z^-) - \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{y1} \cdot h_x^+ \cdot h_z^+ + M_{y3} \cdot h_x^+ \cdot h_z^- + M_{y5} \cdot h_x^- \cdot h_z^+ + M_{y7} \cdot h_x^- \cdot h_z^-) + \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{y2} \cdot h_x^+ \cdot h_z^+ + M_{y4} \cdot h_x^+ \cdot h_z^- + M_{y6} \cdot h_x^- \cdot h_z^+ + M_{y8} \cdot h_x^- \cdot h_z^-) - \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{z1} \cdot h_x^+ \cdot h_y^+ + M_{z2} \cdot h_x^+ \cdot h_y^- + M_{z5} \cdot h_x^- \cdot h_y^+ + M_{z6} \cdot h_x^- \cdot h_y^-) + \\
& \frac{1}{4\mu_0} (M_{z3} \cdot h_x^+ \cdot h_y^+ + M_{z4} \cdot h_x^+ \cdot h_y^- + M_{z7} \cdot h_x^- \cdot h_y^+ + M_{z8} \cdot h_x^- \cdot h_y^-) = 0
\end{aligned} \tag{97}$$

### 3.5.4 Megoldás és eredmények

Az egyenletrendszer megoldása és az erőhatások számítása azonos módon történik, mint a 2D programban. Az erőter megjelenítése egy választható síkban lehetséges, ahol a látottak értékelése nehezebb, mint 2D esetben, a skálárpotenciál ekvipotenciális vonalai mindig merőlegesek az aktuális mágneses térerősség irányára.

## 3.6 Szupravezető anyag modell

A modell a II típusú szennyezett szupravezetők viselkedését írja le. A modell kifejezetten statikus mágneses számításokhoz lett kifejlesztve, mely indokolt a csapágyak lebegtetési karakterisztikájának vizsgálatakor, mivel egészen lassú változásokról van szó. Ilyen esetekben egy dinamikus modell alkalmazása további problémákat vet fel, mivel az MHS anyag valós

vezetőképessége sok esetben olyan nagy, hogy azt nehéz numerikusan stabilan kezelni a véges pontosság miatt.

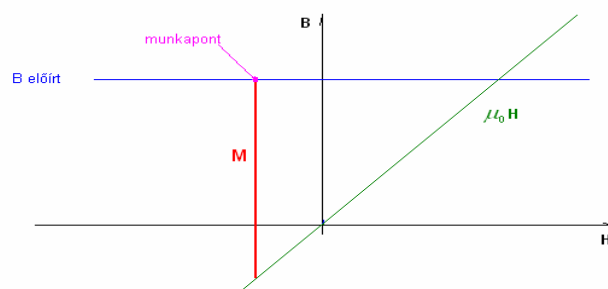
A szupravezetőt mindkét programban mágneses anyagként modellezem. Megkülönböztetem a makroszkopikus térszámításnál használt modellt, mely egyfajta ideális vezetőként viselkedik, oly módon, hogy minden esetben megtartja a fluxusát, és az ehhez tartozó számítási algoritmust, ami a szupravezető mikroszkopikus, valós fizikai folyamatokon alapuló változásokat (fluxus átrendeződés) kezeli.

### 3.6.1 A makro (térszámításban alkalmazott) modell

A térszámításban a szupravezetőt a diszkrét rácsnak megfelelően kis térfogategységekre osztjuk. A modell egy ideális vezető tulajdonságait kell, hogy leírja minden kis térfogatra, de nem áramokkal, hanem mágnesesen. Az ideális vezető tulajdonsága, hogy bármekkora áram is folyik benne, a benne levő elektromos térerősség mindig nulla, tehát a fluxusa nem képes változni. Az egyes térfogategységekben tehát ennek a modellnek a szempontjából az indukció előírt konstans. Ennek megvalósítására kétféle karakterisztikát használok, melyek a következők.

- 1)  $B_{ismert} = \mu_0 H + M$
- 2)  $B_{ismert} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H + M \mid \mu_r \rightarrow 0 \mid M \cong B_{ismert}$

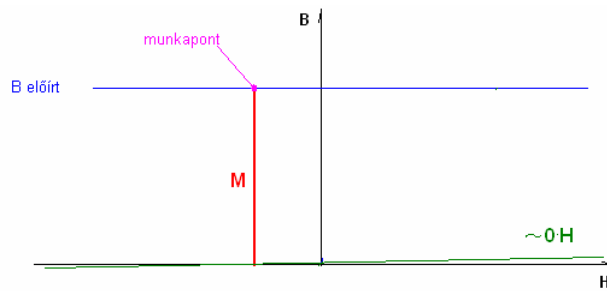
Az 1) változatot a háromdimenziós programban alkalmaztam. Grafikusan az 55. ábrán látható.



55. ábra. Az 1) változat

A mágnesezettség lineáris függvénye a mágneses térerőnek. A megvalósításra két lehetőség adódik. Az első, hogy járulékos ismeretlenként bevesszük a numerikus egyenletrendszerbe a cellák mágnesezettségeit. A második, hogy a skalárpotenciálból és az ismert indukcióból kifejezzük a mágnesezettséget. Az utóbbinál a számításból nem kapjuk vissza M-et, azonban az nem is fontos, s így nem kell további egyenleteket bevenni az egyenletrendszerbe.

