



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Villamosságtan Tanszék

Ph.D. ÉRTEKEZÉS

**A VILLAMOS ERŐTÉR MEGHATÁROZÁSA A
TÉRTÖLTÉSEK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL**

írta:
Barbarics Tamás

Budapest
2002.

I. Köszönet nyilvánítás

Ez a dolgozat az összegzése az elmúlt nyolc év során az R -függvényeknek a lineáris és nemilineáris elektromágneses erőterek numerikus analízisében való felhasználása terén folytatott tudományos kutatómunkámnak.

Itt szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek a dolgozatom elkészítésében.

Elsősorban köszönöm családomnak, Nagymamámnak, Békési Istvánnénak, Szüleimnek, Édesanyámnak, Dr. Békési M. Magdolnának és Édesapámnak, Barbarics Tamásnak, feleségemnek Dr. Ratkóczi Lillának és fiamnak, Máténak, hogy sok türelemmel, kitartással és szeretettel voltak irántam a kutatásaim során.

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Dr. Iványi Miklósnénak, hogy felhívta a figyelmemet az R -függvényekkel való térszámítás lehetőségeire, az általa biztosított lehetőségre, amely segítségével a kutatásaimmal megjelenhettem a nemzetközi tudományos élet kapujában, valamint munkám során nyújtott önzetlen és áldozatkész segítségéért.

Köszönettel tartozom a tudományos kutatómunkám során kapcsolatba került partnereimnek, Kis Péternek, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai kar doktoranduszának a feladatok elvégzése során nyújtott segítségéért, Dr. Fodor György professzornak a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elméleti Villamosságтан tanszék oktatójának és Dr. Berta István professzornak, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Nagyfeszültségű Technika és Berendezések tanszék tanszékvezetőjének a hasznos tanácsaikért, Dr. Toshihisa Honma professzornak és Dr. Hajime Igarashi docensnek, a sapporoi Hokkaido University-ről, hogy lehetővé tették egy tanulmányút keretei között az együtt gondolkodást, Dr. Adolf J. Schwab professzornak, Dr. Ansgar Meroth és Dr. Jürgen Miller tanársegédeknek a Karlsruhei Műszaki Egyetemről az egyetemükön elvégzett mérésekért.

Végezetül, de nem utolsó sorban köszönetemet fejezem ki Dr. Veszely Gyula professzor úrnak a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elméleti Villamosságтан tanszék tanszékvezetőjének a tanszéken végzett kutatómunka lehetőségéért és a tanszék oktatóinak és dolgozóinak, akik segítséget nyújtottak a választott téma kidolgozásában.

II. Jelölések jegyzéke

$\mathbf{E}(x,y,z,t)$	Villamos térerősség
$\mathbf{D}(x,y,z,t)$	Elektromos eltolás
φ	Elektromos skalárpotenciál
ε_0	Elektromos permittivitás
ε	Vákuum permittivitása
t	Idő
\mathbf{V}, \mathbf{v}	Félkövér, dölt betű: térbeli vektor
\mathbf{a}	Félkövér, álló kisbetű: oszlopvektor
\mathbf{M}	Félkövér, álló nagybetű: mátrix
w	Súlyfüggvény
k, n, i	Konstansok
a_k	Vektor eleme
\mathbf{e}_x	Egységvektor
T_n	Csebisev-polinomok

