

**FELÜLETEK SZÁMÍTÓGÉPES  
ELŐÁLLÍTÁSA ÉS A 3- FELÜLET  
SZIMMETRIACSOPORTJAI**

PhD dolgozat

**STETTNER ELEONÓRA**

Témavezető: **Dr. MOLNÁR EMIL**

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
EGYETEM**

Alkalmazott Matematika Szak

2004

# Tartalomjegyzék

1	Bevezetés.....	3
2	Az alapfogalmak áttekintése.....	9
2.1	A felület fogalma.....	9
2.1.1	Kétféle változós függvény.....	9
2.1.2	Gauss-féle megadás.....	9
2.1.3	A 2-dimenziós sokaság.....	9
2.2	Felületek osztályozása.....	10
2.2.1	Görbék értelmezése sokaságon.....	10
2.2.2	Fundamentális csoport.....	11
2.2.3	Univerzális fedőtér.....	12
2.2.4	Orbifoldok, egy felület szimmetriacsoportja.....	12
2.2.5	Két dimenziós orbifoldok osztályozása, a szignatúra fogalma.....	13
2.2.5.1	Nem-irányítható (egyoldalú) kompakt felület (orbifold) jellemzése.....	15
2.2.5.2	Irányítható (kétoldalú) kompakt felület (orbifold) jellemzése.....	18
2.2.6	Kompakt felületek izometriacsoportjai.....	20
3	Felületek előállítás sokszögekből számítógéppel.....	22
3.1	Egy $2n$ -szög oldalpárosításai.....	23
3.1.1	Az algoritmus és példák.....	26
3.1.2	A program eredményei .....	27
3.1.3	Egy $2n$ -szög nem-ekvivalens oldalpárosításainak becslései.....	28
3.1.3.1	Irányítható oldalpárosítások becslése.....	28
3.1.3.2	Az összes (irányítható és nem-irányítható) oldalpárosítás becslése.....	29
4	A $3$ — felület szimmetriacsoportjai és fundamentális kövezései.....	32
4.1	Szimmetriacsoportok hatszög kiterítésekkel.....	32
4.1.1	A csúcsok és a fundamentális hatszög középpontjának összehasonlítása $D$ -szimbólumok segítségével.....	32
4.1.2	A hat különböző fundamentális hatszög vizsgálata.....	35
4.2	A normalizátor-diagram előállítása.....	44
4.2.1	Illusztráló példák.....	44
4.2.2	Osztályozásunk teljességének bizonyítása.....	51
4.2.3	A Riemann – Hurwitz egyenlet és a nem-létezés bizonyítása.....	52
5	Irodalomjegyzék.....	68
6	A program leírása.....	70
7	A forrásprogram.....	72

„A matematikusok mintáinak, miként a festő és a költő mintáinak, szépeknek kell lenniük. A gondolatoknak, miként a színeknek vagy a szavaknak, harmonikusan kell egymáshoz illeszkedniük. A szépség az első kritérium: a csúnya matematikának nincs tartós helye a világban.”

G. H. Hardy

## 1 Bevezetés

Ez az értekezés kompakt felületek szimmetriacsoportjait tárgyalja. Ezért először összefoglaljuk a témához legszükségesebb alapfogalmakat. Részletesen körüljárjuk a felület fogalmát és leírjuk a kompakt felületek fundamentális csoportjait, valamint az univerzális fedőfelület szerkesztését.

A dolgozat 3. fejezetében *ismertetjük vizsgálataink új módszerét, a számítógéppel előállított felületkiterítéseket.* [S 1998]. Ez azt jelenti, hogy meghatározzuk egy  $2n$ -szög lényegesen különböző oldalpárosításait úgy, hogy az oldalpárok mentén összeragasztva (logikailag azonosítva a pontokat) a  $2n$ -szög egy kompakt felület lesz. Fordítva, a felület egy  $2n$ -szögbe teríthető ki. A problémát algoritmikusan [L-M 90], [L-M 91] és [M 1992] értelmében oldottam meg. Az exponenciálisan növekvő esetszám miatt akkor egy Commodore 64 számítógéppel csak  $2n=10$ -ig tudtam a programot lefuttatni. Majd később egy 133 MHz-es Intel Pentium processzorú, 16 Mbyte RAM-mal rendelkező géppel  $2n=14$ -ig, a futási idő ekkor, 14-szög esetén kb. 6,5 óra volt. (A dolgozathoz mellékeltem a számítógépes program forráskódját.)

*Meghatároztuk tehát  $2n=14$ -ig egy adott  $2n$  oldalszámú sokszög fixpontmentes oldalpárosításait. Számítógéppel minden kombinatorikusan különböző esetet megkaptunk. Ezután becslést adtunk a sokszögek oldalszámától függően a kombinatorikusan különböző felületkiterítések esetszámára.*

Észrevesszük az eredmények táblázatából, hogy a három projektív sík összefüggő egyesítéseként kapott felület (továbbiakban  $3^-$  felület) összes kombinatorikusan különböző sokszög kiterítését megkaptuk, mivel a  $3^-$  felületnél a  $6 \leq 2n \leq 12$  eseteket kell csak tekintenünk.

*A kapott előállítások lehetővé teszik, hogy megvizsgáljuk az említett felület eddig ismeretlen szimmetriacsoportjait.* Gondolatmenetünk általános módszert ad arra, hogy a felületek, mint állandó görbületű 2-dimenziós térformák lehetséges szimmetriacsoportjait meghatározzuk. De mint látni fogjuk, a dolgozat 3. fejezetében adott becslés a felület nemszámának ( $g$ -nek) függvényében exponenciális növekedést mutat.

Mivel dolgozatunkban a  $3^-$  felület szimmetriacsoportjait szeretnénk megadni, ezért tekintsük át néhány (nem csak kompakt) felület ismert diszkrét szimmetriacsoportjait.

Az  $E^2$  euklideszi síkban 17 kristálycsoport van. Ezek első teljes felsorolását Fjodorov közölte (1890) a 219+11 térbeli kristálycsoporttal együtt, amit vele egyidőben Schoenflies (1891) is felfedezett. Fricke és Klein is foglalkozott a síkbeli kristálycsoportokkal 1897-ben, majd Pólya György 1924-ben. Nowacki absztrakt módon írta le a kristálycsoportokat.

Az  $E^3$  euklideszi térben 230 kristálycsoport van, közülük 219 nem-izomorf, 11 tükrös pár lép fel, 1890-ben Fjodorov, 1891-ben Schoenflies, 1894-ben Barlow különböző helyeken, különböző módszerekkel egymástól függetlenül jutottak ugyanarra az eredményre. Valódi kristályokat vizsgálva röntgensugarakkal arra is következtethetünk, hogy a „mi méreteinkben” a tér euklideszi.

A Hilbert által megfogalmazott híres problémák között vannak kristálycsoportokra vonatkozó kérdések is. Az egyik: Igaz-e, hogy minden dimenzióban véges sok euklideszi kristálycsoport van? Bieberbach 1912-ben válaszolt: ez igaz, de számuk rohamosan nő a dimenzióval. Az  $E^4$

térben 4783 (nem izomorf) kristálycsoport van (111 tükrös pár lép fel), ezt számítógéppel határozták meg. 5 és 6 dimenzióban a számuk ismert, de a kristálycsoportok felsorolása nem reményteljes, az esetek száma olyan gyorsan nő.

A hiperbolikus sík kövezései még áttekinthetők [L-M 90, 91], [L-M-V 98]. Végtelen szériák lépnek fel, melyeket később a szignatúra jellemez majd. A 3-dimenziós hiperbolikus tér kristálycsoportjairól nincs áttekintésünk.

Jól ismert, hogy bármely  $g^+$  ( $g \geq 2$ ) nemszámú Riemann-felület irányítást megtartó  $N/G$  izometria- csoportja véges, rendje legfeljebb  $84(g-1)$ . Itt  $G=O^g$   $g$  tórusz összefüggő egyesítésének fundamentális csoportját jelöli és  $N$  a  $G$  normalizátora  $H^2$  mozgáscsoportjában, azaz a hiperbolikus sík orientációt megtartó izometria-csoportjában. Ez a becslés végtelen sok  $g$ -re pontos, pl. először  $g=3$ -ra.

Ismereteink szerint analóg becslést nem bizonyítottak még  $g \geq 3$  nemszámú, kompakt nem-irányítható felületre, melynek univerzális fedőfelülete, a konstans negatív görbületű  $H^2$  hiperbolikus sík.

A  $0$  nemszámú gömb, a  $1^-$  nemszámú projektív sík, a  $2^-$  nemszámú Klein-kancsó diszkrét izometriacsoporthat a gömb, illetve az euklideszi sík diszkrét szimmetriacsoporthat a ismeretében áttekinthetjük.

A  $3^-$  felület – ami 3 projektív sík összefüggő egyesítése - nem irányítható, és az első e felületek között, melynek fedőfelülete hiperbolikus metrikával rendelkezhet. Mint látni fogjuk, véges izometria-csoporttal rendelkezik, mint minden hiperbolikusan metrizált kompakt felület.

Az univerzális fedőfelület általános konstrukciója lehetővé teszi, hogy bármely kompakt nemirányítható felületet mint  $\Pi^2/G$  orbitstruktúrát tekinthessünk. Itt  $\Pi^2$  egyszeresen összefüggő topologikus felület, egy az  $S^2, E^2, H^2$ , azaz a gömb, az euklideszi és a hiperbolikus sík közül.  $G$  pedig  $\Pi^2$ -en fixpont-mentesen (szabadon) ható izometriacsoporthat  $\mathcal{F}_G$  kompakt fundamentális tartománnyal. Ez a tartomány egy  $2g$  oldalú sokszögnek választható az egymásutáni oldalak alábbi (kanonikus) oldalpárosításával, ahol

$$(1.1) \quad a_i: s_{a_{i-1}} \rightarrow s_{a_i}, \quad a_i^{-1}: s_{a_i} \rightarrow s_{a_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq g$$

irányításváltó izometriák (eltolástükrözések). Ez a  $G$  fundamentális csoport kanonikus előállításához (prezentálásához) vezet:

$$(1.2) \quad \mathbf{G} = ( a_1, a_2, \dots, a_g \text{ — } a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g = 1 ) =: \otimes^g$$

$S^2, g=1$  a projektív síkot  
 $E^2, g=2$  a Klein-kancsót jellemzi,  
 $H^2, g \geq 3$  más, nem irányítható kompakt felülethez vezet,  
 pl.  $3^-$  felületünkhöz.

A dolgozat 4. fejezete először a  $3^-$  felület 8 fundamentális hatszög előállításából kapott szimmetriacsoporthat vizsgálja. Majd megfogalmazza a következő tételt:

**1.1 Tétel.** *A hatszögtartományok csúcsalakzataikkal együtt a  $3^-$  felület alábbi (kombinatorikusan nem bővíthető)  $N/G$  szimmetriacsoporthat hozzák létre a  $G$  fundamentális csoport  $N$  normalizátorával a hiperbolikus sík  $H^2$  izometriacsoporthatában.*

**1. aabbcc:**  $|N/G|=12$ . Az  $N$  normalizátort négy tengelyes tükrözés generálja, melyek az oldalaira tükrözik az  $\mathcal{F}_N$  tartományt, amint a 4.3 ábra mutatja. Az  $N$  Conway-Macbeath szignatúrája  $*2223$ , amely egy peremkomponenssel rendelkezik a felsorolt diédercsúcsokkal.

**2. aabcBC:**  $|N/G|=2$ . Az  $N$  normalizátor  $\mathcal{F}_G$  centrumalakzatát a csúcsalakzatba képezi le  $\mathcal{F}_N$  szerint ( $2^*\otimes$  szignatúrával, ahol a keresztsapka a projektív síkot jelenti) a következő előállítással

$$N=(m, h, t, g - m^2, h^2, mtmt^{-1}, hggt)$$

(4.4 ábra).

**3. aabcBC:**  $|N/G|=4$ . Az  $N$  normalizátor  $\mathcal{F}_N$  fundamentális tartományának előállítása a 4.5 ábrán látható.  $N$  szignatúrája  $2^*222$  (egy másodrendű forgáscentrummal és egy peremkomponenssel rendelkezik).

**4. aabccb:**  $|N/G|=8$ . Az  $N$  alaptartománya az  $\mathcal{F}_N$  tükrözéstartomány a 4.6 ábrán látható  $*2224$  szignatúrával.

**5. abacbc, 8. abcaBC:**  $|N/G|=4$ . Az  $\mathcal{F}_N$  fundamentális tartomány a következő  $N$  normalizátort állítja elő

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1}),$$

amely a 4.8 ábrán látható,  $N$  szignatúrája  $2^*222$ .

**6. abacbc, 7. abacBC:**  $|N/G|=2$ .  $\mathcal{F}_N$  oldalpárosításaival a következő geometriai előállítását láthatjuk

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1})$$

a 4.8 ábrán,  $2^{**}$  szignatúrával (két peremkomponenssel).

A 3. 5. és 8. esetben izomorf a normalizátor és ekviviánsak a szimmetriacsoportok.  $\square$

A továbbiakban a 4. fejezet a számítógépes program által adott mind a 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományt figyelembe véve  $3^-$  felület szimmetriáit és az ezekhez tartozó (fundamentális) kövező sokszögeit elemzi. Különösen fontosak az úgynevezett maximális szimmetriacsoportok, amelyek kombinatorikusan már nem bővíthetők tovább. A 4.2 táblázatban látható eredményünk az

**1.2 Tétel**  $3^-$  felületnek 2 maximális, nem bővíthető szimmetriacsoportja van: a 12-rendű  $*2223/G$  és a 8-adrendű  $*2224/G$  csoportok. A további  $N/G$  ( $G=\otimes^3$ ) csoportok ezek részcsoportjai, melyek háló struktúrával (részcsoport-háló) rendelkeznek.  $\square$

Ez analógiában van az euklideszi sík ( $E^2$ )  $N/T$  kristály csoportjainak 17 osztályával, melyeknél

$$(1.3) \quad N_1 = \mathbf{p6mm} = *236 \quad \text{és} \quad N_2 = \mathbf{p4mm} = *244$$

az alábbi tóruszcsoportnak a maximális normalizátorai (további eltolások nélkül!):

$$(1.4) \quad \mathbf{T} = \mathbf{p1} = \mathbf{O} = (a_1, b_1 - a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} (=1)).$$

Ezért tárgyalásunkat tekinthetjük úgy, mint a 17 diszkrét  $E^2$  csoport analóg kiterjesztését más, hiperbolikus metrikájú kompakt felületre. A számítógépes előállításunk [S 98]-ban felsorolja a  $H^2/\otimes^3$  jelű  $3^-$  felület 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományát (4.1 táblázat). Az általános algoritmus alapja - amely  $g^-$ -nek minden fundamentális tartományát megadja [L-M 90, 91], [L-M-V 98]-ben - a  $2g$  oldalú sokszög fixpontmentes

oldalpárosítása: egy csúcsosztállyal, legalább egy irányítást megváltoztató oldalpárral. Ezt fagráf szerkesztésével kell bővítenünk, esetleg további csúcsok hozzáadásával. Ezen gráf mentén a felületet felvágjuk és kiterítjük legfeljebb  $6(g-1)$  oldalú topológiai sokszöggé, legfeljebb  $2(g-1)$  csúcsosztállyal úgy, hogy minden osztályba legalább 3 csúcs tartozzon (ezt az eljárást mutatja a 4.10-4.11 ábra).

Ily módon majd nem csak a lehetséges  $N/G$  csoportokat kapjuk meg, de a  $H^2/G$   $3^-$  felület normalizátor- kövezéseit is, az  $\mathcal{F}_N$  tartományok kombinatorikus (topológiai) ekvivalenciájáig egyértelműen. Természetesen a  $G = \otimes^3$  különböző fundamentális tartományai indukálhatják az  $N$  normalizátor ugyanazon tartományait, így a  $3^-$  felület ekvivariáns kövezéseit (ld. pl. 4.9 c-e, 4.10 és 4.11 ábrát). De a fix  $N$ -hez tartozó kombinatorikusan különböző  $\mathcal{F}_N$ -eket meg fogjuk különböztetni, mint  $H^2/G$  különböző kövezéseit. Az 4.1-es táblázat felsorolja az ugyanazon  $\mathcal{F}_G$ -hez tartozó jellemző maximális normalizátorokat (normalizátorokat), ez néha nem egyetlen. A 4.2 táblázatban más fundamentális kövezésbe alakíthatjuk át ezeket részcsoportszimmetriatöréssel.

A  $3^-$  felület  $\mathcal{F}_N$  fundamentális kövezéseinek teljes osztályozása ezután már viszonylag könnyű, de túl hosszadalmas lenne felsorolni. Mint információt megadjuk az összes kombinatorikusan különböző  $\mathcal{F}_N$  poligonszimbólumot a 4.3 táblázatban és egy esetet illusztrálunk a 4.10 ábrán.

Megfogalmazzuk fő eredményünket:

**1.3 Tétel:** *A hiperbolikus ( $H^2$ ) metrikával ellátott  $3^-$  felület, mint 3 projektív sík összefüggő egyesítése, 12 darab  $N/G$  izometria-csoportot határoz meg. Ezek a csoportok a  $3^-$  felületen hatnak, amit  $H^2$  izometria-csoportjában a felület  $G = \otimes^3$  fundamentális csoportjának  $N$  normalizátora indukál homeomorf ekvivarianciáig egyértelműen. Ez a 12 darab  $N$  normalizátor a  $3^-$  felület  $65+58$  fundamentális kövezését adja (4.1-4.4 táblázat).  $\square$*

Ezután bizonyítjuk majd osztályozásunk teljességét.

Alapeszközünk egy tetszőlegesen adott szignaturájú tetszőleges kompakt felület (orbifold) fundamentális tartományainak algoritmikus felsorolása [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98]. Nevezetesen, most a  $3^-$  kompakt felület  $G$  fundamentális csoportjához és ennek a  $H^2$  sík Isom  $H^2$  izometria-(egybevágóság-) csoportjában vett tetszőleges  $N$  normalizátorához (ld. 4.1-4.3 táblázatban).

Az alábbi diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{G}_i \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 & \\
 & \Downarrow & \\
 & \mathbf{g}_i & \\
 & \longrightarrow & \\
 \Pi_j^2 \ni P_j & & P_j^{\mathbf{g}_i} \in \Pi_j^2 (= H^2) \\
 \downarrow \mathbf{N}_k \ni \mathbf{n}_k & & \downarrow \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 \\
 & & P_j^{\mathbf{g}_i^{\mathbf{n}_k}} \\
 & & \parallel \\
 (1.5) \quad \Pi_j^2 \ni P_j^{\mathbf{n}_k} & \longrightarrow & P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{g}_i}} \in \Pi_j^2 \\
 & & \mathbf{g}_i' \\
 & & \mathbf{G}_i
 \end{array}$$

azt szimbolizálja, hogy a  $\mathbf{G}_i = \{ \mathbf{g}_i \}$  fundamentális csoport hogyan hat a  $\Pi_j^2 = \{ P_j \}$  univerzális fedősíkon a  $\Pi_j^2 / \mathbf{G}_i$  orbittérhez, mint felülethez képest, és hogyan hat az orbittéren a  $\mathbf{G}_i$ -hez tartozó normalizátor  $\mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2$ , miközben az  $\mathbf{n}_k$  leképezés egy tetszőleges  $P_j^{\mathbf{G}_i}$   $\mathbf{G}_i$ -orbitot képez egy másik  $P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{G}_i}} = P_j^{\mathbf{G}_i^{\mathbf{n}_k}}$  orbitba bármely  $\mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k$ -re. Ez indukálja a felületen az  $\mathbf{N}_k / \mathbf{G}_i$  izometria csoportot:

$$(1.6) \quad \mathbf{G}_i \triangleleft \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j, \text{ ezért } \mathbf{n}_k \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k / \mathbf{G}_i.$$

Itt a  $\Pi_j^2$  sík vagy az  $S^2$ , vagy az  $E^2$ , vagy a  $H^2$  síkot jelenti. A  $\mathbf{G}_i$  és  $\mathbf{N}_k$  csoportokat homeomorfizmus-ekvivariancia erejéig egyértelműen a szignatúra fogja meghatározni.

**1.1 Definíció:** A  $\mathbf{G}_1$  csoportnak a  $\Pi_1^2$ -síkon történő hatása  $\varphi$ -ekvivariáns a  $\mathbf{G}_2$  csoport  $\Pi_2^2$ -síkon való hatásával, ha létezik egy  $\varphi$  homeomorfizmus az alábbiak szerint:

$$(1.7) \quad \varphi : \Pi_1^2 \rightarrow \Pi_2^2 : P_1 \rightarrow P_2 := P_1^\varphi \text{ úgyhogy } \mathbf{G}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{G}_1 \varphi,$$

tehát a  $\mathbf{G}_1$  hatását  $\varphi$  viszi át a  $\mathbf{G}_2$  hatásába.

Ha a fenti  $\varphi$  homeomorfizmusra még  $\mathbf{N}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$  is teljesül, akkor az  $\mathbf{N}_1 / \mathbf{G}_1$  és  $\mathbf{N}_2 / \mathbf{G}_2$  faktorcsoportokat (szimmetriacsoportokat) szintén ekvivariánsnak nevezzük.

Ha  $\mathbf{N}_2 > \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$ , akkor  $\mathbf{N}_2 / \mathbf{G}_2 > \mathbf{N}_1 / \mathbf{G}_1$ , azaz  $\mathbf{N}_2$  gazdagabb szimmetriacsoporthoz vezet a  $\Pi_2^2 / \mathbf{G}_2$  felületen, mint  $\mathbf{N}_1$  a  $\Pi_1^2 / \mathbf{G}_1$  felületen.

A  $\mathbf{G}$  csoport izomorf, vagyis ekvivariáns  $\mathbf{N}$  normalizátorai ekvivalenciaosztályokat hoznak létre és felvethetjük a különböző ekvivalenciaosztályok meghatározását és a részcsoport-vonatkozások vizsgálatát. Ehhez elegendő a maximális (valódi) részcsoportok többi részcsoporttal való kapcsolatát tanulmányozni.

Habár sok kombinatorikusan különböző  $\mathcal{F}_G(\mathcal{F}_N)$  tartományunk lehet — algoritmusunk [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98] mindegyiket felsorolja. Bármely  $\mathcal{F}_G$ , a baricentrikus felbontásával és  $\mathbf{G}$ -képeivel, a  $\mathbf{G}$ -t generáló oldalpárosításokkal, a nem  $\mathbf{G}$ -ekvivalens csúcsok a definiáló relációkkal, teljes információt ad — véges algoritmikus eljárásban — a lokálisan minimális zárt geodetikusok rendszeréről, az irányítástartó és irányítást váltó transzformációkról és ezek  $\mathbf{G}$ -képeiről (konjugáltjairól) is. Az  $\mathbf{N}$  normalizátornak bármely  $n$  eleme ezt a rendszert önmagára képezi, most metrikusan is, ha az  $\mathcal{F}_G$  tartományt jól deformáltuk egy  $\varphi$  homomorfizmussal. Tehát  $\mathcal{F}_N$  -t lépésről lépésre határozzuk meg. Természetesen, bármely  $\mathcal{F}_G$  deformálható oly módon, hogy bármely lehetséges  $\mathbf{N}$  normalizátor előforduljon, mert bármely kombinatorikus  $\mathcal{F}_G$ -t átdarabolással és ragasztással átalakíthatunk bármely másikba a szokásos topologikus eljárással. De most csak azokra az esetekre koncentrálnunk, ahol

$\mathcal{F}_N$  -nek  $\mathbf{N}$ - képei kikövezik  $\mathcal{F}_G$  -t  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  reprezentánsaival, és tudjuk, hogy ez az eljárás véges.

**1.4 Tétel:** *A  $\mathbf{G} = \otimes^3$  csoporthoz a fundamentális (topologikus) poligonoknak 65 típusa van, melyeket a 4.1 táblázatban megadott a számítógépes eljárás.  $\square$*

Megvizsgáljuk mindegyiket a fenti szempontból.  $\mathcal{F}_G$  kombinatorikus strukturájából kiválasztjuk a normalizátor elemeit és lépésről lépésre felvágjuk  $\mathcal{F}_G$  -t kisebb tartományokra az indukált oldalpárosításokkal, először kombinatorikus egyenes tükrözéssel, azután forgatással, speciálisan félfordulattal, eltolás-tükrözéssel, eltolással, megőrizve az oldalak  $\mathbf{G}$ -ekvivalenciáját. Mindig ellenőrizzük a homomorfizmus kritériumát (lsd. 4.15) bármely lehetséges  $\mathbf{N}$  -nel (lsd. 4.17.a-b ábrát 10/20-szal és 12/5-tel, továbbá 4.18.a-b ábrát ellenőrzésre). Így megkapjuk  $\mathcal{F}_N$  -t és  $\mathbf{N}$ -et, majd  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  -t, ezenkívül a legkisebb  $\mathcal{F}_N$ -t  $\mathcal{F}_G$ -hez, így adódik a leggazdagabb  $\mathbf{N}$  és  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$ , amely kövezi  $\mathcal{F}_G$ -t az  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$ -t reprezentáló  $\mathcal{F}_N$  képeivel.

Ily módon megkapjuk majd a 4.2 táblázatot az 4.1 táblázatból és a 4.3 táblázatból.

Végül a 4. fejezet eredményei alapján általános megjegyzések is megfogalmazhatók tetszőleges  $g^-$ ,  $g \geq 3$  felület esetére, amely sejtéseket egy későbbi dolgozatban szeretnénk bizonyítani.

**1.1 Megjegyzés** Az 4.9.b ábrán feltüntettük a séma általános előállítását tetszőleges  $g^-$ ,  $g \geq 3$  felület esetén. Általános feltevésünk az, hogy

$\mathbf{G} = \otimes^g$  maximális normalizátora a hiperbolikus sík  $Isom H^2$  izometria csoportjában az  $\mathbf{N}_{g^-} = *222g$   $|\mathbf{N}/\mathbf{G}|=4g$ , mint tükrözés csoport a  $(\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/g)$  szögű négyszög oldalegyeneseire.

**1.2 Megjegyzés** Az általunk létrehozott sémát szabályos  $\pi/2$  szögű  $4(g-1)$ -szög is generálja.

Ekkor  $\mathbf{N}_{g^-} = *222[2(g-1)]$  a sejtett második leggazdagabb normalizátor. A  $4(g-1)$ -szög oldalait  $g-1$  eltolás tükrözéssel és ugyancsak  $g-1$  eltolással párosítjuk, és  $g-1$  egyenként 4 csúcsot tartalmazó csúcsosztály keletkezik,  $|\mathbf{N}/\mathbf{G}|=4(g-1)$ .

## 2 Az alapfogalmak áttekintése

### 2.1 A felület fogalma

#### 2.1.1 Kétváltozós függvény

A felület fogalmának többféle megközelítése lehetséges. Gondolhatunk egy felületre, mint  $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$  által leírható **kétváltozós függvény** diagrammjára  $((x; y; z = f(x, y)))$  ponthalmazára) a 3-dimenziós euklideszi térben.

#### 2.1.2 Gauss-féle megadás

Egy másik lehetőség a **Gauss-féle megadás**: a sík tartományaival paraméterezzük a felületet. Pl. ha a felület gömbfelület, a sík tartománya egy téglalap, a téglalapot  $u, v$ -vel paraméterezzük  $-\pi \leq u \leq \pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ .

Az  $u = a$ -val jellemzett  $v$ -vonalak (a rögzített,  $v$  változik) a szokásos hosszúsági félkörök lesznek, a  $v = b$  egyenletű  $u$ -vonalak a szélességi körök, ahol  $a, b$  állandók. A felület egy adott pontján rendszerint mindkét paramétervonalból egy megy át, de vannak kivételek is pl. az Északi- és Déli-sark mindegyik hosszúsági körnek pontja. Ha kihagyjuk az Északi- és Déli-sarkot és a  $-\pi$  (vagy  $\pi$ )-hez tartozó hosszúsági félkört, a leképezés kölcsönösen egyértelmű, sőt bármely változó szerint differenciálható lesz a nyílt téglalap és a hiányos gömb között. Az így kapott felület a sík egy darabjának topologikus képe lesz. A differenciálhatóság szokásos feltétele azért fontos, hogy érintőt lehessen definiálni, felszint számolni, stb.

#### 2.1.3 A 2-dimenziós sokaság

A **sokaság** (Manifold, Mannigfaltigkeit) fogalma segítségével is értelmezhetünk felületet a beágyazó tértől függetlenül. Ez a fogalom éppen a felületek elméletéből nőtt ki. Jelöljük  $M$ -mel a sokaságot,  $A$ -val egy atlaszát, azaz a koordináta-térképek halmazát. Több térképet készítünk, a sokaság  $U^\alpha$  nyílt halmazait  $u^\alpha$  leképezésekkel injektív módon képezzük le egy rögzített  $d$ -dimenziós valós koordinátatérbe,  $\mathbb{R}^d$ -be. A következő tulajdonságoknak kell teljesülniük:

1.  $M$ -et fedjék le a térképek, azaz  $\bigcup_{\alpha} U^{\alpha} = M$  ( $\forall \alpha \in I$ -re, ahol  $I$  indexhalmaz a térképek számozására)
2. Minden olyan esetben, amikor a térképeknek van nem üres metszete a kapcsoló leképezés  $u^{\alpha} \circ (u^{\beta})^{-1} : u^{\beta}(U^{\alpha} \cap U^{\beta}) \rightarrow u^{\alpha}(U^{\alpha} \cap U^{\beta})$  lesz, azaz egy pont egyik térképen vett képéről így térünk át a másik térkép ugyanazon pontról vett képére a felületen keresztül.

A kapcsoló leképezések és a hozzájuk tartozó sokaságok következő fontos eseteit kell megemlítenünk:

Bármelyik kapcsoló leképezés	A sokaság
Topologikus (homeomorf) bijekció, azaz oda vissza folytonos	Topologikus sokaság
k-szor folytonosan differenciálható, azaz $C^k$ osztályú bijekció	$C^k$ differenciálható sokaság
$C^\infty$ , a kapcsoló leképezés akárhányszor differenciálható bijekció	$C^\infty$ sokaság
$C^\circ$ , a kapcsoló leképezés bármely pont körül sorbafejthető bijekció	Analitikus sokaság

## 2.1 táblázat

M topológiáját a térképező leképezések meghatározzák, ha feltesszük, hogy  $\mathbb{R}^d$ -beli nyílt halmazok M-beli ősképei legyenek nyíltak.  $\square$

Ha M-nek már van topológiája, akkor a térképező leképezésektől megkívánjuk, hogy homeomorfizmusok legyenek. Feltesszük, hogy M Hausdorff-tér, azaz bármely két pontjához léteznek közös pontot nem tartalmazó (diszjunkt) környezetek.

**2.1 Definíció:** Felületnek nevezünk egy kompakt (ívszerint) összefüggő 2-sokaságot.  $\square$

## 2.2 Felületek osztályozása

A felületek osztályozása nem más, mint a kompakt összefüggő 2 dimenziós M sokaságok osztályozása.

$H \subset M$  kompakt, ha bármely nyílt halmazokkal történő fedéséből kiválasztható véges fedés. (A síkban ez a korlátos és zárt halmaznak felel meg.)

A későbbiekből kiderül, hogy osztályozásunkat általánosítani kell, megengedünk peremes felületeket is. A peremen levő pontok bármely környezete félsíkkal homeomorf, ellentétben a többi pont egész síkkal homeomorf környezetével. (Később ezt részletesebben kifejtjük.)

**2.1 Tétel:** Minden kompakt felület triangulálható, azaz homeomorf véges sok szabályosan csatlakozó háromszög egyesítésével (azaz két háromszög metszete vagy üres, vagy egy csúcs, vagy egy oldal).  $\square$

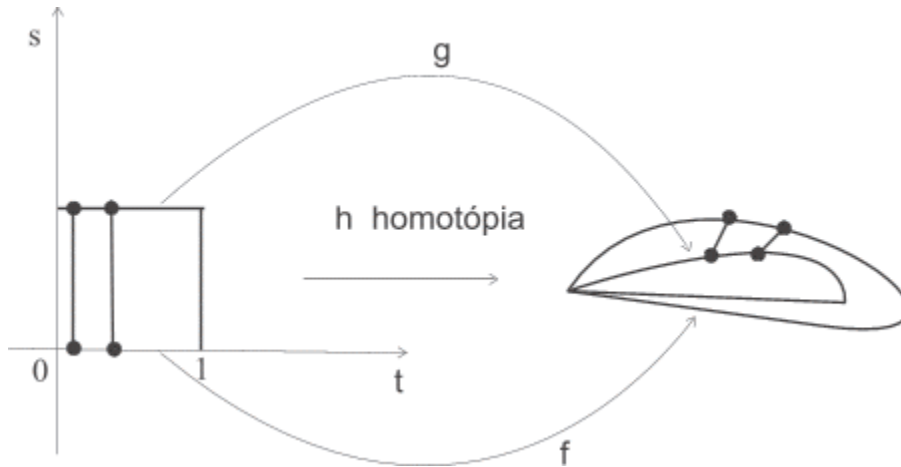
Ez azért fontos, mert így minden felületet megkaphatunk sokszögekből, ahol bizonyos oldalak össze vannak ragasztva, a sokszögek véges sok háromszögre bonthatók. Az affin geometria alaptétele szerint egy és csak egy affinitás van, ami két tetszőleges háromszöget egymásba visz. Egyik háromszögről a másikra a határon folytonosan áttérhetünk. A háromszögek könnyen koordinázhatók, baricentrikus (affin) koordinátákkal.

