



# **KAVICSFORMÁK MECHANIKAI SZEMLÉLETŰ OSZTÁLYOZÁSI RENDSZERE ÉS KOLLEKTÍV ALAKFEJLŐDÉSÉNEK NUMERIKUS SZIMULÁCIÓJA**

*A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen  
a PhD fokozat követelményeinek részleges teljesítéseként  
benyújtott disszertáció rövid összefoglalója*

**Szabó Tímea**

Témavezető:  
Dr. Domokos Gábor

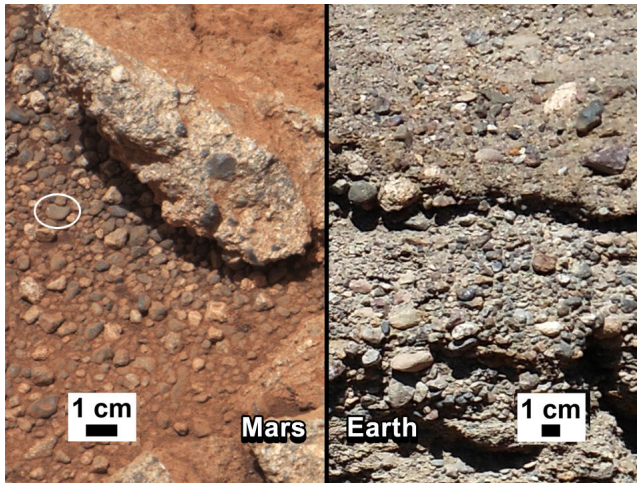
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék*

2013

## BEVEZETÉS

Arisztotelész óta (*Krynine 1960*), kiváló tudósok sora érdeklődött a kavicsok kopási folyamatai és az ebből következő geometria iránt (*Leonardo da Vinci: Codex Leicester – Richter 1939; Lord Rayleigh 1942, 1944a,b*). A közelmúltban a *Nature* c. folyóiratban megjelent cikksorozat (*Ashcroft 1990; Lorang és Komar 1990; Yazawa 1990*) azt mutatja, hogy ez az érdeklődés a kavicsok változatos formavilága iránt ma is fennáll, hiszen a természetben található, eróziós folyamatok által létrehozott formák (legyenek azok akár felszínformák, akár kavicsok) vizsgálata maguknak az eróziós folyamatoknak a megértésében segít. A kavicsok alakja fontos információt hordoz a múltbéli ill. jelenkori üledékképződés, -szállítás, és -lerakódás körülményeiről, ezáltal például segít az ún. *fáciesek* elkülönítésében. A kavicsalak-vizsgálatok jelentősége jól illusztrálható a NASA legutóbbi felfedezésével: a Curiosity űrszonda jól lekopott, lekerékített kavicsokat fényképezett le a Mars felszínén (1. ábra). A kavicsok alakjából a NASA tudósai arra következtettek, hogy ezeket a formákat valaha folyóvíz szállította és koptatta ilyené. A Curiosity űrszonda felfedezése a legelső bizonyíték ősi folyómeder létezésére a Marson.

Az Arisztotelész óta eltelt hosszú idő ellenére a kavicsok morfológiájának jellemzése és alakfejlődésének modellezése ma is tudományos kihívást jelent. Disszertációm célja kettős. Egyrészt, egy új, mechanikai szemléletű osztályozási rendszert (*Várkonyi és Domokos 2006a*) alkalmaztunk kavicsok alakjának jellemzésére és vizsgáltuk a rendszer gyakorlati alkalmazhatóságát, valamint annak matematikai/mechanikai hátterét. Másrészt, *Domokos és Gibbons (2012)* új elméleti eredményére, az ún. *box egyenletekre* építve egy új numerikus modellt dolgoztunk ki, mely alkalmas nagy kavicspopulációk kollektív kopásának követésére különböző üledékszállítási környezetekben. A numerikus modellt az ausztrál Williams-folyóra alkalmaztuk. A téziszűzetben ezt a két kutatási célt és az azokkal kapcsolatos eredményeinket külön-külön ismertetem.



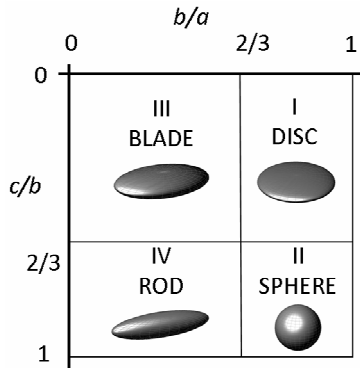
**1. ábra:** Balra: ősi folyómeder a Marson, melyet a Curiosity űrszonda fényképezett le 2012. szeptemberében. Jobbra: egy hasonló folyóvízi konglomerátum a Földön. Fotó: NASA/JPL-Caltech/MSSS és PSI, PIA16189.