III. Tartalomjegyzék

<u>1. Bevezetés</u>	1.
1.1. Előzmények	1.
1.2. Elektrosztatika	2.
1.2.1. <i>Ipari elektrosztatika</i>	2.
1.2.2. <i>A leválasztási eljárások</i>	5.
1.3. Elektrosztatikus porleválasztó	7.
1.3.1. <i>Történeti áttekintés</i>	7.
1.3.2. <i>Az elektrosztatikus porleválasztó előnyei-hátrányai</i>	9.
1.3.3. <i>Felépítésük és csoportosításuk</i>	10.
1.3.4. <i>Működési elvek</i>	11.
1.3.5. <i>Az elektrosztatikus porleválasztó modellezése</i>	12.
1.4. A kutatási feladat	13.
<u>2. Numerikus térszámítás</u>	15.
2.1. A térszámítási módszerek fejlődése	15.
2.2. Térszámítási eljárások	17.
2.2.1. <i>Véges differenciák módszere</i>	18.
2.2.2. <i>Végeselem módszer</i>	19.
2.2.3. <i>Peremelem módszer</i>	20.
2.3. Az R-függvények	21.
2.3.1. <i>R-függvények műveletei</i>	21.
2.3.1.1. <i>R-függvények diszjunkciója</i>	22.
2.3.1.2. <i>R-függvények konjunkciója</i>	23.
2.3.1.3. <i>R-függvények negációja</i>	23.
2.3.2. <i>Az R-függvények néhány tulajdonsága</i>	24.
2.3.3. <i>Az R-függvények normálása</i>	27.
2.3.3.1. <i>A normálás folyamata</i>	27.
2.3.3.2. <i>A felület normálvektora</i>	29.
2.3.3.3. <i>A normált R-függvények tulajdonságai</i>	30.
2.4. Az R-függvényekhez kapcsolódó térszámítás variációs elvei	31.
2.5. Karakterisztikák módszere	35.
2.6. A Gauss kvadratúra	36.
2.6.1. <i>Egydimenziós integrálok meghatározása</i>	36.
2.6.2. <i>Kétdimenziós integrálok meghatározása</i>	37.
2.7. Az elsőfajú Csebisev polinomok	38.
<u>3. A 2D porleválasztó modell</u>	40.
3.1. A vizsgálat tárgya	40.
3.2. Téregyenletek	41.
3.2.1. <i>Az elrendezés R-függvényei</i>	44.
3.2.2. <i>Az elektromos skalárpotenciál meghatározása</i>	46.
3.3. A kidolgozott iterációs eljárás	49.
3.4. Numerikus eredmények	51.
3.5. Összefoglalás	57.
3.6. Új tudományos eredmény	58.

<u>4. A 3D porleválasztó modell</u>	59.
4.1. Tértöltések mozgása	60.
4.1.1. A téregyenletek	60.
4.1.2. A vizsgált modell	61.
4.1.2.1. A mérés	61.
4.1.2.2. A számítások során alkalmazott modell	64.
4.1.3. Az elektromos tér meghatározásának menete	67.
4.1.4. Numerikus eredmények	69.
4.2. A porszemcsék mozgásának figyelembevétele	74.
4.2.1. A porleválasztás	74.
4.2.1.1. A feltöltődés menete.....	74.
4.2.1.2. A leválasztás menete.....	75.
4.2.1.3. Az áramlás hatása a leválasztásra	76.
4.2.2. Villamos téregyenletek	76.
4.2.3. A részecskék mozgásának modellezése	77.
4.2.4. Numerikus eredmények	78.
4.2.5. Összefoglalás	81.
4.3. Új tudományos eredmény	82.
<u>5. Tudományos eredmények</u>	84.
5.1. Új tudományos eredmények	84.
5.2. További kutatási feladatok	85.
<u>Irodalom</u>	86.

1. Bevezetés

1.1. Előzmények

A villamos jelenségek régóta foglalkoztatják az emberiséget. A folyamatokat több csoportra oszthatjuk, attól függően, hogy milyen jelenségek játszódnak le bennük, mi történik az erőteret meghatározó tényezőkkel. A nyugalomban lévő töltésekkel kapcsolatos jelenségeket, ahol a töltések által keltett villamos erőteret, a töltések viselkedését, tulajdonságait, illetve az egymás közötti kölcsönhatásaikat vizsgáljuk elektrosztatikának nevezzük.