A 2) változatban a mágnesezettség ismert, méghozzá egyenlő az előírt indukció értékével (56. ábra).



56. ábra. A 2) változat

A számítás ennél a változatnál nagyon egyszerű, az elkészült szoftverek közvetlenül tudják alkalmazni. A relatív permeabilitás értéke mérnöki szempontból nulla kell, hogy legyen. A konkrét nulla érték természetesen nem megengedhető.

Az előírt fluxus mindenképpen jó választás a makro számítás során. Megvizsgálván a szupravezető viselkedését, belátható, hogy bármely külső változásnál a fluxus az a mennyiség, mely a legkevesebbet változik. A szupravezető elmozdulásánál mégis törekednünk kell arra, hogy minél kisebb lépésközzel haladjunk. Az elmozdulás során feltételezzük, hogy az előző helyzetben már megtaláltuk a stabil fluxus elrendezést, majd a szükséges iterációk elvégzése során megkeressük a jelenlegi stabil, állandósultnak tekinthető fluxus eloszlást.

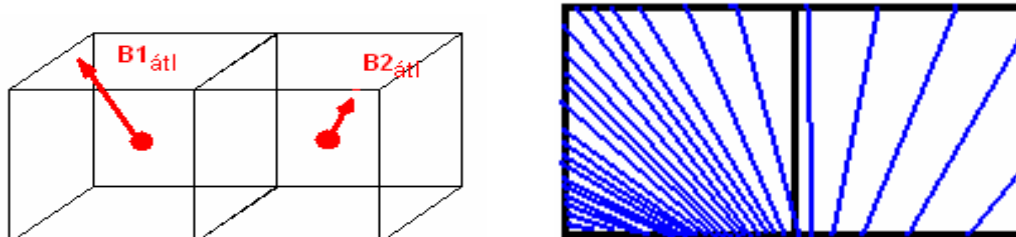
### 3.6.2 Valós fizikai jelenségeken alapuló kritikus állapot modell

A makro számításból kapott eredményeket minden esetben felül kell bírálni, hogy az említett fluxus kényszer fennállhat-e a valóságban. A II típusú szupravezetőkbe a fluxus csak kvantáltan képes behatolni, úgynevezett fluxus szálak formájában. Minden fluxus szál a fluxus kvantumot tartalmazza, melynek értéke  $2,07 \cdot 10^{-15}$  Vs. Belátható, hogy ez az érték nagyon kicsi a programokban elérhető felbontásokhoz képest. Ebből következik, hogy nincs értelme és nem is vezetne túl sok eredményre ezeknek az egyenkénti kezelése egy makro számítási környezetben. A szennyezett szupravezető rácshibákat tartalmaz, melyek megakadályozzák a fluxus szálak mozgását mindaddig, amíg a rájuk ható erő meg nem halad egy kritikus értéket (pinning erő).

A számítási eljárás a fluxus szálak összességét vizsgálja, pontosan annyit amennyi az aktuális térfogategység környezetében található. A cella indukciója és a benne levő fluxus szálak közötti összefüggés a következő (98).

$$B_{\text{átlag}} = n \cdot \frac{\phi_0}{A} \quad (98)$$

Ahol  $n$  a cellában levő fluxus szálak száma,  $\phi_0$  a fluxus kvantum,  $A$  a térfogategység keresztmetszete. Az 57. ábra a modell feltevéseire vonatkozik, miszerint a fluxus szálak sűrűsége és irányítottága egyenletesen változik két cella között. Mindezek alapján meg kell vizsgálnunk, hogy a cella peremén levő fluxus szálakra ható erő meghaladja-e a pinning erő értékét.



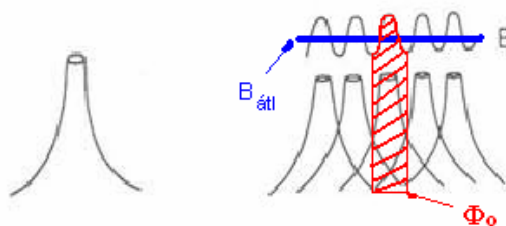
57. ábra. Átlagos indukció értékek és fluxusszálak szemléletesen

Amennyiben igen, biztosak lehetünk benne, hogy a fluxus elrendezés nem stabil.

A fluxusszálakra ható erő a (99) összefüggés segítségével számolható.

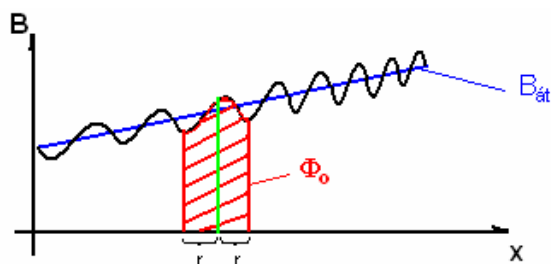
$$f_v = J \times B \quad (99)$$

A (99) kifejezésben  $f_v$  a térfogati erősűrűség,  $J$  az áramsűrűség,  $B$  a mágneses indukció. Erők helyett érdemes inkább hosszegységre ható erőket számolni, melyet  $f_v$  felületi integráljaként kapunk meg. Az 58. ábrán az indukció eloszlás látható egy felmágnesezett szupravezetőben, egyenletes fluxusszál sűrűséget feltételezve.



