Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék

Tézisfüzet

Időkésések stabilizáló és destabilizáló hatásai nemlineáris dinamikai rendszerekben

Szaksz Bence Máté

Témavezető:
Stépán Gábor, DSc

Benyújtva a
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Pattantyús-Ábrahám Géza Gépészeti Tudományok Doktori Iskola
számára

Budapest, 2024

Bevezetés

Motiváció

Az időkésés számos dinamikai rendszerben jelen van; ilyen esetekben a rendszer múltbeli állapota befolyásolja annak pillanatnyi viselkedését, állapotának változását. Ökölszabály, hogy az időkésés destabilizáló hatású, de speciális esetekben csillapítást is biztosíthat. Az időkésés gyakran bonyolult dinamikai viselkedéshez vezet, különösen, ha meghatározó nemlinearitások is jelen vannak.

Ahogy az ipar egyre összetettebb és érzékenyebb termékeket gyárt és igényel, egyre fontosabbá válik a rendszerek nemlineáris dinamikai viselkedésének megértése, tervezése. Nemlineáris dinamikai rendszereknek egyszerre több egyensúlyi helyzetük és/vagy öngerjesztett rezgésük lehet, valamint kaotikus vagy tranziens kaotikus viselkedést is mutathatnak, amelyek azonosítása fontos a rendszer kívánt működésének biztosítása érdekében. Az öngerjesztett rezgések (határciklusok) a dinamikus stabilitás határán, az úgynevezett Hopf bifurkációkon keresztül jelennek meg. Szuperkritikus Hopf bifurkációról beszélünk, ha egy stabil határciklus keletkezik az instabil egyensúlyi helyzet körül, míg szubkritikus Hopf bifurkációról ha egy instabil határciklus jelentkezik a stabil egyensúlyi helyzet körül.

Mérnöki szempontból a szubkritikus eset fontosabb, mivel ekkor kellően nagy perturbációk hatására a rendszer a kívánt lokálisan stabil egyensúlyból egy nem kívánt állapotba válthat át, ami meghibásodásokhoz és balesetekhez vezethet. Az időkésés jelenléte gyakran vezet szubkritikus Hopf bifurkációkhoz, azonban a késleltetés és/vagy a nemlineáris paraméterek megfelelő hangolásával a jelentkező határciklusok kritikussága megváltoztatható.

Digitálisan szabályozott rendszereknél a mintavételezés időben periodikus időkéséshez vezet. Ez a fűrészfog jelleggel változó időkésés a kerekítési hatásokkal vagy más nem-sima dinamikával (például fuzzy szabályozással) együtt kaotikus vagy tranziens kaotikus mozgásokhoz vezethet. Esetenként a tranziens káosz nem kerülhető el; ekkor célszerű meghatározni a tranziens kaotikus rezgések várható élettartamát, és a szabályozási paramétereket olyan optimális értékre hangolni, amely a legrövidebb lecsengési időt biztosítja.

A disszertáció áttekintése

A dolgozatban vizsgált oszcilláló mechanikai rendszerek mindegyikében időbeli késleltetés jelentkezik.

A mérnöki gyakorlatban egyes gépészeti rendszerek szabályozását gyakran az időkésleltetést figyelmen kívül hagyó visszacsatolással tervezik, és a nagyfrekvenciás dinamika sincs modellezve. Mindkét elhanyagolás nehézségeket okozhat, és hosszadalmas erősítési tényező hangolást igényel a váratlan és nem kívánt rezgések jelentkezése miatt. A dolgozat két reprezentatív példát tárgyal; ezek a rugalmas robotkar pozíciószabályozása valamint az ingát szállító kocsi pozíciószabályozása. A két rendszer dimenziótlan linearizált mozgásegyenlete azonos alakra hozható; az elvégzett lineáris stabilitásvizsgálat felváltva eltűnő és újra megjelenő stabil paramétertartományokat mutat. Figyelembe véve a Coulomb-súrlódást a robotkar hajtásláncában, optimális szabályozási paraméterbeállítással minimalizálható a pozicionálási hiba (*1. Tézis*).