## KAVICSFORMÁK MECHANIKAI SZEMLÉLETŰ OSZTÁLYOZÁSI RENDSZERE

### A kutatás előzményei

A geológiában számos alak-indexet és ezekre épülő osztályozási rendszert javasoltak a kavicsok morfológiájának leírására (*Wentworth 1922; Zingg 1935; Krumbein 1941; Sneed és Folk 1958; Dobkins és Folk 1970*), jelenleg is élénk vita tárgyát képezi, hogy ezek közül melyik a leginformatívabb rendszer (*Illenberger 1991, 1992a, 1992b; Blott és Pye 2008*). Ezek a klasszikus rendszerek mind hosszmeréseken alapulnak, közülük a legelterjedtebb az ún. *Zingg-féle* osztályozás (1935), amely a kavicsok alakját egy  $a > b > c$  tengelyhosszakkal rendelkező háromtengelyű ellipszoiddal közelíti,  $s$  a  $c/b$  és  $b/a$  tengelyarányok alapján négy osztályba sorolja a formákat

(2.ábra). A klasszikus alak-osztályozási rendszerek kétségkívül hasznosnak bizonyultak a gyakorlatban, ám a hosszmerések pontatlansága és a tengelyirányok egyértelmű beazonosításának nehézsége miatt több bizonytalanságot is hordoznak magukban. Emellett, az osztályok elválasztása egy önkényesen felvett paraméter létét teszi szükségessé, Zingg a  $2/3$  tengelyarányt választotta a 4 osztály elkülönítésére. Ahelyett, hogy a határ-tengelyarány értékét egy univerzálisan optimális konstansnak feltételeznénk, a klasszikus Zingg-osztályozás általánosítható, ha bevezetjük a  $0 \leq \rho \leq 1$  paramétert, mely az osztályokat elválasztó tengelyarányt jelöli.



**2. ábra:** Zingg-osztályok. A kavics alakját közelítő háromtengelyű ellipszoid tengelyhosszait  $a > b > c$  jelöli.

Disszertációmban egy teljesen új, mechanikai szemléletű osztályozási rendszert alkalmaztam kavicsok alakjának a leírására. Az új alkalmazás *Várkonyi és Domokos (2006a)* elméleti eredményére épít és a hosszmerések helyett a *statikai egyensúlyok megszámlálására* támaszkodik. A statikai egyensúlyok azok a pontok a kavics felületén, ahova a testet egy vízszintes, sík felületre letéve, az nyugalomban marad. 3D testek felszínén tipikusan 3 fajta egyensúlyt találunk: stabil egyensúlyt és az instabil egyensúly két típusát: instabil maximumot

illetve nyeregpontot. Az instabil maximumot egyszerűen instabil egyensúlynak fogjuk hívni. *Várkonyi és Domokos (2006a)* megmutatták, hogy a stabil és instabil egyensúlyok  $S$  illetve  $U$  száma alapján minden homogén, konvex test egyértelműen besorolható az  $(S,U)$  osztályba, a nyeregpontok számára nincsen szükség. Az  $(S,U)$  osztályt *elsődleges egyensúlyi osztálynak* hívjuk (3. ábra). A kocka például a  $(6,8)$  osztályba tartozik, mert mind a 6 lapján van egy-egy stabil egyensúly (a súlypontból mért távolságfüggvény lokális minimuma), és minden csúcsa egy instabil egyensúly (a súlypontból mért távolságfüggvény lokális maximuma). A *Gömböc (Várkonyi és Domokos 2006b)* az  $(1,1)$  osztályba tartozik.

$S \setminus U$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1									
2		E(III)							E(I)
3									
4									
5							E(II)		
6									
7		E(IV)							
8									
...									

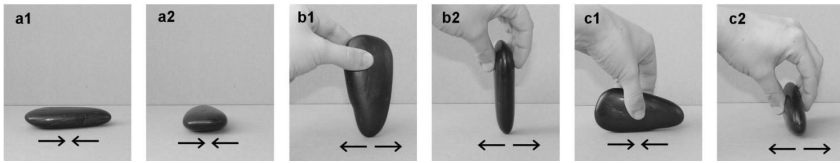
**3. ábra:** Elsődleges egyensúlyi osztályok. A sorok a stabil egyensúlyok számát ( $S$ ), az oszlopok az instabil egyensúlyok számát ( $U$ ) jelölik. A 4 egyszerűsített egyensúlyi osztályt ( $E$ -osztályt) a szürkített rész jelzi.