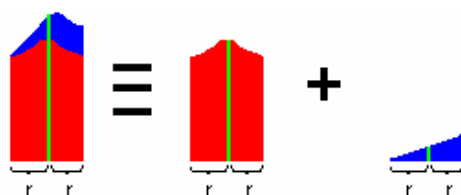
58. ábra. Fluxusszálak és átlagos indukció egyenletes fluxusszál sűrűség esetén

A modellben feltételezem, hogy két szomszédos térfogategység között egyenletesen változó indukció eloszlás található az 59. ábra szerint.



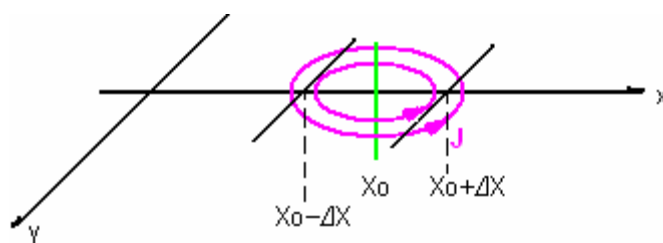
59. ábra. Egyenletesen változó fluxusszál sűrűség

Az 59. ábrán a zöld vonal a fluxusszál közepét jelöli. Bontsuk fel a középvonal  $r$  sugarú környezetében az indukciót egy a középvonalra szimmetrikus és egy nem szimmetrikus összetevőre a 60. ábra szerint.



60. ábra. Az indukció eloszlás szeparálása

A nem szimmetrikus összetevő a modell feltevése szerint lineáris, meredeksége megegyezik  $B_{\text{átlag}}$  meredekségével. Térjünk vissza a fluxusszál hosszegységére eső erő meghatározásához. A 61. ábrán a középső függőleges vonal jelöl egy fluxusszálat,  $J$  koncentrikus vonalai pedig a körülötte folyó árnyékoló áramokat reprezentálják.



61. ábra. A fluxusszál középpontja és körárama

Először tételezzük fel, hogy az indukció csak az  $x$  tengely irányában változik. Az  $X_0 + \Delta X$  pontban integráljuk a  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ -t az  $y$  tengely mentén. Belátható hogy ez ekvivalens lesz  $J_y \cdot B$  (a pont itt algebrai szorzatot jelöl)  $y$  tengely menti integráljával, mivel  $\mathbf{B}$  párhuzamos a fluxusszállal,  $\mathbf{J}$  pedig mindenhol érintő irányú, így  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$   $y$  irányú komponense (azaz  $\mathbf{J}_x \times \mathbf{B}$ )  $y$  mentén integrálva nullát fog adni a szimmetria miatt. Adjuk hozzá az  $X_0 - \Delta X$  ponthoz tartozó  $(J_y \cdot B)$ -nek az tengely szerinti integrálját. Mivel  $J_y$  itt éppen ellentétes irányú minden pontban, az összeg a (100) kifejezésben látható.

$$\int [B(X_0 + \Delta X) - B(X_0 - \Delta X)] \cdot J_y(X_0 + \Delta X, y) dy \quad (100)$$

A (100) kifejezést kell integrálnunk  $\Delta X$  szerint, hogy megkapjuk a fluxusszál hosszegységére eső erősűrűséget. Ha felbontjuk a  $B(X_0 + \Delta X) - B(X_0 - \Delta X)$  -t előzőleg említett szimmetrikus és nem szimmetrikus összetevőkre, akkor azt átírhatjuk (101) nek megfelelően.

$$B(X_0 + \Delta X) - B(X_0 - \Delta X) = 2\Delta X \cdot \frac{\partial B_{nsz}(x)}{\partial X} \quad (101)$$

$B_{nsz}$  a nem szimmetrikus összetevő, melynek deriváltjáról feltételeztem hogy konstans. Ezek alapján a hosszegységre ható erő kifejezhető (102).

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} B_{nsz}(x) \right]_{X_0}^{X_0+R} \int_{X_0}^{X_0+R} 2 \cdot (x - X_0) \int_{-\sqrt{R^2-x^2+2xX_0-X_0^2}}^{\sqrt{R^2-x^2+2xX_0-X_0^2}} J_y(x, y) dy dx \quad (102)$$

A (102)-ben szereplő kettős integrál értéke, amennyiben a fluxusszál köráramait azonosnak tekintjük minden fluxusszálban, állandó (103).

$$f_l = C \cdot \frac{\partial B_{nsz}(x)}{\partial x} \quad (103)$$

Amennyiben az erő (103) bárhol meghaladja a pinning erő értékét, az adott erőtér nem lehet stabil, a befagyott fluxus eloszlást módosítani kell.

### 3.6.3 Összehasonlítás a Bean-moddellel

A gyakorlatban a leginkább elterjedt modell a Bean-modell, mely szerint a szupravezetőben bármely kis mágneses térváltozásra  $J_c$  kritikus áramsűrűség alakul ki [4]. Kezdeti állapotban megengedett a nulla áramsűrűség. Egy dimenzióban az első Maxwell-egyenlet magnetosztatikussá változta ekkor a (104) formára egyszerűsödik.

