

# Pálcás koronafogazat tervezése HD transzformációval

Dr.Laczik Bálint<sup>1</sup>

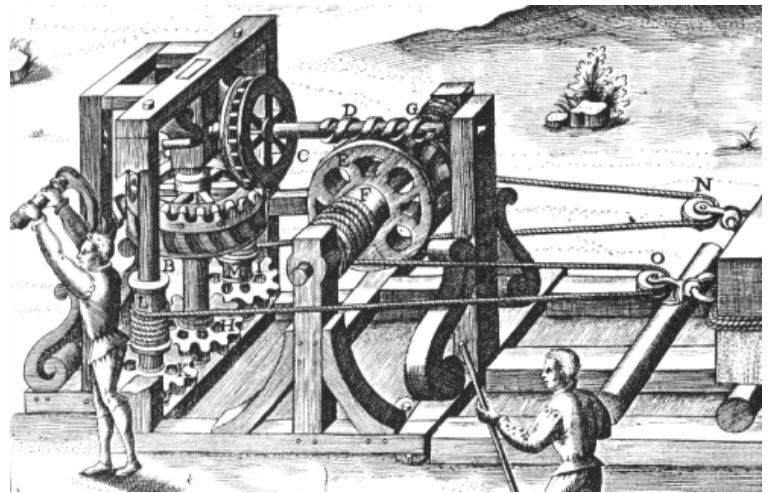
## Bevezetés

A fogaskerék-hajtás legősibb alakja a pálcás fogazattal<sup>2</sup> kapcsolódó koronakerék volt. Az első öntözési kultúrák vízemelő szerkezeteit működtető igásállat a talajon körbe járt, a járgánymű függőleges, és a vízemelő edénylánc vízszintes tengelyei között ez az egyszerű gépelem pár biztosította a mozgás átvitelét. Az évszázadokig megannyi szerkezetben alkalmazott, napjainkra immár teljességgel feledésbe merült megoldás a fröccsöntött műanyag termékek között azonban új alkalmazást nyerhet. Egyszerű alakja mellett a pálcás kerék axiális eltolhatósága a konstrukció előnyös tulajdonsága.

A síkbeli pálcás fogazatot részletesen ismerteti a [2] mű. A jelen összeállításban a pálcás koronakerék fogazat tervezésének matematikai alapjait tekintjük át. A koronakerék fogprofiljának meghatározásához a leginkább nyílt láncú mechanizmusok vizsgálatára használt Hartenberg-Denavit transzformációt használjuk (lásd [3]). A formális levezetésekhez és számításokhoz a Maple V R8 computeralgebrai rendszert, a fogazat tervezéséhez az AUTOCAD 2000-t alkalmaztuk.

A levezetett összefüggések a szokványos mérnöki-matematikai tárgyalásmód számára gyakorlatilag kezelhetetlenül terjedelmesek. Az összeállítás emiatt csupán a levezetések logikai lépéseit mutatja be. Eredményeink ellenőrzésére avagy hasznosítására azonban a Maple R8-ban megírt teljes munkalapot a [www.manuf.bme.hu](http://www.manuf.bme.hu) oldalon közzétesszük.

**Kulcsszavak:** pálcás fogazat, koronakerék, HD-transzformáció



1. ábra

XVI. századi csörlő ([1])

Ramelli metszetén jól látszik a függőleges tengelyű koronakerék és a vele kapcsolódó pálcás fogazat

<sup>1</sup> [laczik@goliat.eik.bme.hu](mailto:laczik@goliat.eik.bme.hu), Budapesti Műszaki Egyetem Gépgyártástechnológia Tanszék

<sup>2</sup> Magyar nyelven a konstrukció motolla vagy lanternás fogazatként ugyancsak ismert

## A Hartenberg-Denavit transzformáció

A mechanizmusok elméletéből jól ismert Hartenberg-Denavit (HD) transzformáció a mechanizmus egymásra következő karelemei között létesít átszámítási kapcsolatot. A jelen esetben csak a rotációs mozgásokat végző rendszerrel foglalkozunk. Az  $i$ -edik karelem alsó csuklójának tengelye a  $z_{i-1}$ , felső csuklójának tengelye a  $z_i$  koordináta tengely irányát jelöli ki.