Hogy a felületek osztályozásához eljussunk be kell vezetnünk a *fundamentális csoport* fogalmát. A fundamentális csoport általános értelmezéséhez pedig szükséges a felületi görbe, görbék összefűzése és a homotópia definíciója.

### 2.2.1 Görbék értelmezése sokaságon

Egy folytonos görbe a sokaságon így értelmezhető: A zárt  $I=[0,1]$  intervallumot egy térképekkel értelmezett  $f$  folytonos függvény segítségével leképezzük az M sokaságba. A görbe zárt, ha  $f(0)=f(1)$ . Tekintsük a **görbék összefűzését**:  $f: I \rightarrow M$ ,  $g: I \rightarrow M$ ,  $f * g: I \rightarrow M$ ,  $t \in [0, 1/2] \rightarrow f(2t)$ ,  $t \in [1/2, 1] \rightarrow g(2t-1)$ . (Ez azért lehetséges, mert a  $[0,1]$  intervallum homeomorf bármely részintervallumával. Ha adott két azonos kezdőpontú,

zárt görbe  $f$  és  $g$ , értelmezzük a  $h$  **homotópiát**, mint egy olyan folytonos leképezést, ami  $f$ -et  $g$ -be deformálja úgy, hogy  $h: I(t) \times I(s) \rightarrow M$ ,  $h(t, 0) = f(t)$ ,  $h(t, 1) = g(t)$  teljesüljön.



ábra

**2.2 Definíció:** Egy összefüggő  $M$  sokaság rögzített kezdőpontú zárt görbéinek homotópia-osztályai az egymásutánfűzés műveletével alkotják az  $M$  **fundamentális csoportját**, vagy első homotópia-csoportját, mert összefüggő  $M$  esetén tetszőleges kezdőpontot választhatunk.  $\square$

### 2.2.2 Fundamentális csoport

Egy  $M$  felület fundamentális csoportját kétféleképpen is megközelíthetjük:

1. a csoport generátorai egy  $M$ -et előállító sokszög oldalpárosításai  $\mathbf{a}: a^{-1} \rightarrow a$ ,  $\mathbf{a}^{-1}: a \rightarrow a^{-1}$ ,  $\mathbf{b}: b^{-1} \rightarrow b$ ,  $\mathbf{b}^{-1}: b \rightarrow b^{-1}$ , itt a sokszög (alaptartomány) kiválasztása nem egyértelmű.
2. A generátorok bizonyos közös kezdőpontú zárt görbék (homotópia osztályai a felületen), melyek nem összehúzhatók, az összehúzható közös kezdőpontú görbék az identikus leképezésnek, mint egységelemnek felelnek meg.

Az első esetben a generáló leképezések többszöri végrehajtásával történik a „kövezés”. A második esetben, például a tóruszon, ez többszöri körüljárást jelenthet, vagyis a görbék egymásután fűzését.

A fundamentális csoportot úgy is megkaphatjuk, hogy a generátorok, mint betűk (és inverzeik) szabad csoportját a definiáló relációk (a csúcsok körüljárásával kapott szavak) által generált normális részcsoporthoz faktorizáljuk. (Itt  $a a^{-1} = 1 = a^{-1} a$  típusú üres szavak egyszerűsítési szabályait is megengedjük tetszőleges a generátorra és  $a^{-1}$  inverzére.)

Nézzünk néhány példát a fundamentális csoportra (első homotópia-csoportra).

1. A gömb fundamentális csoportja triviális, azaz mindegyik zárt görbe összehúzható egy pontra
2.  $\mathbf{G}$  legyen a  $g$  fogantyús gömb fundamentális csoportja:  $2g$  db generátor  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ , és egy reláció  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$  meghatározza, ezt így írjuk:

$$(2.1) \quad \mathbf{G} = \mathbf{O}^g := \{ a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \},$$

ekkor egy csúcsosztály lép fel egy  $4g$  oldalú sokszögben.

3. A  $T$  tórusznál egy téglalap (paralelogramma) szemközti oldalait  $a_1$  és  $b_1$  eltolások párosítják, teljesül  $a_1 b_1 = b_1 a_1$ , azaz  $G$  kommutatív (Abel- csoport), általában a fundamentális csoport nem kommutatív. Ezek a sokszögoldalok úgynevezett elsőfajú élpárok voltak, a párosítások irányítástartó transzformációkat írtak le.
4. A nemirányítható felületeknél másodfajú élpár lép fel, amely irányításváltó transzformációt határoz meg. Ilyen lesz a  $g$  keresztsapkás gömb, ahol a generátorok  $a_1, a_2, \dots, a_g$  :

$$(2.2) \quad G = \otimes^g := \{ a_1, \dots, a_g \mid a_1 a_1 \dots a_g a_g = 1 \},$$

ekkor is egy csúcsosztály lép fel egy  $2g$  oldalú sokszögben.

$E^2$  egyszeresen összefüggő (a fundamentális csoportja triviális) , az euklideszi sík fedi a tóruszt. (Szemléletesen mindig azt jelenti ez a  $p$ -vel jelölt fedés, hogy a tórusz  $G$  fundamentális csoportjával adódó kövezés a teljes euklideszi sík kövezése.)  $p: E^2 \rightarrow T$  lokálisan homeomorfizmus, azaz bármely  $t \in T$  pontnak van olyan  $U$  környezete, hogy

$$p^{-1}(U) = \bigcup_i U_i \text{ bármely } i \text{ indexre diszjunkt egyesítés, és } p|_{U_i}: U_i \rightarrow U \text{ homeomorfizmus.}$$

### 2.2.3 Univerzális fedőtér

Ismertetjük (vázlatosan) egy topologikus tér **univerzális fedőterének** szerkesztését:

**2.2 Tétel:** *Legyen  $T$  egy ívszerint összefüggő, lokálisan egyszeresen összefüggő tér,  $t \in T$  egy pontja és  $\pi_1(T, t)$  a  $T$  fundamentális (első homotópia) csoportja. Legyen  $H$  a  $\pi_1(T, t)$  tetszőleges részcsoportha, ekkor létezik olyan  $S$  fedőtér  $p: S \rightarrow T$  fedőleképezéssel, hogy  $s \in p^{-1}(t)$  esetén  $\pi_1(S, s)$  fundamentális csoportjának  $p$ -nél indukált injektív képe éppen  $H$  lesz:  $p_* \pi_1(S, s) = H$ . Ha  $H = 1$  a triviális részcsoportha, akkor  $S$  egyszeresen összefüggő lesz és univerzális fedőtérnek nevezzük.*

*Ha a felületnek van (lokális, Riemann-féle) metrikája, akkor bármely fedés ezt kiterjeszti a fedőtér (lokális, Riemann-) metrikájává úgy, hogy a fedés lokális izometria legyen. Értelmezhető az  $S$  fedőtér  $\gamma$  fedőtranszformációiból alkotott  $G$  csoport ( $\gamma \in G$ ).  $\gamma: S \rightarrow S$   $\gamma \circ p(s) = t$  bármely  $t \in T$  esetén a rögzített  $p: S \rightarrow T$  fedés mellett. Ha  $p: S \rightarrow T$  univerzális fedés, akkor a fedőtranszformációk  $G$  csoportja  $p$  közvetítésével geometrikusan izomorf, más szóval ekvivariáns lesz a  $T$  tér  $\pi_1(T, t)$  fundamentális csoportjával.  $\square$*

Minden kompakt felület fedőtranszformációinak csoportja fixpontmentes. Tehát az univerzális fedésben, a szomszédos lapokat egymásba vivő fedőtranszformációk is fixpontmentesek, ezek, a  $G$  fundamentális csoport generátorainak felelnek meg. Például a tóruszból  $G$  eltolásaival az  $E^2$  síkot fedő paralelogramma- kövezést is megkapjuk. Ha a tóruszon volt metrika, ami sokféle lehetett, ez öröklődik az univerzális fedőtér paralelogrammáin. A felület szimetriaviszonyait elég lesz az univerzális fedőfelületen vizsgálni. Különböző metrikák esetén más-más szimetriákat kaphatunk, de azonosakat is. Az állandó görbületű univerzális fedőfelületek éppen  $E^2, H^2, S^2$ .

### 2.2.4 Orbifoldok, egy felület szimetriacsoportja.

Nem csak felületeket (manifold), hanem **orbifoldok**at (pályafelületeket, pályasokaságokat) is kell vizsgálnunk, ahol a pontok környezetei nem csak teljes körlemezek lehetnek, hanem

- a) körcikkhez hasonló, (ha két sugarát összeragasztjuk, kúpszerű) tartomány, a „körcikk” csúcsa körüli elforgatás értelmezi ezt,
- b) félkör szerű tartomány kitüntetett peremponttal, melyet a peremre történő egyenestükrözés egészít ki teljes körlappá,
- c) 2 tükörfélegyenes által meghatározott szögtartomány, azaz reflektor-környezet.

Az orbifold fogalmára akkor is szükségünk van, ha csak kompakt felületeket vizsgálunk (mint a mi esetünkben látni fogjuk), mivel a felület szimmetriacsoportja  $N/G$  már létrehozhat orbifoldot,  $H^2/N$  már valódi orbifold lehet. Nézzük ezt meg lépésről lépésre.

**2.3 Definíció:** Egy felület szimmetriacsoportját a következőképpen kapjuk meg. A  $G$  fundamentális csoporthoz keressük egy  $N$  csoportot a következő módon:

$G \triangleleft N \subset \text{Iso } m \text{ } H^2(G \text{ az } N \text{ normálosztója a } H^2 \text{ sík izometriacsoportjában.}).$  Legyen  $n^{-1}Gn = G$  minden  $n \in N$  esetén. A  $g^{-1}Gg = G$  egyenlőség mindig érvényes, ha  $g \in G$ . Ekkor belső automorfizmusról beszélünk,  $n \in N \setminus G$  esetén  $G$  külső automorfizmusáról van szó. Az  $N/G$  faktorcsoport szolgáltatja teljesen általánosan az  $\mathcal{F} = H^2/G$  felület szimmetriáit, ha  $H^2$  az univerzális fedőtér (lásd az (1.5) diagrammot).  $\square$

A szimmetriacsoportok felkutatása azt jelenti, hogy a  $3^-$  felület metrikáját specializáljuk úgy, hogy ezen szimmetriákat előállító normalizátor elemei hiperbolikus izometriák lesznek. A  $3^-$  felület „lokális” szimmetriái kövezik ezután a felület fundamentális tartományát a normalizátor valamely fundamentális tartományával.

Ehhez a lehetséges fundamentális sokszögek szimmetriáinak vizsgálatával jutunk.

Gondolatmenetünk általánosan a következő. Egy felülethez meghatározzuk az univerzális fedőteret, majd a  $G$  fundamentális csoportot, amit lehetséges további szimmetriákkal bővítünk ki („belső szimmetriák”), így kapjuk az  $N$  csoportot, amelynek fundamentális tartománya egy orbifold-felület lesz (az orbifoldnak megfelel egy összeragasztott sokszög). A kapott orbifold fedőtere lesz az eredeti felület. A fedésben már nem csak fixpontmentes azonosítások, hanem tükrözések, forgatások léphetnek fel, ennek megfelelően szinguláris pontok keletkeznek. Mivel 3-féle állandó görbületű metrika van, ezért az orbifoldok a 3-féle metrika egyikének struktúráját viselhetik. A kiterített felületi sokszög szögösszegét összehasonlítjuk a megfelelő euklideszivel és így kapjuk a (2.5) görbületi formulát, ami megmutatja majd, hogy  $E^2$ -,  $H^2$ -,  $S^2$ -ről van-e szó.

### 2.2.5 Két dimenziós orbifoldok osztályozása, a szignatúra fogalma

A két-dimenziós orbifoldok teljes osztályozását Macbeath végezte el. Poincaré sejtette, de nem tudta teljesen bebizonyítani. Azt mondhatjuk, hogy Poincarétól származik a topológia naiv megalapozása, a felületek osztályozása és a fundamentális csoport fogalma. A hiperbolikus sík diszkrét transzformáció csoportjait sokszög oldalpárosításokkal adta meg, ezeket Fuchs-féle csoportoknak nevezte és komplex függvényekkel is jellemezte őket egy Poincaré-féle modellben (körlemez-modell, félsík-modell).

A hiperbolikus sík egybevágóságai legfeljebb 3 egyenestükrözés szorzataiként állnak elő. Két egyenestükrözés szorzata mozgás: parabolikus, ha a két egyenes párhuzamos, elliptikus, ha metszők, hiperbolikus, ha van közös merőleges. Három egyenestükrözés szorzata eltolástükrözés, kivéve, ha a három egyenesnek közös pontja, közös merőlegese van, vagy párhuzamosak, akkor a szorzat speciálisan egyenestükrözés lesz.

Az orbifoldok szignatúrájának Conway — Macbeath jelölését használjuk a hiperbolikus  $N$  normalizátorra és az orbifolderre (orbifoldfelületre) egyaránt. A szignatúra meghatározza a  $H^2/N$  orbifold  $N$  csoportját homeomorfizmus ekvivalencia erejéig. Ezenkívül, kompakt alaptartományú izomorf csoportok, melyek nem-folytonosan hatnak  $E^2$ -n vagy  $H^2$ -n szükségképpen ekviviáriások. Ezt jelenti például a

$$(2.3) \quad O^g h_1, \dots, h_n * h_{11}, \dots, h_{1n_1} * \dots * h_{q1}, \dots, h_{qn_q}$$

irányítható orbifold felület, mint  $g$  tórusznak összefüggő egyesítése, rendre  $h_1, \dots, h_n (\geq 2)$  rendű  $n$  darab forgáscentrummal, ( legfeljebb sorrendjükben különbözhetnek egymástól),  $q$  darab perem komponenssel,  $h_{i1}, \dots, h_{in_i} (\geq 2)$  rendű tükrözési sarokkal egyértelműen, ciklikus permutáció erejéig bármely  $i$ -edik ( $1 \leq i \leq q$ ) komponensen, összhangban a tetszőlegesen rögzített pozitív irányítással. A peremkomponenseket, melyek \*-gal vannak elválasztva, szintén permutálhatjuk. Az üres szignatura jelenti a gömbfelületet, melyen a triviális csoport hat.

Egy nem-irányítható orbifold szignatúrája

$$(2.4) \quad h_1, \dots, h_n * h_{11}, \dots, h_{1n_1} * \dots * h_{q1}, \dots, h_{qn_q} \otimes^g$$

jelenti  $g$  keresztsapka, azaz  $g$  projektív sík összefüggő egyesítését, a többi adat, mint fent. A tükrös sarkok ciklikus rendje bármely perem komponensen megfordítható.

Megemlítjük, hogy 4 kitüntetett 2-dimenziós orbifoldtípus létezik:

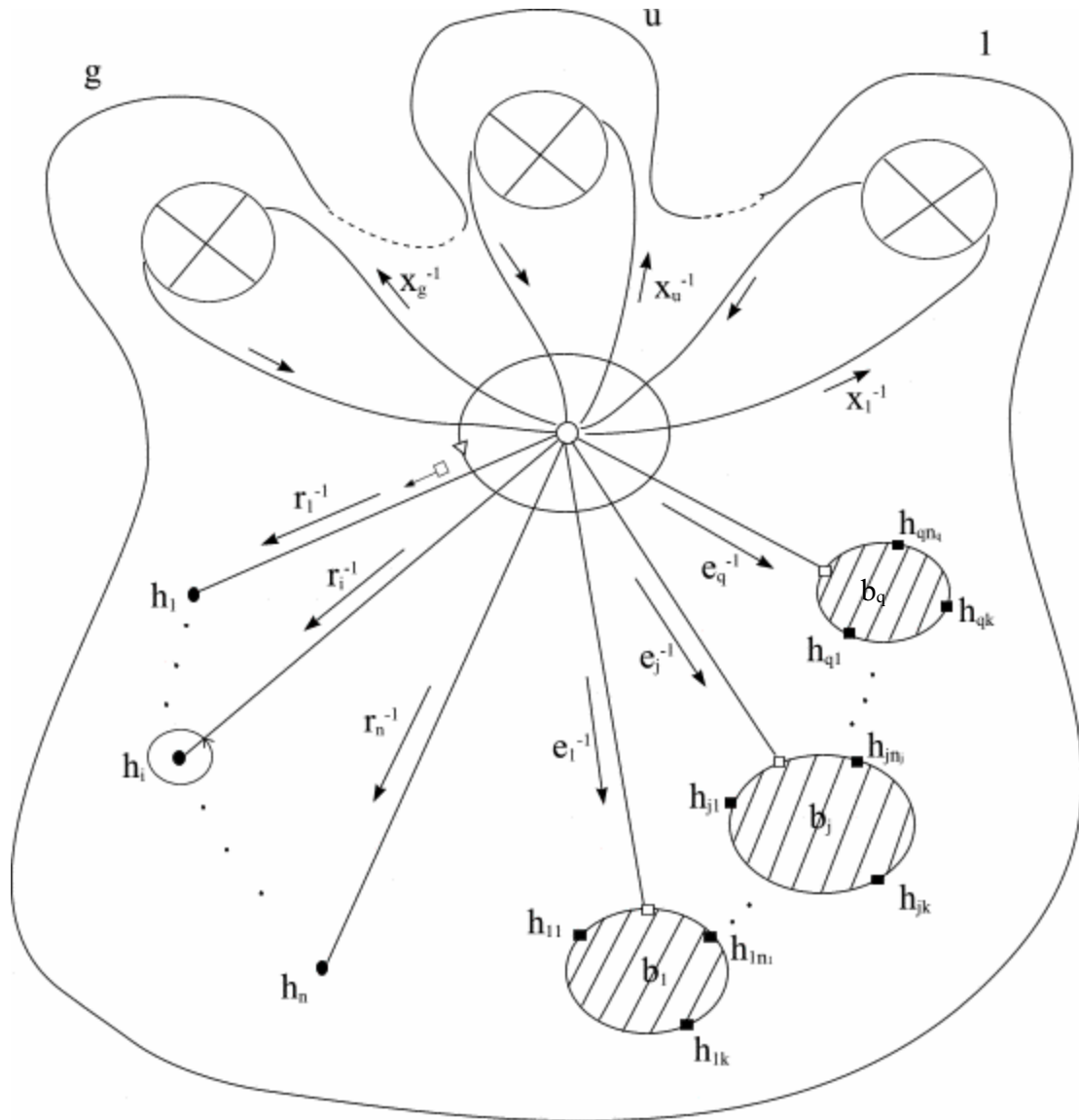
$$h_1 (1 < h_1 \in \mathbb{N}), \quad h_1, h_2 (1 < h_1 \neq h_2 \in \mathbb{N}),$$

$$*h_1 (1 < h_1 \in \mathbb{N}), \quad *h_1, h_2 (1 < h_1 \neq h_2 \in \mathbb{N}),$$

melyek a gömbfelületből származtathatók, de nem jönnek létre gömbi diszkrét csoport pályatereként. Tudniillik ekkor szemközti gömbi pontoknak különböző forgásrendje lenne, ami izometrikus leképezésekre nem lehetséges. Ezek a rossz-orbifoldok. Az a sejtés, hogy ilyen 2-dimenziós rossz-orbifoldok fellépte miatt jönnek létre a magasabb dimenziós rossz-orbifoldok.

### 2.2.5.1 Nem-irányítható (egyoldalú) kompakt felület (orbifold) jellemzése

Tekintsük a  $g$  keresztcsapkás gömböt  $n$  darab forgáscentrummal,  $q$  darab peremkomponenssel. A 2.2 ábrán látható egy kanonikus felbontás fundamentális sokszögre egy  $\circ$  csúsból,  $x_u$  az  $u$ -adik keresztcsapka felbontó hurka  $0 \leq u \leq g$ ,  $\blacksquare$  egy  $j$ -edik peremkomponenshez tartozó  $h_{jk}$ -rendű diédersarok  $2 \leq h_{jk} \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $0 \leq k \leq n_j$ ,  $0 \leq j \in \mathbb{N}$ ,  $\bullet$  egy  $i$ -edik forgáscentrum,  $h_i$  a forgásrend  $2 \leq h_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq n \in \mathbb{N}$ .



2.2 ábra

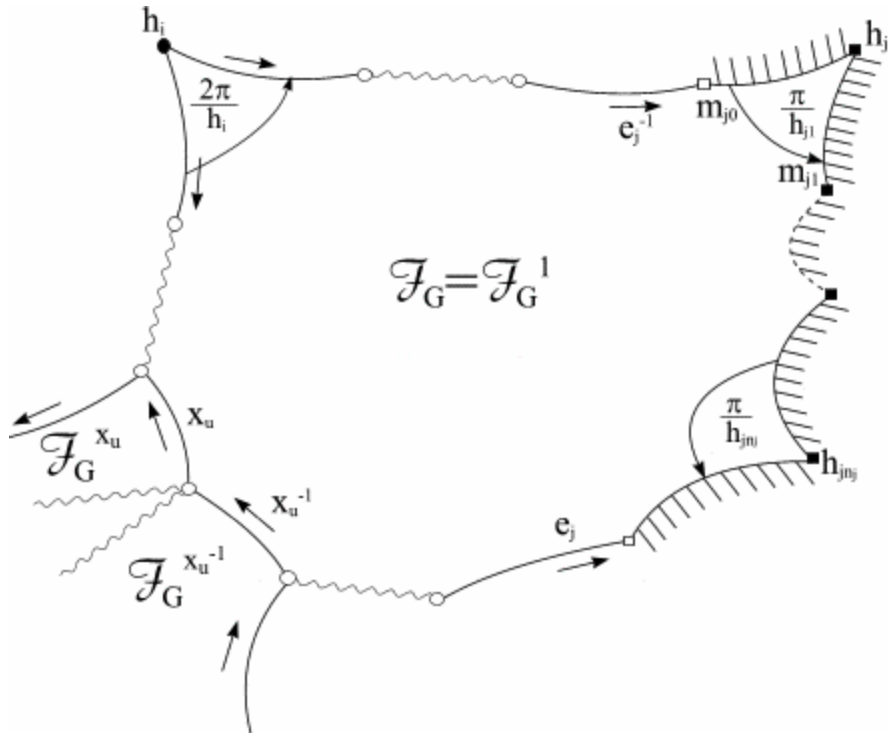
$$\mathbf{G} = h_1, \dots, h_i, \dots, h_n * h_{11}, \dots, h_{1k}, \dots, h_{1n1} * \dots * h_{j1}, \dots, h_{jk}, \dots, h_{jnj} * \dots * h_{q1}, \dots, h_{qk}, \dots, h_{qnq} \otimes^{\otimes} (2 \leq h_i \in \mathbb{N}, \text{ vagy \u00fas}), (2 \leq h_{jk} \in \mathbb{N}, \text{ vagy \u00fas})$$

$$(0 \leq g \in \mathbb{N}, 0 \leq n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \in \mathbb{N})$$

Nem ir\u00e1ny\u00edthat\u00f3 (egyoldal\u00fa) g nemsz\u00e1m\u00fa fel\u00fclet orbifoldj\u00e1t \u00e9s G csoportj\u00e1t ugyan\u00fagy jel\u00f6lj\u00fcnk.

G kanonikus el\u00f3\u00e1ll\u00edt\u00e1sa gener\u00e1torokkal \u00e9s defini\u00e1l\u00f3 rel\u00e1ci\u00f3kkal a fel\u00fclet felv\u00e1g\u00e1s\u00e1nak megfelel\u00f6en a k\u00f6vetkez\u00f6k\u00e9ppen t\u00f6rt\u00e9nik. K\u00f6rbej\u00e1rjuk a cs\u00facsokat az  $\mathcal{F}_G$  k\u00f6vez\u00e9s\u00e9ben (Poincar\u00e9 algoritmus):

- o  $1 = r_1 \dots r_i \dots r_n e_1 \dots e_j \dots e_q x_1^2 \dots x_u^2 \dots x_g^2,$
- $1 = r_1^{h_1} = \dots r_i^{h_i} = \dots r_n^{h_n},$
- ⋮
- $1 = m_{j0} e_j m_{jnj} e_j^{-1},$
- ⋮
- ...  $m_{j0}^2 = m_{j1}^2 = \dots m_{jnj}^2 = 1$
- $1 = (m_{j0} m_{j1})^{h_{j1}} = \dots = (m_{j(k-1)} m_{jk})^{h_{jk}} = \dots = (m_{j(nj-1)} m_{jnj})^{h_{jn_j}}$
- ⋮



2.3 \u00e1bra

A 2.3 \u00e1bra r\u00e9szlet az  $\mathcal{F}_G$ -vel t\u00f6rt\u00e9n\u00f3 fundament\u00e1lis k\u00f6vez\u00e9sb\u0151l.  $\mathcal{F}_G^1$  az 1 egys\u00e9elem alaptartom\u00e1nya \u00f6nk\u00e9nyesen v\u00e1laszthat\u00f3. A szomsz\u00e9d tartom\u00e1nyok k\u00f6z\u00fal az  $x_u^{-1}$  \u00e9l menti

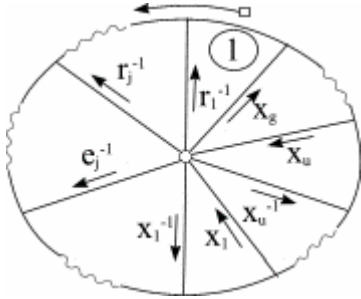
$\mathcal{F}_G^{x_u^{-1}}$  k\u00e9pet \u00e9s az  $x_u$  \u00e9l menti  $\mathcal{F}_G^{x_u}$  k\u00e9pet \u00e9rz\u00e9keltett\u00fcnk.

$$x_u: (x_u^{-1}, \mathcal{F}_G) \mapsto (x_u, \mathcal{F}_G^{x_u})$$

$$x_u^{-1}: (x_u, \mathcal{F}_G) \mapsto (x_u^{-1}, \mathcal{F}_G^{x_u^{-1}})$$

A  $\circ$  csúcshelyek körbejárásakor rendre a tartományok következő  $\mathcal{F}_G$  képeibe lépünk be (2.4 ábra):

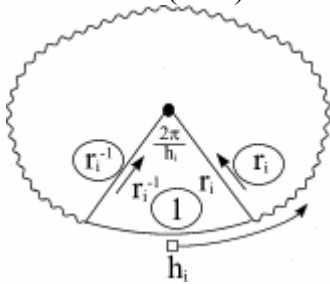
$1 \rightarrow r_1^{-1} \rightarrow r_2^{-1} r_1^{-1} \rightarrow \dots \rightarrow e_j^{-1} \dots r_n^{-1} \dots r_1^{-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_g^{-1} \dots e_j^{-1} \dots r_i^{-1} \dots$   
 $r_1^{-1} \rightarrow x_g^{-1} \dots e_j^{-1} \dots r_i^{-1} \dots r_1^{-1} = 1$  ez pedig ekvivalens az első ( $\circ$  után következő) relációval.



2.4 ábra

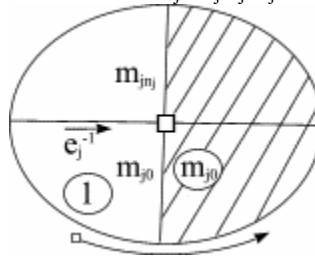
Most nézzük meg a többi  $\bullet$ ,  $\square$ ,  $\text{---}$ ,  $\blacksquare$  „csúcshely” fellépő relációt szemléltetéssel (2.5-8 ábrák):

$\bullet$  csúcshely  $(r_i^{-1})^{h_i} = 1 \Leftrightarrow r_i^{h_i} = 1$



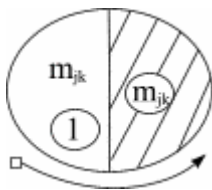
2.5 ábra

$\square$  csúcshely  $e_j m_{j n j} e_j^{-1} m_{j 0} = 1$



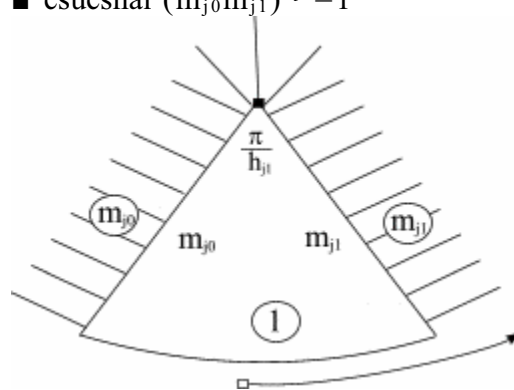
2.6 ábra

$\text{---}$  -nél  $m_{j k}^2 = 1$



2.7 ábra

$\blacksquare$  csúcshely  $(m_{j 0} m_{j 1})^{h_{j 1}} = 1$



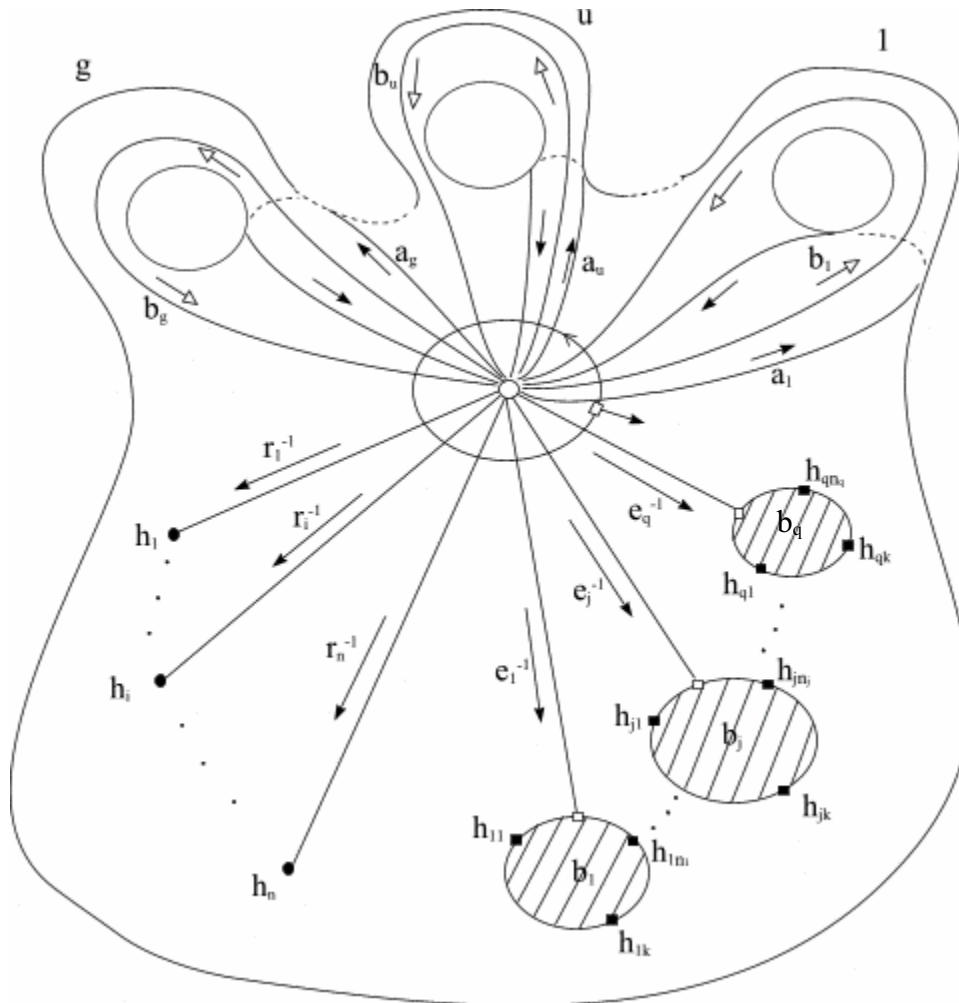
2.8 ábra

A  $h_1, \dots, h_n \geq 2$  forgáscentrumok és a  $b_1, \dots, b_q$  peremkomponensek sorrendje megváltoztatható (permutálhatók). A peremkomponenseken felsorolt tükrözési sarkok

ciklikusan permutálhatók és sorrendjük bármely peremkomponensen egymástól függetlenül megfordítható.