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = J_{c_z} \quad (104)$$

Felhasználva a pinning erőre vonatkozó szokásos számítási formulát (105) és a saját modellemben alkalmazottakat, a C paramétert kifejezhetjük más módon is (107).

$$f_{pinning} = J_c \times \phi_0 \quad (105)$$

$$rotH = J_c \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = J_c \Rightarrow \left( \frac{\partial B_{nsz}(x)}{\partial x} \right)_{\max} = \mu_0 \cdot J_c \quad (106)$$

$$f_{pinning} = J_c \times \phi_0 = \left( \frac{\partial B_{nsz}(x)}{\partial x} \right)_{\max} \cdot C \Rightarrow C = \frac{J_c \times \phi_0}{\mu_0 \cdot J_c} = \frac{\phi_0}{\mu_0} \quad (107)$$

Az általam készített modellhez a térszámításban nincs szükség áramokra, akár skalárpotenciállal is lehet számolni, mely 3D-ben komoly előnyt jelent, az indukció gradiens bármely értéke megengedett 0 és a kritikus érték között, ellentétben a Bean-moddellel, melyben az áramsűrűség csak 0 vagy  $J_c$  lehet, ami különösen FC hűtés esetén fontos.

### 3.6.4 Különböző hűtési módok kezelése

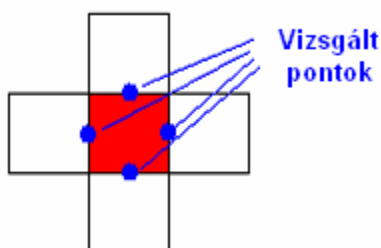
A szupravezető hűtési módja a modell szempontjából a kezdeti fluxus eloszlás számítására van hatással. Kétféle hűtési mód használatos.

- 1) ZFC – A szupravezetőt nulla mágneses térben hűtik le
- 2) FC – A szupravezetőt mágneses térben hűtik le

ZFC hűtésnél a dolgunk nagyon egyszerű, a kezdeti fluxus minden cellában azonosan nulla. FC esetben egy számítással többet kell végeznünk. Az első számításnál a szupravezetőt mágnesesen semleges anyagként kezeljük, melyből megkapjuk a hűtés pillanatában a kezdeti fluxus eloszlást minden cellára. A továbbiakban minden azonosan működik, mint a ZFC hűtésnél.

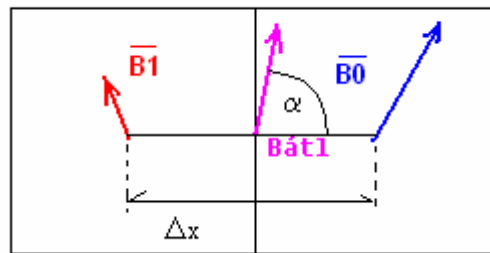
### 3.6.5 A fluxus átrendezés folyamata

Az átrendezési folyamat talán a legkritikusabb pontja a modellnek. A változtatás során a fluxus megmaradás törvényét az új eloszlásnak ki kell elégítenie, továbbá nagyon fontos, hogy a folyamat a valós értékekhez konvergáljon. Ennek biztosítása oly módon érhető el, hogy soha nem végzünk nagyobb változtatást, mint ami az elvi modellben lezajlana. Az algoritmus a következő. Megvizsgálunk minden cellát. Egyszerre csak a vizsgált cella fluxusát változtatjuk, a változás viszont csak a következő makro számításnál lép érvénybe, hogy a sorrend ne befolyásolja a számítást. A cella határain megvizsgáljuk az indukció gradienseket, megjegyezzük a legnagyobb kifelé és a legnagyobb befelé irányuló gradienseket egyaránt. Amennyiben bármelyik meghaladja a kritikus értéket, elvégezzük a szükséges változtatást. Az is előfordulhat, hogy egy cellából kifelé és befelé egyaránt kell változtatnunk, ekkor elvégezzük a fluxus csökkentést és növelést egyaránt. Problémát jelenthet még az irányítottság, amennyiben befelé irányuló gradiensünk van, tehát a fluxust növeljük. A következőkben az egyszerűség kedvéért két dimenzióra fogom bemutatni az eljárást. A 62. ábrán egy kiragadott szupravezető cella látható, és az indukció gradiensek vizsgált pontjai.



62. ábra. A vizsgált cella

Ragadjunk ki egy pontot. Legyen ez vízszintesen a cella bal oldalán látható pont. A kiragadott pontban az indukció vektor a 63. ábrán látható.



63. ábra. Fluxusszálak iránya a határon

Az átlagos indukció (fluxus szálak a határon) egységnyi hosszú irányvektorát előállíthatjuk a (108) formulával.

$$\bar{B}_{\text{átl}} = \frac{\bar{B}_1 + \bar{B}_0}{|\bar{B}_1 + \bar{B}_0|} \quad (108)$$

A gradiens számításnál az indukció vele párhuzamos irányú komponensét kell figyelembe venni. A párhuzamos komponens a két cella közepén a (109) kifejezéssel számítható.

$$Bn_{\text{párh}} = \bar{B}n \cdot \bar{B}_{\text{átl}} \quad (109)$$

A gradiens értéke ekkor az x tengellyel bezárt szög figyelembe vételével (110) segítségével határozható meg.

$$\text{grad}B = \frac{B1_{\text{párh}} - B0_{\text{párh}}}{\Delta x} \cdot \sin(\alpha) \quad (110)$$

Még egy feladat van, meg kell határozni mindezek alapján a változtatás mértékét. Mint azt korábban említettem, ennél a pontnál óvatosságnak kell lenni, nehogy a változtatás meghaladja a valódi változás mértékét, mert akkor a modell a továbbiakban nem hiteles eredményeket fog adni. Mindenképpen kisebb változtatás szükséges, mintha állandónak tekintenénk a külső teret. Sajnos ebből az is következik, hogy egy stabil állapot megtalálásához többször kell elvégeznünk a változtatásokat, mindaddig, amíg a megfelelő gradiens értékeket elérjük. Mivel ugyanakkora változtatást végzünk egy adott cellán kifelé, mint egy másikon befelé, a fluxus megmaradás a diszkretizálási hibákat leszámítva viszonylag jól teljesíthető.