A lineáris viselkedéssel ellentétben a két modell nemlineáris dinamikája jelentősen különbözik egymástól. Mindkét rendszer esetén elvégezhető egy végtelen dimenziós központi sokaság redukciót, amelyet egy Hopf-bifurkációs számítás követ. A keletkező öngerjesztett rezgések amplitúdójának és frekvenciájának számítását mutatja be a dolgozat második fejezete, elősegítve a szabályozásban használt erősítési tényezők gyors és pontos hangolását (*2. Tézis*).

A késleltetési hatások még jelentősebbek emberek által szabályozott folyamatokban, például nehéz járművek vontatásakor vagy ember vezette járművek önvezető autóval történő felvezetése esetén. Ezekben a példákban a rendszerek egyidejűleg két külön szabályozásnak vannak kitéve, ami bonyolult dinamikához vezet. A dolgozat harmadik fejezete egy mechanikai járművontatási modellt mutat be, ahol mind a vontató, mind a vontatott járművet vezető személy időkéséssel szabályozza saját járművét. A rugalmas vonórudat, amellyel a két jármű össze van kötve, egy rugó modellezi; a vontató jármű vezetője a vontatás sebességére szabályoz, míg a vontatott járműben ülő személy úgy próbálja használni a féket, hogy a vonórúdban állandó nagyságú húzóerő ébredjen. A lineáris stabilitásvizsgálat eredményei alapján meghatározásra kerül egy ajánlott vonórúd-merevségi tartományt, amely stabil mozgást eredményez (*3. Tézis*).

Emberi vezető automatizált felvezetése esetén a vonórudat virtuális kapcsolat helyettesíti. A leegyszerűsített jármű követési modellben egy önvezető jármű halad egy ember vezette jármű előtt; az önvezető jármű egyrészt egy adott referencia sebességre szabályoz, másrészt figyelembe veszi a járművek közötti sebességkülönbséget is, míg az emberi vezető dinamikáját az általánosított Bando modell írja le, amely szerint a vezető figyelembe veszi a követési távolságot és a sebességkülönbséget. A rendszer analitikus vizsgálatát és az azt követő környezetszimulációs (human-in-the-loop) kísérletek eredményeit mutatja be a dolgozat negyedik fejezete. A kísérletek során a MATLAB környezetben írt program az emberi vezető szemszögéből mutatja az úton előtte haladó önvezető járművet, míg az emberi vezető gáz és fék pedálok használatával szabályozza a követő jármű gyorsulását. Az elméleti eredmények jó egyezést mutattak a mérésekkel; ezek alapján meghatározásra kerülnek az önvezető jármű azon erősítési tényező kombinációi, amelyek megfelelő felvezetést biztosítanak (*4. Tézis*).

Instabil rendszerek digitális szabályozása esetén gyakran előfordul kaotikus, illetve tranziens kaotikus rezgés. A dolgozat ötödik fejezete egy polírozógép fuzzy szabályozásának dinamikáját vizsgálja, amikor a gép és a munkadarab között destabilizáló hatású Stribeck csillapítás van jelen. A rendszer dinamikáját egy 1 dimenziós szakaszosan lineáris leképezés írja le, ami bizonyos paraméterek esetén kaotikus, tranziens kaotikus, vagy még bonyolultabb, úgynevezett beágyazott tranziens kaotikus mozgást eredményez. A tranziens kaotikus viselkedést vizsgálva zárt kifejezést adható a kaotikus repeller elhagyásához szükséges iterációs szám várható értékére és szórására. A tranziens kaotikus és a beágyazott tranziens kaotikus paramétertartományon futtatott numerikus szimulációk azt mutatták, hogy a kettő határán minimális az átlagos szökési idő (*5. Tézis*).

Végül a hatodik fejezet ismerteti a spektrális részsokaságok koncepciójának kiterjesztését nemlineáris időkéséses rendszerekre, és zárt alakú kifejezéseket tartalmaz az invariáns részsokaságokra valamint a hozzájuk tartozó redukált dinamikákra. A modell redukciós technika lehetővé teszi a meghatározó nemlineáris dinamika vizsgálatát, és így a határciklusok pontosan közelíthetőek közvetlenül a kívánt szabályozási paraméterek mellett (*6. Tézis*). Az algoritmus egy hatékony eszköz a lokálisan stabil mérnöki rendszerek külső zavarokkal szembeni robusztusságának becsléséhez.