## Kutatási célok és eredmények

A disszertáció első felében ezt a mechanikai szemléletű osztályozási rendszert alkalmaztam kavicsok kategorizálására. A kutatómunka 3 fő kérdés köré épül:

- (1) Hordoz-e információt az elsődleges egyensúlyi osztály a kavicsok geometriájáról?
- (2) Megbízhatóan megszámolhatóak-e az egyensúlyok a gyakorlatban?
- (3) Lehet-e finomítani az elsődleges egyensúlyi osztályozáson?

Az (1)-es kérdésre az 1. tézis válaszol. Javasoltunk egy *egyszerűsített* egyensúlyi osztályozást (*E-osztályozást*, lásd 3. ábra) és bemutattuk, hogy az egyensúlyi pontok egyszerű *kézi kísérletek* segítségével megszámolhatóak (4. ábra). (Ezen kézi kísérletek megbízhatóságát a (2)-es kérdés tárgyalja). Az egyensúlyi osztályozás nem tartalmaz önkényesen megválasztott konstans vagy irányt, mint a klasszikus hossz méréses rendszerek, hiszen *egész számokra* épül. 1200, különböző geológiai helyszínekről begyűjtött kavics részletes statisztikai adatán keresztül bemutattuk, hogy az E-osztályok szorosan kapcsolódnak a kavics globális geometriájához, vagyis az egyensúlyok száma egy természetes indikátor, ami jól jellemzi a kavics alakját. Az E-osztályokat összehasonlítottuk a Zingg-osztályokkal és kimutattuk, hogy az E-osztályozás lényegében ugyanazt az információt tartalmazza, amit a Zingg-osztályozás. Ugyanakkor az új rendszer ennél részletesebb információval tud szolgálni, és alkalmas lehet arra, hogy speciális alak-jellegzetességekre fényt derítsen. Emellett egy szoros logaritmusos összefüggést is kimutattunk a stabil egyensúlyok átlagos száma és a kavicsok  $c/b$  aránnyal jellemezhető lapossága között. Ez az összefüggés szintén a klasszikus, hossz méréses rendszerek és az új, mechanikai alapú rendszer közötti szoros kapcsolatra utal.



**4. ábra:** A statikai egyensúlyok megszámlálása kézi kísérletben. a) Stabil egyensúly. b) Instabil egyensúly. c) Nyeregpont.

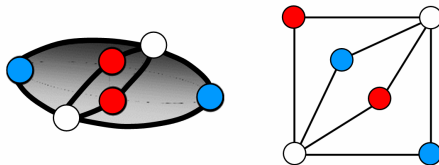
A (2)-es kérdéssel a 2. tézis foglalkozik. Bemutattuk, hogy az egyensúlyok tipikusan két jól elkülönült skálán jelentkeznek soklapú poliéderek, mint például kavicsok konvex burkának felületén: a *mikroszkópikus* egyensúlyok jól lokalizált csoportokba (*falkákba*) tömörülnek (5. ábra), a falkákat a kézi kísérletek során egy-egy *makroszkópikus* egyensúlyként érzékeljük. Ezt a jelenséget 300 db, 3D-ben, nagy pontossággal beszkenelt kavics adatának elemzésével igazoltuk. Miután számítógép segítségével azonosítottunk minden mikro-egyensúlyt, a kézi kísérleteket *szimuláltuk* a számítógépen (*Domokos, Sipos és Szabó 2012*), úgy, hogy bevezettünk egy  $\mu_0$  paramétert, mely a kézi kísérletező *pontosságát* jellemzi (azaz azt a hibát, hogy kézi kísérletek során a kísérletező nem tudja elkülöníteni a mikro-egyensúlyokat). Az eredmények igazolják a kézi kísérletek következetességét és megbízhatóságát, mert a  $\mu_0$  paraméter értéke *egyazon* személy esetén szűk tartományban mozog és a *különböző* kísérletezők között is csak kis mértékben változik. Ezek az eredmények igazolják az új, egyensúlyi alapú kavics-osztályozás gyakorlati alkalmazhatóságát.



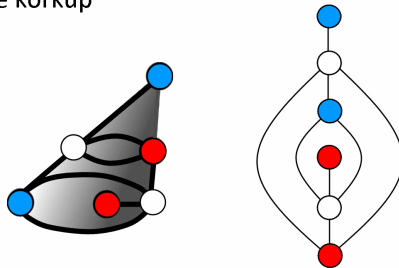
**5. ábra:** Hat stabil mikro-egyensúly egy kavicson, melyek egy makro-egyensúlyt (falkát) alkotnak.