### 3.7 A kritikus gradiens meghatározása közvetett módszerrel

A kritikus gradienst legegyszerűbben (106) ből határozhatjuk meg. Ehhez azonban szükségünk van  $J_c$  ismeretére, amit nem minden esetben tudunk. Erre szolgál az általam kidolgozott algoritmus. Ehhez szükséges erőméréseket, és számításokat egyaránt végeznünk. Az algoritmus mind ZFC és FC hűtés esetén alkalmazható.

Miután lehűtöttük a szupravezetőt, azt mindenképpen valamely irányba mozgatnunk kell, s közben mérni a rá ható erőt. Ugyanezt a folyamatot le is szimuláljuk oly módon, hogy a fluxust nem változtatjuk egyetlen esetben sem. Mindezek után kiértékeljük a kapott görbéket. Ameddig együtt haladnak, tudhatjuk, hogy nem történt fluxus változás. Abban a pontban, ahol a mért és a számított erő értékek különbözőek kezdenek lenni, meghatározzuk a program segítségével a szupravezető felületén a legnagyobb indukció gradienst. Ez az érték szolgáltatja számunkra a kritikus gradienst a további számításokhoz.

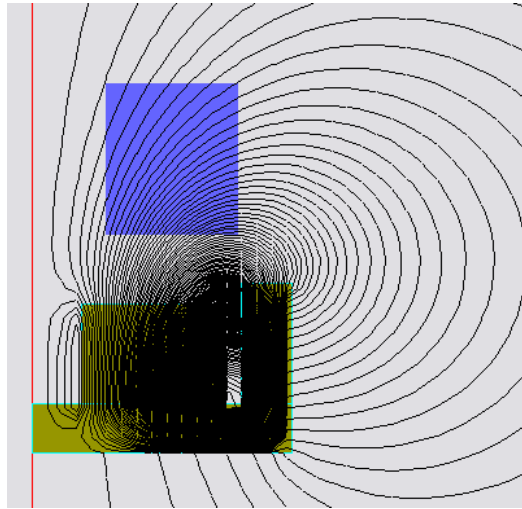
### 3.8 Eredmények összevetése a számításokkal

Az összehasonlítás egy FC hűtött csapágyra vonatkozik, melyben szupravezető a mágnesektől 5 mm-es távolságban lett lehűtve. A 64. ábrán látható a mágnes elrendezés és a szupravezető.



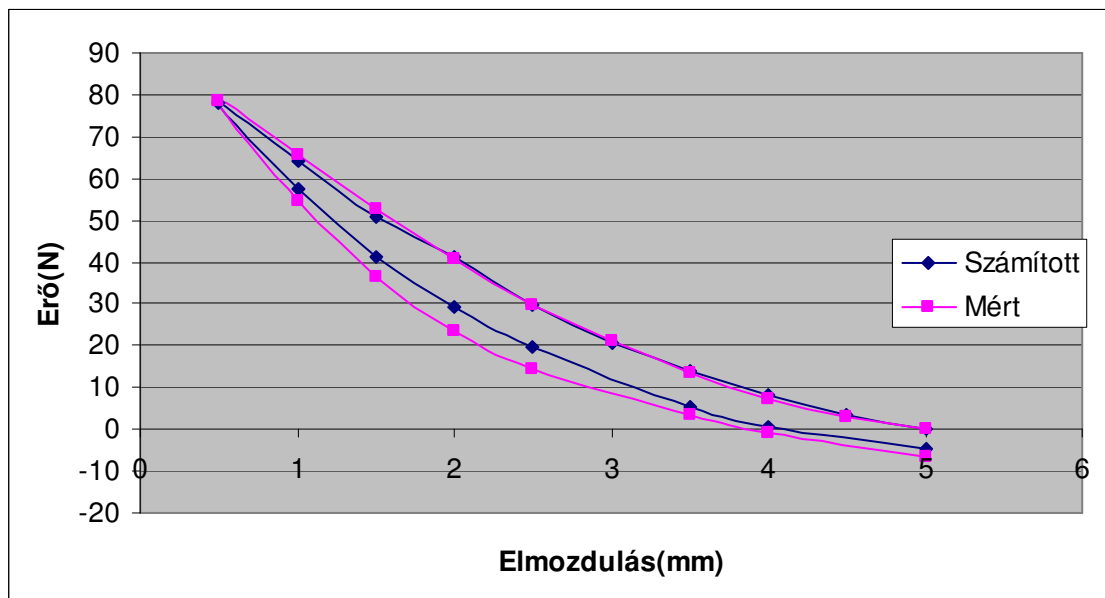
64. ábra. Mágnes és szupravezető

Lehűtés után a mágneset közelítették a szupravezetőhöz 0,5 mm-es távolságig, majd vissza az eredeti helyzetébe, miközben erőt regisztráltak. Az elrendezést a 2D-s programmal szimuláltam forgásszimmetrikusan. A 65. ábrán látható a számított erővonalkép a hűtés pillanatában.