Tézisek

Oszcilláló mechanikai rendszerek pozíciószabályozása

Felállítottam egy rugalmas robotkar késleltetett pozíciószabályozásának egyszerűsített modelljét. A robotkar első lengésképét jelképező mechanikai modell két blokkból áll, amelyeket egy rugó köt össze. A pozicionáláshoz szaturáló kollokált proporcionális-derivatív szabályozó erőt alkalmazunk, míg a kar másik végére rögzített végszerszám nagyfrekvenciás dinamikát visz a rendszerbe. A lineáris stabilitás vizsgálat azt mutatta, hogy az időkésést vagy a rugómerevséget növelve a proporcionális és a derivatív erősítési tényezők síkjában található stabil tartomány újra és újra eltűnik majd feltűnik. A hajtásláncban mindig előforduló súrlódást figyelembe véve, meghatároztam egy optimális szabályozási erősítési tényező kombinációt rögzített időkésés esetére, ami minimalizálja a pozicionálási hibát. A lineáris vizsgálat után megvizsgáltam a szabályozóerő szaturációjának hatását, és megállapítottam, hogy a stabilitási határon létrejövő Hopf bifurkációk mindig szuperkritikusak.

1. Tézis

Tekintsük egy rugalmas robotkar késleltetett kollokált proporcionális-derivatív pozíciószabályozását, amikor az aktuátor által kifejtett erő merőleges a robotkarra. Amennyiben az első lengéskép k modális merevsége rögzített, akkor az erőszabályozás K_p proporcionális erősítési tényezője növelhető az időkésés csökkentésével. Rögzített τ időkésés mellett a rugómerevség és az erősítési tényező alábbi választásával minimalizálható a C Coulomb súrlódó erő mellett jelentkező δ_min pozicionálási hiba:

$$k = 12.4\frac{m_2}{\tau^2}\,, \quad K_\mathrm{p} = 1.16\frac{m_1}{\tau^2} \quad \Rightarrow \quad \delta_\mathrm{min} = 0.86\frac{C}{m_1}\tau^2\,,$$

ahol m_1 és m_2 a rugalmas kar modális tömegei.

Kapcsolódó publikáció: [1]

A rugalmas robotkar két szabadsági fokú linearizált modelljéhez dinamikai szempontból analóg rendszert kaptam, amikor egy ingát szállító kocsi kollokált pozíciószabályozását vizsgáltam. Ebben a rendszerben egy proporcionális-derivatív szabályozóval van visszacsatolva a kocsi pozíciója és sebessége, miközben az aktuátor ugyanerre a testre fejt ki erőt. A kapcsolódó dimenziótlan karakterisztikus egyenlet megegyezik a robotkar vizsgálata során kapott egyenlettel; így a szabályozási paraméterek síkjában megjelenített stabilitási diagramok újra és újra eltűnő és feltűnő stabil tartományokat tartalmaznak. Elvégeztem egy végtelen dimenziós központi sokaság redukciót, amely után Hopf bifurkációs számítással zárt alakú algebrai kifejezést kaptam a keletkező öngerjesztett rezgések amplitúdójára. Az eredményeket következőképpen lehet összefoglalni.

2. Tézis

Tekintsük egy egyenes sín mentén mozgó test időkésleltetett kollokált pozíciószabályozását miközben egy inga van hozzárögzítve. A szabályozási paraméterek megfelelő megválasztásával stabilizálható a rendszer, ha a $\bar{\tau}$ dimenziótlan időkésés kielégíti az alábbi feltételeket:

$$\bar{\tau} \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}\,, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad k \in \mathbb{N}^+\,, \quad \textbf{vagy} \quad \frac{\tan\bar{\tau}}{\bar{\tau}} > 1\,.$$