Végül, a (3)-as kérdést a 3. tételben válaszoljuk meg. Megmutattuk, hogy az elsődleges egyensúlyi osztályok *másodlagos* osztályokra bonthatók az ún. *Morse–Smale-komplexus* topológiája alapján. A Morse–Smale-komplexus egy, a kavics felületére rajzolt gráffal szemléltethető: a gráf csúcsai az egyensúlyi pontok, a gráf élei pedig az egyensúlyi pontok közötti szomszédsági viszonyokat tükrözik (6. ábra) és ezeket az éleket a súlypontból mért távolságfüggvény gradiense definiálja. Bizonyítottuk (*Domokos, Lángi és Szabó 2013*), hogy minden másodlagos osztály nemüres, azaz minden, kombinatorikailag lehetséges, gömbre rajzolt Morse–Smale-komplexushoz található egy annak megfelelő homogén, konvex, merev test. Ezzel az eredménnyel nemcsak a homogén, konvex testek egy részletesebb rendszertanát hoztuk létre, hanem azt is beláttuk, hogy – elméletileg – bármely ilyen gráf felbukkanhat a természetben a kavicsalakok között.

Háromtengelyű ellipszoid



Ferde körkúp



**6. ábra:** A két lehetséges másodlagos egyensúlyi osztály az  $(S,U)=(2,2)$  elsődleges osztályon belül.

---

## KAVICSOK KOLLEKTÍV ALAKFEJLŐDÉSÉNEK NUMERIKUS SZIMULÁCIÓJA

### A kutatás előzményei

Míg a disszertáció első fele a kavicsok morfológiájának *leírásával* foglalkozik, második részében a kavicsok kopási folyamatok közötti *alakfejlődésével* foglalkozunk. Ezen vizsgálatok során a kavicsok klasszikus, hosszmeréseken alapuló leírására támaszkodunk, így az eredményeink közvetlenül összehasonlíthatóak a szakirodalomban található korábbi eredményekkel. A fő célunk, hogy nagy kavicspopulációk *kollektív* kopását kövessük különböző üledékes környezetekben. Erre a célra egy megfelelő eszköz a *Domokos és Gibbons (2012)* által nemrégiben publikált eredmény, az ún. *box egyenletek*. Ez a közönséges differenciálegyenlet-rendszer alkalmas arra, hogy nagy kavicspopulációk méret- és alakeloszlásának változását kövesse, a kavicsok közötti ütközéses kopás, a súrlódásos kopás és a méret szerinti szegregáció hatásainak figyelembevételével. Így a modell igen alkalmas arra, hogy valós üledékszállítási ill. üledéklerakódási környezetekben modellezze a kopási folyamatokat, így pl. a folyóvízi eróziót vagy a tengerparti abráziót. A disszertáció a folyóvízi környezetekre fókuszál: először kiegészítjük az eredeti box egyenleteket, implementáljuk őket (és néhány egyéb hatást) Matlab környezetben, majd az így létrehozott numerikus keretrendszert alkalmazzuk arra, hogy szimuláljuk a kavicsok folyásirányú méret- és alakfejlődését a Williams-folyóban (Hunter Valley, Ausztrália). Ugyanakkor az implementált keretrendszer flexibilis, így könnyen alkalmazható más üledékes környezetben zajló kavics-kopás modellezésére is, így jövőbeli terveink között szerepel, hogy más jellegű geológiai helyszíneket is vizsgáljunk.

A folyóvízi geomorfológia egyik élénken vitatott kérdése az ún. *downstream fining* jelenség, mely a legtöbb folyóban tapasztalható és a kavicsok folyásirányú méretcsökkenését takarja. Ezt a jelenséget a szakirodalomban kétféleképp is magyarázzák: az első elképzelés

szerint a méretcsökkenést döntően maguknak a kavicsoknak a *kopása* okozza; a második elképzelés szerint sokkal fontosabb szerepet játszik az ún. *szelektív szállítás*, mely szerint a kis szemcsék könnyebben mozgásba hozhatók és messzebbre szállítódnak a folyó mentén. Régóta élénk vita folyik arról, hogy melyik jelenség a domináns (pl. *Lewin és Brewer 2002; Surian 2002*), a legtöbb szerző a szelektív szállítás döntő hatását hangsúlyozza (pl. *Bradley és társai 1972; Ferguson és társai 1996; Seal és Paola 1995*), noha köztudott, hogy a folyók mentén a kavicsok görgetettsége (lekerekítettsége) jellemzően nő, ami világosan mutatja, hogy a kopás is jelen van. Emellett meglepően kevés olyan tanulmány található, amelyben a kavicsok méretének és alakjának változását együttesen követték le egy folyóban (pl. *Bradley és társai 1972; Mikos 1994*), noha az alak esetleges változása a folyó mentén egyértelműen utalhatna a kopás jelentőségére. Ezzel párhuzamosan, a folyóvízi szakirodalomban található modellek (pl. *Le Bouteiller és társai 2011; Attal és Lavé 2009; Parker 1991; Ferguson és társai 1996*) csak a kavicsok méretének fejlődését vizsgálják és túlnyomórészt a szelektív szállításra fókuszálnak, így a box egyenleteken kívül nincs olyan modell, ami a geometria kopás okozta fejlődését is képes lenne követni.