A két rendszer közötti transzformáció mátrixa

$$H_{i-1,i} := \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & \cos(\theta_i) a_i \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & \sin(\theta_i) a_i \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ahol  $\theta_i$  az  $i-1$  csuklótengely körüli forgatás szöge,

$\alpha_i$  az az  $i-1$  és  $i$  csuklótengelyek szöge,

$a_i$  az  $i-1$  és  $i$  csuklótengelyek normál transzverzálisának hossza,

$d_i$  a normál transzverzális és az  $i$ -edik csuklótengely metszéspontja, valamint az  $i$ -edik koordináta rendszer kezdőpontja közti távolság.

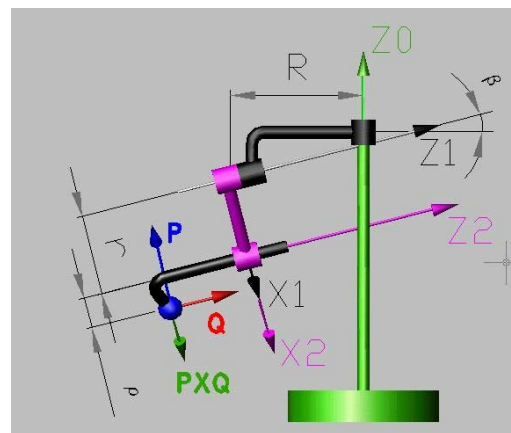
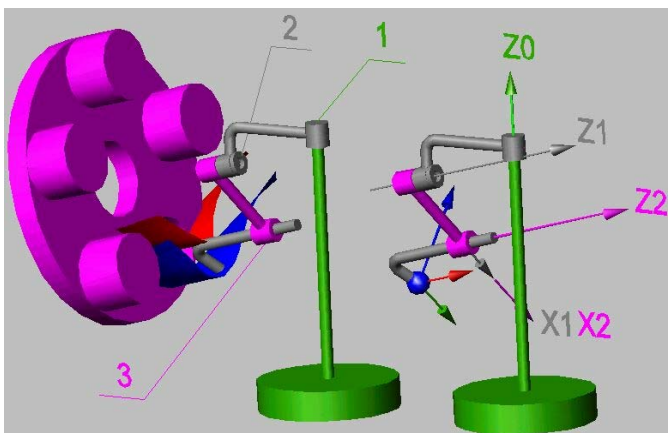
Az  $n$  tagú szerkezet eredő transzformációs mátrixa

$$H := \prod_{i=1}^n H_{i-1,i} \quad (2)$$

A szerkezet utolsó pontjának (az  $n$ -edik tag felső csuklójához tartozó koordinátarendszer origó) pályavektora a

$$\mathbf{r} = H \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]^* \quad (3)$$

négyesvektor első három koordinátája.



2. ábra

A pálcsás fogazat koronakerékének fogprofilját a 2. ábrásor helyettesítő mechanizmusának felhasználásával határozzuk meg. A szerkezet működése során a pálcsás kerék a saját tengelye körül forog és a koronakerék tengelye körül kering. Legyen továbbá a koronakerék fogszáma  $Z_1$ , a pálcsák száma  $Z_2$ , és  $z = Z_1 / Z_2$ . Általános esetben a korona és pálcsás kerekek tengelyei  $\pi/2 - \beta$  szöget zárnak be. A koronakerék  $\varphi$  szögű elfordulásához a pálcsás kerék -  $z \cdot \varphi$  szögű elfordulása tartozik. A HD paramétereket az 1. táblázat tartalmazza.

i	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$
1	$\varphi$	0	$\pi/2 - \beta$	0
2	$-z \cdot \varphi$	$\frac{R}{\cos(\beta)}$	0	R
3	0	u	0	0

1. táblázat

A pálcsatengely általános  $x_3 = u$  koordinátájú pontjának helyvektora a  $\varphi$  szöghelyzetben, az állvány rendszerében:

$$r = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \cos(\varphi z) r - \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\varphi z) r + \sin(\varphi) \cos(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) \\ -\sin(\varphi) \cos(\varphi z) r + \cos(\varphi) \sin(\beta) \sin(\varphi z) r - \cos(\varphi) \cos(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) \\ \cos(\beta) \sin(\varphi z) r + \sin(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) \end{pmatrix} \quad (4)$$

### A koronakerék fogfelülete

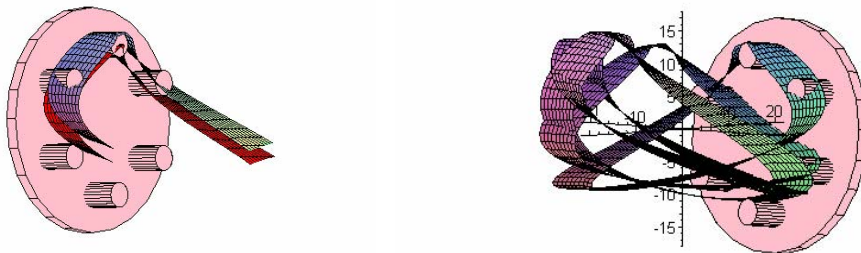
A koronakerék fogfelülete a (4) felület  $\rho$  távolságú egyenközű alakzata. Az egyenközű felület pontja az általános felületi pont normálvektorának irányában  $\rho$  távolsággal eltolt pont.