### 2.2.5.2 Irányítható (kétoldalú) kompakt felület (orbifold) jellemzése

Egy  $g$  fogantyús gömb  $n$  db forgáscentrummal,  $q$  db peremkomponenssel látható a 2.9 ábrán: kanonikus felbontás fundamentális sokszögre a  $P$  csúsból,  $a_u, b_u$  az  $u$ -adik fogantyú felbontó hurkai  $0 \leq u \leq g$ ,  $\blacksquare$  a  $j$ -edik peremkomponenshez tartozó  $h_{jk}$ -rendű diédersarok  $2 \leq h_{jk} \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $\bullet$  az  $i$ -edik forgáscentrum,  $h_i$  a forgásrend  $2 \leq h_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $n \geq 0$  a forgáscentrumok (szinguláris képcsúcsok) száma,  $q \geq 0$  a peremkomponensek száma (a ciklikus sorrend az összes peremkomponensen egyszerre fordítható meg),  $n_j$  a  $j$ -edik peremkomponenshez tartozó diédersarok száma.



2.9 ábra

Adott szignatúrájú orbifoldok előállításra fundamentális csoporttal és a megfelelő felületi diagrammal. A Conway-Machbeath szignatúrát használjuk a következő jelöléssel:

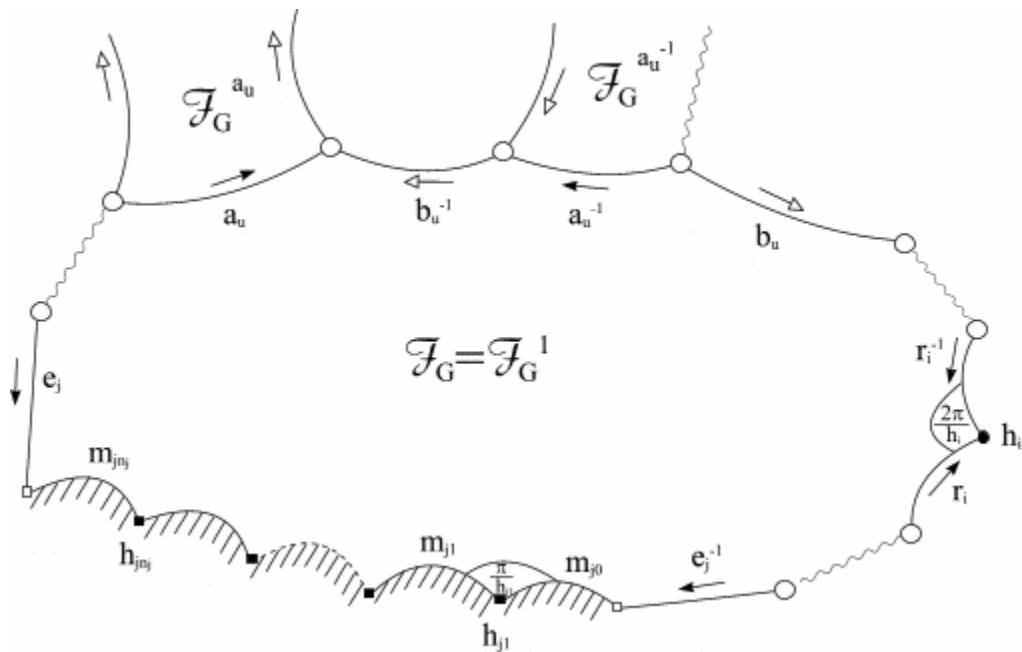
$$2) G := O^g h_1, \dots, h_i, \dots, h_n * h_{11}, \dots, h_{1k}, \dots, h_{1n_1} * \dots * h_{j1}, \dots, h_{jk}, \dots, h_{jn_j} * \dots * h_{q1}, \dots, h_{qk}, \dots, h_{qn_q} \quad (2 \leq h_i \in \mathbb{N}, \text{ vagy üres}), \quad (2 \leq h_{jk} \in \mathbb{N}, \text{ vagy üres}) \quad (0 \leq g \in \mathbb{N}, 0 \leq n \in \mathbb{N}, 0 \leq q \in \mathbb{N})$$

$g$  nemszámú irányítható felület

G előállítás

Tekintsük a  $\circ$ ,  $\bullet$ ,  $\square$ ,  $\text{---}$ ,  $\blacksquare$  csúcsok körüli relációs körutakat:

- $\circ$   $1 = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \dots a_u^{-1} b_u^{-1} a_u b_u \dots a_g^{-1} b_g^{-1} a_g b_g r_1 \dots r_i \dots r_n e_1 \dots e_j \dots e_q$ ,
- $\bullet$   $1 = r_1^{h_1} = \dots r_i^{h_i} = \dots r_n^{h_n}$ ,
- $\vdots$
- $\square$   $m_{j_0} e_j m_{j_{n_j}} e_j^{-1} = 1$ ,
- $\vdots$
- $\text{---}$   $\dots m_{j_0}^2 = m_{j_1}^2 = \dots m_{j_{n_j}}^2 = 1$
- $\blacksquare$   $1 = (m_{j_0} m_{j_1})^{h_{j_1}} = \dots = (m_{j_{(k-1)}} m_{j_k})^{h_{j_k}} = \dots = (m_{j_{(n_j-1)}} m_{j_{n_j}})^{h_{j_{n_j}}}$
- $\vdots$

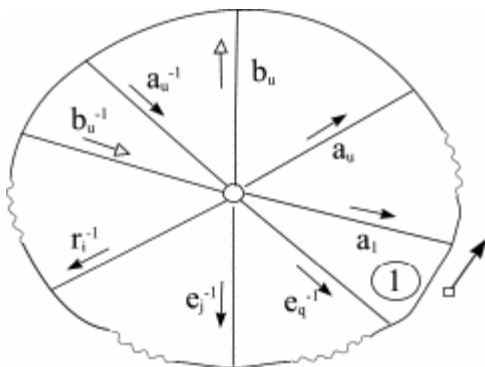


2.10 ábra

A 2.10 ábra az  $\mathcal{F}_G$ -vel való fundamentális kövezés részlete,  $\mathcal{F}_G^{-1}$  az egységelem tartománya tetszőlegesen választható.

A  $\circ$  csúcs körbejárásakor rendre a következő képtartományokba lépünk be 2.11 ábra:

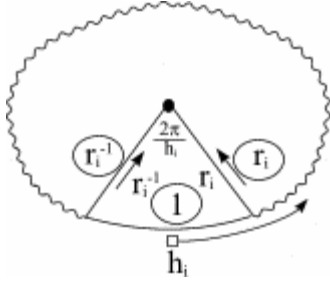
$1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_1 a_1 \rightarrow a_1^{-1} b_1 a_1 \rightarrow b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 \rightarrow \dots \rightarrow r_i^{-1} \dots b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_j^{-1} \dots r_i^{-1} \dots b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$ , ami ugyanazt jelenti, mint  $e_q^{-1} \dots e_j^{-1} \dots r_i^{-1} \dots b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 = 1$  ez pedig ekvivalens az első ( $\circ$  után következő) relációval.



2.11 ábra

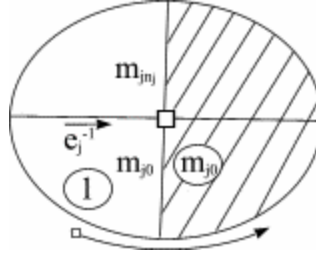
Most nézzük meg a többi  $\bullet$ ,  $\square$ ,  $\text{---}$ ,  $\blacksquare$  „csúcsnál” fellépő relációt szemléltetéssel (2.12-15) ábrák:

$\bullet$  csúcsnál  $(r_i^{-1})^{h_i} = 1 \Leftrightarrow r_i^{h_i} = 1$



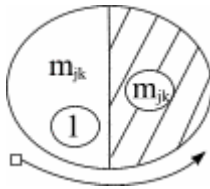
2.12 ábra

$\square$  csúcsnál  $e_j m_{jnj} e_j^{-1} m_{j0} = 1$



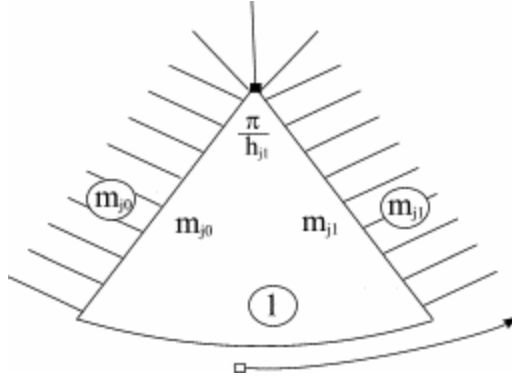
2.13 ábra

$\text{---}$  peremnél  $m_{jk}^2 = 1$



2.14 ábra

$\blacksquare$  csúcsnál  $(m_{j0} m_{j1})^{h_{j1}} = 1$



2.15 ábra

A  $h_1, \dots, h_n \geq 2$ -rendű forgáscentrumok és a  $b_1, \dots, b_q$  peremkomponensek sorrendje megváltoztatható (permutálhatók). A határkomponenseken felsorolt tükrözési sarkok az adott irányítást megőrizve ciklikusan permutálhatók, vagy egyszerre megfordíthatók.

Kombinatorikus (görbületi) mérték (a fundamentális tartomány területe):

$$(2.5) \quad T = \frac{\pi}{\kappa} \left( \sum_{k=1}^m \left[ \frac{2}{h_k} - 2 \right] + \left\{ \sum_{i=1}^q \left( -2 + \sum_{j=1}^{m_i} \left( -1 + \frac{1}{h_{ij}} \right) \right) \right\} + t_\varepsilon \right)$$

$\kappa \neq 0$  a  $\Pi$  sík (szorzat)-görbület,  $t_+ = 4 - 4g = 2\chi$ ,  $t_- = 4 - 2g = 2\chi$ ,  $g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$ , ha

$\varepsilon = +$ ,  $g = 2 - \chi$ , ha  $\varepsilon = -$ . Ha  $\kappa T > 0$ , a  $\Pi$  sík szférikus,  $= 0$  esetén euklideszi,  $< 0$  esetén hiperbolikus,  $g$  a nemszám,  $\chi$  az Euler karakterisztika.

## 2.2.6 Kompakt felületek izometriacsoportjai

Természetes példa az  $E^3$  euklideszi térben levő tóruszfelület izometriacsoportja, amely egy tengely körüli forgatásokból álló csoport egy jellemző szögparaméterrel. Ezen csoport nem folytonos (diszkrét) részcsoportjait végtelen sokféle módon választhatjuk meg. Ha a tóruszfelületet, mint  $+1$  nemszámú, irányítható topológikus felületet tekintjük, az univerzális

fedőfelület euklideszi metrikát is indukálhat. A fundamentális csoportot,  $\mathbf{G} = (\tau_1, \tau_2 \text{ — } \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1})$ -t két eltolás generálja egy, a kommutativitást kifejező relációval. Az  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij} = g_{ji}$  Gram mátrix meghatározza a  $\tau_1$  és  $\tau_2$  eltolások  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  eltolásvektorainak hosszait és szögét úgy, hogy az  $E^2/\mathbf{G}$  tóruszfelület belső metrikája a szokásos lesz. Ismeretes, hogy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  felvehető a következőképpen

$$|\mathbf{e}_1| \leq |\mathbf{e}_2| \text{ és } \frac{\pi}{3} \leq (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az  $E^2$  sík 17 lehetséges  $\Gamma$  kristálycsoportjai teljes áttekintést adnak a tóruszfelület lehetséges diszkrét  $\Gamma/\mathbf{G}$  izometriacsoportjairól. Az még végtelen sok lehetőséget ad, ha a fenti  $\mathbf{G}$  eltoláscsoportnak tetszőleges  $\Gamma$ -ban invariáns, diszkrét  $H$  részcsoportjait vesszük. Így kapjuk a  $\Gamma/H$  faktorcsoportot, mint lehetséges tóruszcsoportot [S 88].

Ahogy a bevezetésben említettük, az irányítható Riemann-felületek izometriacsoportjaival óriási irodalom foglalkozik ([B 00], [C-B 88], [K-W 99], [SS 98], [Z 97], [Z-V-C 80]). Tudjuk azt is, hogy a  $g^+$  ( $g \geq 2$ ) nemszámú Riemann felületek irányítást megtartó  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  izometria csoportja véges, legfeljebb  $84(g-1)$  rendű.

Ebben a dolgozatban analóg becslést fogalmazunk meg  $g \geq 3$  nemszámú, kompakt nem-irányítható felületre, melynek univerzális fedő felülete, a konstans negatív görbületű hiperbolikus sík (1.1 és 1.2 megjegyzés).

A  $0$  nemszámú gömb, a  $1^-$  nemszámú projektív sík, a  $2^-$  nemszámú Klein kancsó diszkrét izometriacsoportjait a gömb, illetve az euklideszi sík szimmetriacsoportjainak ismeretében áttekinthetjük.

A  $3^-$  felület – ami 3 projektív sík összefüggő egyesítése - nem irányítható, és az első  $e$  felületek között, melynek fedőfelülete hiperbolikus metrikával rendelkezhet. Véges izometria csoporttal rendelkezik, mint minden hiperbolikusan metrizált, kompakt felület. Fő célunk ezen  $3^-$  felület szimmetriacsoportjainak vizsgálata és osztályozása.

### 3 Felületek előállításuk sokszögekből számítógéppel

Ebben a fejezetben egy adott oldalszámú sokszögből (a sokszög oldalainak páronkénti egyesítésével) előállítható felületeket osztályozzuk számítógépes program segítségével.

A felület-topológiából ismeretes, hogy minden zárt felület (a továbbiakban csak felületnek nevezzük) triangulálható. Tehát a felület sokszögből állítható elő. A sokszög azonosítandó, azaz összeragasztandó oldalpárjai egy felületi, körmentes gráfot definiálnak, melynek mentén a felület felvágható ([L-M 91]). Tudjuk, ([L-M 90]) hogy egy  $g$  nemszámú  $F$  felület mindig  $2n$ -szögből keletkezik, ahol  $2n$  a következő feltételt elégíti ki:

$$(3.1) \quad 2\alpha g \leq 2n \leq 6\alpha g - 6,$$

itt  $n \geq 2$  és

$$\alpha := \begin{cases} 2, & \text{ha } F \text{ irányítható, és } 0 \leq g; \\ 1 & \text{különben, és } 1 \leq g. \end{cases}$$

Az alsó határt akkor érjük el, ha az összes csúcsot egy pontba ragasztjuk. A felső határt pedig akkor, ha a csúcsok az  $F$  felület

$$(3.2) \quad x = 2\alpha g - 2$$

különböző pontjához vezetnek. Ebben az esetben minden csúcsnak a felületet tartományba kiterítő gráfban a fokszáma 3.

Az egyik természetes problémafelvetés az, hogy minden  $F$  felülethez soroljuk fel az összes lehetséges (kombinatorikai ekvivalenciáig) kiterítő sokszöget, azaz körmentes gráfot. Ezt a problémát a síkbeli diszkrét csoportokra, és speciálisan azokra, melyek egy felület fundamentális csoportjával izomorfak és szignatúrájuk

$$(3.3) \quad \mathbf{G} = \mathbf{O}^g, \text{ vagy } \mathbf{G} = \otimes^g,$$

Molnár Emil és Zoran Lučić oldotta meg [L-M 91]. Az eredmény [L-J-V 90] alapján például a perecfelületre  $\mathbf{G} = (\oplus, 2) = \mathbf{O}^2$

$$(3.4) \quad \begin{array}{llll} 8\text{-szög: } 4 & 10\text{-szög: } 18 & 12\text{-szög: } 34 & \\ 14\text{-szög: } 38 & 16\text{-szög: } 20 & 18\text{-szög: } 8 & \text{összesen: } 122 \end{array}$$

alaptartomány létezik.

Egy másik értelmes kérdésfeltevés az, hogy egy adott  $2n$ -szög minden lehetséges oldalpárosításához az összes lehetséges felületet és a fentiekben értelmezett kiterítő gráfokat meghatározzuk. Ezzel a kérdéssel foglalkoztam [S 98]-ban.

A problémát algoritmikusan [M 92] értelmében oldottam meg, egy későbbi pontban részletezett módon. Az exponenciálisan növekvő esetszám miatt a bevezetésben említett számítógépekkel először csak  $2n=10$ -ig, majd  $2n=14$ -ig tudtam megoldást adni a problémára. Szeretném a közeljövőben a programot lefuttatni  $2n=16$ -ra, ami a számítógépeink sebességét figyelembe véve még reményteljesnek látszik.

Ugyanebben az időben algoritmizálta D. Huson az A. Dress által javasolt és kidolgozott Delaney-Dress-szimbólumokat [D-S 84], [D-H 87], [D-H-Z 92] először az euklideszi kövezésekre. [H 92] többek között egy algoritmust is leír, ami minden „fundamentális” lap-tranzitív kövezést felsorol,  $N$ - szögű kövekkel, ahol az  $i$ -fokú csúcsok száma  $q(i)$  adott,  $3 \leq i$ .

Az algoritmus a következő típust jellemzi:

$$(3.5) \quad i \rightarrow q(i) \quad i \geq 3, \quad \sum_i q(i) = N = 2n$$

Az algoritmus a kövezés minden lehetséges kombinatorikus esetét generálja (euklideszi sík, gömb vagy hiperbolikus sík). Ez az algoritmus a következő speciális problémánk megoldásához is elvezet: Keressük azokat a kövezéseket, ahol a kövek  $2n$ -szögek és minden csúcs  $2n$ -fokú.

Az érdekes  $2n \geq 4$  esetekben a felületek  $2n$  szögből való előállításának kombinatorikus osztályozását kapjuk  $2$  dimenzióban, ha  $2n = 2\alpha g$  úgy, ahogy fent említettük. A  $2n = 4$  eset az euklideszi metrikával rendelkező tóruszhoz vezet, továbbá a Klein kancsóhoz a 3.4 ábrán, ekkor  $2$  előállítás van. Ha  $2n \geq 6$ , hiperbolikus metrikával rendelkező  $g$  nemszámú —  $g \geq 2$  irányítható, és  $g \geq 3$  nemirányítható — felületet kapunk, ahogy a táblázat is mutatja.

$2n$	A $2n$ -szögek irányítható oldalpárosításai ekvivalenciaosztályainak száma
4	2
6	5
8	17
10	79
12	555
14	5284

3.1 táblázat

Eredményeink más analóg eredményekkel is megegyeznek [H 92], [L-M-V 98], melyeket más módszerekkel nyertek.

### 3.1 Egy $2n$ -szög oldalpárosításai

Tekintsünk egy  $P$   $2n$ -szöget ( $2n \geq 4$ ) és vegyük a szokásos pozitív körüljárást (3.1. ábra). Egy  $I$  oldalpárosítás (azonosítás) minden irányított  $s_i^{-1}$  oldalhoz egy másik irányított  $s_i$  oldalt rendel hozzá egy  $s_i$  azonosító homeomorfizmussal. A  $P$  sokszög  $I$  oldalpárosítása megadható mint a ciklikusan számozott oldalak involutív permutációja, ahol az indexben a megfelelő kezdőcsúcsot is jelöljük. Az  $i$  csúcs az  $i-1$  és  $i$  oldalak végpontja. Két  $I_1$  és  $I_2$  párosítást kombinatorikusan ekvivalensnek nevezünk, ha van  $P$ -nek egy  $\gamma$  automorfizmusa úgy, hogy

$$(3.6) \quad I_2 = \gamma^{-1} I_1 \gamma.$$

Itt  $P$  automorfizmus csoportja (a  $4n$ -rendű  $D_{2n}$  diédercsoport) csúcs-oldal illeszkedéstartó bijekciókból áll, így mondhatjuk:  $I_1$  és  $I_2$  ekvivalens párosítás, ha  $P$  egy automorfizmusa egymáshoz rendeli őket. Ekkor a fenti ekvivalenciaosztályok száma és reprezentánsai megadhatók.

Minden olyan párosítást kizárunk, amelyeknél egy csúcs-ekvivalenciaosztályba kevesebb, mint 3 csúcs tartozik. A 3.1. ábrán például mind a 4 nem-ekvivalens párosítást meghatároztuk, amelyek a perefelület különböző előállítását szolgáltatják egy csúcsosztállyal. A 2. párosítás (3.1.b ábra) az oldalak involutív permutációjával (kezdőpont az indexben) így írható le:

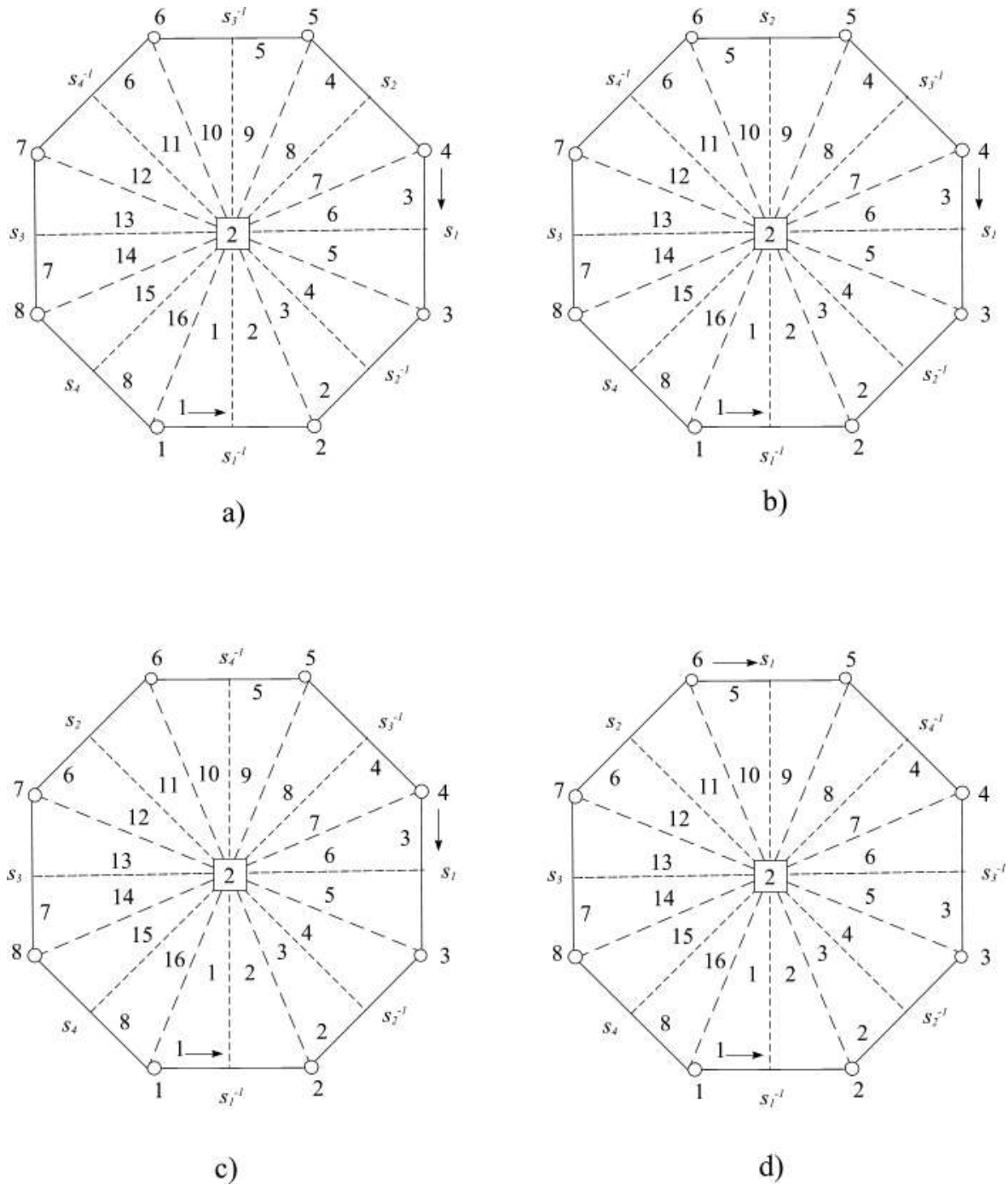
$$(3.7) \quad (1_1, 3_4) (2_2, 5_6) (4_4, 7_8) (6_6, 8_1).$$

A csúcspontok mind ekvivalensek:

$$(3.9) \quad 1 \xrightarrow{s_1} 4 \xrightarrow{s_3} 8 \xrightarrow{s_4^{-1}} 7 \xrightarrow{s_3^{-1}} 5 \xrightarrow{s_2^{-1}} 3 \xrightarrow{s_1^{-1}} 2 \xrightarrow{s_2} 6 \xrightarrow{s_4} 1$$

A fundamentális csoportnak ez az előállítása a két fogantyús gömbhöz, röviden a perefelülethez vezet.

$$(3.10) \quad \mathbf{G} = (s_1, s_2, s_3, s_4, \quad 1 = s_4 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} s_3^{-1} s_4^{-1} s_3 s_1)$$



3.1 ábra

Ugyanezt a hozzárendelést a fent említett Delaney-Dress-szimbólumok, röviden  $D$ -szimbólumok segítségével is leírhatjuk. Ekkor tekintjük a  $P$  nyolcszög baricentrikus felbontását háromszögekre. A háromszögek közös csúcsát, ami a nyolcszög formális középpontja 2-vel jelöljük, a háromszögek 1-gyel jelölt csúcsai a nyolcszög oldalfelező pontjai, a 0-val jelölt csúcsok, pedig a nyolcszög csúcsai legyenek. A szemben levő (pontozott) 0-oldalak, a (szaggatott) 1-oldalak és a (folytonos) 2-oldalak menti szomszédságok vezetnek a  $\sigma_0$ -,  $\sigma_1$ -, és  $\sigma_2$  -műveletekhez a háromszög-pályák halmazán, azaz a  $D$ -halmaz 16 elemén. A kritikus  $\sigma_2$  -művelet éppen az a párosítás, amit (3.7)-ben a 3.1.b ábra alapján megadtunk.

Éppen így felírhatjuk a sokszög-párosítások általános esetében is az ekvivalenciaosztályokat és az előállított felületek fundamentális csoportjainak megfelelő relációkat. Fontos, hogy a módszerben a párosítás-ekvivalencia könnyen algoritmizálható.

Az  $F$  felület irányíthatósága, a nemszám és az Euler karakterisztika között fennáll

$$(3.11) \quad \chi(F) = f_0 - f_1 + f_2 = 2 - \alpha g.$$

Mint szokásos,  $f_i$  jelöli a  $P$  sokszög  $i$  dimenziós alkotórészei ekvivalenciaosztályainak számát (itt  $f_2=1$  mindig teljesül), és  $\alpha=2$  az irányítható,  $\alpha=1$  a nem irányítható esetet.  $F$  nem irányítható, ha  $P$ -nek legalább 1 oldalpárja van úgy, hogy mindkét oldal irányítása  $P$  körüljárásánál megegyező.

Megemlítjük, hogy a (3.9) oldalpárosítás a  $D$ -szimbólummal is előállítható.

Ekkor a kritikus  $\sigma_2$ - művelet (operáció) az 1-16 baricentrikus háromszögekre az 3.1.b ábra alapján

$$(3.12) \quad \sigma_2: (1,6) (2,5) (3,10) (4,9) (7,14) (8,13) (11,16) (12,15)$$

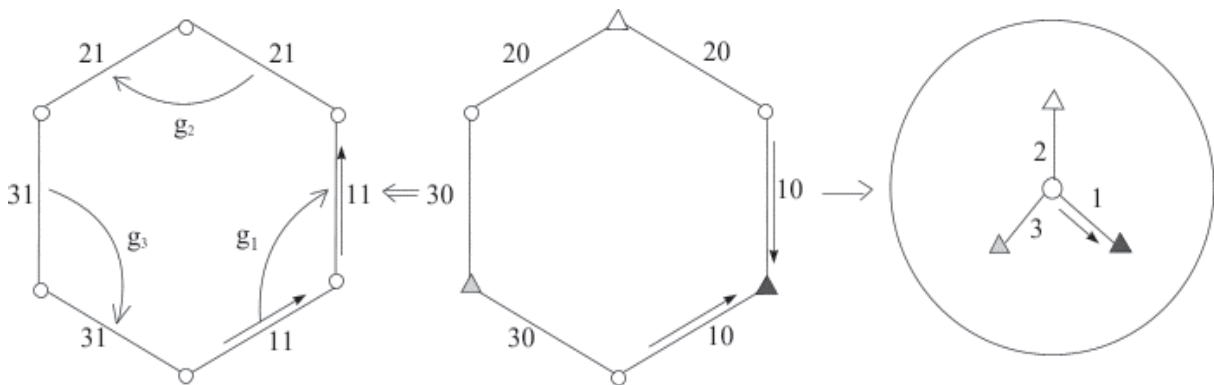
lesz, pl.  $(1,6) (2,5)$  -öt a  $\Gamma$  csoporthoz  $s_1$  írja le (3.11)-ben

Ugyanezt a párosítást algoritmusomban a következőképpen jelölöm:

$$(3.13) \quad (10) (20) (10) (30) (20) (40) (30) (40) \text{ vagy rövidebben } 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4$$

### 3.1.1 Az algoritmus és példák

A számítógépes program első részében a  $2n$ -szögek irányítható oldalpárosításával foglalkoztam.



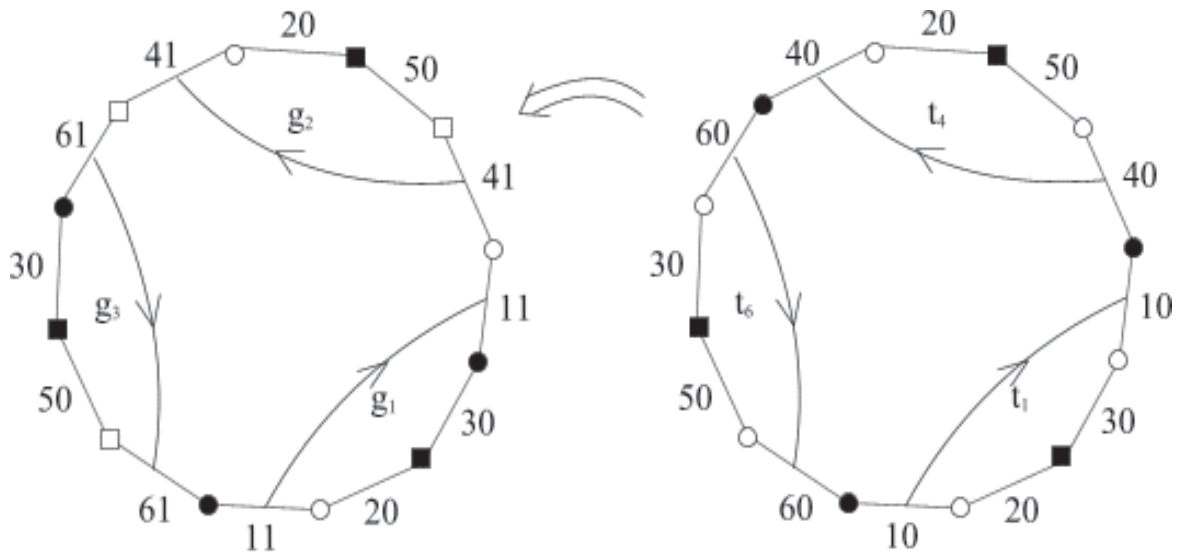
3.2 ábra

A második részben minden korábban nyert irányítható párosításból nem-irányítható párosítások lesznek úgy, hogy legalább egy  $i$  oldalhoz ...  $(i \ 1)$  ...  $(i \ 1)$  ... típusú hozzárendelést teszünk.

A 3.2 ábrán mutatunk egy ilyen párosítást

$$(3.14) \quad (11) (11) (21) (21) (31) (31); \quad n3, (6)$$

A hatszögnek, amely egy három nemszámú nem-irányítható felülethez vezet, mind a hat csúcsa egy ekvivalenciaosztályba esik.



3.3 ábra

A megfelelő irányítható párosítás a gömböt állíthatja elő, triviális módon  $\Gamma=1$  csoporttal. A továbbiakban ilyen párosításokat kizárunk, ha van egy csúcsoosztály (itt három olyan is van), amihez kevesebb, mint három csúcs tartozik.

Az ilyen triviálisnak tekintett eseteket is figyelembe kell vennünk a későbbi becslésekben (ld. 3.1 táblázat).

Más példát állít elő a 3.3 ábra.