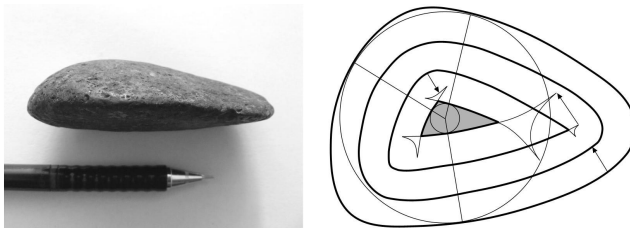
### **Kutatási célok és eredmények**

12 helyszínen gyűjtöttünk bazalt kavicsokat a Williams-folyó 96 km-es szakasza mentén, végigkövetve a kavicsok folyó menti alak- és méretváltozását. A terepi munka kapcsán a következő kérdésre keressük a választ:

- (4) A Williams-folyóban tapasztalható folyásirányú kavicsméretcsökkenés döntően a kopásnak vagy a szelektív szállítódásnak tulajdonítható?

A (4)-es kérdést a 4. tézisben válaszoljuk meg. Más folyók adatával összevetve, a Williams-folyóban tapasztalt viszonylag kis *méretcsökkenési együttható* (*diminution coefficient*) erősen arra utal,

hogy a kopás lényeges szerepet játszik a folyóban (Surian 2002; Morris és Williams 1999). A folyó mentén a kavicsok laposabbá és hosszúkásabbá válnak, valamint a folyó alsó szakaszán néhány különösen ritka kavicsalakat, ún. *aquafact*-eket (Kuenen 1947) találtunk (7. ábra). Ezek olyan koptatott kavicsok, melyek a *ventifact*-ekhez, azon belül az *ein-*, *zwei-* és *dreikanter* (Greeley és társai 2002) formákhoz hasonlóan éllel és lapokkal rendelkeznek. (A szél által koptatott hasonló formákat magyarul éleskavicsnak vagy sarkoskavicsnak hívják). A box egyenletek és az azok alapjául szolgáló Bloore-féle egyenletek (Bloore 1977) azt jósolják, hogy az ilyen formák relatíve kis szemcsékkel való folytonos ütközések során alakulnak ki (Domokos és Gibbons 2012; Domokos és társai 2009), ezért a terepi eredmények arra utalnak, hogy a folyó alsó szakasza mentén a homok koptató hatása jelentős. Az implementált numerikus keretrendszert és mindössze két, fizikai alapvetésű paramétert alkalmazva, sikerült rekonstruálnunk a folyásirányú méret- és alakfejlődést a Williams-folyóban. Az eredmények alapján a folyó mentén tapasztalt viszonylag gyenge folyásirányú méretcsökkenést a kopás önmagában is képes magyarázni. A szimulációban nemcsak az egész kavicspopuláció alakfejlődése, de az egyes individuális kavicsok alakjának fejlődése is követhető, ami egy érdekes jelenségre világít rá azzal kapcsolatban, hogy a kavicsok mérete hogyan befolyásolja az alakfejlődés irányát. A numerikus modell és a terepi mérések közötti igen jó egyezés alapján reméljük, hogy a kidolgozott keretrendszer még több jövőbeli, hasonló tanulmány alapjául szolgálhat.



**7. ábra:** Egy jellemző ún. *aquafact* a Williams-folyóból és az élék kialakulásának modellje (Domokos és társai 2009).

## TÉZISEK

Téziseimben 3 kavics-gyűjtemény statisztikai adataira hivatkozom. Ezek:

1. *A 24 európai kavicsminta*

24 kavicsminta, melyeket 11 európai helyszínről gyűjtöttük, minden minta 50 kavicsot tartalmaz, ami így összesen 1200 kavicsot jelent. A minták különböző geológiai ill. geomorfológiai környezetből származnak, így különféle üledékszállítási ill. üledéklerakódási környezetet, kopási folyamatot és kőzettípust képviselnek. Minden kavicson megmértem a közelítő ellipszoid  $a>b>c$  tengelyhosszait és megszámláltam az egyensúlyi pontokat.

2. *A 300 szkennelt kavics*

A 24 európai kavicsmintából 300 kavicsot beszkenneztünk 3D lézer szkennelvel.

3. *A 12 ausztrál kavicsminta*

12 kavicsminta, melyeket a Williams-folyó (Hunter Valley, Ausztrália) mentén gyűjtöttünk 12 helyszínen. Az átlagos mintanagyság 140 kavics volt; összesen 1626 kavicsot gyűjtöttünk, melyeken megmértem a közelítő ellipszoid  $a>b>c$  tengelyhosszait.