65. ábra. Számított erővonalkép a hűtés pillanatában (FC hűtés)

A mért és számított erő értékek a 66. ábrán láthatók.



66. ábra. Mért és számított eredmények

### 3.9 Összegzés

Kidolgoztam egy sajátos szupravezető modellt, mely megfeleltethető az ismert kritikus állapot modellnek. A modell alkalmas a szupravezető csapágyak statikus lebegtető erőinek számítására, FC és ZFC hűtésnél egyaránt. A modellt a véges differenciák módszerébe illeszttem. A számítási eredményeket összevettem mérésekkel, melyek jó egyezést mutattak.

### **3.10 Tézis**

- A szupravezető kritikus állapotára vonatkozó saját fizikai anyagmodellt és annak matematikai leírását dolgoztam ki, mely alkalmas statikus mágneses térbeli számításra FC és ZFC hűtésnél egyaránt, továbbá képes kezelni a szupravezetőben létrejövő fluxus átrendeződést és ezáltal a jellegzetes hiszterézises viselkedést lassú változások esetére. A modell jól illeszthető a véges differenciák módszeréhez, melynek alkalmazását 2D és 3D esetre is kidolgoztam. Kimutattam a saját modellem és az ismert kritikus állapot modell közötti megfelelést. [52], [53], [54].

## 4 Új tudományos eredmények

- Létrehoztam egy új numerikus modellezési eljárást, mely alkalmas MHS gyűrűk tranzien্স csatolt véges-elem modellezésére, mely magába foglal 2D mágneses véges-elem, 3D termikus véges-elem és elektromos hálózati modellt. Implementáltam az MHS E-J karakterisztikájából származó nemlinearitást a numerikus szimulációba, ezzel lehetővé tettem, hogy a kiadódó nemlineáris egyenleteket a Newton-Raphson iterációs eljárással oldjam meg. A szimulációban a vasmag nemlinearitását is figyelembe vettem. A numerikus megvalósításhoz 2 módszert dolgoztam ki a csatolt mágneses és termikus egyenletet szimultán megoldásához. [44], [55], [56].
- A kidolgozott modellezési módszer segítségével szimulációkat végeztem MHS ZÁK és MHS önkorlátozó transzformátorokon. A szimulációval kimutattam az egyes esetekben a melegedési folyamatok hatását a supra-normál átmenetre, ezáltal az eszköz működési karakterisztikáira, kitüntetetten az áram korlátozásának folyamatára. A számításaimat mérésekkel validáltam, a mérési eredmények mind a folyamatok jellegét, mind számszerűségét kielégítő hűséggel és pontossággal igazolták. [44], [55], [56].
- A szupravezető kritikus állapotára vonatkozó saját fizikai anyagmodellt és annak matematikai leírását dolgoztam ki, mely alkalmas statikus mágneses térbeli számításra FC és ZFC hűtésnél egyaránt, továbbá képes kezelni a szupravezetőben létrejövő fluxus átrendeződést és ezáltal a jellegzetes hiszterézises viselkedést lassú változások esetére. A modell jól illeszthető a véges differenciák módszeréhez, melynek alkalmazását 2D és 3D esetre is kidolgoztam. Kimutattam a saját modellem és az ismert kritikus állapot modell közötti megfelelést. [52], [53], [54].

## 5 További kutatási feladatok

A két fő területen az általam kitűzött kutatási célokat sikerült megvalósítani. Továbbfejlesztési lehetőségek természetesen lehetségesek, melyek közül felsorolok néhányat.

- MHS ZÁK szimulációk továbbfejlesztési lehetőségek:
  1. Magasabb rendű elemek alkalmazása a 2D mágneses részben
  2. A szimuláció teljes kiterjesztése 3 dimenzióra.
  3. További kísérleti modellek szimulációs vizsgálata.
  
- MHS csapágy szimulációk továbbfejlesztésének lehetőségek
  1. A hűtés utáni hőmérséklet eloszlás függésének vizsgálata
  2. Dinamikus szimulációk a csapágyvesztés számítására

## 6 Irodalomjegyzék

- [1] Györe A. Szupravezetős induktív zárlatiáram-korlátozó és osztott szekunder tekercselésű önkorlátozó transzformátor analízise és megvalósítása, PhD értekezés, BME, Budapest, 2011
- [2] Semperger S. Magashőmérsékletű szupravezető gyűrű állapotátmenetének felhasználása újszerű, induktív csatolású eszköz megvalósítására, PhD értekezés, BME, Budapest, 2004
- [3] K. Berger, J. Lévêque, D. Netter, B. Douine, and A. Rezzoug, “Influence of Temperature and/or Field Dependences of the E-J Power Law on Trapped Magnetic Field in Bulk YBaCuO”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 17, NO. 2, JUNE 2007
- [4] Vajda István „Szupravezetők alkalmazásai, elektronikus jegyzet”
- [5] J. Duron, F. Grilli, L. Antognazza, M. Decroux, B. Dutoit and O. Fischer, “Finite-element modelling of YBCO fault current limiter with temperature dependent parameters”, Supercond. Sci. Technol., 20, 2007, pp 338–344
- [6] A. Kamitani, K. Hasegawa, T. Yokono, “High Performance Method for Determination of Shielding Current Density in HTS Plate”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 2, MARCH 2002
- [7] Jonathan Richard Shewchuk, „Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator” in Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering (Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors), volume 1148 of Lecture Notes in Computer Science, pp 203-222, Springer-Verlag, Berlin, May 1996
- [8] Imre László, „Hőátvitel összetett szerkezetekben”, Akadémiai kiadó, Budapest, 1983
- [9] Sebestyén Imre, „Elektronikus jegyzet a Mezőszimuláció véges elem-módszerrel című tárgyhoz”
- [10] Peter P. Sylvester, Ronald L. Ferrari, „Finite elements for electrical engineers”, Third Edition, Cambridge University Press, 1996
- [11] R. Mertens, H. De Gerssem, K. Hameyer “Transient field circuit coupling based on a topological approach” 9th International Symposium on Electromagnetic Fields- ISEF’99, Pavia, Italy, September 23-25, pp. 17-23, 1999.
- [12] Singiresu S. Rao, „The Finite Element Method In Engineering”, Fourth Edition, Elsevier Science & Technology Books, 2004
- [13] Kis Ottó, Kovács Margit, „Numerikus módszerek”, Műszaki könyvkiadó, 1973