Az első képet leíró formula:

$$(3.15) \quad (11) (20) (30) (11) (41) (50) (20) (41) (61) (30) (50) (61); \quad n_3, (3,3,3,3)$$

Egy három nemszámú nem-irányítható felületet ír le (azaz  $n_3$ -mat) 4 csúcsoosztállyal, ahol mindegyikbe három csúcs tartozik.

A második kép a megfelelő 2 nemszámú irányítható felület, azaz röviden  $p_2$ .

$$(3.16) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6 \ 3 \ 5 \ 6; \quad p_2, (3,6,3).$$

A (3.12) formulából látszik, hogy a  $p_2$  perefelülethez három csúcs-ekvivalenciaosztály  $(3, 6, 3)$  is tartozhat. A  $H^2$  hiperbolikus síkon mindkét 12 szög metrikusan realizálható.

### 3.1.2 A program eredményei

A 3.2 táblázat minden  $2n$ -szögre  $1 \leq n \leq 7$  tartalmazza a  $g$  nemszámú  $p_g$  irányítható és  $n_g$  nem-irányítható felületek megfelelő előállításainak számát.

$2n$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$
4	1			2					
6	1			2	8				
8		4			22	47			
10		18			24	279	473		
12		34	82		11	682	4928	7192	
14		38	1022			838	20979	110266	144906

3.2 táblázat

Az eredmények táblázatából látható az exponenciális növekedés, összhangban a  $2n$ -szögek kedvező nem-ekvivalens oldalpárosításait kereső  $s(n)$  lépésszám alábbi becsléseivel.

### 3.1.3 Egy $2n$ -szög nem-ekvivalens oldalpárosításainak becslései

#### 3.1.3.1 Irányítható oldalpárosítások becslése

Megadjuk a kedvező párosításokat kereső program  $o(2n)$  és  $s(2n)$  lépésszámainak alsó és felső korlátját, amelyek megmutatják, hogy algoritmusunk bonyolultsága  $g$ -vel exponenciálisan nő. A korlát elég durva, de célunkhoz elegendő [S 98]:

$$(3.17) \quad \frac{(2n-1)!}{2^{n+1}n!} < o(2n) < \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \approx \sqrt{2}e^{n \log n - n(1-\log 2)}$$

$$(3.18) \quad \frac{(2n-1)!}{2n!} < s(2n) < \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!} \approx \sqrt{2}e^{n \log n + n(\log 4 - 1)}$$

Itt  $o(2n)$  a  $2n$ -szögek kombinatorikusan nem-ekvivalens irányítható oldalpárosításait kereső lépések számát jelöli, a  $g$  nemszámú  $0 \leq g \leq \frac{n}{2}$  irányítható felületek minden előállítását megadja,  $s(2n)$  ugyanezt a kereső lépésszámot jelöli minden (irányítható és nem-irányítható) felületre.

A kereső lépések nem mindig vezetnek kedvező sokszögekhez. Láthatjuk, hogy a kedvező sokszögek száma még az alsó becslést sem éri el, de biztosan kisebb a felső korlátnál.

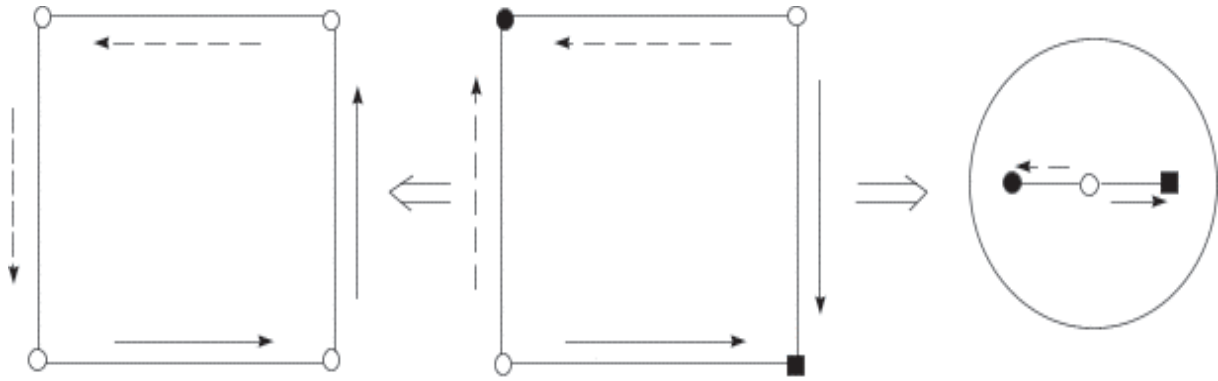
Először határozzuk meg a  $2n$ -szög irányítható oldalpárosításainak becsléseit. A  $2n$ -szög csúcs és oldalszámozását pozitív körüljárás szerint rögzítsük (ez látható a 3.1 ábrán). A pozitívan irányított 1 oldalhoz rendeljünk egy másik oldalt ellentétes irányítással. Ezt  $2n-1$  különböző módon tehetjük meg. Ezután vegyük a következő szabad pozitív oldalt egy ellentétes irányítással hozzárendelt új oldallal. Az első rögzített pár után a második párt  $2n-3$  módon lehet kiválasztani és így tovább.

Végül

$$(3.19) \quad (2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1 = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

különböző módon hozhatjuk létre az irányítható párosításokat. A csúcsok ekvivalenciaosztályaiban létrejöhetnek 1 vagy 2 elemű osztályok is, ahogy a 3.2 vagy 3.4 ábrán látható. Ezek nem lesznek kedvező sokszögek.

A (3.19)-ben az irányítható oldalpárosítások ekvivalenciaosztályai kereső lépésszámának felső korlátját adtuk meg, ezen párosítások között ekvivalensek is lehetnek a  $2n$  szög diéderszimetriáinak alapján.



3.4 ábra

Ez a szimmetriacsoport a  $4n$ -rendű diédercsoport, melyet

$$(3.20) \quad D_{2n} = \langle \sigma_0, c \mid c^{2n} = \sigma_0 c \sigma_0 \rangle$$

állít elő.

Itt

$$(3.21) \quad c = (1, 2, 3, \dots, 2n)$$

a  $2n$  rendű ciklikus csúcspérmütáció és

$$(3.22) \quad \sigma_0 = (1, 2n)(2, 2n-1) \dots (n, n+1)$$

egy tükrözés két elemű csúcsciklusokkal. Egy másik tükrözés:

$$(3.23) \quad \sigma_1 = \sigma_0 c = (1, 2, 2n) \dots (n, n+2)(n+1).$$

A fenti felsorolásnál egy rögzített párosításhoz legfeljebb  $4n$  ekvivalens lehet.

(3.19)-ben  $4n$ -nel való osztással, az  $o(n)$  alsó korlátját kaphatjuk.

$$(3.24) \quad \frac{(2n-1)!}{2^{n+1} \cdot n!} < o(2n) < \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}$$

Egyes párosításokat  $D_{2n}$  bizonyos részcsoportjai önmagukba visznek.

Például egy speciális párosítás:

$$(3.25) \quad 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n,$$

ezt önmagába transzformálja a teljes  $D_{2n}$  csoport, hiszen  $D_{2n}$  minden eleme ezt a párosítást invariánsan hagyja, ugyanis a párok számozásától eltekinthetünk.

### 3.1.3.2 Az összes (irányítható és nem-irányítható) oldalpárosítás becslése

Az összes párosítás ekvivalenciaosztályainál a kereső  $s(2n)$  lépésszámra analóg gondolatmenetet követhetünk. Rögzített  $2n$  szögnél az első párt  $2 \cdot (2n-1)$  módon választhatjuk ki, mert az első „képpoldal” irányítása az eredetivel vagy azonos, vagy ellentétes lehet. Ez a két lehetőség van minden oldalpárnál. Így a következő korlátokat nyerjük:

$$(3.26) \quad \frac{(2n-1)!}{2 \cdot n!} < s(2n) < \frac{2 \cdot (2n-1)!}{(n-1)!}.$$

A Stirling formula:

$$(3.27) \quad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi \cdot n}$$

lehetőséget nyújt, hogy a korlátot kényelmesebben tudjuk megbecsülni (e=2,71828... az Euler szám)

Pl.: a (3.24)-ből következik

$$(3.28) \quad \frac{(2n-1)!}{2^{n+1} \cdot n!} \approx \frac{\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{2n-1} \cdot \sqrt{2\pi(2n-1)} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n-1}}{2^{n+1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} =$$

$$= 2^{n-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} \approx \frac{1}{\sqrt{8}} 2^n \cdot e^{-1} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{n \log 2 + (\log n - 1)(n-1) - 1} = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{n \log n + n(\log 2 - 1) - \log n}$$

Így a következő korlátokat nyerjük:

$$(3.29) \quad \frac{1}{\sqrt{8}} e^{n \log n - n(1 - \log 2) - \log n} < o(2n) < \sqrt{2} \cdot e^{n \log n - n(1 - \log 2)}$$

$$(3.30) \quad \frac{1}{\sqrt{8}} e^{n \log n + n(\log 4 - 1) - \log n} < s(2n) < \sqrt{2} e^{n \log n + n(\log 4 - 1)}$$

ahogy az (3.17-18) formulában bevezettük

Becslésünkből adódik

$$4826 < o(14) < 135135$$

$$(3.31) \quad 617760 < s(14) < 17297280$$

$$63344 < o(16) < 2027025$$

$$16216200 < s(16) < 518918400$$

a (3.24) és (3.26) formulák alapján, és

$$4855 < o(14) < 135941$$

$$(3.32) \quad 621444 < s(14) < 17400425$$

$$63675 < o(16) < 2037600$$

$$16300802 < s(16) < 521625686$$

a (3.29) és (3.30) formulák alapján.

Tanulságos az összevetés a 3.2 táblázattal.

## 4 A $3^-$ felület szimmetriacsoportjai és fundamentális kövezései

### 4.1 Szimmetriacsoportok hatszög kiterítésekkel

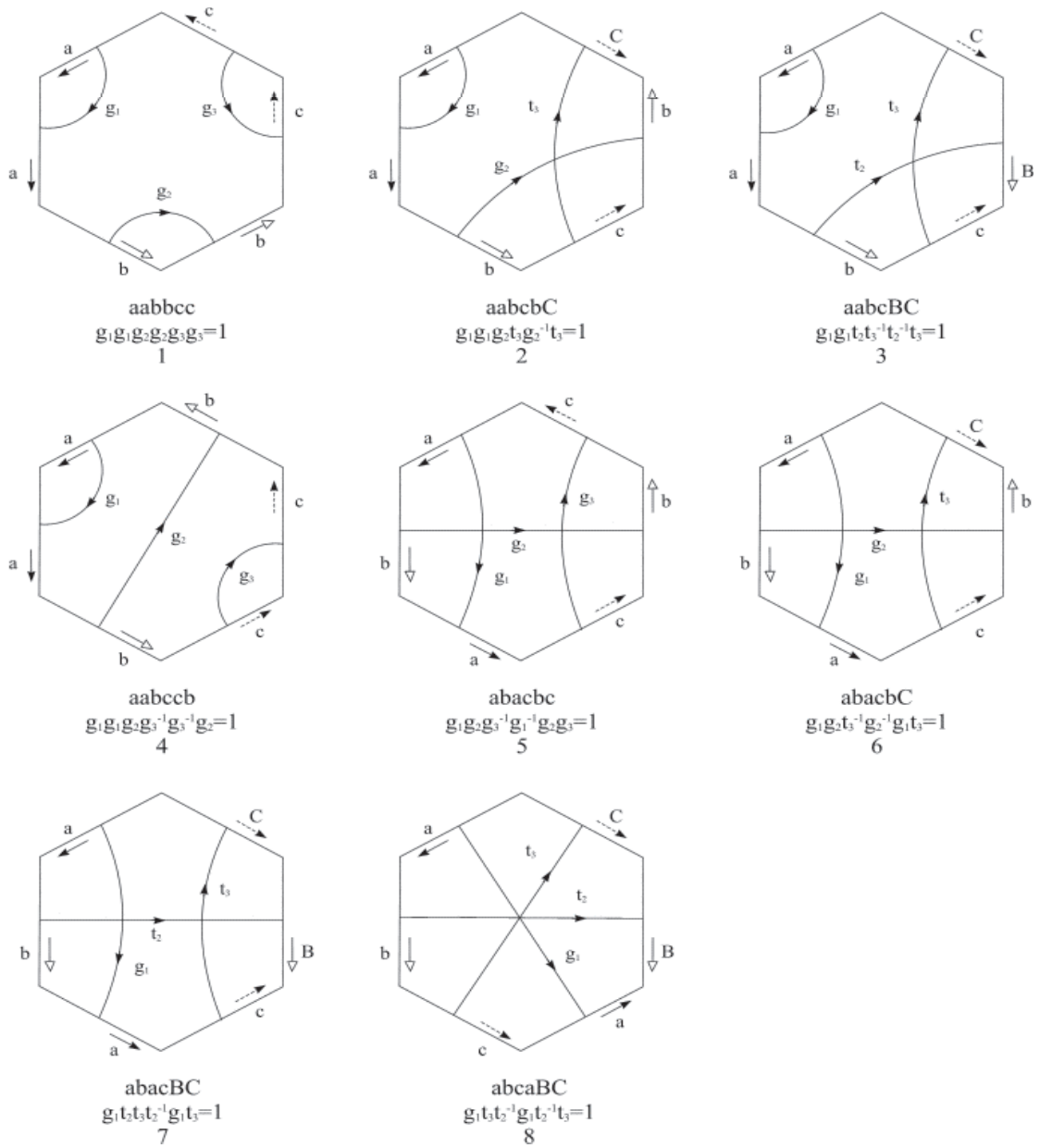
Vizsgálatainkban felhasználjuk az előző fejezetben kapott eredményeket, a számítógéppel előállított felületkiterítéseket. [S 98]. Meghatároztuk  $2n=14$ -ig egy adott  $2n$  oldalszámú sokszög fixpontmentes oldalpárosításait számítógéppel. A  $3^-$  felület esetében azt kaptuk, hogy a  $6 \leq 2n \leq 12$  eseteket kell tekinteni.

Minden kombinatorikusan különböző esetet megkaptunk. Az eredmények a 3.1 táblázatból leolvashatók: 8 darab 6-szög, 22 darab 8-szög, 24 darab 10-szög, 11 darab 12-szög. Ha hatszög állítja elő a felületünket, akkor minden csúcs 1 osztályba kerül, 8-szögnél 2, 10-szögnél 3, 12-szögnél 4 ekvivalencia osztályba esnek a csúcsok.

Először a hatszög előállításokat elemezzük. Ezek a 4.1 ábrán láthatók, a fundamentális csoport előállításával (prezentálásával) együtt.

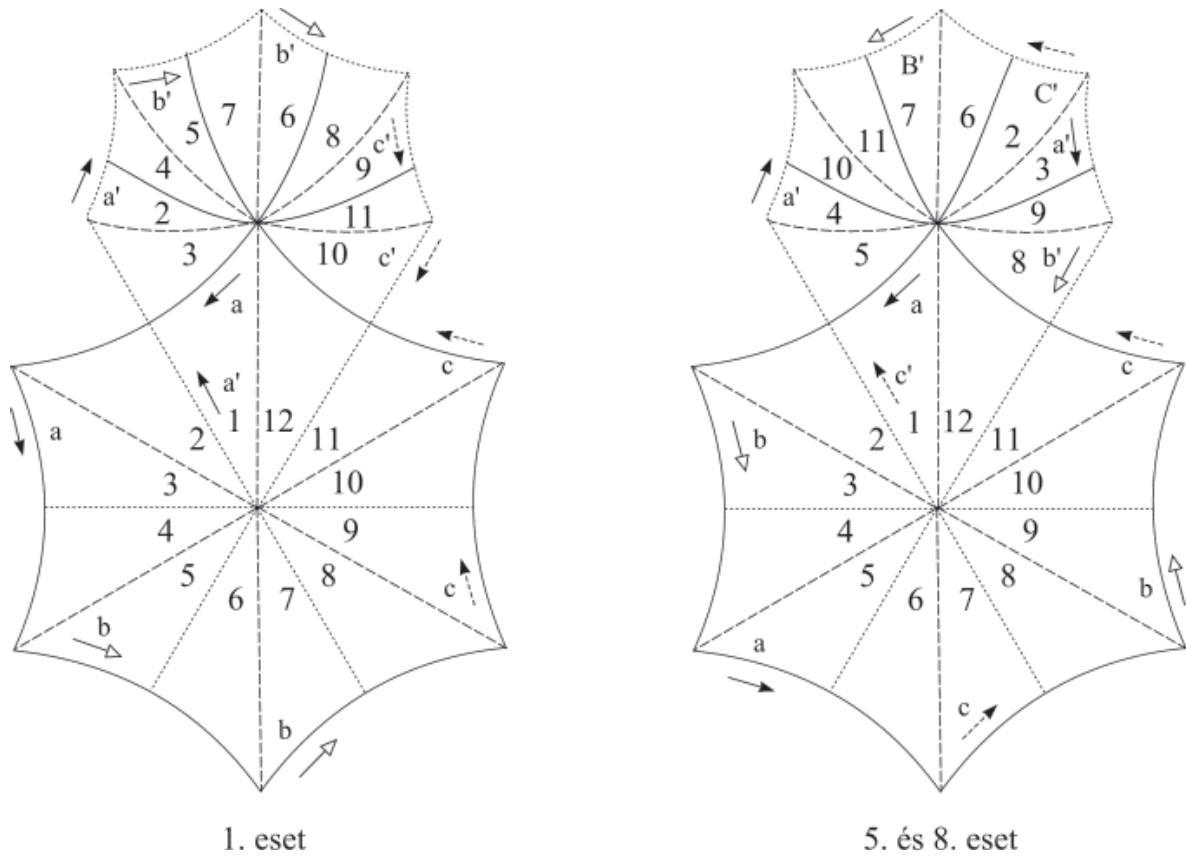
#### 4.1.1 A csúcsok és a fundamentális hatszög középpontjának összehasonlítása D- szimbólumok segítségével

Csoportosítsuk a 3.2 táblázatban kapott 8 fundamentális hatszöget (4.1 ábra). Az első négy esetben a hatszögek önmaguk duálisai lesznek, ez azt jelenti, hogy a csúcsstabilizátorok és a centrum stabilizátor szimmetriái egymásnak megfeleltethetők. Az 5-ös eset csúcsalakzata a 8-as eset középponti alakzatához rendelhető. Hasonló a helyzet a 6-os és 7-es esetekkel is. Nézzünk mindegyik esetre egy példát.



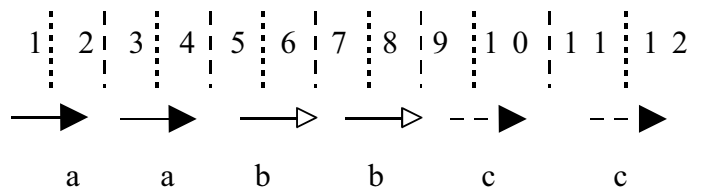
4.1 ábra

Tekintsük egy  $P$  hatszög baricentrikus felbontását háromszögekre a 3.1 ábra alatti leírásban megadott módon a  $D$ -szimbólumok felhasználásával. A fundamentális hatszög baricentrikus felbontása után képezzünk egy új csúcsalakzatot a megfelelő oldalpárosítások figyelembe vételével.

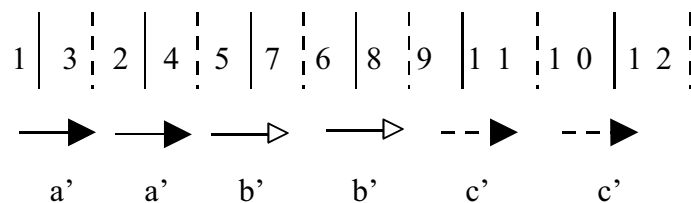


4.2 ábra

Részletezzük először az első esetet (4.2 ábra 1. eset és 4.1 ábra 1. eset). A  $(1, 3) (2, 4); (5, 7) (6, 8); (9, 11) (10, 12)$   $\sigma_2$ -operáció határozza meg az aabbcc poligonszimbólumot és a megfelelő  $g_1; g_2; g_3$  eltolástükrözésekkel az oldalpárosításokat. A természetes ciklikus  $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  sorrend a következő:



A  $\langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle$  ciklikus sorrend a  $\sigma_2$ -operációból következik:



ahol az  $a'a'b'b'c'c'$  poligonszimbólumot a  $\sigma_0$ -operáció határozza meg. Ez P csúsalakzatának oldalpárosítása. A  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1, \sigma_0 \leftrightarrow \sigma_2$  duális csere és a

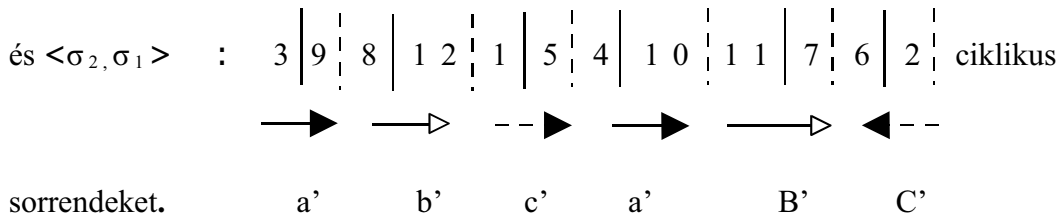
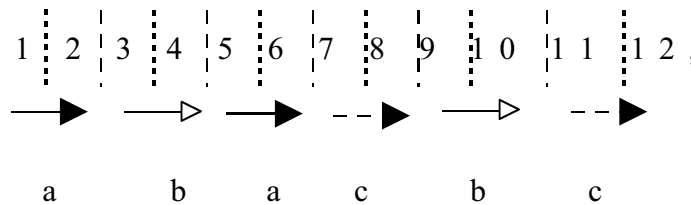
$$\pi_{11} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 11 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

megfeleltetés az aabbcc poligonszimbólummal duális szimmetriát állít elő, és a centrum ill. csúcsstabilizátorok szimmetriáit egymáshoz rendeli.

Ezután vizsgáljuk az 5. esetet, melynek csúcsalakzata megegyezik a 8. eset centrum alakzatával (4.1 ábra és 4.2 ábra 5. és 8. eset):

A  $g_1, g_2, g_3$  eltolástükrözések az abacbc poligonszimbólumot írják le, és a  $\sigma_2$ -operáció itt a következő: (1, 5) (2, 6); (3, 9) (4, 10); (7, 11) (8, 12).

A fentiekhez hasonlóan vegyük a  $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ :



A  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1, \sigma_0 \leftrightarrow \sigma_2$  hozzárendelés után

$$\pi_{58} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \\ 3 & 9 & 8 & 12 & 1 & 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

megfeleltetéssel megkapjuk a 8. esetet, mint csúcsalakzatot (4.2 ábra). Hasonlóan kapjuk a

$$\pi_{85} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 12 & 1 & 7 & 6 & 11 & 10 & 3 & 2 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

megfeleltetéssel az 5. esetet, mint csúcsalakzatot a 8. esetből (4.7 ábra).

A 6. és 7. eset ekvivalenciáját hasonlóan láthatjuk be (4.8 ábra), így csak a 6. esetet kell megvizsgálunk.

#### 4.1.2 A hat különböző fundamentális hatszög vizsgálata

Először nézzük az 1. esetet (4.1 ábra 1. eset, 4.2 ábra 1. eset és 4.3 ábra), amit az aabbcc poligonszimbólum állít elő. A  $3^-$  felület  $G$  fundamentális csoportját három kombinatorikus szimmetriával  $m_1, m_2, m_3$ -mal bővíthetjük ki úgy, hogy a tükrötengelyek páronként  $\frac{\pi}{3}$  nagyságú szöget zárnak be egymással. Ezek a szimmetriák a fundamentális csoport generátorain hatnak a következőképpen:

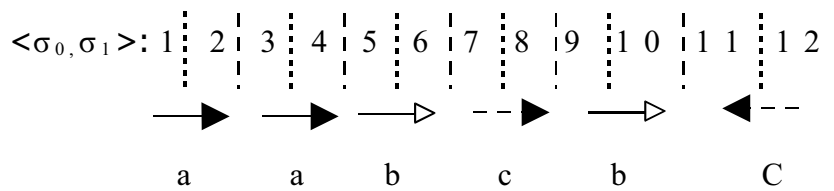
$$g_1^{m_1} = g_1^{-1}, g_2^{m_1} = g_3^{-1}, g_3^{m_1} = g_2^{-1}, g_1^{m_2} = g_3^{-1}, g_2^{m_2} = g_2^{-1}, g_3^{m_2} = g_1^{-1},$$

$$g_1^{m_3} = g_2^{-1}, g_2^{m_3} = g_1^{-1}, g_3^{m_3} = g_3^{-1}.$$

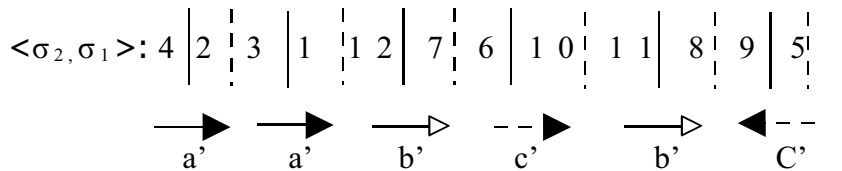
A  $D$ -szimbólumot – melynek eredetileg 12 eleme volt – a bevezetett 6 elemű szimmetriacsoport 2 elemű  $D'$ -szimbólumra redukálja ((1,4,5,8,9,12)→1', (2,3,6,7,10,11)→2'). A  $D'$  (ugyanúgy, mint az eredeti  $D$ -szimbólum) önduális  $D$ -diagramm lesz.

A  $\sigma_0 \leftrightarrow \sigma_2, \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1$  csere a baricentrikus 1', 2' háromszögeken 2 elemű csoportot állít elő  $m_1', m_2'$  tükrözésekkel. A kibővített  $N$  csoport  $\mathcal{F}_N$  fundamentális tartománya egy  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  szögekkel rendelkező négyszög, a szomszédos tartományokba az oldalakra vonatkozó  $m_1, m_2, m_1', m_2'$  tengelyes tükrözésekkel juthatunk el. Az  $N/G$  faktorcsoporthoz, — mint a  $3^-$  felület szimmetriacsoportjának — 12 eleme van. A 4.3 ábra mutatja  $N/G$  szerkezetét:  $D_3 \times D_1$ , azaz két diédercsoport direkt szorzata.

Tekintsük az aabcC poligonszimbólum által meghatározott 2. esetet (4.1 ábra 2. eset és 4.4 ábra). Ennél az oldalpárosításnál nem kapunk belső szimmetriát. Vegyük az eredeti alakzatban a következő ciklikus sorrendet.



és a megfelelő másik ciklikus sorrendet



A  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1, \sigma_0 \leftrightarrow \sigma_2$  hozzárendelés és a

$$\pi_{22} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 12 & 7 & 6 & 10 & 11 & 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

permutáció után megkapjuk azokat az egybevágóságokat, amelyek  $N$  fundamentális tartományát – ami egy olyan hatszög, melynek minden szöge  $\frac{\pi}{2}$  – a szomszédos tartományokra képezik le. A 2,3 → 2,3 hozzárendelés  $\pi_{22}$ -ben  $m$  tengelyestükrözést, a 4,5 ↔ 1,12 hozzárendelés  $t$  eltolást és a  $t^{-1}$  inverzét határozza meg. A 6,7 → 7,6 hozzárendelés ponttükrözés, a 8,9 ↔ 10,11 pedig a  $g$  eltolástükrözés és a  $g^{-1}$  inverze, mert az irányítást megváltoztatja.

A 3. esetben (4.1 ábra 3. eset és 4.5 ábra) a poligonszimbólum aabcBC lesz.  $G$ -t egy  $m$  tengelyes tükrözéssel bővíthetjük ki.  $D'$  egy 6 elemű szimbólum lesz ((2,3) → 1', (1,4) → 2',

$(5,12) \rightarrow 3'$ ,  $(6,11) \rightarrow 4'$ ,  $(7,10) \rightarrow 5'$ ,  $(8,9) \rightarrow 6'$ ). A dualitást figyelembe véve az  $\mathbf{N}$  normalizátor  $\mathcal{F}_N$  fundamentális tartománya ötszög lesz,  $\frac{\pi}{2}$  szögekkel. A fundamentális tartomány a szomszéd tartományokra 4 tengelyes tükrözéssel és egy ponttükrözéssel képezhető le.

Tekintsük a 4. esetet (4.1 ábra 4. eset és 4.6 ábra) az aabccb poligonszimbólummal. Ennél az oldalpárosításnál a  $3^-$  felület  $\mathbf{G}$  szimmetriacsoportját két kombinatorikus szimmetriával  $m_1$ -gyel és  $m_2$ -vel bővíthetjük ki, melyek egymásra merőleges tengelyű tengelyes tükrözések. A  $D$ -szimbólumot – melynek eredetileg 12 eleme van – 3 elemű  $D'$ -szimbólumra redukálhatjuk ( $(5,6,11,12) \rightarrow 1'$ ,  $(1,4,7,10) \rightarrow 2'$ ,  $(2,3,8,9) \rightarrow 3'$ ).  $D'$  egy önduális  $D$ -diagramm. A  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1$  és  $\sigma_0 \leftrightarrow \sigma_2$  duális csere 8 elemű  $\mathbf{N}$  csoportot hoz létre a baricentrikus háromszögek tükrözésével.

A kibővített  $\mathbf{N}$  csoport  $\mathcal{F}_N$  fundamentális tartománya négyszög –  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$  szögekkel –, melyből a szomszédos tartományokhoz az oldalakra vonatkozó tengelyes tükrözésekkel jutunk.

Nézzük az 5. és 8. esetet együtt (4.1 ábra 5., 8. eset és 4.7 ábra). Mindkét esetben a  $\mathbf{G}$  csoport két tengelyes tükrözéssel bővíthető ki. A 4.1.3-ban említettük, hogy az 5. és 8. esetnek ekvivalens a fundamentális tartománya és ugyanaz a normalizátora. Habár az eredeti  $D$ -diagramm  $D$  nem önduális, az  $\mathbf{N}$  által indukált  $D'$  három elemű önduális diagramm lesz. Az

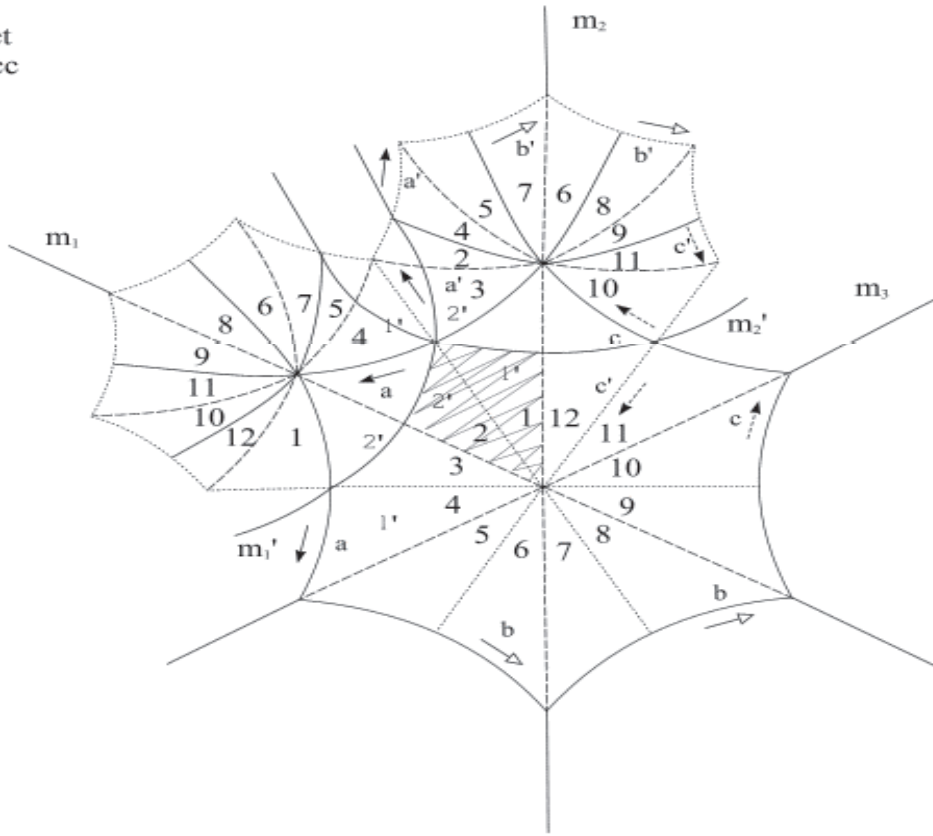
$\mathcal{F}_N$  fundamentális tartomány négyszög –  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  szögekkel –, és az  $\mathcal{F}_N$ -t a szomszédokra képező egybevágóság, három tengelyes tükrözés és egy ponttükrözés lesz.