## 1. TÉZIS

(Domokos és társai 2010; Szabó és Domokos 2010; Domokos, Sipos és Szabó 2012)

Az *elsődleges egyensúlyi osztályokra* (Várkonyi és Domokos 2006a) építve egy *egyszerűsített osztályozást* (E-osztályozást) javasoltam kavicsok alakjának kategorizálására. A 24 európai kavicsminta statisztikai adatát felhasználva az E-osztályozást összehasonlítottam a klasszikus Zingg-osztályozással, úgy, hogy a Zingg-osztályozást egy  $p$

---

paraméter bevezetésével általánosítottam. Az eredmények alapján az alábbi megállapításokat tettem:

- 1.1.** Az általánosított Zingg-osztályokat elválasztó  $p$  paraméter  $p_{opt}$  optimális értéke, amely mellett a két osztályozási rendszer között a legnagyobb az egyezés, nem univerzális: jól lekopott kavicsoknál  $p_{opt}$  nagyobb (0.75 és 0.89 közötti), kevésbé lekopott kavicsok esetén  $p_{opt}$  kisebb (0.55 és 0.75 közötti).
- 1.2.** Az E-osztályok és az általánosított Zingg-osztályok közötti legjobb egyezés átlagosan 80% (10% szórással), vagyis az *egyszerűsített* egyensúlyi osztályozás döntően ugyanazt az információt hordozza, amit a klasszikus Zingg-rendszer.
- 1.3.** Szoros logaritmikus összefüggést ( $R^2=0.85$ ) mutattam ki a stabil makro-egyensúlyok átlagos száma és a kavicsok  $c/b$  aránnyal jellemezhető laposságának átlaga között. Ez az összefüggés szintén igazolja, hogy az egyensúlyi pontok száma szoros kapcsolatban áll a kavics globális geometriájával.

## 2. TÉZIS

(Domokos, Sipos és Szabó 2012; Domokos, Lángi és Szabó 2012)

A mikro- és makro-egyensúlyokat szétválasztó algoritmus (Domokos, Sipos és Szabó 2012) és a 300 scannelt kavics adatának felhasználásával szimuláltam a kézi kísérleteket a BME Szuperszámítógépen, azon hipotézis alapján, hogy az algoritmusban szereplő  $\mu_0$  paraméter a kísérletező egyensúlyok megszámlálása közbeni pontatlanságát méri. A kézi kísérletek és a számítógépes kísérletek eredményeit összehasonlítva az alábbi megállapításokat tettem, melyek igazolják a kézi kísérletek megbízhatóságát:

- 2.1.** 9 különböző személy kézi kísérletei alapján, a  $\mu_0$  értéke jellemzően nagyobb az instabil egyensúlyok esetén (átlagérték: 0.0082), mint stabil egyensúlyok esetén (átlagérték: 0.0016).

- 2.2.** Egyazon kísérletező esetén a  $\mu_0$  kis tartományban mozog és a kézi kísérletek jól modellezhetők ( $R^2=0.74-0.97$ ) a  $\mu_0$  átlagértékével ( $\bar{\mu}_0$ ). Vagyis, a kézi kísérletek konzisztensek és a  $\bar{\mu}_0$  érték jól jellemzi a kísérletező pontatlanságát.
- 2.3.** 9 különböző személy kézi kísérletei alapján, a  $\bar{\mu}_0$  érték csak kissé változik a különböző személyek között (átlagérték: 0.0049, szórás: 0.0019). Ezért a stabil és instabil egyensúlyok megállapított száma is csak kis mértékben változik személyről személyre: kis egyensúlyszámnál (átlag: 2.06) a szórás igen kicsiny (0.02) és nagyobb egyensúlyszámnál (átlag: 3.49) is elfogadható (0.46).

### 3. TÉZIS

(Domokos, Lángi és Szabó 2013)

Az elsődleges egyensúlyi osztályozást (Várkonyi és Domokos 2006a) tovább finomítottam: másodlagos osztályokat definiáltam a Morse–Smale-komplexus topológiája alapján. Minden, homogén, konvex testre rajzolt Morse–Smale-komplexus reprezentálható egy síkbarajzolt, 2-színezett négyszögelt multigráffal (Dong és társai 2006), ezt a gráfcsaládot jelölje  $\mathcal{Q}$ . Bizonyítottam, hogy a  $\mathcal{Q}$  gráfcsalád induktívan generálható a Gömböc (Várkonyi és Domokos 2006b) Morse–Smale-komplexusát reprezentáló 2-csúcsú gráfból kiindulva, ún. csúcshasítások (vertex splitting) sorozatát alkalmazva. Ezzel egyrészt általánosítottam Bagatelj (1989) ill. Negami és Nakamoto (1993) eredményét, mely a síkbarajzolt, színezetlen, egyszerű négyszögelt gráfok osztályára állítja ugyanezt. Másrészt ez a kombinatorikai állítás egy komplexebb tétel bizonyításának (Domokos, Lángi és Szabó 2013) első része. A tétel azt mondja ki, hogy minden másodlagos osztály nemüres, azaz minden  $\mathcal{Q}$ -beli gráfhoz található egy annak megfelelő homogén, konvex, merev test.