Ekkor a k_p dimenziótlan proporcionális erősítési tényező és a k_d derivatív erősítési tényező kritikus értékei a következő alakot veszik fel:

$$k_{\mathrm{p,cr}}(\omega) = \left(1 - \frac{m\bar{\tau}^2}{(1+m)\omega^2 - \bar{\tau}^2}\right)\omega^2\cos\omega\,,$$
$$k_{\mathrm{d,cr}}(\omega) = \left(1 - \frac{m\bar{\tau}^2}{(1+m)\omega^2 - \bar{\tau}^2}\right)\omega\sin\omega\,,$$

ahol ω jelöli az öngerjesztett rezgések dimenziótlan szögsebességét, m a teher és a kocsi tömegaránya. Rögzített l hosszúságú inga esetén keletkező stabil vagy instabil rezgések közelítő A amplitúdóját meghatározza a következő zárt alakú kifejezés:

$$A = \sqrt{-\frac{\mathrm{Re}\lambda'}{\Delta}(k_\mathrm{p} - k_{\mathrm{p,cr}})}\,,$$

ahol

$$\mathrm{Re}\lambda' = \frac{b(\omega)\sin\omega - a(\omega)\cos\omega}{2(a^2(\omega)+b^2(\omega))}\,,$$

$$\Delta = \frac{m\omega^9\left(\bar{\tau}^2-\omega^2\right)\left(\omega-\frac{\sin(2\omega)}{2}\right)\left(3\frac{\bar{\tau}^2}{1+m}-4\omega^2\right)}{32l^2\left(\frac{\bar{\tau}^2}{1+m}-\omega^2\right)^5\left(a^2(\omega)+b^2(\omega)\right)}\,,$$

és

$$a(\omega) = \frac{1}{2}\omega\left(1-\frac{m\bar{\tau}^2}{(1+m)\omega^2-\bar{\tau}^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin(2\omega)-\omega\right)\,,$$

$$b(\omega) = \omega+\frac{m\omega\bar{\tau}^4}{\left((1+m)\omega^2-\bar{\tau}^2\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{m\bar{\tau}^2}{(1+m)\omega^2-\bar{\tau}^2}\right)\omega\sin^2\omega\,.$$

Kapcsolódó publikációk: [1], [2], [3]

Ember vezette járművek vontatása

Megvizsgáltam ember vezette járművek vontatásának egyszerűsített mechanikai modelljét, amiben a járműveket összekötő vonórudat rugalmasnak tekintettem. A vontató jármű vezetője szabályozza a vontatás sebességét, míg a vontatott járműben ülő személy törekszik úgy fékezni, hogy a vonórúdban állandó nagyságú húzóerő ébredjen. Mindkét szabályozó erő állandó késleltetésnek van kitéve, amely a vezetők reakcióidejét reprezentálja. Routh redukciót alkalmaztam, hogy levezessem a mozgásegyenletek legtömörebb formáját, ami másod- és elsőrendű késleltetett differenciálegyenletek részlegesen csatolt rendszeréhez vezetett. A lineáris stabilitásvizsgálat azt mutatta, hogy az időkésést vagy a rendszer saját-körfrekvenciáját növelve a stabil tartomány újra és újra eltűnik és feltűnik. Az eredmények alapján kimondható az alábbi tézis.

3. Tézis

Az emberi szabályozású járművontatás egyszerűsített (csillapítatlan) mechanikai modelljében nem létezik gyakorlati szempontból releváns stabil tartomány azon kritikus paraméterkombinációknál, ahol az időkésés a szabályozatlan rendszer periódusidejének felével vagy ennek a fél periódusidőnek a páratlan számú többszöröseivel egyezik meg. Amennyiben nem célszerű puha vonórudat alkalmazni, a rúd k merevségét az alábbi értékre ajánlott beállítani:

$$\frac{\pi^2}{\tau^2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ll k \lessapprox k_{\text{opt}} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,,$$

ahol τ jelöli a vezetők reakcióidejét, míg m_1 a vontatott és m_2 a vontató jármű tömege.