Végül vizsgáljuk a 6. és 7. esetet együtt (4.1 ábra 1.6, 1.7 eset és 4.8 ábra). Itt egy  $m_1$  egyenestükrözést kapunk a  $\mathbf{G}$  csoport bővítésekor.  $D'$  hatelemű (önduális) szimbólum, a fundamentális tartomány  $\mathcal{F}_N$  ötszög –  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  szögekkel. A fundamentális tartományt a szomszédos tartományokra képező egybevágóságok: két tengelyes tükrözés  $m_1, m_2, t$  eltolás ( $t^{-1}$  inverzével együtt) és egy ponttükrözés.

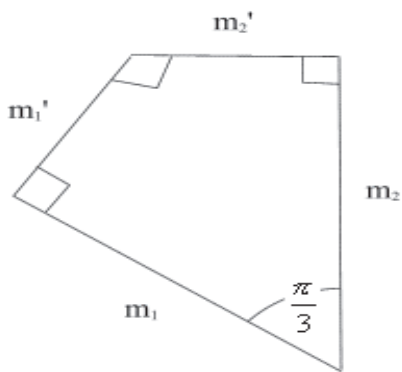
A kapott eredmények összefoglalását a bevezetés 1.1 tételében fogalmaztuk meg

.

1. eset  
aabbcc



$\mathcal{F}_N$



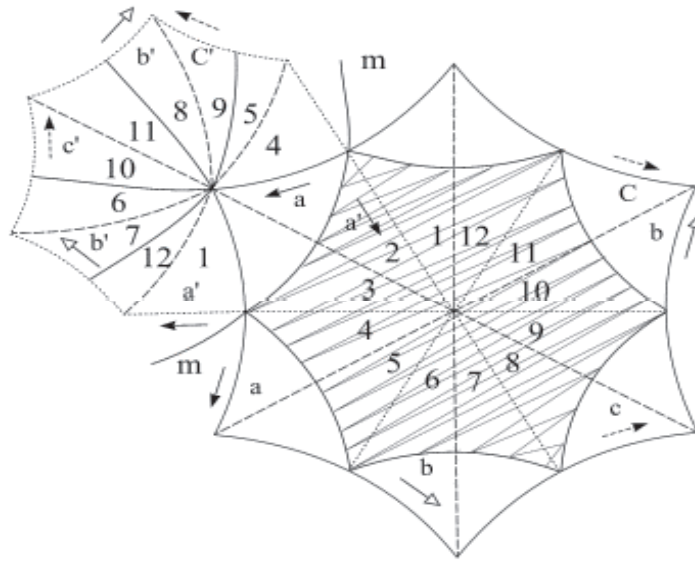
$D'$



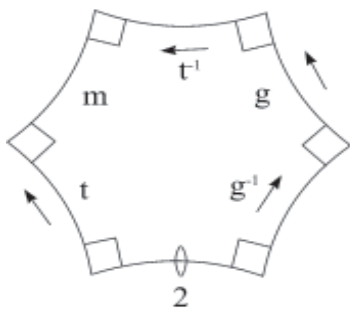
$N = *2223$

4.3 ábra

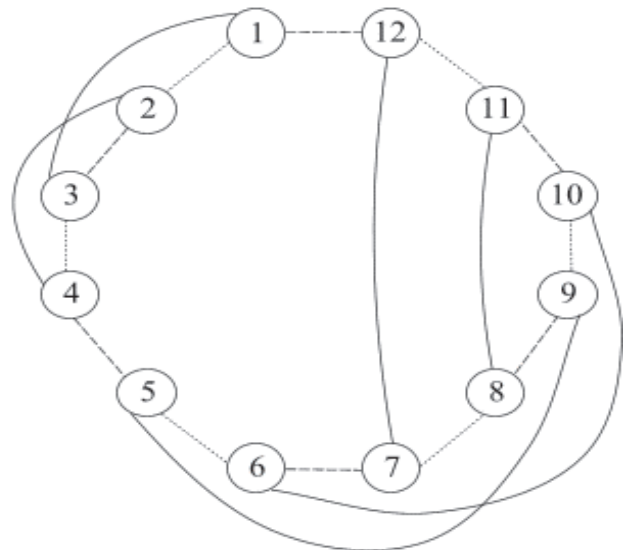
2. eset  
aabcbC



$\mathcal{F}_N$



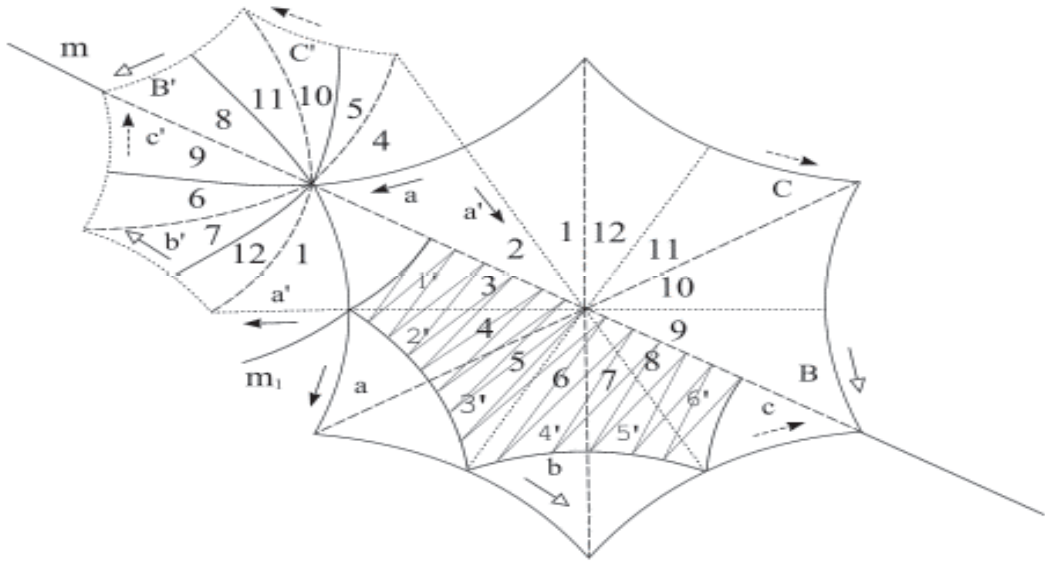
$D' = D$



$N = 2^* \otimes$

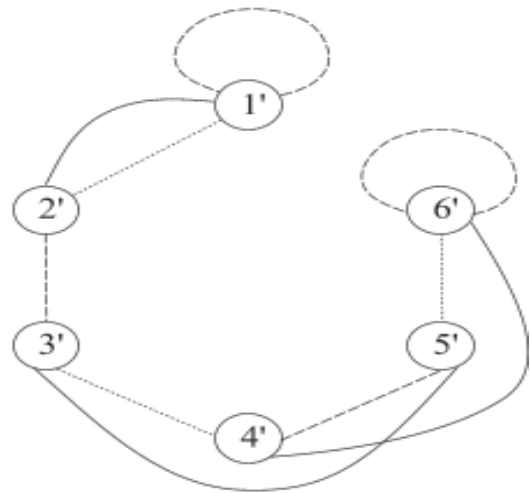
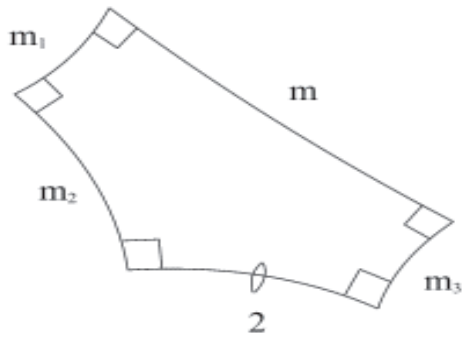
4.4 ábra

3. eset  
aabcBC



$\mathcal{F}_N$

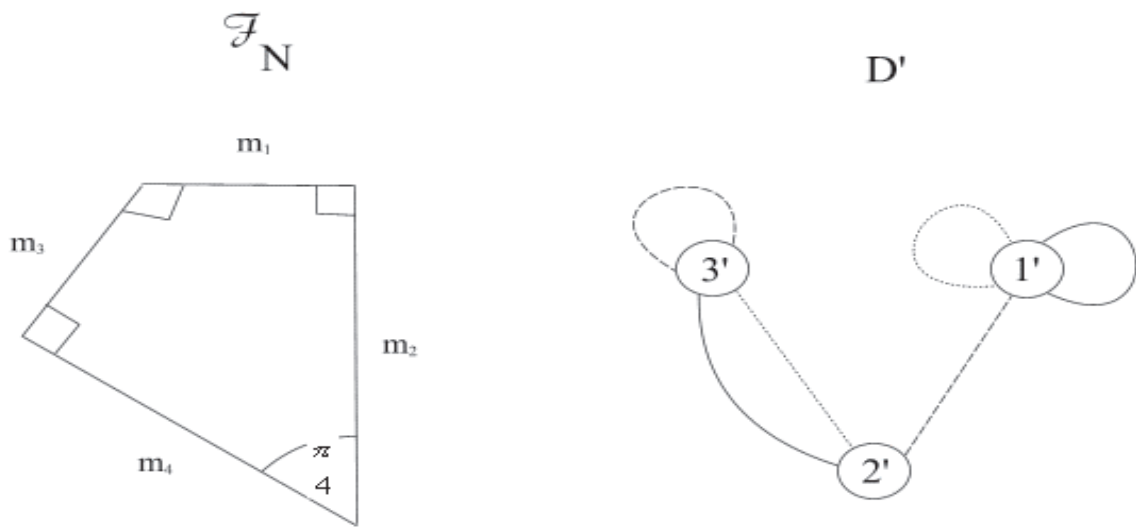
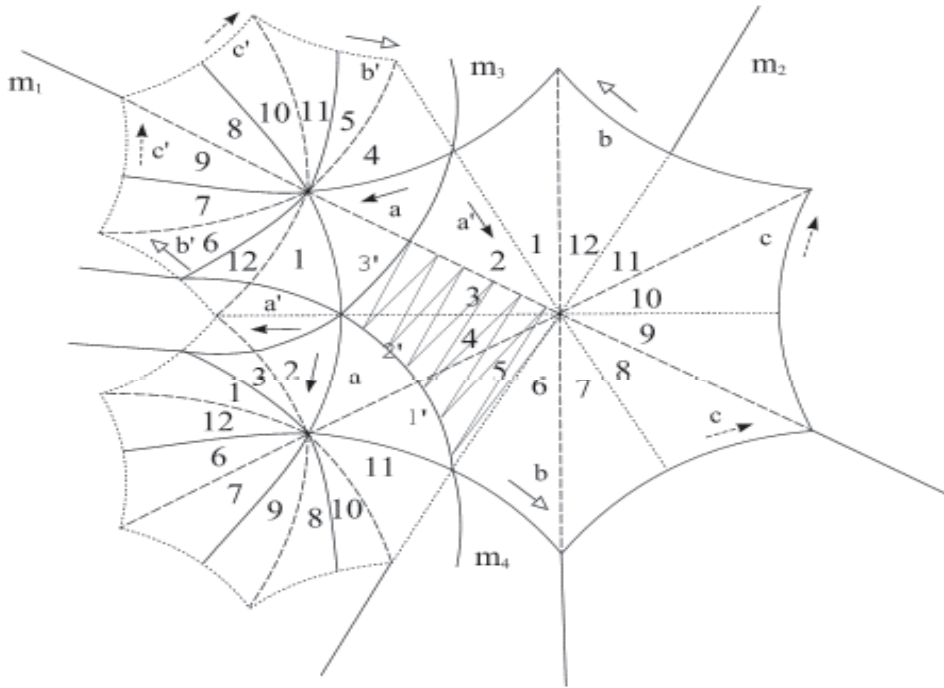
$D'$



$$N = 2 * 222$$

4.5 ábra

4. eset  
aabccb

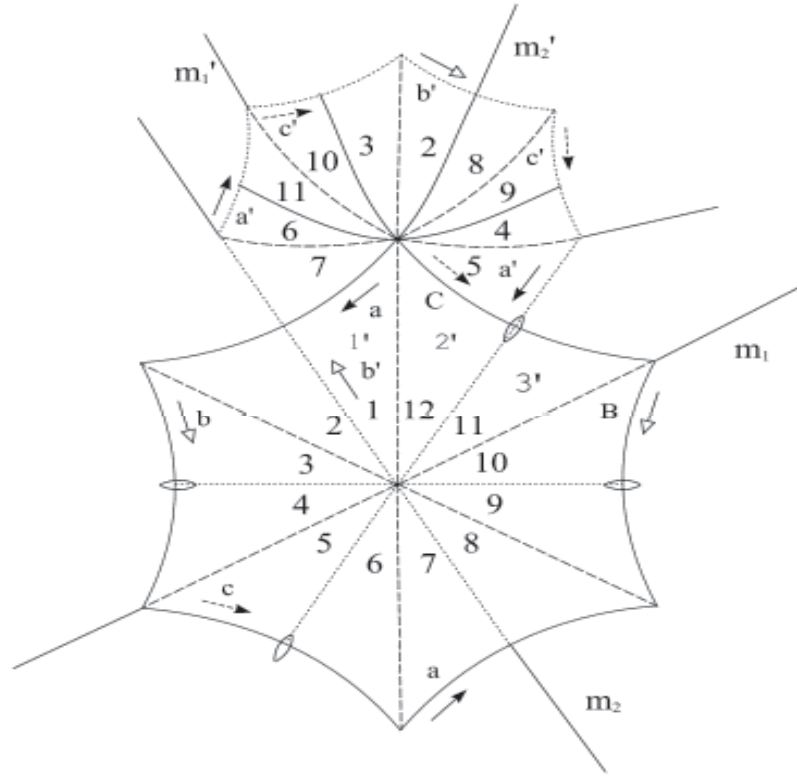


$N = *2224$

4.6 ábra

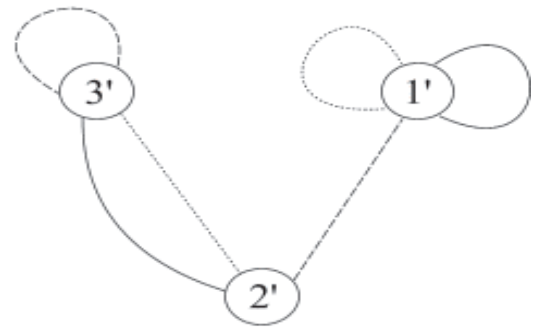
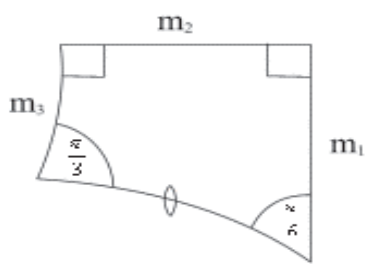
5. eset  
a'b'a'c'b'c'

8. eset  
abcaBC



$\mathcal{F}_N$

$D'$

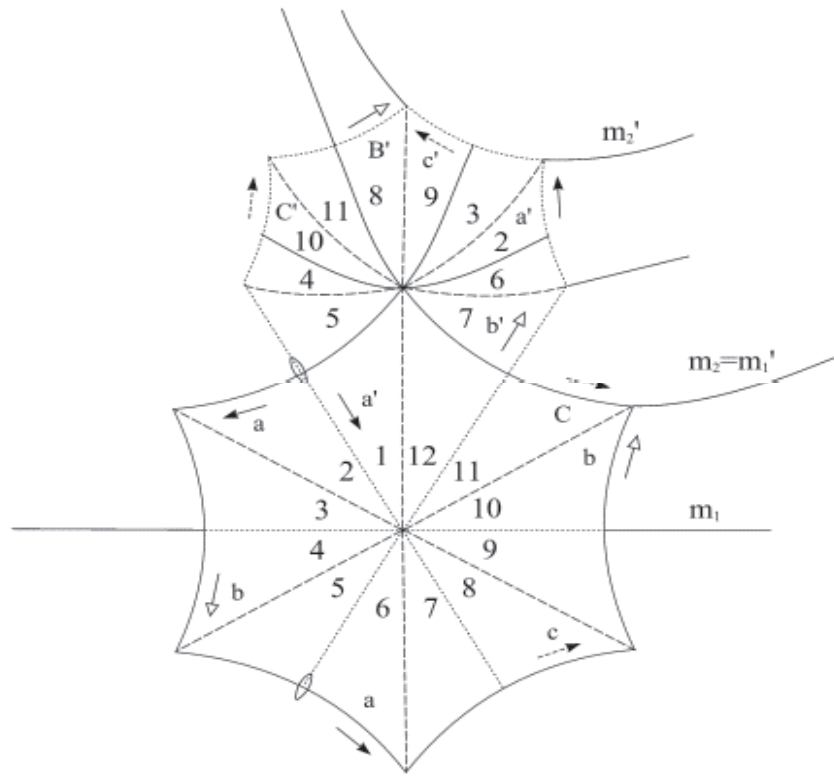


$$N = 2 * 222$$

4.7 ábra

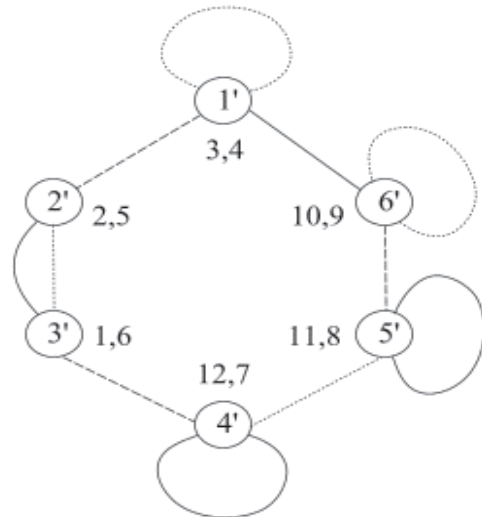
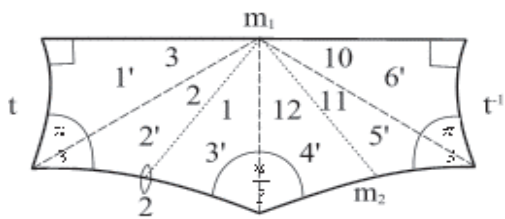
6. eset  
abacbC

7. eset  
a'b'a'c'B'C'



$\mathcal{F}_N$

$D'$



$N = 2^{**}$

4.8 ábra

## 4.2 A normalizátor-diagram előállítás

A következőkben a  $3^-$  felületnek nem csak a hatszög előállításait, hanem a 2. táblázat további lehetséges sokszög előállítását (8-, 10-, 12-szög) is figyelembe vesszük.

Így teljes osztályozást adunk a  $3^-$  felület, azaz 3 projektív sík összefüggő egyesítése  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  szimmetriacsoportjaira. A fundamentális csoportokra vonatkozó algoritmus segítségével, a bevezetésben ismertett általános stratégiát követve az  $\mathbf{N}$  normalizátorokat 12 osztályba soroljuk, topológiai ekvivalenciáig egyértelműen. A 2.3.1-ben említettek alapján  $3^-$  felületre még ilyen eredmény nem ismert, sőt a  $g \geq 3$  nemszámú, kompakt nem irányítható felületre sem ismerünk az izometria csoport rendjére az irányítható felületekre ismert  $(84(g-1))$  eredményhez analóg) becslést.

Ebben a fejezetben jutunk el fő eredményünkhöz, az 1.2, 1.3 tétel és, a  $g \geq 3$  nemszámú, kompakt nem irányítható felületre vonatkozó sejtések (1.1 és 1.2 megjegyzés) megfogalmazásához.

A következőkben az orbifoldok szignaturájának *Conway — Macbeath* jelölését használjuk a hiperbolikus  $\mathbf{N}$  normalizátorra és az orbit terére (orbifold felületre) egyaránt, ahogy azt 2.2.5-ben részletesen ismertettük.

Az üres szignatura jelenti a gömböt, melyen a triviális csoport hat. A normalizátorok 4.1-4.4 táblázatában pl.  $\mathbf{N} = \mathbf{24}^*$  jelöli a 0 nemszámú orbifold felületet (topológiai gömb), egy másod és negyed rendű forgáscentrummal, és egy olyan perem komponenssel, amelyen nincs tükrözési sarok. Ez az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  fundamentális tartománnyal írható le, ahogy a 4.12.b ábrán is láthatjuk, és a következő előállításnak felel meg:

$$(4.1) \quad \mathbf{N} = \mathbf{24}^* = (h_1, h_2, m \mid h_1^2, h_2^4, m^2, m h_1 h_2 m h_2^{-1} h_1),$$

amint az általánosan algoritmizálható formulák (Poincaré algoritmus [M 92], 2.11-15 ábrák) mutatják. Az  $\mathbf{N} = \mathbf{2}^* \otimes$  normalizátor egy keresztsapkás orbifoldot ír le, egy másodrendű forgáscentrummal, egy határkomponenssel, melyen nincs tükrözési középpont. A 4.13. ábra mutatja az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  fundamentális tartományt és az előállítást

$$(4.2) \quad \mathbf{N} = \mathbf{2}^* \otimes = (m, h, t, g \mid m^2, h^2, m t m t^{-1}, h g g t).$$

(lsd. 4.1-ben a 2. esetet  $\mathbf{a a b c b C}$ ).

### 4.2.1 Illusztráló példák

Az 4.9. a ábra mutatja a  $H^2$  sík  $g^-$  felülethez tartozó láthatóan legszimmetrikusabb kövezését, ha  $g = 3$ , (2.1) szerint, ez a kanonikus szabályos hatszögből, 6/1-ből származik. A baricentrikus felbontás ( $\pi/2$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/6$ ) szögű háromszögeket hoz létre, a  $\cdots$  pontozott, --- szaggatott, és — folytonos vonalak indukálják a  $\sigma_0$ -,  $\sigma_1$ -,  $\sigma_2$ -szomszédságokat, illetőleg, a  $D$ -szimbólumot, amelyet 3.1 -ben leírtunk ( lsd. [H 93] is).

Az  $\mathbf{a a b b c c}$  sokszögszimbólum a generátorok oldalpárosításait indukálja (1.1) alapján. A fundamentális tartomány  $\mathcal{F}_{\mathbf{G}} = \mathcal{F}$  lesz az identitás esetén (ezt 1-gyel jelöljük), a szomszédok képei  $\mathcal{F}^{a_1^{-1}}$ ,  $\mathcal{F}^{a_1}$ , ...,  $\mathcal{F}^{a_{3^{-1}}}$ ,  $\mathcal{F}^{a_3}$  lesznek, és így  $\mathcal{F}^{a_i \gamma}$ -val jelöljük  $\mathcal{F}^{a_i}$   $\gamma$ -képét, azaz  $\mathcal{F}^\gamma$ -

nak  $a_i$ -szomszédját  $a_i^\gamma$  oldal mentén, vagyis  $(\mathcal{F}^\gamma)^{\gamma^{-1}a_i\gamma}$  lesz  $\mathcal{F}^\gamma$  képe  $a_i$   $\gamma$ -konjugáltjával. Ezek a tartományok a baricentrikus háromszögekből épülnek fel.. A következő formula

$$(4.3) \quad (\sigma_i C)^\gamma = \sigma_i(C^\gamma)$$

az asszociativitást mutatja tetszőleges  $C$  baricentrikus háromszögre,  $i=0, 1, 2$ ;  $\gamma \in \mathbf{G}$

(pl.  $\sigma_0(3^{a_{1-1}}) = (\sigma_0 3)^{a_{1-1}} = 4^{a_{1-1}}$  a 4.9. b ábrán).

Az 4.9.a ábrán és egy részletén a 4.9.b ábrán az  $a_i$ '-k és konjugáltjaik invariáns egyeneseit vastag **—** vonallal húztuk ki. Ezek ábrázolják a  $H^2/\mathbf{G} \sim \mathcal{F}_G$  felület lokálisan minimális zárt geodetikus vonalait. Pl.  $M_1M_2$  a  $V_1 \dots V_{2g}$  fundamentális sokszög  $M_1 \dots M_{2g}$  középponti poligonjának egy ilyen egyenese.

Könnnyen láthatjuk, hogy most a  $V_1 \dots V_{2g}$  átlói és az  $M_1 \dots M_{2g}$  oldalegyenesei lesznek a  $\mathbf{G} = \otimes^3$  maximális normalizátorát generáló tengelyes tükrözések tükörtengelyei. A tükörtengelyek a baricentrikus háromszöget felbontják. Ezeket a tükrözéseket 4.9.b ábrán a következőképpen jelöljük,

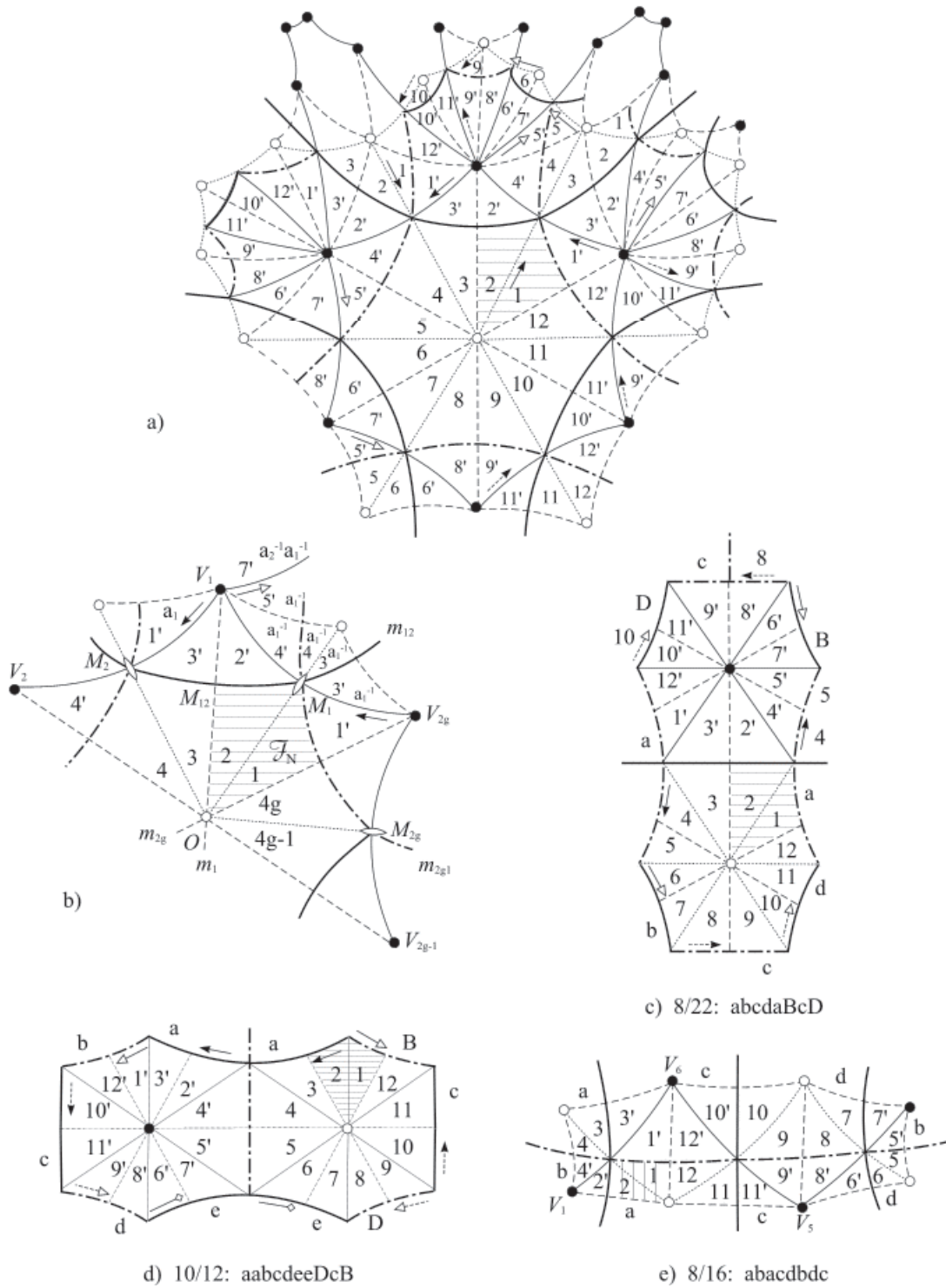
$$(4.4) \quad m_{12}: 2 \leftrightarrow 2', \quad m_{2g1}: 1 \leftrightarrow 1'$$

Ez a két tükörtengely és rajtuk kívül  $m_1(OV_1)$  és  $m_{2g}(OV_{2g})$  határozza meg az  $\mathbf{N} = *2223$ ,  $|\mathbf{N}/\mathbf{G}| = 12$  maximális normalizátor fundamentális tartományát,  $\mathcal{F}_N = (1, 2)$ -t.

A 4.9.b ábra illusztrálja az 1.1 megjegyzést is.

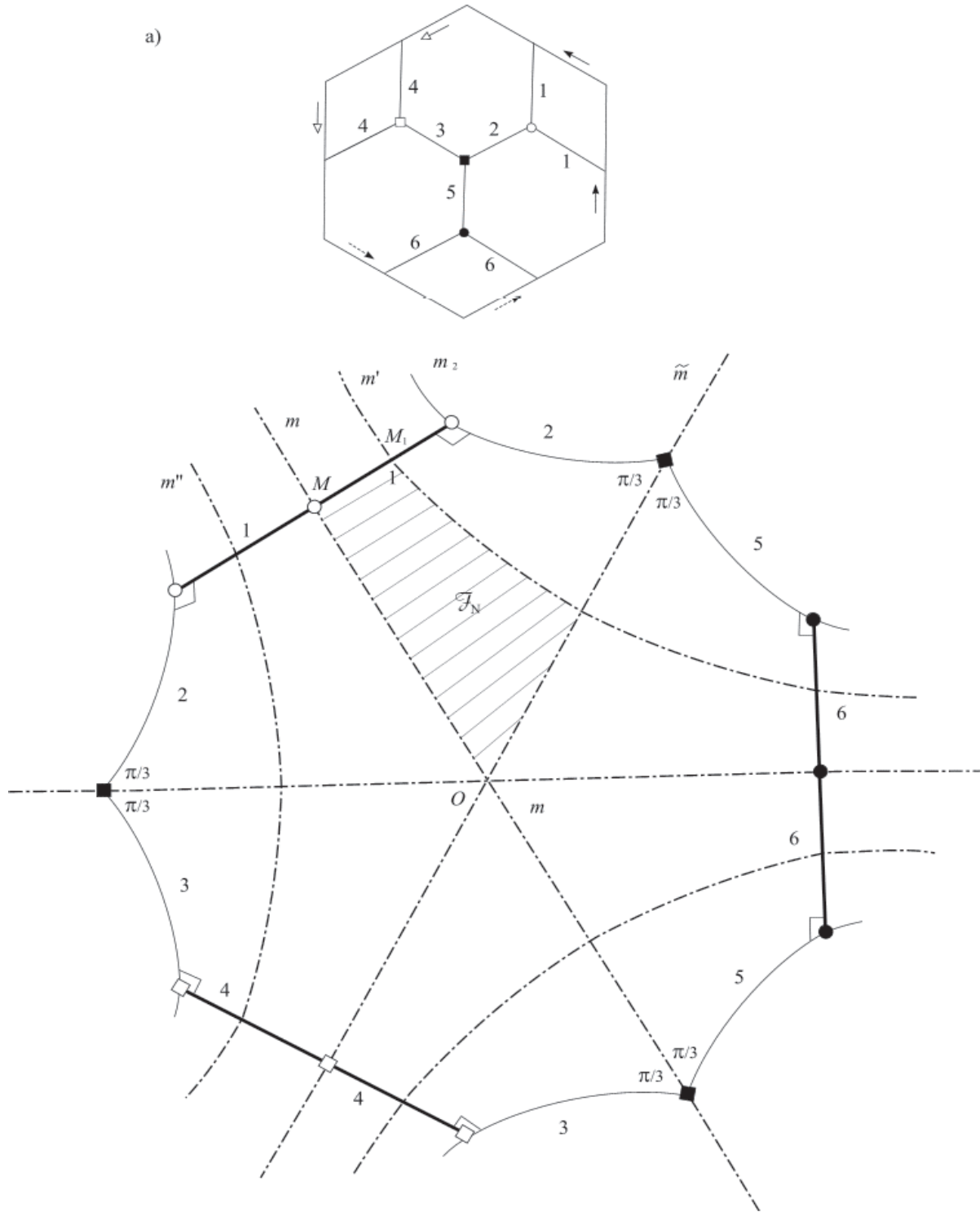
A 4.9.c-e ábra témánk tipikus jelenségét mutatja. A 4.9.a ábrát  $\mathbf{N} = *2223$  csoport szerinti  $\mathcal{F}_N$ -képekkel köveztük ki, de  $\mathbf{G} = \otimes^3$  más fundamentális tartományait is kövezhethetjük ugyanezekkel az  $\mathcal{F}_N$ -képekkel. Nézzük meg a 4.10-4.11 ábrák 12-szög tartományait is.

a) Az **aabbc** sokszög szimbólumhoz tartozó 6/1 kö és baricentrikus felbontása; b) a  $g^-$  felület maximális normalizátora,  $g=3$ , és fundamentális tartománya  $\mathcal{F}_N=(1,2)$ ; c) - e) A  $3^-$  felület néhány tartománya  $\mathcal{F}_N$ -nel kövezve



4.9 ábra

A  $G=\otimes^3$  két 12-szög fundamentális tartománya az  $N=^*2223$  maximális normalizátorral ekviviáriáns kövezéshez vezet a) 12/2 **aabddCeffEB** b) 12/9 **abcadeBdfCEf**



4.10 ábra



Ha kifejezzük  $\mathcal{F}_G$  generátorainak oldalpárosításait  $\mathcal{F}_N$  oldalpárosításaiból, mivel  $G \triangleleft N$  teljesül, megkapjuk a következő homomorfizmust

$$(4.5) \quad N \rightarrow N/G, \quad n \rightarrow nG = Gn =: \bar{n},$$

ami azt bizonyítja számunkra, hogy  $\mathcal{F}_N$ -t helyesen határoztuk meg.