## 4. TÉZIS

(Szabó, Fityus és Domokos 2013)

A *box egyenletekre* (Domokos és Gibbons 2012) építve, numerikus modellt dolgoztam ki nagy kavicspopulációk kollektív alakfejlődésének szimulálására különböző üledékszállítási környezetekben. Ezt a flexibilis modellt és két paramétert felhasználva, rekonstruáltam a kavicsok folyásirányú alakfejlődését és méretcsökkenését a Williams-folyóban. A BME Szuperszámítógépen futtatott szimuláció és a 12 ausztrál kavicsminta eredményei közötti jó egyezés alapján az alábbi megállapításokat tettem:

- 4.1. A box egyenletek numerikus modelljét kiegészítettem azzal, hogy az ütközéses kopás során lehulló anyagot visszatápláltam a rendszerbe. Ilyen módon a homok méretű szemcsék koptató hatása, mely a Williams-folyóban különösen fontosnak bizonyult, közvetlenül szimulálható a modellben.
- 4.2. Noha a szakirodalom a legtöbb folyóban a *szelektív szállítás* domináns hatásának tulajdonítja a kavicsméret folyásirányú exponenciális csökkenését, a Williams-folyó példáján keresztül igazoltam, hogy kis *méretcsökkenési együttható* (*diminution coefficient*) esetén a *kopás* is képes magyarázni ezt a jelenséget.
- 4.3. Igazoltam, hogy a box egyenletek alapján állandó környezetben analitikusan megjósolt jelenség (Domokos és Gibbons 2012), mely során a kavics a kopás során előbb eltávolodik a gömbtől, majd visszafordul és végül mégis oda konvergál, valós üledékképződési környezetben is kimutatható.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az OTKA 72146 és 104601 számú pályázatai, illetve a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1–2010-0009 projekt támogatta.

## TÉZISEKHEZ KAPCSOLÓDÓ SAJÁT PUBLIKÁCIÓK

- Szabó T., Fityus S., Domokos G. (2013) Abrasion model of downstream changes in grain shape and size along the Williams River, Australia. *Bírálat alatt*
- Domokos G., Lángi Z., Szabó T. (2013) The genealogy of convex solids. *Bírálat alatt*. Preprint: <http://arxiv.org/abs/1204.5494>, 2012. április
- Domokos G., Lángi Z., Szabó T. (2012) On the equilibria of finely discretized curves and surfaces. *Monatshefte für Mathematik* **168**, 321–345
- Domokos G., Sipos A.Á., Szabó T. (2012) The mechanics of rocking stones: equilibria on separated scales. *Mathematical Geosciences* **44**, 71–89
- Szabó T., Domokos G. (2010) A new classification system for pebble and crystal shapes based on static equilibrium points. *Central European Geology*, **53**, 1–19
- Domokos G., Sipos A.Á., Szabó T., Várkonyi P. (2010) Pebbles, shapes, and equilibria. *Mathematical Geosciences*, **42**, 29–47

## EGYÉB PUBLIKÁCIÓ A DISSZERTÁCIÓ TÉMAKÖRÉBEN

- Kápolnai R., Domokos G., Szabó T. (2012) Generating spherical multiquadrangulations by restricted vertex splittings and the reducibility of equilibrium classes. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering, közlésre elfogadva*

## HIVATKOZÁSOK

- Ashcroft W. (1990) Beach pebbles explained. *Nature* **346**, 227
- Attal M., Lavé J. (2009) Pebble abrasion during fluvial transport: Experimental results and implications for the evolution of the sediment load along rivers. *Journal of Geophysical Research* **114**, F04023
- Bagatelj V. (1989) An inductive definition of the class of 3-connected quadrangulations of the plane. *Discrete Mathematics* **78**, 45–53
- Bloore F. J. (1977) The shape of pebbles. *Mathematical Geology* **9**, 113–122
- Blott S. J., Pye K. (2008) Particle shape: a review and new methods of characterization and classification. *Sedimentology* **55**, 31–63