Kapcsolódó publikációk: [4], [5], [6]

Forgalomszabályozás önvezető felvezető járművel

Megvizsgáltam az önvezető felvezető járművel történő forgalomszabályozás legegyszerűbb esetét, amikor egy önvezető jármű halad egy ember vezette jármű előtt. Az önvezető jármű egyrészt egy adott referencia sebességre szabályoz, másrészt figyelembe veszi a járművek relatív sebességét is. A releváns időkésések figyelembevételével meghatároztam a rendszer- és húrstabilitási tulajdonságokat és stabilitási térképeket készítettem különböző időkésés kombinációkra. Az elméleti eredmények igazolására és az emberi vezetői modell paramétereinek becslésére kidolgoztam egy környezetszimulációs mérési összeállítást. A mérések során 9 személy végezte el ugyanazt a vezetési feladatot, mindannyian az önvezető jármű szabályozási erősítési tényezőinek 79 különböző kombinációjára. A mérési adatok felhasználásával becslést adtam az emberi vezető modelljének paramétereire a söpréses legkisebb négyzetek módszerével. A kísérlet jó egyezést mutatott az elméleti rendszerstabilitási határokkal.

4. Tézis

Tekintsük egy ember vezette jármű övezető járművel történő felvezetését, amikor az önvezető jármű nem csak egy referenciasebességre szabályoz, hanem figyelembe veszi az ember által vezetett követő jármű sebességét is. Az önvezető jármű $\hat{\beta}$ előretekintő erősítési tényezőjét enyhén nagyobb értékre ajánlott hangolni, mint a pozitív β_{-1} visszatekintő erősítési tényezőt, miközben az alábbi feltételnek teljesülnie kell a stabilitáshoz:

$$\hat{\beta} + \beta_{-1} < \frac{\pi}{2\sigma},$$

ahol σ az önvezető jármű időkésése. A környezetszimulációs mérések azt mutatták, hogy nagy $\hat{\beta}/\beta_{-1}$ erősítési tényező arány esetén az önvezető jármű pontosan követi az előírt referenciasebességet, míg az emberi vezető nem követi megfelelően simán az önvezető járművet; ezzel ellentétben, kis erősítési tényező arány esetén az önvezető jármű megfelelően sima felvezetést biztosít az emberi vezetőnek, viszont a járművek sebessége jelentősen eltér a referenciasebességtől.

Kapcsolódó publikációk: [7], [8]

Polírozógép fuzzy szabályozása

Megvizsgáltam egy polírozógép fuzzy szabályozásának lehetséges mikrokaotikus viselkedését a mintavételezés hatásának figyelembe vételével. Bizonyos paraméterek esetén létrejöhet mind kaotikus, mind tranziens kaotikus mozgás. Meghatároztam a fuzzy szabályozás paramétereinek kritikus értékeit, amelyeknél a rendszer dinamikájának jellege megváltozik.

Tranziens kaotikus viselkedés esetén a zérus egyensúlyi helyzet globálisan stabil marad, de a rendszer egy káosz jellegű tranziens mozgást végez mielőtt az egyensúlyi helyzetbe jutna. Zárt alakú kifejezéseket adtam a kaotikus repeller elhagyásához szükséges iterációs szám várható értékére és szórására, illetve bebizonyítottam, hogy a repeller elhagyásához szükséges átlagos iterációs szám független a dimenziótlan Coulomb súrlódástól. A numerikus szimulációk jó egyezést mutattak az átlagos iterációs szám értékének és szórásának a tranziens kaotikus tartományban végzett analitikus becslésével, továbbá a szimulációk azt is megmutatták, hogy az átlagos iterációs szám és ennek megfelelően az átlagos szökési idő minimuma a tranziens kaotikus és a beágyazott tranziens kaotikus tartományok határán található.

5. Tézis

Tekintsük egy polírozógép trapéz alakú tagsági függvényekre épülő fuzzy szabályozását időbeli mintavételezéssel. A triviális egyensúlyi helyzet globálisan stabil, ha

$$a - S - 1 < p \leq a - S\,, \quad \textbf{és} \quad q < \frac{S}{a-1}\,,$$

ahol a a Stribeck súrlódási karakterisztikából adódó dimenziótlan rendszer instabilitási paraméter, S a dimenziótlan Coulomb súrlódás a hajtásláncban, p a szabályozás dimenziótlan erősítési tényezője, és q a tagsági függvény paraméter.