Pl.  $a_1 = m_{61}m_{12}m_1$ ,  $m_{12} \perp m_{61}, m_1$  (4.9.b ábra,  $g=3$ ), indukálja  $\bar{m}_{61} = \bar{m}_1 \bar{m}_{12} = \bar{m}_{12} \bar{m}_1 - et$ , és  $m_{61} \sim m_{12}m_1 = M_{12}$ . Itt  $M_{12} = m_{12}m_1 = m_1m_{12}$  középpontos tükrözést jelent az  $M_{12} := m_1 \cap m_{12}$  pontra vonatkozóan. A fenti  $\mathcal{F}_N$  a következő  $N$  csoportot állítja elő:

$$(4.6) \quad N := *2223 = (m_1, m_{12}, m_{61}, m_6 \text{ — } m_1^2, m_{12}^2, m_{61}^2, m_6^2, (m_1m_{12})^2, (m_{12}m_{61})^2, (m_{61}m_6)^2, (m_6m_1)^3),$$

$N$  Coxeter-féle tükrözési csoport lesz és a geometriai előállítást a fent ismertetett homomorfizmus szolgáltatja.

$$(4.7) \quad *2223/G := D_3 \times D_1 = (\bar{m}_6, \bar{m}_1, \bar{M}_{12} \text{ — } \bar{m}_6^2, \bar{m}_1^2, \bar{M}_{12}^2, (\bar{m}_6\bar{m}_1)^3, (\bar{m}_1\bar{M}_{12})^2, (\bar{m}_6\bar{M}_{12})^2)$$

két diéder csoport direkt szorzata. Csak az utolsó relációt kell ellenőrizni, de éppen azzal kezdtük.

A 4.12.a ábra egy másik legszimmetrikusabb  $G$ -követ mutat, amely az — **a b c d a B c D** sokszög-szimbólummal, 2  $G$ -csúcsosztállyal (melyek mindegyikébe négy csúcs tartozik) rendelkező — 8/22 fundamentális nyolcszögből származik.  $\mathcal{F}_G$  a generátorok következő oldalpárosításait állítja elő

$$(4.8) \quad \begin{array}{ll} g_1: s_{a-1} \rightarrow s_a, & g_3: s_{c-1} \rightarrow s_c \quad \text{eltolástükrözések} \\ t_2: s_b \rightarrow s_B, & t_4: s_d \rightarrow s_D \quad \text{eltolások} \end{array}$$

a megfelelő invariáns egyenes szakaszokkal, mint lokálisan minimális zárt geodetikus vonalakkal,  $g_1, g_2$  az irányítást megváltoztatják,  $t_2$  és  $t_4$  megtartják.

Az eltolás két egyenestükrözés szorzata, vagy két ponttükrözésé, mint azt

$$(4.9) \quad \begin{array}{l} t = m_1 m_2 = m_1 m m m_2 = A_1 A_2, \text{ ahol } m \perp m_1, m_2, \\ m_1 m = m m_1 = A_1, \quad m m_2 = m_2 m = A_2 \end{array}$$

mutatja. Az  $m=A_1A_2$  egyenes köti össze a lokálisan minimális zárt geodetikusokat.

$\mathcal{F}_G$  szemlélteti a  $\circ$  és  $\bullet$  csúcsosztályok relációit

$$(4.10) \quad \mathbf{G} = (g_1, t_2, g_3, t_4 \text{ — } \circ : g_1 t_2^{-1} g_3 t_2^{-1} (=1), \bullet : g_1 t_4 g_3^{-1} t_4).$$

$\mathcal{F}_G$ -t választhatjuk szabályos nyolcszögnek  $\pi/2$  szögekkel. Ekkor az  $\mathcal{F}_N = (1,16)$  oldalaira vonatkozó tükrözések az alábbi  $\mathbf{N}$  normalizátort generálják:

$$(4.11) \quad \mathbf{N} = *2224 := (m_1, m_2, m_3, m_4 \text{ — } m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2, (m_1 m_2)^2, (m_2 m_3)^2, (m_3 m_4)^2, (m_4 m_1)^4), |\mathbf{N}/\mathbf{G}| = 8.$$

Ez lesz a maximális normalizátor, amely a generátorok invariáns egyenes rendszerét önmagára képezi le. A

$$(4.12) \quad g_1 = m_2 m_1 m_4 m_1 m_4, \quad t_4^{-1} = m_3 m_1 m_4 m_1$$

kifejezések indukálják a  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}/\mathbf{G}$  homomorfizmust,  $m_2 \sim (m_1 m_4)^2 = (m_4 m_1)^2$ ,  $m_3 \sim m_1 m_4 m_1$  és a

$$(4.13) \quad *2224/\mathbf{G} := \mathbf{D}_4 = (\bar{m}_1, \bar{m}_4 \text{ — } \bar{m}_1^2, \bar{m}_4^2, (\bar{m}_1 \bar{m}_4)^4)$$

nyolcadrendű csoportot. A 4.12.a ábra az  $\mathcal{F}_G$ -kövek baricentrikus felbontását mutatja és két szomszédos tipikus csúcsalakzatot. E két csúcsalakzat együtt az  $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{a}'\mathbf{c}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$  poligonszimbólummal rendelkező  $6/5$  hatszöget adja meg  $\pi/2, \pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4$  szögekkel, a hatszög csúcsai  $\mathbf{G}$ -ekvivalensek a nyolcszög  $O$  középpontjával. A 4.13 ábrán látható, hogy a  $\pi/3$  szögekkel és  $\mathbf{N} = 2*222$  normalizátorral rendelkező  $6/5$  hatszög kiterjeszhető kombinatorikusan (ekvivariánsan,  $\mathbf{G}$ -örző homeomorfia cserével) szimmetrikusabb  $\mathbf{G}$ -tartományba gazdagabb  $*2224$  normalizátorral, de a tartomány ekkor nem szabályos hatszög.

A fentiek tanulmányozása után megfogalmazhatjuk az 1.2 megjegyzésben megfogalmazott sejtésünket.

A 4.12 ábrán feltüntettük  $*2224$  3 lehetséges 2 indexű részcsoportját, ezek:  $24^*$ ,  $*22222$ ,  $2*222$ , mindegyik normalizálja  $\otimes^3$ -t, mindegyik fundamentális tartománya tartalmaz kettőt  $*2224$  fundamentális tartományából.

Az 4.14 ábra megmutatja, hogy hogyan származik a 2-es illetve 3-as indexű maximális valódi részcsoport (invariáns: — vagy nem: --- a 2. táblázatban) a  $*2223$  normalizátorból is.

A  $23^*$ -nak a 4.15 ábrán, a  $2*33$ -nak a 4.16 ábrán újabb maximális valódi részcsoportjai mutatják eljárásunkat a rajzokon követhetően.

## 4.2.2 Osztályozásunk teljességének bizonyítása

A bevezetésben leírtuk, hogy mit jelent osztályozásunk teljességének bizonyítása, most nézzük meg ezt egy illusztráló példán.

$\mathcal{F}_G$  legszimmetrikusabb 12-szöge a 4.10-4.11 ábrán mutatja az eljárást. A 4.10 ábra megmutatja, hogyan származik a 12/2 **aabcdCeffEB** tizenkétszög a hatszög kanonikus oldalpárosításából. A fagraf élek menti felvágását 1,..., 6 számozással jelöltük. 6 részt kaptunk. Ezután ezeket a hatszög oldalpárosításainál összeragasztjuk, figyelembe véve a csúcsalakzatokat és a definiáló relációkat is. Így megkapjuk a 12-szöget az indukált oldalpárosító transzformációkat és a következő előállítást

$$(4.14) \quad \mathbf{G} := (g_1, t_2, t_3, g_4, t_5, g_6 \text{ — } \circ g_1 g_1 t_2, \blacksquare t_2 t_5^{-1} t_3^{-1}, \square g_4 g_4 t_3^{-1}, \bullet g_6 g_6 t_5^{-1}) = \otimes^3.$$

Ebből kiolvashatjuk az invariáns egyenes rendszert, azaz azokat az egyeneseket, melyek ugyanazok maradnak, pl. a  $g_1$  eltolástükrözésnél és a  $t_2 = g_1 g_1$  eltolásnál (az 1 oldal mentén), és a csúcsoknál jelzett szögek nagyságát.

Azonnal észrevesszük, hogy a kombinatorikusan kapott 12-szög maximális szimmetriája  $\mathbf{D}_3$  és kiválaszthatjuk metrikus adatait a  $\mathbf{D}_3$  diéder izometriacsoporthoz. Először csak az  $m$  egyenestükrözés bevezetésének hatását vizsgáljuk meg (4.10 ábra). Vegyük az  $\mathcal{F}_{N_1}$ -t, mint valamely 7-szöget, amelyet az  $m$  tüköregyenes határol.  $\mathbf{G}$  generátorai (4.14)-ben indukálják a 7-szög oldalpárosításait:

$m_2$  egyenestükrözés a 2 jelű oldalra, mivel  $mm_2 = t_2$ , azaz  $m \sim m_2 \mathbf{N}_1/\mathbf{G}$ -nél;

$M_1$  ponttükrözés az 1 jelű oldal  $M_1$  középpontjára, mivel  $g_1 = M_1 m$ , azaz  $m \sim M_1 \mathbf{N}_1/\mathbf{G}$ -nél; más oldalpárosításokkal  $g_6$ -tal és  $t_5 = g_6 g_6$ -tal nem cserélődnek fel, mert  $mg_6 m = g_4^{-1}$ ,  $mt_5 m = t_3^{-1}$ . Így megkapjuk a következő előállítást

$$(4.15) \quad \mathbf{N}_1 := (m, M_1, m_2, t_5, g_6 \text{ — } m^2, M_1^2, m_2^2, mM_1 m_2 M_1, mt_5 m_2 t_5^{-1}, g_6 g_6 t_5^{-1}) =: \mathbf{2}^* \otimes, |\mathbf{N}_1/\mathbf{G}| = 2.$$

Poligonszimbólummal a 4.3 táblázatból könnyű megérteni:

$$(4.16) \quad \mathcal{F}_{N_1} \sim \mathbf{-a2A-bccB}, \text{ és } m \sim M_1 \sim m_2 \\ \mathbf{N}_1/\mathbf{G} = \mathbf{D}_1 := (\bar{m} - \bar{m}^2) = \mathbf{C}_2 := (\bar{M}_1 - \bar{M}_1^2) = \mathbf{D}_1 = (\bar{m}_2 - \bar{m}_2^2)$$

Így a  $3^-$  felületnek pontosan azt a kövét kapjuk meg, ami  $\mathcal{F}_G = 10/12$ -ből is keletkezhet, ha 2 hétszöget összeragasztunk az  $M_1$  ponttükrözés  $M_1$  középpontjánál (lsd. 4.9.d ábra).

Ha a 12/2 esetben harmadrendű forgást vezetünk be, akkor  $\mathcal{F}_{N_2}$ -re ugyanazzal (az ekvivariáns) normalizátorral 5 logikailag különböző lehetőséget kapunk.

$$(4.17) \quad \mathbf{N}_2 := (r, g_1, t_2 \text{ — } r^3, g_1 g_1 t_2, (rt_2)^3) =: \mathbf{33} \otimes,$$

$\mathcal{F}_{N_2}$ -nek két  $\blacksquare$  csúcsot és az új harmadrendű forgáscentrumot tartalmazó tartományt választottunk,  $|\mathbf{N}_2/\mathbf{G}| = 3$ .

Ehhez az  $\mathcal{F}_N$ -höz bevezethetünk egy  $m'$  és egy  $m''$  egyenestükrözést, és így  $\mathbf{G}$  új normalizátorát kapjuk (lsd. 4.10 ábra)

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_3 = & (r, m', M, m'' - r^3, (m')^2, M^2, (m'')^2, m'rm''r^{-1}, \\ & m'Mm''M) =: \mathbf{23}^*, |\mathbf{N}_3/\mathbf{G}|=6, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_{\mathbf{N}_3}$  fundamentális tartománnyal. De ez az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}_3}$  nem kövezi a 12-szögünket. Egy másik lesz megfelelő.

Most vezessük be az  $m$  és  $\tilde{m}$  egyenestükrözést együtt (4.10 ábra), így  $\mathbf{G}$  egy újabb normalizátorát kapjuk

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_4 = & (m, M_1, m_2, \tilde{m} - m^2, M_1^2, m_2^2, \tilde{m}^2, mM_1m_2M_1, \\ & (m_2\tilde{m})^3, (\tilde{m}m)^3) = \mathbf{2}^*\mathbf{33}, (\mathbf{N}_4/\mathbf{G})=6 \end{aligned}$$

$\mathbf{N}_4$  utolsó lehetséges bővítése  $\mathbf{G}$  maximális  $\mathbf{N}$  normalizátorába az  $m'$  tükrözés bevezetésével lehetséges. Ez a tükrözés  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}_4}$ -et az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  tartomány két másolatára bontja fel. Ekkor az  $\mathbf{N} = \mathbf{2223}$ ,  $|\mathbf{N}/\mathbf{G}|=12$ , csoportot kapjuk meg. 12-szögünket  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  képeivel jellemző  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  kövezi, (lsd. 4.9.a ábrát).

$\mathbf{N}$  tovább nem bővíthető  $\mathbf{G}$  normalizátorába, mert  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$ -nek csak egyetlen szimmetriája lehetne, az  $OM_1$ -re vonatkozó tengelyes tükrözés (4.10. ábra), azonban ez nem őrzi meg  $H^2/\mathbf{G}$ -nek az invariáns egyenes rendszerét (lokálisan minimális zárt geodetikusait).

Hasonlóan tárgyalhatjuk a 4.11. ábrán szereplő 12-szöget is, de ezt már nem részletezzük. Az első  $m$  egyenestükrözés újra az  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{2}^* \otimes$  csoporthoz vezet kombinatorikusan más tartománnyal.

Az  $O$  középpontú harmadrendű forgással történő bővítés az  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{33} \otimes$  csoporthoz vezet különböző alaptartományokkal. Ebben az esetben  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{23}^*$ , majd  $\mathbf{N}_4 = \mathbf{2}^*\mathbf{33}$  és  $\mathbf{N} = \mathbf{2223}$  is alkalmas kövező tartománnyal előállítható.

A 4.1. táblázat tartalmazza minden  $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$  összes  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  tartományát, a normalizátorokat az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  poligon-szimbólumával adtuk meg úgy, hogy  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$   $\mathbf{N}/\mathbf{G}$ -képeivel kövezi az  $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$ -t. A  $3^-$  felület kövezésének általunk előállított osztályozásában a 4.1 és a 4.3 táblázat egymásra utal. Nevezetesen,  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  darabjaiból össze tudjuk ragasztani  $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$ -t alkalmas oldalpárosítással és így megkapjuk a fixpontmentes  $\mathbf{G} = \otimes^3$  csoportot.

A 4.20 ábrán és a 4.20.b után következő leírásban a 4.3 táblázat egy esetét elemezzük részletesen:  $\mathbf{24}^*/\otimes^3 = \mathbf{N}/\mathbf{G}$ ,  $|\mathbf{N}/\mathbf{G}|=4$ . A  $\mathbf{24}^*$  csoporthoz tartozó, 5 fundamentális tartomány minegyikéből a 4.1 táblázat egy realizálódó esetét kapjuk.

### 4.2.3 A Riemann – Hurwitz egyenlet és a nem-létezés bizonyítása

A dolgozat bevezetésében említettük a kompakt felületek szimmetriáinak végességét, most ezt a tényt egy algoritmikus eljárással konstruktív módon bizonyítjuk.

Jól ismert [Z-V-C 80], hogy a  $g^+$  nemszámú felületek (irányítható,  $\alpha=2$ ), vagy a  $g^-$  nemszámú (nemirányítható,  $\alpha=1$ ) kombinatorikus mértéke  $4-2\alpha g$ .

Az  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  szimmetria csoportot a  $\mathbf{G}$  egy  $\mathbf{N}$  normalizátora határozza meg  $\Pi^2$  izometriáiban.  $\Pi^2$  a  $H^2$  hiperbolikus sík, ha  $2\alpha g > 2$ , amit most feltételezünk.  $\mathbf{N}$  bármely  $\mathbf{G}$ -orbitot egy teljes  $\mathbf{G}$ -orbitra képez le.

Legyen  $\mathbf{N}$  szignatúrája a (2.3) vagy (2.4)-ben leírt, nemszáma  $\gamma$ , irányíthatóságát a fenti  $\alpha$  helyett most  $\beta$  jellemzi.  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$ , vagy  $\mathbf{N}$  kombinatorikus mértékét a *Riemann-Hurwitz formula* szolgáltatja.

$$(4.20) \quad \frac{4-2\alpha g}{n} = 4-2\beta\gamma - 2\sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{h_i}\right) - 2q - \sum_{j=1}^q \left[ \sum_{k=1}^{l_j} \left(1 - \frac{1}{h_{jk}}\right) \right],$$

azaz

$$(4.21) \quad 2\sum_{i=1}^l \frac{1}{h_i} + \sum_{j=1}^q \left[ \sum_{k=1}^{l_j} \frac{1}{h_{jk}} \right] + \frac{2\alpha g - 4}{n} = -4 + 2\beta\gamma + 2q + 2l + l_1 + \dots + l_q$$

mint szükséges feltétel, ahol  $|\mathbf{N}/\mathbf{G}|=n$  az  $\mathbf{N}/\mathbf{G}$  csoport rendje. Tegyük fel, hogy a forgás rendek (ez a halmaz lehet üres is)

$$(4.22) \quad 2 \leq h_1 \leq \dots \leq h_l \in \mathbb{N} \text{ (természetes számok),}$$

a tükrözési sarkok jellemzői (halmazuk lehet üres is)

$$(4.23) \quad 2 \leq h_{jk} \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq q, 1 \leq k \leq l_j.$$

A  $h_{jk}$  számokat először nem csökkenő sorrendbe rendezzük, azután átrendezzük őket a  $q$  határkomponensek ciklusába (bármelyik lehet üres) az adott ( $\beta=2$ ) orientációnál, vagy a nemirányítható esetben ( $\beta=1$ ) bármelyik ciklikus rendbe, az ellentétes ciklikus rend ekvivalens lesz az eredetivel.

Továbbá  $h_i|n$  és  $2h_{jk}|n$  szükséges oszthatósági feltételek.

A (4.21) egyenletet bármely rögzített  $2\alpha g$ -re meg lehet oldani szisztematikus (próbálgatási) algoritmussal. A megoldás bonyolultsága  $g$ -vel exponenciálisan növekszik.  $\mathbf{G} = \otimes^3$  felületünkre a megoldások a 4.4 táblázatban láthatók.

A nem-létezés bizonyítása a  $\mathbf{G} = \otimes^3$  felület 4.1 táblázatban felsorolt 65 fundamentális tartományán alapul. Az algebrai megoldások által szolgáltatott lehetséges normalizátorokat a 4.4 táblázatban soroltuk fel, közülük mindegyiknek van (minél kedvezőbben választható)  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  fundamentális sokszöge tipikus stabilizátorokkal (forgáscentrummal és tükrözési sarokkal).

Ezután „kiöljük” (megszüntetjük) a fixpontokat, az  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}$  n másolatának összeragasztásával és egy új lehetséges  $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$  fundamentális tartomány új oldalpárosításainak megadásával.

$$(4.24) \quad \mathcal{F}_G = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_N^{n_i}, \quad n_i \in \mathbf{N}, \text{ reprezentálja az } \mathbf{N}/\mathbf{G} \text{ faktorcsoportot.}$$

Az így kapható oldalpárosításnak meg kell őriznie  $\mathbf{N}$  szimmetriáit a 4.1 táblázat 65 lehetőségének megfelelően. A 4.4 táblázatban felsoroltuk a 12 megvalósuló normalizátort és a nem realizálódó megoldásokat is.

Mint tipikus nem-létező példát, válasszuk ki a  $\langle 7 \rangle$  sorszámú  $*2^*$ ,  $n=4$  megoldást. A 4.19 ábra alapján tekintsük a  $*2^*$  [L-M 91] egy tipikus fundamentális tartományát a következő poligon-szimbólummal

$$(4.25) \quad \text{---} 2 \text{---} a \text{---} A = \mathcal{F}_{*2^*}.$$

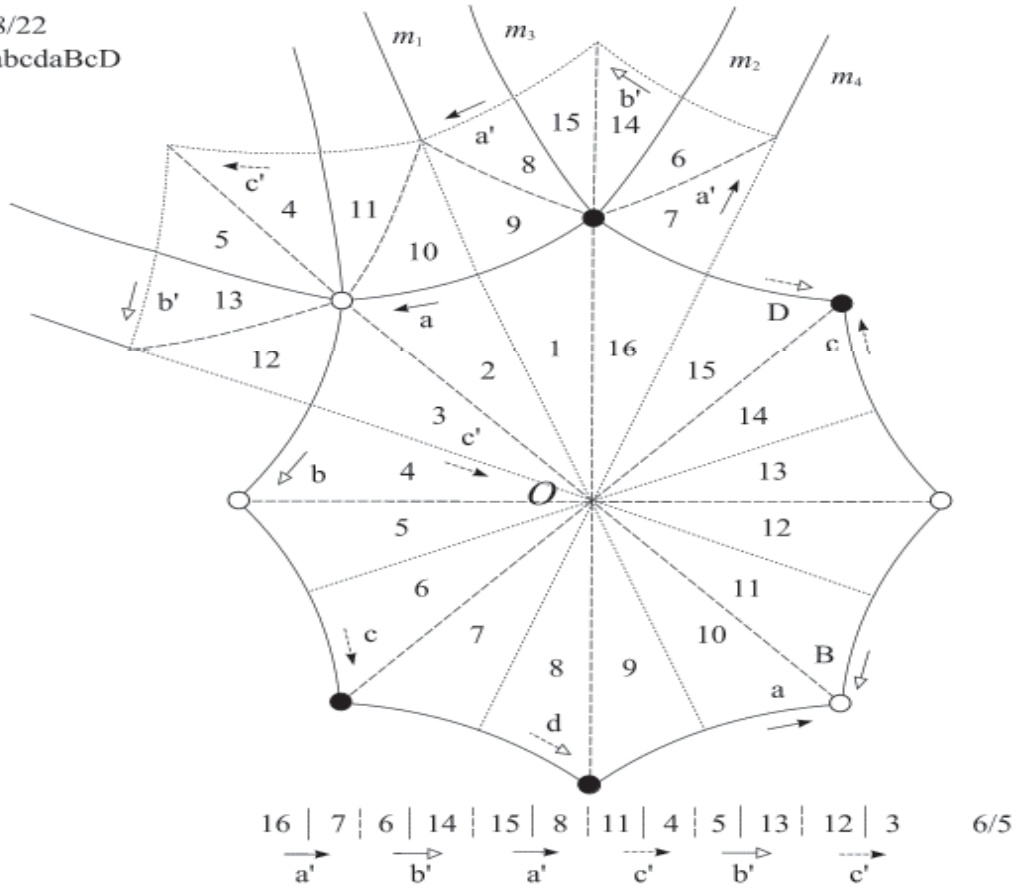
$\mathcal{F}_{*2^*}$ -nek 4 másolatát össze kell ragasztanunk  $\text{---} a \text{---} *2^*$  csoport maximális tükrözési stabilizátoránál  $\text{---} \mathbf{mm}$  -nél, és alkalmas oldalpárosítással egy  $\mathcal{F}_G$ -t kellene kapnunk. A kombinatorikus nyolcszögek között viszont nem találunk olyan megfelelő oldal párosítást, amely  $\mathbf{mm}$ -szimmetriákat ad az  $\mathcal{F}_{*2^*}$  tartománnyal. A 4.1 táblázatban felsorolt esetek mind kizárják  $\mathcal{F}_{*2^*}$ -t.

Hasonlóképpen a 4.19.b ábrán, tekintsük a  $\langle 39 \rangle$  sorszámú  $*255$ ,  $n=20$  esetet.  $\mathcal{F}_{*255}$  egy tükörháromszög  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$  szögekkel. Meg kell találnunk egy dupla ötszög, azaz egy két csúcsosztállyal rendelkező nyolcszög megfelelő oldalpárosítását úgy, hogy minden csúcsosztályban  $2\pi$  legyen a szögösszeg, stb. Ezeket a szükséges feltételeket nem tudjuk kielégíteni ellentmondás nélkül.

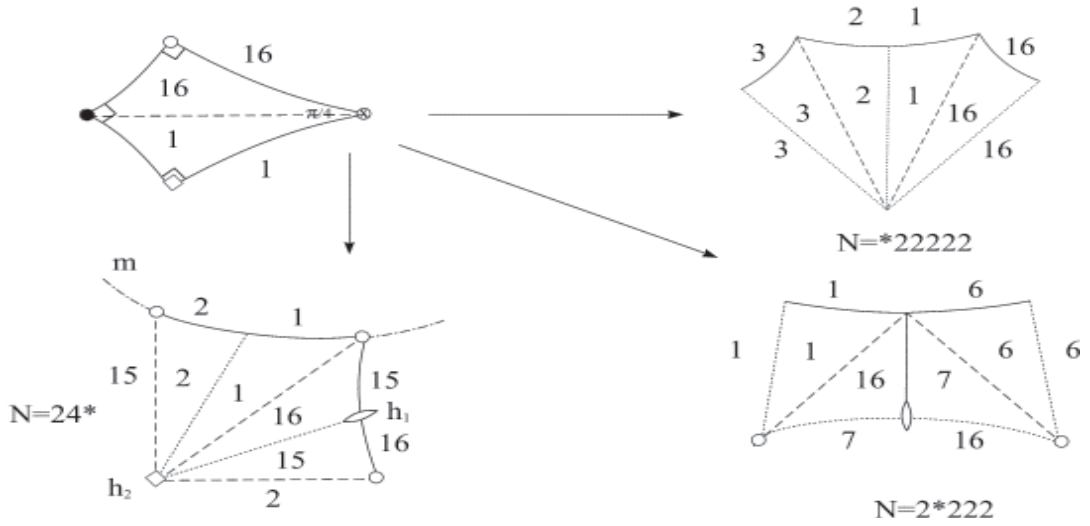
Természetesen bonyolult lehet egy általános algoritmussal minden lehetséges normalizátort és fundamentális kövezéseiket minden  $g^-$ -felületre (és minden  $g^+$ -felületre is) meghatározni. Úgy tűnik a  $D$ -szimbólumok módszere eredményes lehet (ld. [F-H 92]). Meg kell vizsgálnunk minden lehetséges  $2n$ -szöget  $6(g-1)$ -ig mint [L-M 91] jelzi, de az eljárás bonyolultsága exponenciálisan nő  $g$ -vel [S 98].