- Bradley W. C., Fahnestock R. K., Rowekamp E. T. (1972) Coarse sediment transport by flood flows on Knik River, Alaska. *Geological Society of America Bulletin* **83**, 1261–1284
- Dobkins J.E., Folk R.L. (1970) Shape development on Tahiti-Nui. *Journal of Sedimentary Petrology* **40**, 1167–1203
- Domokos G., Gibbons G. W. (2012) The evolution of pebble size and shape in space and time. *Proceedings of the Royal Society A* **468**, 3059–3079
- Domokos G., Sipos A. Á., Szabó Gy. M., Várkonyi P. L. (2009) Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion. *The Astrophysical Journal Letters* **699**, L13
- Dong S., Bremer, P. T., Garland M., Pascucci V., Hart J. C. (2006) Spectral surface quadrangulation. *ACM Transactions on Graphics* **25**, 1057–1066
- Ferguson R. I., Hoey T., Wathen S., Werritty A. (1996) Field evidence for rapid downstream fining of river gravels through selective transport. *Geology* **24**, 179–182
- Greeley R., Bridges N. T., Kuzmin R. O., Laity J. E. (2002) Terrestrial analogs to wind-related features at the Viking and Pathfinder landing sites on Mars. *Journal of Geophysical Research* **107(E1)**, 5-1–5-22
- Illenberger W. K. (1991) Pebble shape (and size!). *Journal of Sedimentary Petrology* **61**, 756–767
- Illenberger W. K. (1992a) Pebble shape (and size!) – reply. *Journal of Sedimentary Petrology* **62**, 538–540
- Illenberger W. K. (1992b) Pebble shape (and size!) – reply. *Journal of Sedimentary Petrology* **62**, 1151–1155
- Krumbein W. C. (1941) Measurement and geologic significance of shape and roundness of sedimentary particles. *Journal of Sedimentary Petrology* **11**, 64–72
- Krynine P. D. (1960) On the antiquity of ‘sedimentation’ and hydrology. *Geological Society of America Bulletin* **71**, 1721–1726
- Kuenen P. H. (1947) Water-faceted boulders. *American Journal of Science* **245**, 779–783
- Le Bouteiller C., Naaïm-B. F., Mathys N., Lavé J. (2011) A new framework for modeling sediment fining during transport with fragmentation and abrasion. *Journal of Geophysical Research* **116**, F03002
- Lewin J., Brewer P. A. (2002) Laboratory simulation of clast abrasion. *Earth Surface Processes and Landforms* **27**, 145–164
- Lorang M., Komar P.D. (1990) Pebble shape. *Nature* **347**, 433–434

- Mikos M. (1994) The downstream fining of gravel-bed sediments in the Alpine Rhine River. *In: Dynamics and Geomorphology of Mountain Rivers*, edited by P. Ergenzinger and K. H. Schmidt, pp. 93–108, Springer-Verlag, Berlin
- Morris, P., Williams D. (1999) A worldwide correlation for exponential bed particle size variation in subaerial aqueous flows. *Earth Surface Processes and Landforms* **24**, 835–847
- Negami S., Nakamoto A. (1993) Diagonal transformations of graphs on closed surfaces. *Science Reports of the Yokohama National University, Section I.* **40**, 71–97
- Parker G. (1991) Selective sorting and abrasion of river gravel. I: theory. *Journal of Hydraulic Engineering* **117**, 131–147
- Rayleigh L. (1942) The ultimate shape of pebbles, natural and artificial. *Proceedings of the Royal Society A* **181**, 107–118
- Rayleigh L. (1944a) Pebbles, natural and artificial: their shape under various conditions of abrasion. *Proceedings of the Royal Society A* **182**, 321–334
- Rayleigh L. (1944b) Pebbles of regular shape and their production in experiment. *Nature* **154**, 161–171
- Richter J.P. (1939) The literary works of Leonardo da Vinci, compiled and edited from the original manuscripts. Part 2, Oxford University Press, London, pp. 165–166
- Seal R., Paola C. (1995) Observations of downstream fining on the North Fork Toutle River near Mount St. Helens, Washington. *Water Resources Research* **31**, 1409–1419
- Sneed E., Folk R. L. (1958) Pebbles in the lower Colorado River, Texas, a study in particle morphogenesis. *Journal of Geology* **66**, 114–150
- Surian N. (2002) Downstream variation in grain size along an Alpine river: analysis of controls and processes. *Geomorphology* **43**, 137–149
- Várkonyi P.L., Domokos G. (2006a) Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincaré–Hopf Theorem. *Journal of Nonlinear Science* **16**, 255–281
- Várkonyi P.L., Domokos G. (2006b) Mono-monostatic bodies: the answer to Arnold’s question. *The Mathematical Intelligencer* **28**, 34–38
- Wentworth C. K. (1922) The shapes of beach pebbles. *US Geological Survey Professional Paper* **131-C**, 75–83
- Yazawa T. (1990) More pebbles. *Nature* **348**, 398

Zingg T. (1935) Beitrag zur Schotteranalyse. *Schweizerische Mineralogische und Petrologische Mitteilungen* **15**, 39–140