Eleinte az elektrosztatika csak a „megmagyarázhatatlan” balesetek oka volt, ahol a feltöltődésekből adódó tüzek, robbanások sok kárt okoztak mind az iparban, mind a háztartásokban. A levegőben mindig találhatóak ionok, azonban ezeknek a száma olyan kicsi, hogy a levegőt nyugodtan tökéletes szigetelőnek nevezhetjük, amely még nagyobb feszültség esetén sem vezeti az áramot. Normálisan a természetes sugárzások (ultraibolya, kozmikus, föld radioaktív sugárzása) másodpercenként 5-6 elektront szabadítanak fel, ezek azonban hamar elnyelődnek a levegőben lévő oxigénmolekulákon. A dörzsölés, illetve két felület összeérintése és szétválasztása, egymáson történő elmozdulása során azonban jelentős mennyiségű ion gyűlhet össze a felületen, amely kritikus esetekben károsodásokat okozhat. Az esetek vizsgálata során felgyülemelő tapasztalatok mellett kezdtek felismerni ugyanennek a pozitív, az ipar számára hasznosítható oldalát is. Új technológiák és iparágak fejlődtek ki. A kialakított módszerek teszik lehetővé számunkra a nehezen helyettesíthető műveletek alkalmazását, mint például az elektrosztatikus festékszórás, az elektrosztatikus porszórás, a fénymásolás, valamint a környezetünk tisztaságának megóvása érdekében mind sűrűbben alkalmazott elektrosztatikus porleválasztás.

Az elektrosztatikának a szerepe a környezetvédelemben is megnőtt, mivel felfigyeltek annak lehetőségére, hogy a szennyezett levegőből a szennyezőanyagokat ki lehet vonni, így a természetet megóvhatjuk a káros anyagoktól. A nagyfeszültségű villamos erőter csak a kis tömegű elektront képes annyira felgyorsítani, hogy az egy molekulába ütközve abból újabb elektront üssön ki, amely ezután szintén gyorsulni kezd. Az ionokkal azonban nem képes hasonló gyorsításra, mert azok a nagyobb kiterjedésükből is adódóan gyakran ütköznek a semleges molekulákkal és lefékeződnek. A külső erőter gyorsító hatására

azonban mégis csak felgyorsulnak a nehéz ionok is, és bár sebességük nem elegendő ahhoz, hogy újabb ionozást hozzanak létre. A levegő-, illetve a levegőben lévő molekulákkal azonban rendszeresen ütköznek és átadják nekik a mozgási energiájukat. A szennyezett levegőt átáramoltatva egy nagyfeszültségű elektródarendszeren, az elektródákon keletkező elektronok rátapadnak a szennyezett molekulákra, azokat ionizálják, és a villamos erőtér hatására eltérítik az útjukból a földelt elektróda irányába (villamos szél), amelyre felragadva az átáramló levegő megtisztul. Az erre a célra szolgáló berendezés az elektrosztatikus porleválasztó.

1.2. Elektrosztatika

1.2.1. Az ipari elektrosztatika

Elektrosztatikának nevezzük a villamossággal foglalkozó tudományok azon ágát, amelyben a nyugalomban lévő villamos töltéseket, tulajdonságaikat, viselkedésüket és egymáshoz való viszonyukat vizsgáljuk. A nemzetközi szakirodalom meghatározása szerint: „Az elektrosztatika a mozdulatlan, vagy mozgásban lévő töltésekkel, azok hatásaival és kölcsönhatásaival foglalkozik olyan esetekben, amikor a jelenségeket a villamos töltések nagysága és térbeli elhelyezkedése határozza meg, nem pedig azok mozgása idézi elő.” [104]

Az elektrosztatika az elektrotechnika „mostohagyermekének” számított hosszú éveken keresztül. A játékos kísérletek és a bemutatók során azonban a XIX. század második felére kialakult a tudományos elméleti háttér, de ezt háttérbe szorították a kor olyan nagy felfedezései, mint a transzformátorok, a villamos motorok, a generátorok, a villamos hálózatok és a vasutak. Egészen a XX. században bekövetkező hatalmas, robbanásszerű ipari forradalom bekövetkeztéig csak a fizika tantárgy oktatásában volt szerepe, mint a könnyen bemutatható kísérletek sorozata (papírdarabkát emelgető ebonitrúd) [63].