- a) Egy hatszög származtatása egy nyolcszögből és viszont.  
 b) A felsorolt normalizátorok részcsoporthoz relációi  $*2224 \triangleright 24^*$ ,  $*2224 \triangleright 2^*222$  és  $*2224 \triangleright *22222$ .

a) 8/22  
 abcdaBcD

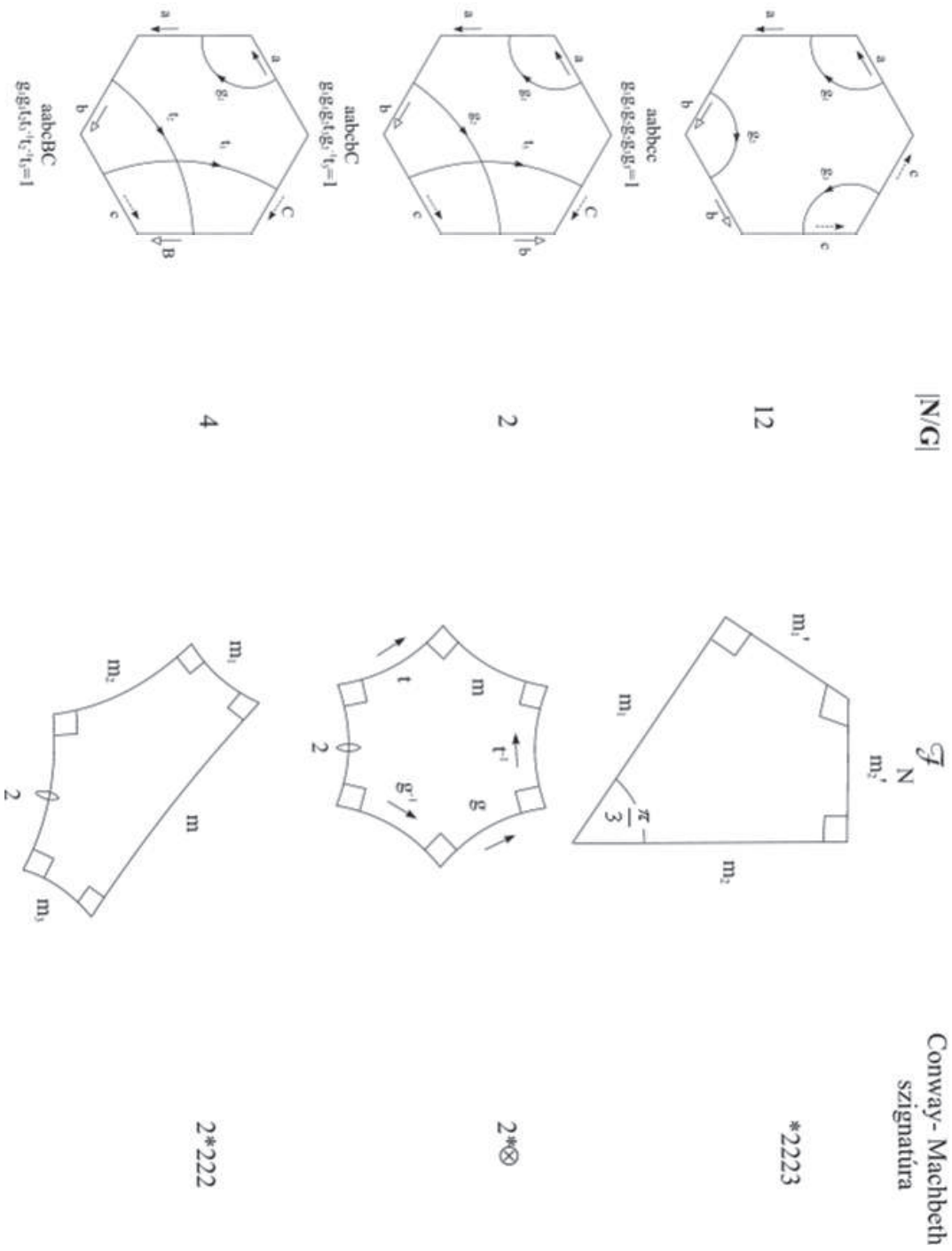


b)  $N=*2224$

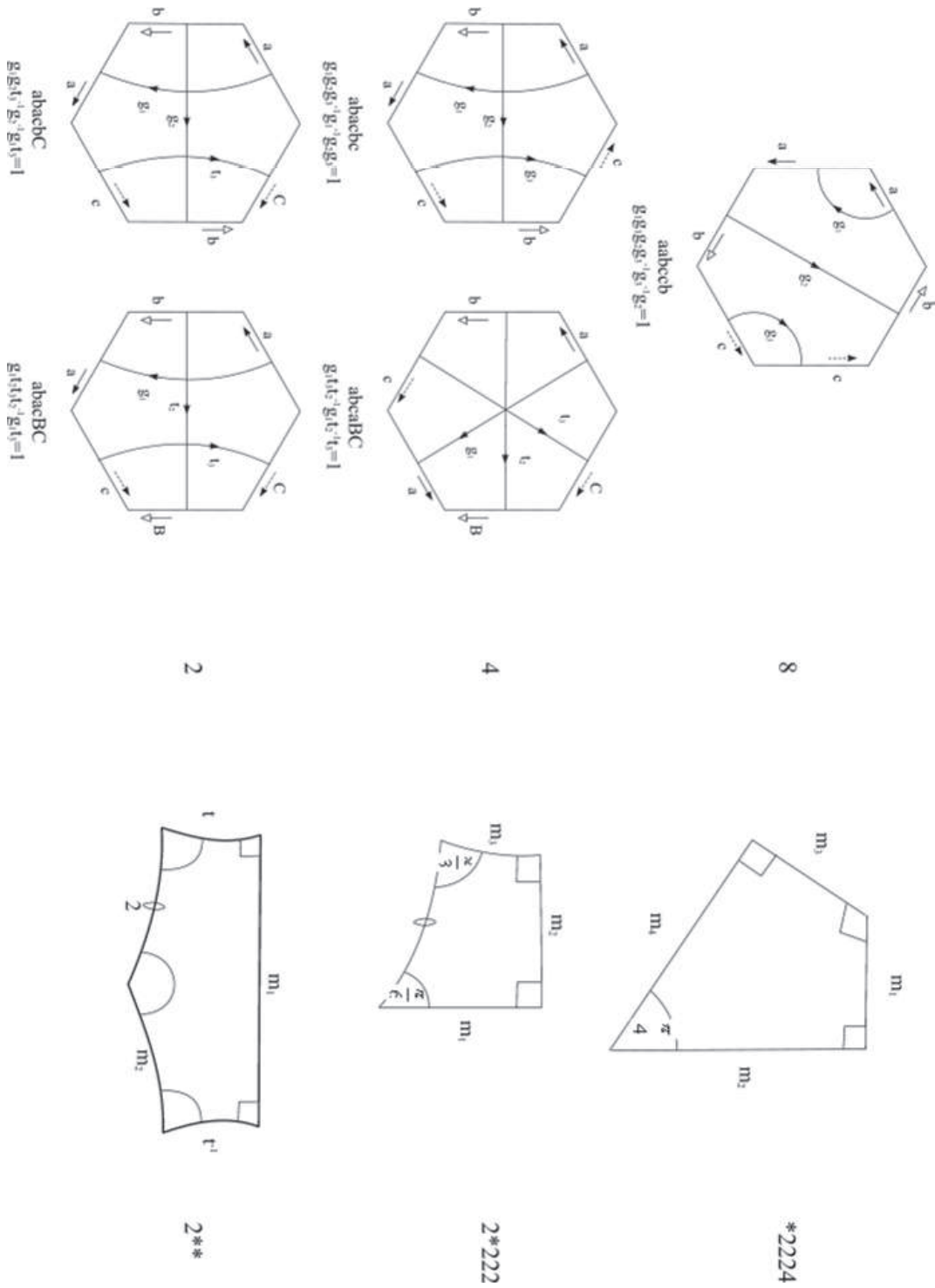


4.12 ábra

Hatszögteremtőnyök zárt geodetikus vonalakkal és a  $\bar{3}$  felület néhány tipikus normalizátora

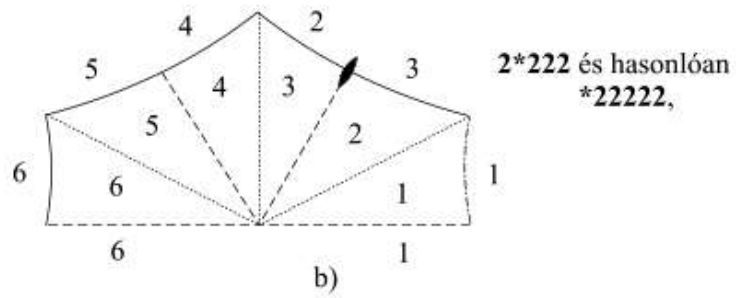
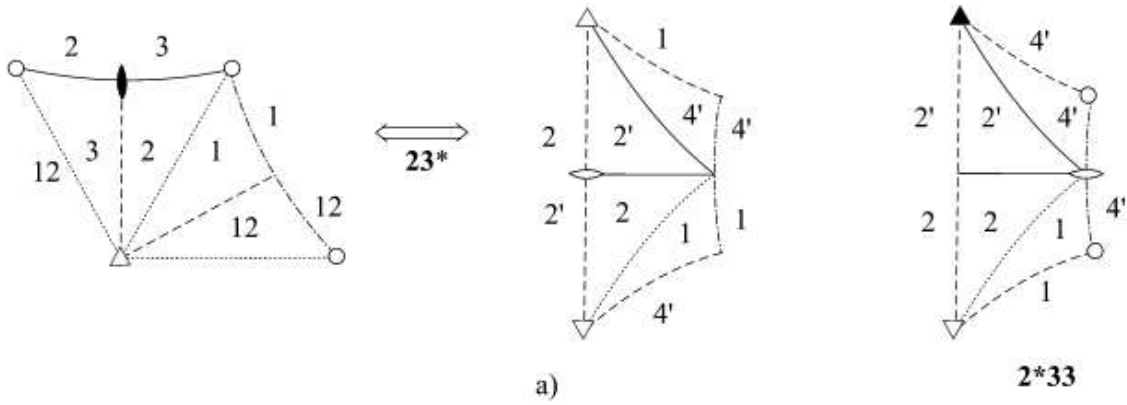


4.13 a) ábra

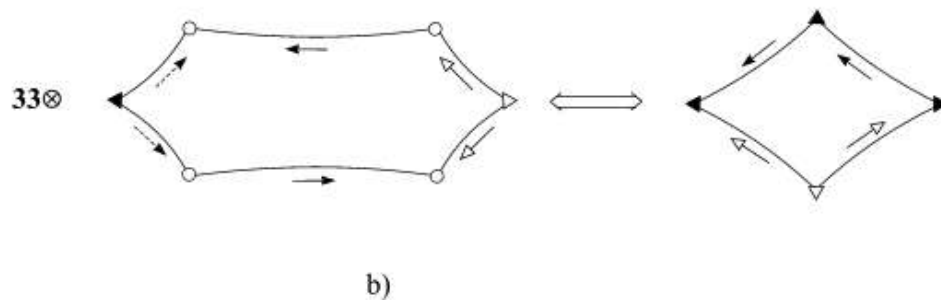
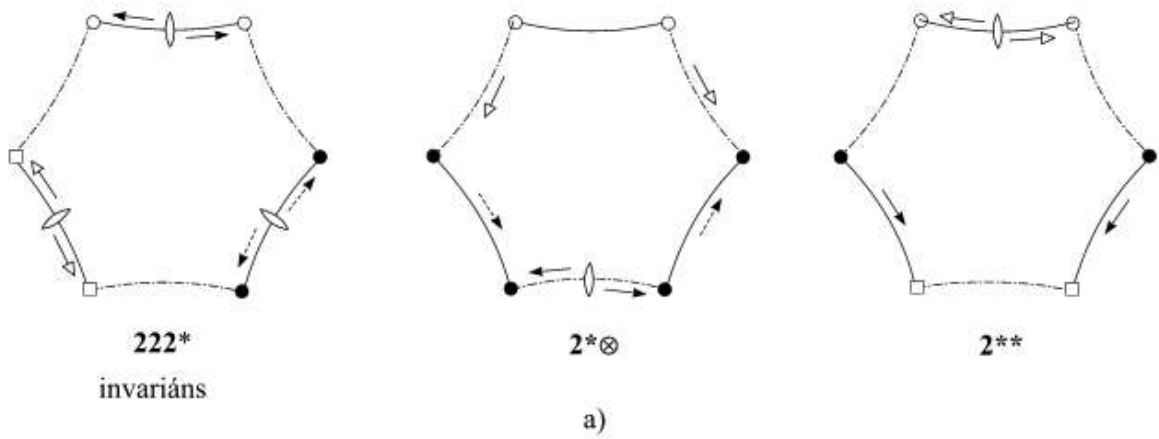


4. 13 b) ábra

**\*2223** maximális részcsoportjai a 4.9.a ábrán  
 a) az index 2, b) az index 3 (nem invariáns eset)

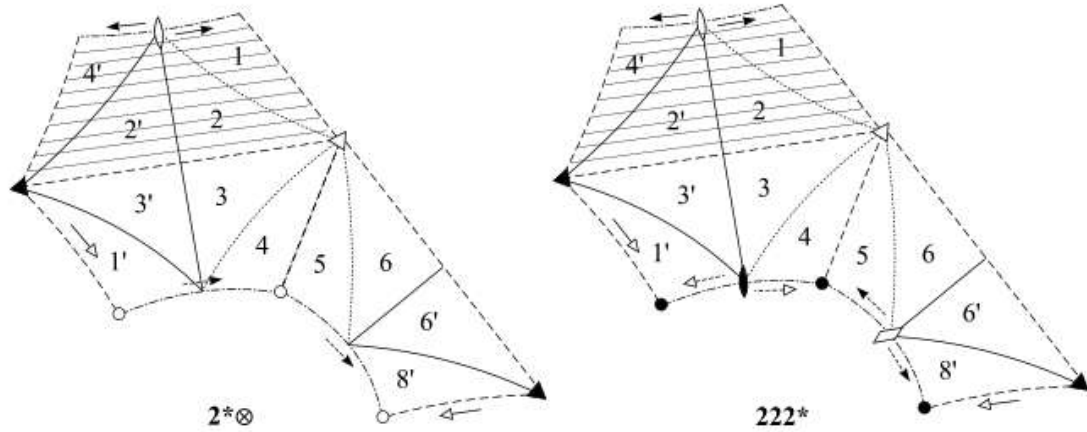


**23\*** maximális részcsoportjai a) az index 3 b) az index 2

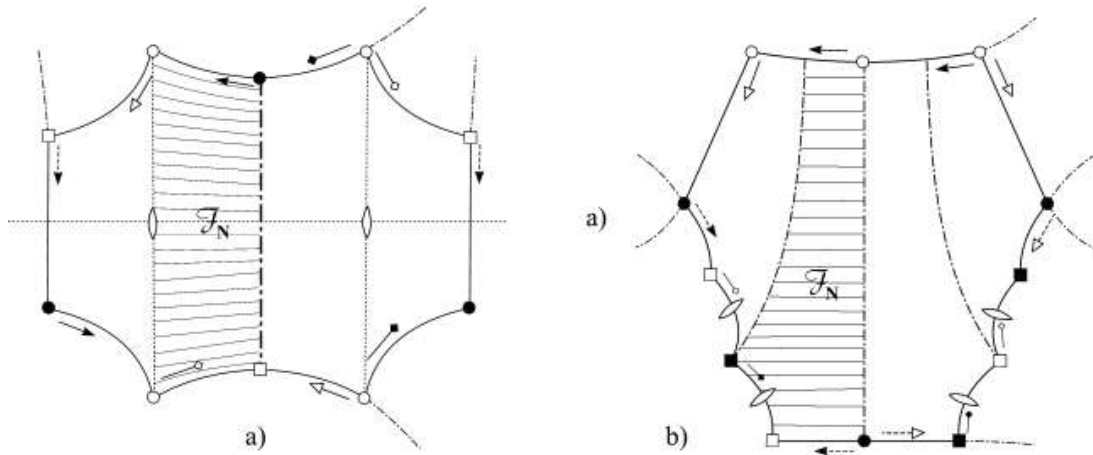


4.14 és 4.15 ábra

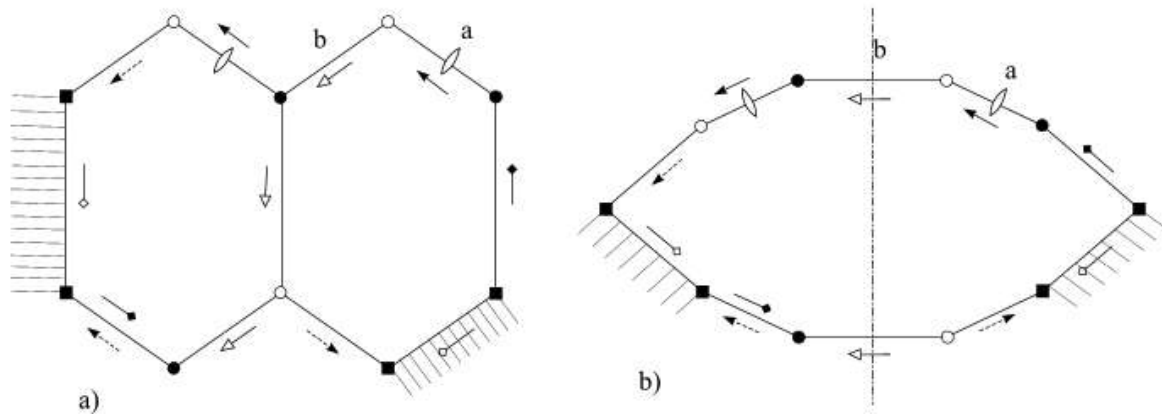
**2\*33** maximális nem-invariáns 3 indexű részcsoportja



Extrém szimmetriák a) eltolástükrözés 10/20  $abcdBeCDe$ ,  $N=2*222$   
 b) eltolás 12/5  $abcdeCfedFB$ ,  $N=2*222$

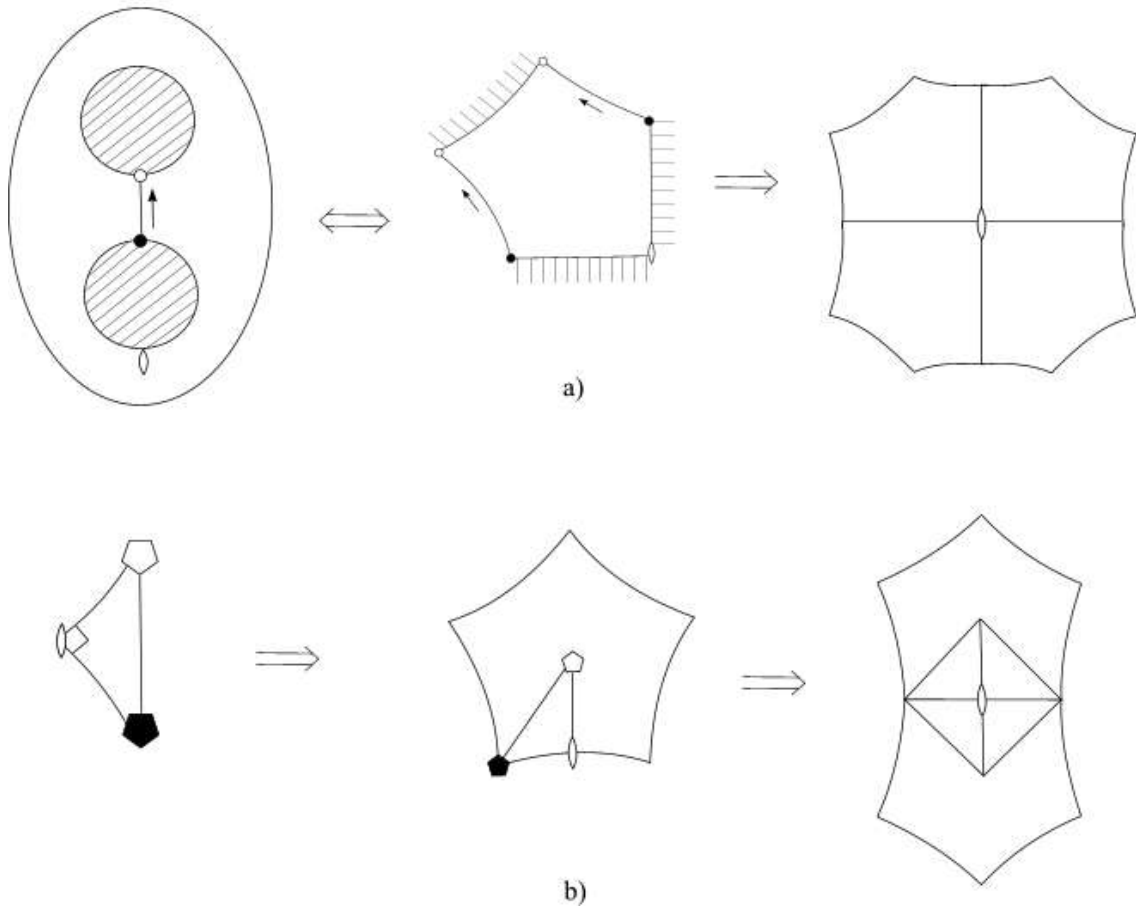


$\mathcal{F}_G$  10/19  $abcdeBcDe$  kibővítése  $\mathcal{F}_N$ -be a) eltolástükrözéssel  $N=2*\otimes$ -be  
 b) tükrözéssel  $N=2**$ -be



4.16, 4.17 és 4.18 ábra

a) Nem létező \*2\*, b) \*255



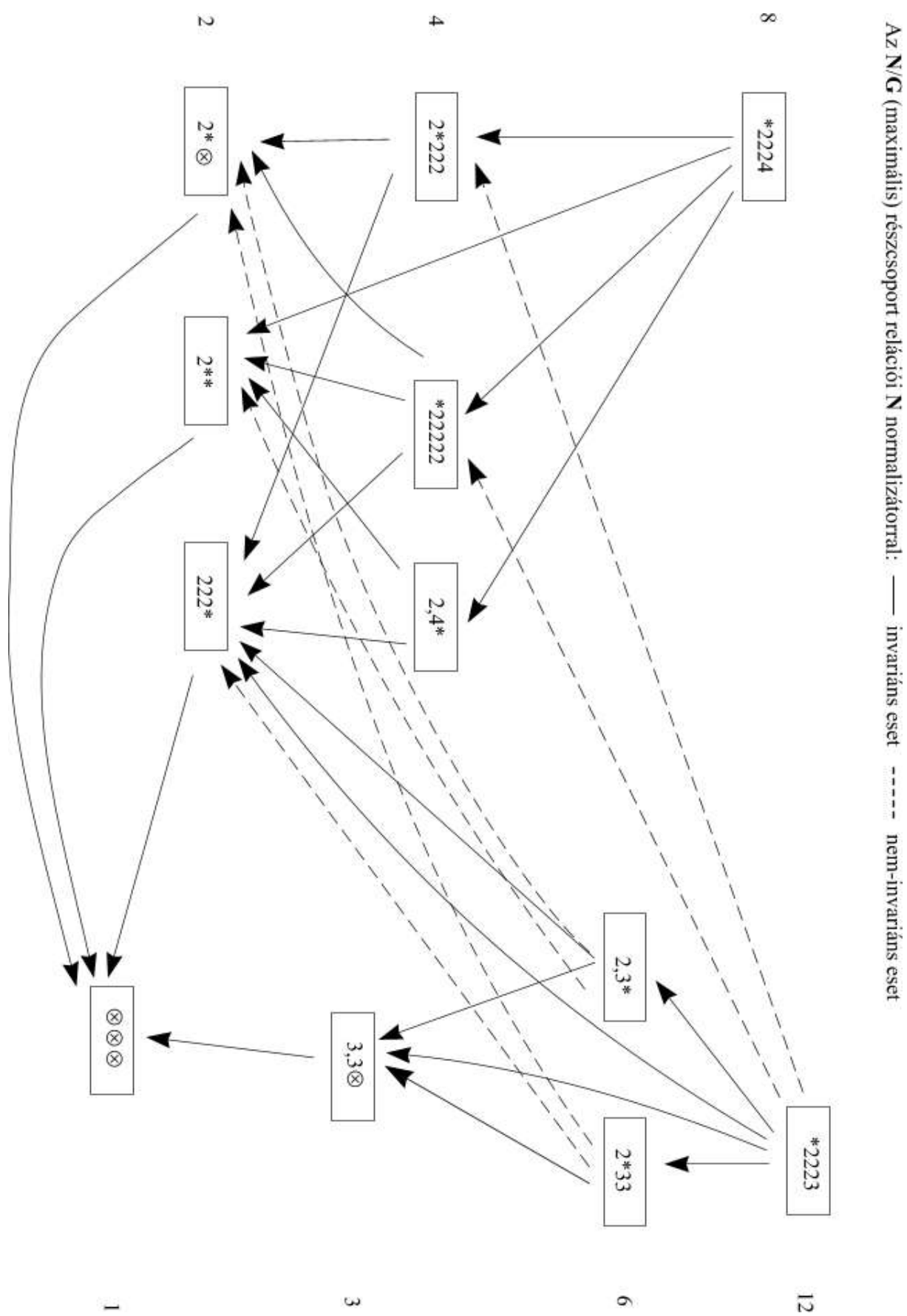
4.19 ábra

4.1 táblázat

A  $3^-$  felület fundamentális tartományainak felsorolása a tipikus maximális kövező normalizátorokkal, **N/G** faktorcsoportjaival és azok rendjével

			10/1	aabcbdeeDc	→ 10/16
6/1	aabbcc	2*33 / 3m, 6	2	aabccBdeeD	2*⊗ / m, 2
2	aabcbC	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1	3	aabcdbeCed	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1
3	aabcBC	2*⊗ / m, 2	4	aabcdBeCDE	2*⊗ / m, 2
4	aabccb	2*222 / mm, 4	5	aabcdBedcE	222* / m, 2
5	abacbc	*2224 / mm o m, 8	6	aabcdceDeB	→ 8/16
6	abacbC	2** / m, 2	7	aabcdCedEB	→ 8/19
7	abacBC	2** / m, 2	8	aabcdCeDEB	→ 8/18
8	abcaBC	2*222 / mm, 4	9	aabcdceDeB	→ 8/18
			10	aabcdeCDEB	→ 8/16
8/1	aabbcdC	→ 6/4	11	aabcdeCedB	→ 8/15
2	aabcbdCd	2*⊗ / m, 2	12	aabcbdeeDcB	*2223 / m o 3m, 12
3	aabcbddc	2*⊗ / m, 2	13	abacdbeCDE	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1
4	aabcBdcD	222* / m, 2	14	abacdbedcE	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1
5	aabcBdCD	2** / m, 2	15	abacdBceDe	2*⊗ / m, 2
6	aabcdbCd	2** / m, 2	16	abacdBcCed	2*⊗ / m, 2
7	aabcdBCD	2*⊗ / m, 2	17	abacdCbedE	222* / m, 2
8	aabcdBdc	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1	18	abacdCbeDE	2** / m, 2
9	aabcdcDB	→ 6/6	19	abacdeBcDe	2** / m, 2
10	aabcdCDB	→ 6/5	20	abca dBcCDE	2*222 / m o 2, 4
11	aabcedcB	→ 6/8	21	abca dcebDE	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1
12	abacbdCd	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1	22	abca dcedBE	2*⊗ / m, 2
13	abacbdCD	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1	23	abcAdeBCEd	2*222 / mm, 4
14	abacBdCd	2*⊗ / m, 2	24	abcAdecBEd	2*222 / mm, 4
15	abacdbCD	2*⊗ / m, 2			
16	abacdbdc	*2223 / mm o 3, 12	12/1	aabcdceffEdB	2*⊗ / m, 2
17	abacdBcD	⊗ <sup>3</sup> / 1, 1	2	aabcbddCeffEB	*2223 / 3m o m, 12
18	abAcdbDc	*22222 / mm, 4	3	aabcbdecfDfeB	→ 12/11
19	abAcdBDC	*22222 / mm, 4	4	aabcbdeCfDEFB	→ 10/23
20	abca dBcd	2*⊗ / m, 2	5	aabcbdeCfedFB	→ 10/23
21	abca dcbD	2*⊗ / m, 2	6	abacdeBcfDfe	2*⊗ / m, 2
22	abca dBcD	*2224 / 4m, 8	7	abacdeCbfDEF	2*⊗ / m, 2
	és	*2223 / 2 o 3m, 12	8	abacdeCbfedF	222* / m, 2
			9	abca dBdfCEf	*2223 / 3m o m, 12
			10	abca dcecfDbEF	2*⊗ / m, 2
			11	abca dcecfBdF	2*⊗ / m, 2

4.2 táblázat



### 4.3 táblázat

Az  $\mathcal{F}_N$  sokszög szimbólumok felsorolása [L-M-V 98] alapján  $\mathbf{G} = \otimes^3$  nem triviális  $\mathbf{N}$  normalizátoraival. A szimbólumban ...a...a... eltolástükrözéssel történő oldalpárosításra utal ...b...B... hiperbolikus eltolásra, — egyenes tükrözésre; ...anb... n-ed rendű forgatási, vagy tükrözési középpontot jelent, ami a-t b-vel kapcsolja össze, ...c2C... az oldal középpontja körüli ponttükrözést jelenti, ...dnD... n-ed rendű elforgatásra utal d-ből D-be.

**222\*** (13 tartomány): —a2Ab2Bc2C, —a2Ab2c2C2B, —a2b2B2c2CA, —a2b2c2C2B2A,  
—a2A—b2Bc2C, —a2A—b2c2C2B, —a2A—b2B—c2C,  
—a2Abc2Cd2DB, —ab2Bc2Cd2DA, —ab2Bc2d2D2CA,  
—a2bc2Cd2DB2A, —a2A—bc2cd2DB, —ab2Bcd2De2ECA

**2\*\* (4):** —a2Ab—B, —a—A—b2B, —a2b—B2A, —ab—Bc2CA

**2\*⊗ (16):** — ab2Ba, —a2ba2b, —a2b2b2A, —a—ab2B, —a2b—a2b,  
—a—a—b2B, —abac2Cb, —abbAc2C, —abbc2CA, —abc2CbA,  
— ab2cb2cA, —a2bccBA, —a2A—bccB, —ab—ac2Cb, —ab2BcddCA,  
— abc2CdbdA

**3,3⊗ (8):** a3a3b3B3, a3b3a3b3, aab3Bc3C, aab3c3C3B, a3Ab3cb3c, a3Abc3Cb,  
aabc3Cd3DB, a3ABc3CdBd

**24\* (5):** —a2Ab4B, —a4b2B4A, —a2b4B2A, —a2A—b4B, —ab2Bc4CA

**\*22222 (1):** —2—2—2—2—2

**2\*222 (2):** —2—2—2a2A2, —2—2—2—a2A

**2\*33 (2):** —3—3a2A3, —3—3—a2A

**23\* (5):** —a2Ab3B, —a3b2B3A, —a2b3B2A, —a2A—b3B, —ab2Bc3CA

**\*2224 (1):** —2—2—2—4

**\*2223 (1):** —2—2—2—3

4.4 táblázat

A Riemann-Hurwitz egyenlet megoldása,  $g^- = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\mathbf{G} = \otimes^3$ :

□ jelöli a megfelelő  $\mathbf{N}$  normalizátort,  $\langle \rangle$  az algebrai megoldás sorszámát tartalmazza.

- 1  $\langle 1 \rangle \mathbf{N} = \mathbf{G} = \otimes^3, n=1$   
**I.**  $2\beta\gamma + 2q = 4, 2l + l_1 + \dots + l_q \leq 2$   
**I.i**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 2$   
 I.i.1  $l = 1$
- 2  $\langle 2 \rangle \otimes^2, n=2; \langle 3 \rangle \circ 2, n=2; \square 2 \langle 4 \rangle \mathbf{2}^* \otimes, n=2; \square 3 \langle 5 \rangle \mathbf{2}^{**}, n=2$   
 I.i.2  $l_1 = 2$  nincs megoldás  
 I.i.3  $l_1 = 1, l_2 = 1$  nincs megoldás  
**II.ii**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 1$   
 II.ii.1  $l_1 = 1$   
 $\langle 6 \rangle *2 \otimes, n=4; \langle 7 \rangle *2^*, n=4,$   
**II.**  $2\beta\gamma + 2q = 2, 2l + l_1 + \dots + l_q \leq 6$   
**II.i**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 6$   
 II.i.1  $l = 3$
- 8  $\langle 8 \rangle 222 \otimes, n=2; \square 4 \langle 9 \rangle \mathbf{222}^*, n=2$   
**II.ii**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 5$   
 II.ii.1  $l = 2, l_1 = 1$
- 10  $\langle 10 \rangle 22^*2, n=4$   
 II.ii.2  $l = 1, l_1 = 3$
- 5  $\langle 11 \rangle \mathbf{2}^*222, n=4;$   
 II.ii.3  $l = 0, l_1 = 5$
- 6  $\langle 12 \rangle *22222, n=4;$   
**II.iii**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 4$   
 II.iii.1  $l = 2$
- 13  $\langle 13 \rangle 24 \otimes, n=4; \square 7 \langle 14 \rangle \mathbf{24}^*, n=4; \langle 15 \rangle 23 \otimes, n=6; \square 8 \langle 16 \rangle \mathbf{23}^*,$   
 $n=6; \square 9 \langle 17 \rangle \mathbf{33} \otimes, n=3;$   
 II.iii.2  $l = 1, l_1 = 2$
- 18  $\langle 18 \rangle 2^*23, n=12; \langle 19 \rangle 2^*24; n=8; \square 10 \langle 20 \rangle \mathbf{2}^*33, n=6$   
 II.iii.3  $l_1 = 4$
- 11  $\langle 21 \rangle *2223, n=12; \square 12 \langle 22 \rangle *2224, n=8; \langle 23 \rangle *2233, n=6;$   
 $*2323, n=6;$   
**II.iv**  $2l + l_1 + \dots + l_q = 3$   
 II.iv.1  $l = 1, l_1 = 1$
- 24  $\langle 24 \rangle 5^*2, n=20; \langle 25 \rangle 6^*2, n=12; \langle 26 \rangle 8^*2, n=8; \langle 27 \rangle 4^*3, n=12;$
- 28  $\langle 28 \rangle 6^*3, n=6; \langle 29 \rangle 3^*4, n=24; \langle 30 \rangle 4^*4, n=8; \langle 31 \rangle 3^*6, n=12;$   
 II.iv.2  $l = 0, l_1 = 3$   
 $\langle 32 \rangle *237, n=84; \langle 33 \rangle *238, n=48; \langle 34 \rangle *239, n=36;$   
 $\langle 35 \rangle *2312, n=24; \langle 36 \rangle *245, n=40; \langle 37 \rangle *246, n=24;$   
 $\langle 38 \rangle *248, n=16; \langle 39 \rangle *255, n=20; \langle 40 \rangle *266, n=12; \langle 41 \rangle *334;$   
 $n=24;$   
 $\langle 42 \rangle *336, n=12; \langle 43 \rangle *444, n=8$

**III.**  $2g+2q=0$  csak irányítható eseteket ad, nincs geometriailag realizálható normalizátora  $\mathbf{G} = \otimes^3$ -nek

**III.i**  $2l+l_1+\dots+l_q=10$

III.i.1  $l=5$

$\langle 44 \rangle 22222, n=2$

**III.ii**  $2l+l_1+\dots+l_q=8$

III.ii.1  $l=4$

$\langle 45 \rangle 2223, n=6; \langle 46 \rangle 2224, n=4$

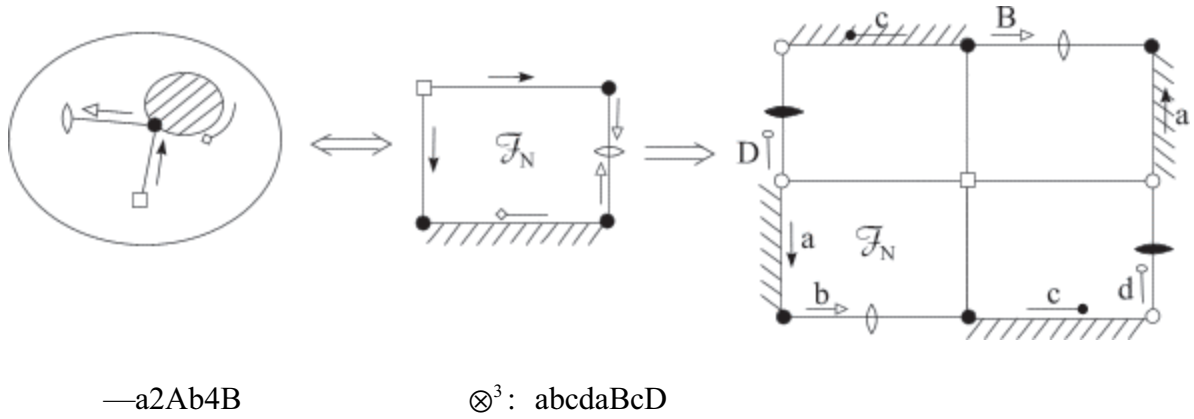
**III.iii**  $2l+l_1+\dots+l_q=6$

III.iii.1  $l=3$

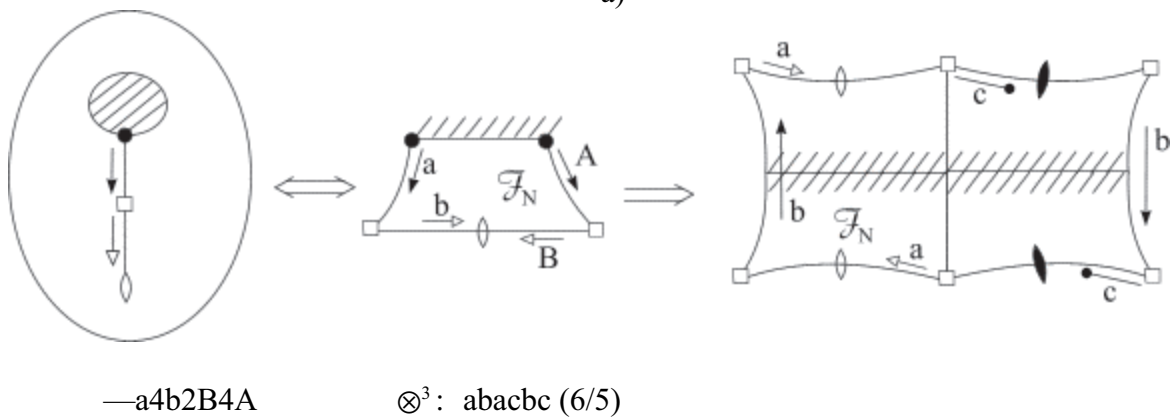
$\langle 47 \rangle 237, n=42; \langle 48 \rangle 238, n=24; \langle 49 \rangle 239, n=18; \langle 50 \rangle 2312, n=12$