Amennyiben a tagsági függvény paraméter a $q > S/(a-1)$ értéket veszi fel, miközben a dimenziótlan erősítési tényező a

$$\frac{a}{a-1}(a - S - 1) < p \leq a - S$$

intervallumba van hangolva, kaotikus, tranziens kaotikus, vagy még bonyolultabb, úgynevezett beágyazott tranziens kaotikus tartományok

léteznek a zérus egyensúlyi helyzet mellett. A tranziens káosz várható időtartama akkor a legrövidebb, ha a tagsági függvény paraméter a következő értékre van hangolva

$$q = \frac{S}{a-1} + \frac{p}{a^2}\,. \tag{1}$$

Kapcsolódó publikáció: [9]

Spektrális alsokaságok időkésleltetett rendszerekben

Kiterjesztettem a spektrális alsokaságok (spectral submanifolds, röviden SSM) koncepcióját nemlineáris időkésleltetett differenciálegyenletek modellredukciójának elvégzésére. Az algoritmus a késleltetett rendszer dinamikáját a végtelen dimenziós fázistérből egy alacsony dimenziós invariáns sokaságra vetíti, amelyen a mozgás meghatározó része történik.

Meghatároztam a spektrális alsokaságokat és a hozzájuk tartozó releváns redukált dinamikákat mind egy valós domináns sajátérték, mind egy komplex-konjugált domináns sajátértékpár esetére. Utóbbi esetben az algoritmus lehetővé teszi az öngerjesztett rezgések pontos közelítését közvetlenül a kívánt paraméterértékek mellett, amelyek távol lehetnek a megfelelő Hopf bifurkációs határtól.

Releváns $\lambda_{1,2}$ komplex-konjugált sajátértékek esetén az időkésleltetett SSM algoritmus lehetővé teszi a spektrális alsokaság zárt alakban történő kifejezését, míg a hozzá tartozó redukált dinamikát a

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\overline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 z + \beta_{21} z^2 \overline{z} \\ \overline{\lambda}_1 \overline{z} + \overline{\beta}_{21} z \overline{z}^2 \end{bmatrix}$$

normál formával lehet leírni.

Határciklus létezik, ha

$$\frac{\mathrm{Re}\lambda_1}{\mathrm{Re}\beta_{21}} < 0\,;$$

a kialakuló öngerjesztett rezgés instabil, ha $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$ és stabil, ha $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$ miközben $\mathrm{Re}\lambda_{3,4,\dots} < 0$. Továbbá a $z(t) = \hat{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ határciklus amplitúdója közelíthető a

$$\hat{\rho} = \sqrt{-\frac{\mathrm{Re}\lambda_1}{\mathrm{Re}\beta_{21}}}\,,$$

kifejezéssel, míg a periodikus mozgás szögsebességének közelítő értéke

$$\omega = \mathrm{Im}\lambda_1 - \frac{\mathrm{Im}\beta_{21}}{\mathrm{Re}\beta_{21}}\mathrm{Re}\lambda_1\,.$$

6. Tézis

Tekintsük a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$$

n-dimenziós sima nemlineáris dinamikai rendszert konstans τ időkésés mellett, mikor a linearizált rendszer komplex konjugált domináns sajátértékei a λ_1 és $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ értékeket veszik fel. A kidolgozott késleltetett SSM számítás egy zárt alakú algoritmus, amely a rendszer végtelen dimenziós dinamikáját arra a $\lambda_{1,2}$ sajátértékekhez tartozó spektrális alsokaságra vetíti, amelyen a mozgás meghatározó, véges dimenziójú része történik.