- [14] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, R. Pozo, V. Eijkhout, H. van der Vorst, C. Romine “Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods”
- [15] Jonathan Richard Shewchuk, „An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain”, School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213, 1994
- [16] Kohári Z., „Szupravezetős csapágyazású, kompakt lendkerekes energiatároló optimalizálása”, PhD értekezés, BME, Budapest, 2011
- [17] Iványi Amália: Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában, Akadémiai kiadó, 2003
- [18] Fodor Gy.: Elektromágneses terek, Műegyetemi Kiadó, 1999
- [19] Simonyi K.: Elméleti villamosságtan, Tankönyvkiadó, 1992
- [20] Vágó I.: Villamosságtan II, Tankönyvkiadó, 1988
- [21] Bean, C.P., “Magnetisation of high-field superconductors”, Review Modern Physics, Vol. 36, pp. 31-9., 1964
- [22] Bean, C.P., “Magnetisation of hard superconductors”, Physical Review Letters, Vol. 8, p. 250., 1962
- [23] Kim, Y.B., Hempstead, C.F. and Strand, A.R., “Flux-flow resistance in type-II superconductors”, Physical Review, Vol. 139, pp. 1163-72., 1965
- [24] François Roy, Bertrand Dutoit, Francesco Grilli, Frédéric Sirois, “ Magneto-Thermal Modeling of Second-Generation HTS for Resistive Fault Current Limiter Design Purposes”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 18, NO. 1, pp. 29-35, MARCH 2008
- [25] Kim J., Grundmann, M., Lindmayer, R., Röckelein, W., Schmidt, W., “SIMULATION OF HTS SWITCHING WITH THE FINITE ELEMENT ANALYSIS PROGRAM ANSYS”, Superconductor Science and Technology 16 No 5, 2003, pp. 562-565
- [26] Henning, A.; Kurrat, M, “Thermal-Electric Simulations of Coated Conductors With a Variable Conductivity of the Buffer Layer”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, vol. 17 Issue:2, pp. 3443 – 3446, 2007
- [27] Hong, Z., Jin, Z., Ainslie, M., Sheng, J., Yuan, W., Coombs, T.A. “Numerical Analysis of the Current and Voltage Sharing Issues for Resistive Fault Current Limiter Using YBCO Coated Conductors”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, vol. 21 Issue:3, pp. 1198 - 1201, 2011

- [28] S. Kozak, T. Janowski, G. Wojtasiewicz, J. Kozak, and B. A. Glowacki. “ Experimental and Numerical Analysis of Electrothermal and Mechanical Phenomena in HTS Tube of Inductive SFCL”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 16, NO. 2, JUNE 2006
- [29] Emmanuel Vinot, Gérard Meunier, Pascal Tixador, “Different Formulations to Model Superconductors”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 36, NO. 4, JULY 2000
- [30] M. Tsuchimoto, T. Kojima , H. Takeuchi and T. Honma, “Numerical Analyses of Levitation Force and Flux Creep on High Tc Superconductor”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 29, NO. 6, NOVEMBER 1993
- [31] H. Ilasliizume, T.Sugiura K. Miya and S. Toda,, “NUMERICAL ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA IN SUPERCONDUCTORS”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 28, NO.2, MARCH 1992
- [32] T. Sugiura, H. Hashizume and K. Miya, "Numerical electromagnetic field analysis of type-II superconductors", Znt. J. Appl. Electromagn. in Materials, Vol. 2, pp.183-196,1991.
- [33] M. Tsuchimoto, T. Kojima, H. Waki and T. Honma, "Numerical Analyses of Trapped Field Magnet and Stable Levitation Region of HTSC", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 31. NO. 3. MAY 1995
- [34] Yoshida, Y., Uesaka, M. and Miya, K., “Magnetic field and force analysis of high Tcsuperconductor with flux flow and creep”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, pp. 3503-6, 1994
- [35] Leonid Prigozhin, “The Bean Model in Superconductivity: Variational Formulation and Numerical Solution”, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 129, 190–200 (1996)
- [36] G Barnes, M McCulloch and D Dew-Hughes, “Computer modelling of type II superconductors in applications”, Supercond. Sci. Technol. 12 (1999) 518–522.
- [37] Je-Hwan Yon, Yoon-Chul Rhim, “ Study on the Characteristics of Superconducting Bearing”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL 35. NO 5, SEPTEMBER 1999
- [38] David Ruiz-Alonso, Tim A. Coombs, and Archie M. Campbell, “ Numerical Analysis of High-Temperature Superconductors With the Critical-State Model”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 14, NO. 4, DECEMBER 2004
- [39] Makoto Okano, Noriharu Tmada, Shuichiro Fuchino. Itaru Ishii and Toshio Iwamoto, “ Numerical Analysis of a Superconducting Bearing”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY. VOL. 10, NO. 1, 2000