Formálisan:

$$w = r - \rho \cdot \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right|} \quad (5)$$

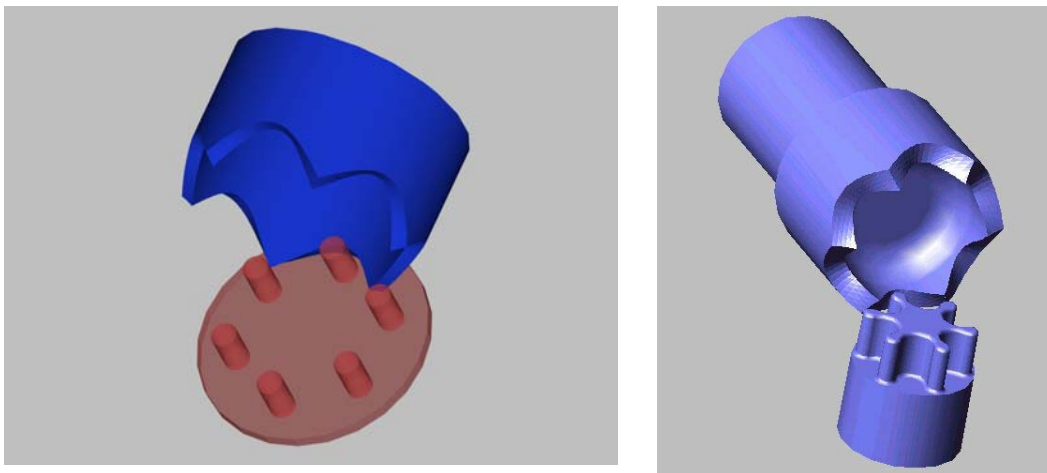
A terjedelmes összefüggést az igen hatékony formula manipulációs technikával dolgozó Maple V. R8 matematikai program - a lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtva – a Mellékletben szereplő alakban állította elő.

A 3. ábra a mozgó pálcategyely által létesített (4) valamint a (5) egyenközü felületeket szemlélteti. Az illusztrációk  $z = 1$  esetre, 6 fogú pálcás ill. 6 fogú koronakerékre készültek.



3.ábra

A pálcás kerék valamennyi fogához előállítva és megjelenítve az egyes fogakkal kapcsolódó koronakerék profilokat, a sajátos szalagminta rendszer közvetlenül szolgáltatja a koronakerék működő felületét. A 4. ábrásor a a szokványos CAD műveletekkel (kihúzás, forgatás, metszés, stb.) megvalósult fogazatokat szemlélteti. A modellek az AUTOCAD 2000 programmal készültek.



4. ábra

A koronafogazat egy fogárkának határai, az egymást követő fogfelületek áthatási vonalának koordinátái analitikusan is előállíthatók. A koronafogazat egy fogának teljes felületét az (5) vektor írja le. A fogat megelőző fog felületét a

$$p = \begin{pmatrix} w_1 \cdot \cos(-\eta) - w_2 \cdot \sin(-\eta) \\ w_1 \cdot \sin(-\eta) + w_2 \cdot \cos(-\eta) \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

a fogat követő fog felületét a

$$q = \begin{pmatrix} w_1 \cdot \cos(\eta) - w_2 \cdot \sin(\eta) \\ w_1 \cdot \sin(\eta) + w_2 \cdot \cos(\eta) \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

vektor egyenlet jellemzi, ahol a fogak osztásszöge  $\eta = 2\pi/Z_1$ .

Az eredeti fogfelület (5) egyenletének paraméterezése  $w = w(u, \varphi)$ , a megelőző (6) fogfelületé  $p = p(u_1, \varphi_1)$ , a soron következő (7) fogfelületé  $q = q(u_2, \varphi_2)$ . Az  $p$  ill.  $q$  vektoregyenletekben szereplő  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  komponensek formailag megegyeznek az (5) alapegyenletben szereplőkkel, azonban paraméterezésük a megfelelő  $u_1, \varphi_1$  ill.  $u_2, \varphi_2$  változókkal történik.