$\langle 51 \rangle 245, n=20; \langle 52 \rangle 246, n=12; \langle 53 \rangle 248, n=8; \langle 54 \rangle 255, n=10;$

$\langle 55 \rangle 266, n=6; \langle 56 \rangle 334, n=12; \langle 57 \rangle 336, n=6; \langle 58 \rangle 444, n=4$



a)



b)

$\mathbf{N}$ :  $m$ : —,  $t$ :  $a \rightarrow A$ ,  $h$ :  $b \rightarrow B$

$24^* = \mathbf{N} = (m, h, t \text{ — } m^2, h^2, \bullet mtmt^{-1}, \square (th)^4)$

$\mathbf{G}$ :  $g_1$ :  $a \rightarrow a$ ,  $g_2$ :  $b \rightarrow b$ ,  $g_3$ :  $c \rightarrow c$

$\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3 \text{ — } g_1 g_2 g_3^{-1} g_1^{-1} g_2 g_3)$

Az alábbiak szerint  $m \rightarrow \bar{m}$ ,  $h \rightarrow \bar{h}$ ,  $t \rightarrow \bar{t}$  valóban  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{G}$  homeomorfizmushoz vezet:

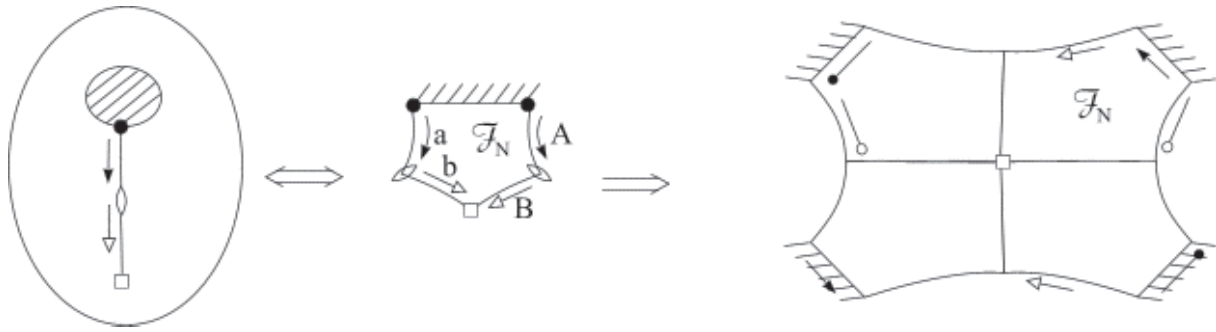
$g_1 = hm \quad \bar{1} = \bar{h} \bar{m} \quad \bar{h}$

$g_2 = ttm = mtt \quad \bar{1} = \bar{t} \bar{t} \bar{m} \quad \bar{t} \bar{t}$

$g_3 = t^{-1} m h t \quad \bar{1} = \bar{t}^{-1} \bar{m} \bar{h} \bar{t}$

$\mathbf{N}/\mathbf{G} = (\bar{m}, \bar{h}, \bar{t} \text{ — } \bar{m}^2, \bar{h}^2, \bar{m} \bar{t} \bar{m} \bar{t}^{-1}, (t \bar{h})^4, \bar{h} \bar{m}, \bar{t} \bar{t} \bar{m}) \sim (t, \bar{m} = \bar{t}^2 = \bar{h} \text{ — } \bar{t}^4)$

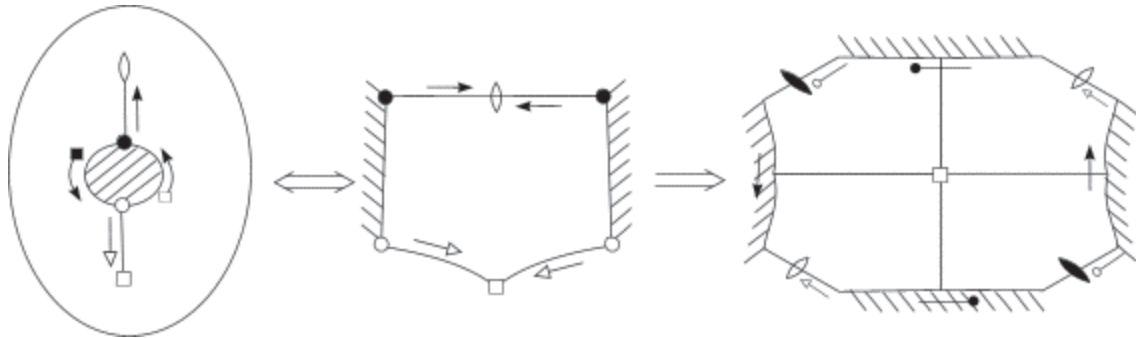
$g_1 g_2 g_3^{-1} g_1^{-1} g_2 g_3 = (hm)(mtt)(t^{-1}hmt)(mh)(mtt)(t^{-1}mht) =$   
 $= hthmtmhmtmht = htht(mm)ht(mm)ht = h(ththth)t = h(ht^{-1})t = 1$



—a2b4B2A

⊗<sup>3</sup>: abcdaBcD

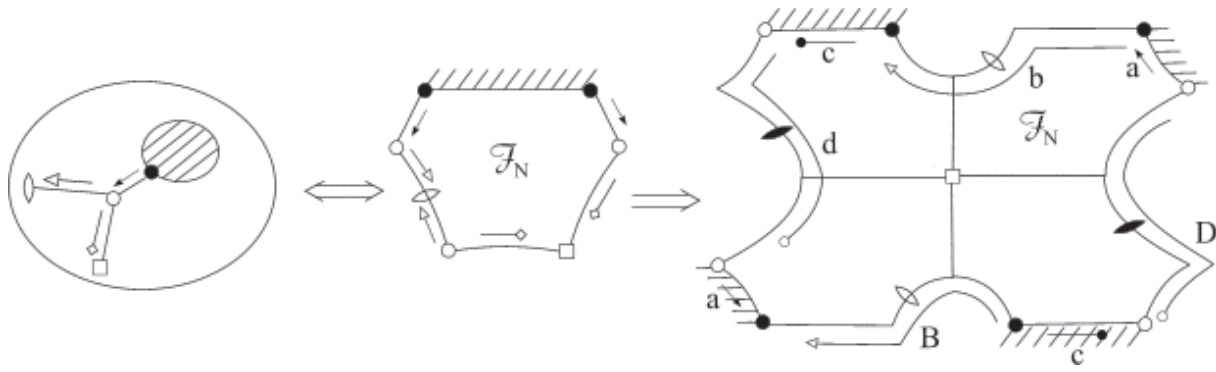
c)



—a2A—b4B

⊗<sup>3</sup>: abcdaBcD

d)



—ab2Bc4CA

⊗<sup>3</sup>: abcdaBcD

e)

4.20 ábra a)-e) kövezések az  $\mathcal{F}_N$  normalizátor alaptartománnyal:  $N=24^*$

## 5 Irodalomjegyzék

- [B 00] T. Breuer, *Characters and automorphism groups of compact Riemann Surfaces*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **280**, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [B 51] S. Bilinski, Homogene mreže zatvorenih orientabilnih ploha, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **277** (1951), 129-164. – Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, *Bull. Int. Acad. Yugosl.* **6** (1952), 59-75.
- [B–E–G–G 90] E. Bujalance–J. J. Etajo–J. M. Gamboa–G. Gromadzki, *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surface, A Combinatorial Approach*, Lecture Notes in Mathematics **1439**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990
- [C 87] M. D. E. Conder, The genus of Compact Riemann surfaces with maximal automorphism group, *J. Algebra* (1987), no. **108**, 204-247.
- [C–B 88] A. J. Casson–S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts **9**.
- [D–F 87] A. W. M. Dress–R. Franz, Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen von Brezelflächen betreffend, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **428** (1987), 83-101.
- [F–H 92] R. Franz–D. H. Huson, The classification of quasi regular polyhedra of genus 2, *J. Discrete and Comp. Geom.* **7** (1992), 347-357.
- [H 93] D. Huson, The generation and classification of tile-k-transitiv tilings of the Euclidean plane, the sphere and the hyperbolic plane, *Geometriae Dedicata*, **47** (1993), 269-296.
- [K–W 96] H. Karcher, M Weber, On Klein's Riemann surface, *Manuscript*, 1996. – The geometry of Klein's Riemann surface. *The eightfold way* 9-49, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999
- [L–M 90] Z. Lučić–E. Molnár, Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups, *Arch. Math.* **54** (1990), 511-520.
- [L–M 91] Z. Lučić–E. Molnár, Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata*, **40** (1991), 125-143.
- [L–M–V 98] Z. Lučić–E. Molnár–N. Vasiljević, Combinatorial structure of fundamental polygons of finite area for plane discontinuous groups, *Manuscript*, 1998.
- [M 92] E. Molnár, Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their metric realizations, *Acta Math. Hung.* **59** (1992), 175-216.
- [M–S 05] E. Molnár and E. Stettner, Symmetry groups and fundamental tilings for the compact surface of genus  $3-2$ . The normalizer diagram with classification, *Beiträge Alg. Geom. (Contr. Alg. Geom.)* to appear in 2005
- [R 94] J. G. Ratcliffe, On the isometry groups of hyperbolic manifolds, *Contemporary Math.* **169** (1994) 491-495.
- [S 88] M. Senechal, Tiling the torus and other space forms, *Discrete and Computational Geometry*, Vol. **3**, No. 1, 1988 (55-72).
- [S 98] E. Stettner, Die Computergestützte Klassifizierung der Flächeneinwickelungen in einem Vieleck vorgegebener Seitenanzahl, *Annales Univ. Sci. Budapest.* **41** (1998), 103-115.

- [S 03] E. Stettner, Symmetriegruppen und fundamentale Pflasterungen der Fläche vom Geschlecht  $-3$ . I. Maximale Gruppen mit Sechseckbereichen, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **40** (2003), 41-57.
- [SS 98] P. Schmutz Schaller, Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Volume **35**, Number 3, 193-214.
- [Z 97] E. Zamorzaeva, On isohedral tilings of hyperbolic manifolds, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N. S.)* **43** (1997), no. 1, 81-88 (1998).
- [Z-V-C 80] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.

## 6 A program leírása

A  $2n$  szög oldalaihoz az  $1, 2, \dots, n$  számokat rendeltem adott pozitív körüljárás szerint, egy rögzített 1 jelű csúcsból kiindulva. Egy oldalpárosítás egy olyan függvény, mely  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ -hez az  $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$  értékeket rendeli. Az összes ilyen függvényt előállítjuk szisztematikus továbblépésekkel. Ezen függvényeket ekvivalensnek nevezzük, ha egyik a másiktól megkapható az alábbi módon:

1. Az  $1, 2, \dots, n$  függvényértékek tetszőleges permutációjával,
2. valamint a kezdősokszög ciklikus forgatásaival és  $(1, n+1)$  tengelyű tükrözésével komponálva (diéderszimmetria).
3. Az ekvivalens függvények közül egy reprezentánst választunk ki, ahol az 1. oldal legyen az, amelyhez legközelebb van a párja. Ha több ilyen van, azt választjuk, ahol az 1 oldal 2-jelű + irányú szomszédjához legközelebb van a párja, stb.

Így a lehetséges nemekvivalens függvényekhez vezető algoritmus lépésszáma becsülhető. A kezdősokszög 1. oldalához  $n$  értéket rendelhetünk. Ennek párját  $2n-1$  oldalhoz rendelhetjük. Ezek rögzítése után a 2. oldalhoz (vagy az 1.-höz a + irányban legközelebbi eddig szabad oldalhoz  $n-1$  értéket rendelhetünk. Ennek párját  $2n-3$  oldalhoz rendelhetjük. A 3. oldalhoz (1-hez legközelebbi eddig szabad oldalhoz  $n-2$  értéket rendelhetünk, párját  $2n-5$ -féleképpen választhatjuk, stb.)

Teljes indukcióval ez

$$[n \cdot (2n-1)] \cdot [(n-1) \cdot (2n-3)] \cdot [(n-2) \cdot (2n-5)] \dots [2 \cdot 3] \cdot [1 \cdot 1]$$

darab függvény. Ezek közül  $n!$  egy skatulyába osztható, mert az  $1, 2, \dots, n$  függvényértékek permutálása biztosan ekvivalens függvényekhez vezet. Így tehát eddig

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

függvény-skatulyát kaptunk, ahogy a 3. fejezetben is leírtuk. Ezek bármelyike a  $2n$  darab diéder-szimmetriánál legalább 1, legfeljebb  $2n$  ekvivalens poligonhoz vezet.

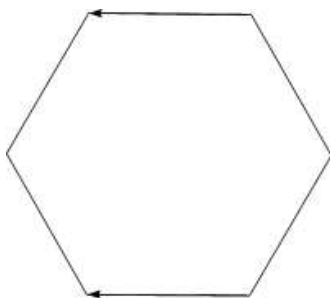
A szükséges lépésszám (ez még nem a különböző irányítható párosítások száma) becsülhető először:

$$\frac{(2n-1)!}{2^n \cdot n!} < o(2n) < \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!},$$

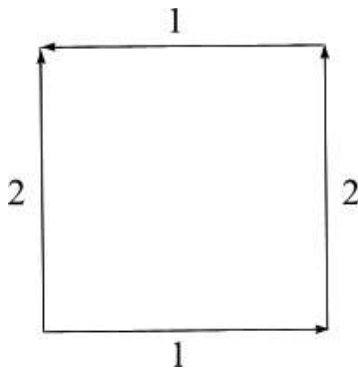
majd a Stirling formulával, ahogy ezt a 3.1-ben leírtuk.

A fenti 3 pontban leírt diéderszimmetriát kezdettől figyelembe vevő leszámolás kedvezőbb algoritmusra is lehetőséget ad, sőt finomabb becslésre is vezethet, de ez most nem volt a célunk.

Most bevezetjük a következő jelölést. Az ábrán látható (orientáció-tartó) összeragasztást jelölje 0, az ellentétest 1.



Az eddigi számokat most kétjegyűekké alakítjuk. Pl.: 11 20 11 20 egy négyzet következő összeragasztását jelöli:



Így minden irányítható oldalpárosításhoz, amelyet a program előző részében kaptunk meg, hozzárendeltünk  $2^{n/2}$  darab felületet. Ezek között egy kétoldalú felület van, a többi egyoldalú. (Kétoldalú az a felület, ahol a második jegy csupa 0.) Természetesen ezek között a felületek között vannak azonosak. Ezeket újra a fent említett transzformációk segítségével szűrjük ki. A reprezentáns felületek felsorolásánál (pl. a  $3^-$  felület 65 alaptartományánál) betűk jelölik az oldalpárosítást:  $1 \rightarrow a$ ,  $2 \rightarrow b$ , ..., stb;  $\dots x \dots x \dots$  irányításváltó,  $\dots x \dots X \dots$  irányítástartó oldalpárosítás leírására utal; a listán lexikografikusan az előbbi megelőzi az utóbbit. Így sorban minden kétoldalú felülethez (orbifoldhoz) megkapjuk az összes (egy-és kétoldalú) felületet (orbifoldot).

Ezután megvizsgáljuk, hogy az összeragasztás során, mely csúcsok ekvivalensek, azaz hány csúcsosztály keletkezik. Ez rögzített  $2n$  oldalú sokszög esetén meghatározza a felület típusát (Euler karakterisztikáját, nemszámát).

Így táblázatba gyűjtve megkapjuk, hogy adott  $2n$  oldalú sokszöghöz milyen felületek tartoznak, s kombinatorikusan hány különböző módon jönnek létre.

A mellékelt CD-n található ketoldal.exe file előállítja egy dat file-ba a program leírás első részében említett számsorozatokot, a egyoldal.exe meghatározza hogy az adott oldalszámú sokszögből (a CD-n található program 14 szögből) milyen felületeket, hány kombinatorikusan különböző módon állít elő.

## 7 A forrásprogram

{ A tizennégyszögből előállítható kombinatorikusan különböző kétoldalú felületek meghatározása }

```
program tizennegy;
uses crt;
type sszo=string[14];
var j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,n,m,i,j,kod,szam:byte;
    k1,k2,k,poz,l           :integer;
    s                       :sszo;
    f                       :file of sszo;
    log,talal               :boolean;
    a,e                     :array[1..14] of byte;
    b                       :array[1..28,1..14] of byte;
    w,v                     :string[14];
    label cim1,cim2,cim3,cim4,cim5,cim6,vege;
```

```
procedure iras;
```

{A eddig megtalált, már elmentett számsorozatoktól kombinatorikusan különböző permutáció beírása a 'tizennegy.dat' adatbázisba }

```
begin
assign(f,'tizennegy.dat');
reset(f);
if ioresult<>0 then
begin
rewrite(f);
end;
s:="";
poz:=k2;
seek(f,poz);
for i:=1 to 14 do
begin
str(a[i],w); s:=s+w;
end;
write(f,s);
writeln(s);
close(f);
end;
```

```
procedure olvas;
```

{A 'tizennegy.dat' adatbázisból a már elmentett számsorozatok kiolvasása }

```
begin
assign(f,'tizennegy.dat');
reset(f);
```

```
poz:=1;
seek(f,poz);
read(f,s);
for i:=1 to 14 do
  begin
    v:=s;delete(v,1,i-1);delete(v,2,14-i);val(v,e[i],k);
    end;
close(f);
end;
procedure hasonlit;
```

{A számsorozat kapott permutációjának összehasonlítása a 'tizennegy.dat'-ba elmentett kombinatorikusan különböző esetekkel}

```
begin
i:=0;kod:=1;szam:=0;
repeat
i:=i+1;j:=i+1;
repeat
if(kod=0)then j:=j+1;
kod:=0;
until((e[i]=e[j])or(j=14));
kod:=1;
if((e[i]=e[j])and(b[m,i]=b[m,j]))then szam:=szam+1;
until(((e[i]=e[j])and(b[m,i]<>b[m,j]))or(i=13));
if(szam<7)then talal:=false else talal:=true;end;
```

```
procedure transzf;
```

```
{elforgatás}
```

```
begin
for i:=1 to 14 do
  begin
    b[1,i]:=a[i];
    end;
for j:=2 to 14 do
  begin
    for i:=2 to 14 do
      begin
        b[j,i]:=b[j-1,i-1];
        b[j,1]:=b[j-1,14];
      end;
    end;
```

```
{tengelyes tükrözés}
```

```
for j:=1 to 14 do
  begin
    for i:=1 to 7 do
      begin
        b[j+14,i]:=b[j,15-i];
        b[j+14,15-i]:=b[j,i];
```

```
end;  
end;  
end;
```

```
procedure jobbra;  
begin  
while(a[i]<=k)and(i<=n) do i:=i+1;  
if a[i]>k then log:=true else log:=false;  
end;
```

```
procedure nullaz;  
begin  
for i:=1 to n do  
begin  
if a[i]>k then a[i]:=0;  
end;  
i:=n;  
while a[i]<>k do i:=i-1;  
a[i]:=0;  
end;
```

```
begin
```

{Az 11223344556677 számsorozat permutációjának előállítás}

```
clrscr;  
k1:=1; k2:=1; n:=14;  
for i:=1 to n do a[i]:=0;  
a[1]:=1;  
j1:=2;  
cim1: a[j1]:=1;  
j2:=2;  
while a[j2]<>0 do j2:=j2+1;  
a[j2]:=2;  
j2:=j2+1;  
cim2: while a[j2]<>0 do j2:=j2+1;  
a[j2]:=2;  
j3:=2;  
while a[j3]<>0 do j3:=j3+1;  
a[j3]:=3;  
j3:=j3+1;  
cim3: while a[j3]<>0 do j3:=j3+1;  
a[j3]:=3;  
j4:=2;  
while a[j4]<>0 do j4:=j4+1;  
a[j4]:=4;  
j4:=j4+1;  
cim4: while a[j4]<>0 do j4:=j4+1;  
a[j4]:=4;  
j5:=2;  
while a[j5]<>0 do j5:=j5+1;  
a[j5]:=5;  
j5:=j5+1;
```

```
cim5:  while a[j5]<>0 do j5:=j5+1;
      a[j5]:=5;
      j6:=2;
      while a[j6]<>0 do j6:=j6+1;
      a[j6]:=6;
      j6:=j6+1;
cim6:  while a[j6]<>0 do j6:=j6+1;
      a[j6]:=6;
      j7:=2;
      while a[j7]<>0 do j7:=j7+1;
      a[j7]:=7;
      j7:=j7+1;
      while a[j7]<>0 do j7:=j7+1;
      a[j7]:=7;
      write(k1,');
      write(k2);writeln;
      if k1>1 then
      begin
      transzf;
      l:=0;
      repeat
      m:=1;
      l:=l+1;olvas;
      repeat
      m:=m+1;hasonlit;
      until((talal=true)or(m=28));
      until((talal=true)or(l=k2-1));
      write(talal);
      if(talal=true)then k1:=k1+1;
      if(talal=false)then begin
          iras;k1:=k1+1;k2:=k2+1;
          end;
      end;
      if k1=1 then begin iras;k1:=k1+1;k2:=k2+1;end;
      if k1>10395 then goto vege;
      if j6<>n then
      begin
      i:=j6+1;k:=6;jobbra;
      if log then begin
          j6:=j6+1;
          nullaz;
          goto cim6;
          end;
          end;
          end;
          if j5<>n then
          begin
          i:=j5+1; k:=5;jobbra;
          if log then begin
              j5:=j5+1;
              nullaz;
              goto cim5;
              end;
              end;
              end;
```

```
end;
if j4<>n then
begin
i:=j4+1; k:=4;jobbra;
if log then begin
j4:=j4+1;
nullaz;
goto cim4;
end;
end;
if j3<>n then
begin
i:=j3+1; k:=3;jobbra;
if log then begin
j3:=j3+1;
nullaz;
goto cim3;
end;
end;
if j2<>n then
begin
i:=j2+1; k:=2;jobbra;
if log then begin
j2:=j2+1;
nullaz;
goto cim2;
end;
end;
if j1<>n then
begin
i:=j1+1; k:=1;jobbra;
if log then begin
j1:=j1+1;
nullaz;
goto cim1;
end;
end;
vege: readln;readln;
end.
```

{Az összes kombinatorikusan különböző irányítható és nemirányítható felület előállítása tizennégyszögből}

```
program egyoldal;
uses crt,printer;
const esc=chr(27);
type sszo=string[14];
var c,cs,g:array[1..14] of byte;
    b:array[1..128,1..14] of byte;
    a:array[1..28,1..14] of byte;
    egyes:array[1..5] of byte;
    i,j,osz,l1,l2,l3,i1,i2,l,k,k1,k2,kod,m,szam,a1,sz,zs,o,egy,egy1,egy2,egy3,egy4:byte;
    q:array[1..10] of longint;
    e1,e2:real;
    poz,k3,db:integer;
    s:sszo;
    f:file of sszo;
    e,n:array[1..14] of longint;
    d1,d2:longint;
    talal,valasz,jo:boolean;
    log:array[1..128] of boolean;
    z:longint;
    fel:string[2];
    oszi,tab:string;
    v:string[14];
```

```
procedure transzf;
begin
  for k:=1 to 14 do
  begin
    a[1,k]:=b[k1,k];
  end;
```

{elforgatás}

```
  for l:=2 to 14 do
  begin
    for k:=2 to 14 do
    begin
      a[l,k]:=a[l-1,k-1];
      a[l,1]:=a[l-1,14];
    end;
  end;
```

{tengelyes tükrözés}

```
  for l:=1 to 14 do
  begin
    for k:=1 to 7 do
    begin
      a[l+14,k]:=a[l,15-k];
      a[l+14,15-k]:=a[l,k];
    end;
```

```
end;  
end;  
end;
```

```
procedure hasonlit;
```

{A számsorozat kapott permutációjának összehasonlítása az eddig kapott kombinatorikusan különböző esetekkel}

```
begin  
i:=0;kod:=1;szam:=0;  
repeat  
i:=i+1;j:=i+1;sz:=0;  
repeat  
if(kod=0)then j:=j+1;  
kod:=0;  
until((b[k2,i]=b[k2,j])or(j=14));  
kod:=1;  
e1:=b[k2,i]/10;e2:=a[m,i]/10;  
d1:=round(10*(e1-int(e1)));d2:=round(10*(e2-int(e2)));  
if((b[k2,i]=b[k2,j])and(a[m,i]=a[m,j])and(d1=d2)) then szam:=szam+1;  
if((j=14)and(b[k2,i]<>b[k2,j])) then sz:=1;  
until(((b[k2,i]<>b[k2,j])or(a[m,i]<>a[m,j])or(d1<>d2)or(i=13))and(sz<>1));  
if(szam<7)then talal:=false else talal:=true;  
end;
```

{A csúcsosztályok számának meghatározása}

```
procedure csucs;
```

```
begin  
if(((zs=i1)and(n[i1]=1))or((zs<>i1)and(n[i1]=0)))then l:=i2;  
if(not(((zs=i1)and(n[i1]=1))or((zs<>i1)and(n[i1]=0)))and(i2>1)) then l:=i2-1;  
if(not(((zs=i1)and(n[i1]=1))or((zs<>i1)and(n[i1]=0)))and(i2=1)) then l:=14  
end;
```

```
procedure ujcsucs;
```

```
begin  
l1:=1;  
while (cs[l1]=1) do l1:=l1+1;  
if o=1 then egy1:=egy;  
if o=2 then egy2:=egy;  
if o=3 then egy3:=egy;  
if o=4 then egy4:=egy;  
cs[l1]:=1;i1:=l1;i2:=1;zs:=i1;egy:=1;sz:=sz+1;o:=o+1;  
while((e[i1]<>e[i2])or(i1=i2))do i2:=i2+1;  
end;
```

```
procedure olvas;
```

{A 'tizennegy.dat' adatbázisból a következő számsorozat kiolvasása}

```
begin
```

```
assign(f,'c:\bp\tizenneg.dat');
reset(f);
poz:=db;
seek(f,poz);
read(f,s);
for i:=1 to 14 do
begin
v:=s;delete(v,1,i-1);delete(v,2,14-i);val(v,g[i],k3);
end;
close(f);
writeln(s);
end;
```

```
begin
for i:=1 to 10 do
  q[i]:=0;
egy1:=0;egy2:=0;egy3:=0;egy4:=0;osz:=1;
a1:=2;
clrscr;
for db:=1 to 5284 do
begin
olvas;write(db);
for i:=1 to 128 do
  for j:=1 to 14 do
    b[i,j]:=g[j];
z:=128;
for l1:=1 to 7 do
begin
i:=1;j:=1;
while b[i,j]<>l1 do j:=j+1;
l2:=j;j:=j+1;
while b[i,j]<>l1 do j:=j+1;
z:=round(z/2);
repeat
if i>1 then i:=i+z;
for l3:=i to i+z-1 do
begin
```

{Az irányítható és nem-irányítható oldalpárosítások előállítására az oldalakat jelölő számok kétjegyűekké alakításával, második jegy 0-irányítható, 1-nem-irányítható oldalpárosítás}

```
  b[l3,l2]:=10*b[l3,l2];b[l3,j]:=10*b[l3,j];
end;
i:=i+z;
for l3:=i to i+z-1 do
begin
b[l3,l2]:=10*b[l3,l2]+1;b[l3,j]:=10*b[l3,j]+1;
end;
until(l3>=128);
end;
```

```
k1:=2;a1:=2;log[1]:=false;log[2]:=false;
repeat
k1:=k1+1;transzf;
k2:=1;
  repeat
k2:=k2+1;m:=1;
  repeat
m:=m+1;hasonlit;
  until(talal=true)or(m=28);
  until(talal=true)or(k2=k1-1);
  log[k1]:=talal;
if(talal=false) then a1:=a1+1;
until(k1=128);
writeln(a1);
for i:=1 to 128 do
begin
if(log[i]=false)then
  begin
for j:=1 to 14 do
  begin
e[j]:=round(b[i,j]/10);n[j]:=b[i,j]-10*e[j];cs[j]:=0;
end;
cs[1]:=1;sz:=1;zs:=1;i1:=1;i2:=2;valasz:=false;o:=1;egy:=1;
repeat
while ((e[i1]<>e[i2])or(i1=i2)) do i2:=i2+1;
csucs;
if(((cs[1]>0)and(egy<3))or((cs[1]>0)and(sz=14)))then valasz:=true;
if((cs[1]>0)and(egy>=3)and(sz<14))then begin
ujcsucs; end;
if(not(valasz))then
begin
jo:=false;
if(((n[i1]=1)and(zs=i1))and((i2<14)and(jo=false)))then begin
cs[i2]:=1;i1:=i2+1;zs:=i2;jo:=true;end;
if(((n[i1]=1)and(zs=i1))and((i2=14)and(jo=false))) then begin
cs[i2]:=1;i1:=1;zs:=i2;jo:=true;end;
if(((n[i1]=1)and(zs<>i1))and((i2>1)and(jo=false))) then begin
cs[i2-1]:=1;i1:=i2-1;zs:=i2-1;jo:=true;end;
if(((n[i1]=1)and(zs<>i1))and((i2=1)and(jo=false))) then begin
cs[14]:=1;i1:=14;zs:=14;jo:=true;end;
if(((n[i1]=0)and(zs=i1))and((i2>1)and(jo=false))) then begin
cs[i2-1]:=1;i1:=i2-1;zs:=i2-1;jo:=true;end;
if(((n[i1]=0)and(zs=i1))and((i2=1)and(jo=false))) then begin
cs[14]:=1;i1:=14;zs:=14;jo:=true;end;
if(((n[i1]=0)and(zs<>i1))and((i2<14)and(jo=false))) then begin
cs[i2]:=1;i1:=i2+1;zs:=i2;jo:=true;end;
if(((n[i1]=0)and(zs<>i1))and((i2=14)and(jo=false))) then begin
cs[i2]:=1;i1:=1;zs:=i2;jo:=true;end;
i2:=1;sz:=sz+1;egy:=egy+1;

end;
until valasz;
fel:='er';
```

```
if((sz=14)and(egy>=3))then begin
if(i=1)then begin
  if(o=2)then begin fel:='p3'; q[2]:=q[2]+1;end;
  if(o=4)then begin fel:='p2'; q[4]:=q[4]+1;end;
  end;
if(i<>1)then begin
  if(o=1)then begin fel:='n7'; q[5]:=q[5]+1;end;
  if(o=2)then begin fel:='n6'; q[6]:=q[6]+1;end;
  if(o=3)then begin fel:='n5'; q[7]:=q[7]+1;end;
  if(o=4)then begin fel:='n4'; q[8]:=q[8]+1;end;
  end;
end;
end;end;
end;
```

{A kapott kombinatorikusan különböző felületek  
típusának és számának kiíratása}

```
writeln('p3:',q[2],' p2:',q[4]);
writeln('n7:',q[5],' n6:',q[6],' n5:',q[7],' n4:',q[8]);
writeln(1st,'p3:',q[2],' p2:',q[4]);
writeln(1st,'n7:',q[5],' n6:',q[6],' n5:',q[7],' n4:',q[8]);
readln;readln;
end.
```