- [40] Guang-Tong Ma, Jia-Su, Wang, Su-Yu Wang, “3-D Modeling of High- Tc Superconductor for Magnetic Levitation/Suspension Application—Part I: Introduction to the Method”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY. VOL. 20,pp. 2219 - 2227, Aug. 2010
- [41] Guang-Tong Ma, Jia-Su, Wang, Su-Yu Wang, “3-D Modeling of High- Tc Superconductor for Magnetic Levitation/Suspension Application—Part II: Validation With Experiment”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY. VOL. 20,pp. 2228 - 2234, Aug. 2010
- [42] Guang-Tong Ma, Jia-Su, Wang, Su-Yu Wang, “Numerical Investigation of the Lateral Movement Influence on the Levitation Force of the Bulk HTS Based on a 3-D Model”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY, VOL. 20, NO. 3, JUNE 2010
- [43] H. May, R. Palka, E. Portabella and W-R. Canders, „Evaluation of the magnetic field – high temperature superconductor interactions”, COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Vol. 23 No. 1, 2004 pp. 286-304
- [44] Tihanyi V, Vajda I, Györe A „Multiphysical finite element modeling of inductive type fault current limiters and self limiting transformers”IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY 19:(3) pp. 1922-1925. (2009)
- [45] Viktor Tihanyi,István Vajda (szerk.), XVI. Technical Report for E.ON Nordic: „Modeling of fault current limiters with FEM”BME VET(2007)
- [46] Gyore A, Semperger S, Tihanyi V, Vajda I, Gonal MR, Muthe KP, Kashyap SC, Pandya DK, „Experimental Analysis of Different Type HTS Rings in Fault Current Limiter.”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY 17:(2) pp. 1899-1902. (2007)
- [47] Viktor Tihanyi, István Vajda (szerk.), XV. Technical Report for E.ON Nordic: „Modeling of fault current limiters.”, BME VET(2006)
- [48] Viktor Tihanyi, István Vajda (szerk.),XIV. Technical Report for E.ON Nordic: „Modeling of fault current limiters with FDM”, BME VET (2006)

- [49] Tihanyi Viktor, Vajda István (szerk.), Új technikák alkalmazása kis-és közép feszültségű hálózatok zárlati áramának korlátozásában: „Szupravezetős induktív típusú zárlati áramkorlátozó 2D modellezése” Kutatási jelentés, EON-Északdunántúli Áramszolgáltató Zrt. , BME VET (2006)
- [50] Tihanyi Viktor, Vajda István (szerk.), Új technikák alkalmazása kis-és közép feszültségű hálózatok zárlati áramának korlátozásában: „Szupravezető anyagok és tulajdonságaik”, Kutatási jelentés, EON-Északdunántúli Áramszolgáltató Zrt, BME VET (2005)
- [51] Tihanyi Viktor, Vajda István (szerk.), Új technikák alkalmazása kis-és közép feszültségű hálózatok zárlati áramának korlátozásában: „Hálózatba illesztett szupravezetős induktív típusú zárlati áramkorlátozó elméleti modellezése”, Kutatási jelentés, EON-Északdunántúli Áramszolgáltató Zrt. , BME VET (2005)
- [52] Kohari Z, Tihanyi V, Vajda I, „Loss Evaluation and Simulation of Superconducting Magnetic Bearings”, IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY 15:(2) pp. 2328-2331. (2005)
- [53] Viktor Tihanyi, István Vajda (szerk.), XII. Technical Report for SYDKRAFT AB R&D DEPARTMENT: „Modeling superconducting bearings with finite difference method”, BME VET, (2004)
- [54] Viktor Tihanyi, István Vajda (szerk.), X. Technical Report for SYDKRAFT AB R&D DEPARTMENT: „Magnetic field simulation of superconducting bearings in 3D”, BME VET, (2003)
- [55] Tihanyi Viktor, Vajda István (szerk.), SZUPRAVEZETŐS ZÁRLATI ÁRAMKORLÁTOZÓ FEJLESZTÉSE: „Szupravezetős induktív típusú zárlati áramkorlátozó multifizikális véges elemes modellezése” Kutatási jelentés, EON-Hungária Zrt. , BME VET (2008)

- [56] Tihanyi Viktor, Vajda István (szerk.), SZUPRAVEZETŐS ZÁRLATI ÁRAMKORLÁTOZÓ FEJLESZTÉSE ÉS NAGYFORDULATSZÁMÚ, ÁLLANDÓMÁGNESES MIKRO-TURBINA GENERÁTOR FEJLESZTÉSE: „magashőmérsékletű szupravezető huzallal ellátott induktív zárlatiáram-korlátozós szimulációs programjának fejlesztése” Kutatási jelentés, EON-Hungária Zrt. , BME VET (2010)