A metszéspontokat a megfelelő komponensekből képzett

$$\text{sys}_1 = \{w_1(u, \varphi) = p_1(u_1, \varphi_1), w_2(u, \varphi) = p_2(u_1, \varphi_1), w_3(u, \varphi) = p_3(u_1, \varphi_1)\}$$

$$\text{sys}_2 = \{w_1(u, \varphi) = q_1(u_2, \varphi_2), w_2(u, \varphi) = q_2(u_2, \varphi_2), w_3(u, \varphi) = q_3(u_2, \varphi_2)\}$$

nemlineáris egyenlet rendszerek megoldása szolgáltatja. A három-három egyenletből álló ( $\text{sys}_1, \text{sys}_2$ ) rendszerekben lévő négy-négy  $(u, \varphi, u_1, \varphi_1)$ , ill.  $(u, \varphi, u_2, \varphi_2)$  ismeretlenek az  $(u = U_1, \varphi, u_1, \varphi_1)$ ,  $(u = U_2, \varphi, u_2, \varphi_2)$  értékekkel egyértelműen meghatározhatók.

## Melléklet

A koronakerék fogfelületének koordinátái

$$\begin{aligned}
 w_1 := & -\cos(\phi) \cos(\phi z) r - \sin(\phi) \sin(\beta) \sin(\phi z) r + \sin(\phi) \cos(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) + \rho ( \\
 & -\cos(\phi) \sin(\beta) \cos(\phi z) r + \sin(\beta) \sin(\phi) \sin(\phi z) z r - \sin(\phi) \sin(\phi z) r \\
 & + \sin(\phi) \sin(\phi z) r \cos(\beta)^2 + \cos(\phi) \cos(\phi z) z r + \sin(\beta) \sin(\phi) u \cos(\beta) \\
 & + \sin(\beta) \sin(\phi) R) / (u^2 \cos(\beta)^2 - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r u \cos(\beta) \\
 & + 2 \sin(\phi z) z r u \cos(\beta) + 2 u \cos(\beta) R + z^2 r^2 + 2 \sin(\phi z) z r R \\
 & - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r R - 2 \sin(\beta) r^2 z + R^2 + r^2 - \cos(\beta)^2 r^2) \left( \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 := & -\sin(\phi) \cos(\phi z) r + \cos(\phi) \sin(\beta) \sin(\phi z) r - \cos(\phi) \cos(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) + \rho ( \\
 & -\sin(\phi) \sin(\beta) \cos(\phi z) r - \sin(\beta) \cos(\phi) \sin(\phi z) z r + \cos(\phi) \sin(\phi z) r \\
 & - \cos(\phi) \sin(\phi z) r \cos(\beta)^2 + \sin(\phi) \cos(\phi z) z r - \sin(\beta) \cos(\phi) u \cos(\beta) \\
 & - \sin(\beta) \cos(\phi) R) / (u^2 \cos(\beta)^2 - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r u \cos(\beta) \\
 & + 2 \sin(\phi z) z r u \cos(\beta) + 2 u \cos(\beta) R + z^2 r^2 + 2 \sin(\phi z) z r R \\
 & - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r R - 2 \sin(\beta) r^2 z + R^2 + r^2 - \cos(\beta)^2 r^2) \left( \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3 := & \cos(\beta) \sin(\phi z) r + \sin(\beta) \left( u + \frac{R}{\cos(\beta)} \right) - \rho \cos(\beta) \\
 & (\sin(\phi z) z r - \sin(\beta) \sin(\phi z) r + u \cos(\beta) + R) / (u^2 \cos(\beta)^2 \\
 & - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r u \cos(\beta) + 2 \sin(\phi z) z r u \cos(\beta) + 2 u \cos(\beta) R + z^2 r^2 \\
 & + 2 \sin(\phi z) z r R - 2 \sin(\beta) \sin(\phi z) r R - 2 \sin(\beta) r^2 z + R^2 + r^2 - \cos(\beta)^2 r^2) \left( \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

## Irodalom

- [1] Agostino Ramelli: Le diverse et artificiose machine, Paris, 1588
- [2] Ltviv F.L.: Gear Geometry and Applied Theory, Prentice Hall, New York, 1994.
- [3] Denavit, J. – Hartenberg, R.S.: A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices, ASME J. Appl. Math., Vol. 77, 215-221 (1955)