A

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = f_{1000}x(t) + f_{0100}\dot{x}(t) + f_{0010}x(t-\tau) + f_{0001}\dot{x}(t-\tau)\\ + \sum_{2\le j+k\le 3} f_{kl}x^j(t-\tau)\dot{x}^k(t-\tau)\end{aligned}$$

késleltetett nemlinearitásokkal rendelkező egy szabadsági fokú dinamikai rendszer esetén a β_{21} normálalak együttható a következő:

$$\begin{aligned}\beta_{21} = &\frac{1}{2\lambda_1 - f_{0100} + (\tau f_{0010} + f_{0001}(\lambda_1\tau - 1))\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau}}\\ &\times\Bigg(\frac{\mathrm{e}^{-(4\lambda_1+\overline{\lambda}_1)\tau}}{\det(\boldsymbol{\Delta}(2\lambda_1))}(2f_{20} + f_{11}(2\lambda_1+\overline{\lambda}_1) + 4f_{02}\lambda_1\overline{\lambda}_1)(f_{20} + f_{11}\lambda_1 + f_{02}\lambda_1^2)\\ &\quad + \frac{\mathrm{e}^{-(3\lambda_1+2\overline{\lambda}_1)\tau}}{\det\big(\boldsymbol{\Delta}(\lambda_1+\overline{\lambda}_1)\big)}(2f_{20} + f_{11}(2\lambda_1+\overline{\lambda}_1) + 2f_{02}(\lambda_1^2 + \lambda_1\overline{\lambda}_1))\\ &\quad \times(2f_{20} + f_{11}(\lambda_1+\overline{\lambda}_1) + 2f_{02}\lambda_1\overline{\lambda}_1)\\ &\quad + \mathrm{e}^{-(2\lambda_1+\overline{\lambda}_1)\tau}(3f_{30} + f_{21}(2\lambda_1+\overline{\lambda}_1) + f_{12}(2\lambda_1\overline{\lambda}_1 + \lambda_1^2) + 3f_{03}\lambda_1^2\overline{\lambda}_1)\Bigg),\end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{\Delta}(\lambda) = \lambda\mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{R}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$ a linearizált rendszer karakterisztikus mátrixa.

A kidolgozott algoritmus nagyobb szabadsági fokú késleltetett oszcillátorokra is alkalmazható; információt ad a lehetséges öngerjesztett rezgések létezéséről, stabilitásáról, azok amplitúdójáról és frekvenciájáról.

Kapcsolódó publikációk: [10], [11]

Hivatkozások

[1] B. Szaksz és G. Stepan. „Delay-induced bifurcations in collocated position control of an elastic arm”. *Nonlinear Dynamics* 107.2 (2022), 1611–1622. old.

[2] B. Szaksz és G. Stepan. „Collocated position control of oscillatory system in presence of delay”. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference.* 83914. köt. American Society of Mechanical Engineers. 2020, V002T02A048.

[3] B. Szaksz és G. Stepan. „Nonlinear oscillations in delayed collocated control of pendulum on trolley”. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference.* 86304. köt. American Society of Mechanical Engineers. 2022, V009T09A032.

[4] B. Szaksz és G. Stepan. „Delay effects in the dynamics of human controlled towing of vehicles”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 18.6 (2023), 61003. old.

[5] B. Szaksz és G. Stepan. „Stability charts of a delayed model of vehicle towing”. *IFAC-PapersOnLine* 54.18 (2021), 64–69. old.

[6] B. Szaksz és G. Stepan. „Emberi reakcióidő hatása a járművontatás stabilitására: The effect of human reaction time on the stability of vehicle towing”. *Nemzetközi Gépészeti Konferencia–OGÉT* (2022), 256–260. old.

[7] B. Szaksz, G. Orosz és G. Stepan. „Guided control of a human driver via an automated vehicle”. *IFAC-PapersOnLine* 56.2 (2023), 899–904. old.

[8] B. Szaksz, G. Orosz és G. Stepan. „Nonlinear guidance of a human driver via an automated vehicle”. *IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Design of Mechanical Systems Across Different Length/Time Scales.* [to appear]. Springer.

[9] B. Szaksz és G. Stepan. „Transient chaotic behavior of fuzzy controlled polishing processes”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 32.9 (2022), 93112. old.

[10] B. Szaksz, G. Orosz és G. Stepan. „Spectral submanifolds in time delay systems”. *Nonlinear Dynamics* (2024). [under review].

[11] B. Szaksz, G. Orosz és G. Stepan. „Reduction to spectral submanifolds in guided car-following with time delay”. *IFAC-PapersOnLine* (2024). [under review].