Az ipari termelésben megjelenő és nagymértékben elterjedő műanyagok, valamint az egyre homogénebb anyagok használatának hatására a mindennapi életben és az iparban is sok baleset, tűz és robbanás pusztított, amelyeknek „gyújtóokát” hiába keresték. Az ipar fejlődését követve egymás után jöttek elő az elektrosztatikával összefüggő technológiai problémák és veszélyek megfigyelései. Az évszázad elején a papír-, műanyag- és

textiliparban okoztak rendszeres technológiai problémát a termékek összeragadásából és porosodásából származó veszteségek és károk, amelyeket később a század második felében tartálykocsik és benzintöltő állomások, valamint pár évvel később a nagy gabonátároló silók robbanása követett. A 80-as években, amikor elkezdődött a számítástechnika rohamos fejlődése a mikroelektronikára fordult a szakemberek figyelme, hiszen a nagy pontossággal előállított termékek sokszor szenvedtek károsodást egy-egy apró szikrától, amely olyan egyszerű okból származhatott, mint egy műanyag padlón műszálas ruhában közlekedő ember, aki egy pár lépés megtétele után néhányszor tíz kV feszültségre is feltöltődhetett, ami számára nem jelentett komolyabb veszélyt. A kilincsen történő kisülésnél ugyan igen nagy áramok jönnek létre, de ez nem okozhat gondot a nagyon rövid időtartam miatt (az energiája körülbelül mJ nagyságrendű) [18]. De ugyanez az energiatartalom nagy fenyegetés a mikroelektronikus alkatrészekre, hiszen azokat csak néhány száz mV és mA nagyságrendű feszültségekre és áramokra tervezték, így a már említett feszültség, illetve a kialakuló 40-50 A áram a kis helyre integrált áramköri elemek tömeges tönkremenetelét okozta. Ezeknek a roncsolódásoknak komoly hatásai is lehettek, illetve a mai napokban ezeknek hatása még sokszorozódott, hiszen ha egy ilyen elektrosztatikus „megrázkódtatás” ér egy termelést-, vagy automatikus rendszert irányító számítógépet, annak meghibásodása, vagy tönkremenetele beláthatatlan méretű károkat okozhat. [36, 45, 59, 82, 93, 95]

Századunk első felében a már leírt problémák és veszélyek mellett kezdtek felismerni ugyanennek a pozitív, az ipar számára hasznosítható oldalát is. Új technológiák és iparágak fejlődtek ki annak a felismerésnek köszönhetően, hogy a feltöltött anyagok közötti taszítás és vonzás milyen módon használható fel. Így jöhetett létre, és ennek köszönhetően használhatjuk az elektrosztatikus festékszórást, az elektrosztatikus porszórást, a fénymásolást, valamint a környezetünk tisztaságának megóvása érdekében mind sűrűbben alkalmazott elektrosztatikus porleválasztást.

Ezeknek a technológiáknak az alapját a villamosan feltöltött szemcséknek az erőtér irányában való elmozdulása képezi. A fenti eljárásokat két nagy csoportba lehet besorolni. Az első csoportba tartoznak a festék- és porszórásos eljárások, amelyeknél az általunk létrehozott áramló közegben lévő részecskéket feltöltjük, majd a villamos tér - a mozgató közeg, általában levegő segítségével - a megfelelő helyre juttatja azokat. A másik nagy csoportba a leválasztási technológiák, az elektrosztatikus pernye-, csepp- és

porleválasztások és a szeparálások tartoznak. Itt a már meglévő áramló közegből kell a kívánt szemcséket ki-, illetve leválasztani. A fentiekből is látható, hogy az ismertetett két csoport között nincsen elvi eltérés, így az elméletük sem különbözik egymástól alapvetően.

Ma már elképzelhetetlen lenne az életünk az elektrosztatikus fénymásolás, a korszerű korrózióvédelmek a műanyagporok szórása, a mikroelektronikai áramköri elemek gyártása az elektrosztatikusan „steril” környezet, illetve a nagy ipari üzemek elektrosztatikus leválasztóberendezés építése nélkül. Sőt az ipari elektrosztatika még az orvostudományokban is tért hódít magának, hiszen például a szemlencse bioimplantátumok beültetésekor a szemlencse felületére ragadó porszemcsék komoly gyulladásokat okozhatnak, és ezek eltávolításáa, valamint távoltartására is az elektrosztatikát próbálják meg alkalmazni [57, 58].

Az ipari elektrosztatika igen elterjedt használata ellenére a jelenség tudományos elméleti hátterének a részletes megismerése még a mai napig is „gyermekcipőben” jár. Az ötvenes évektől kezdődött a kutatás, amelynél az alapvető fizikai jelenség mind a mai napig tisztázatlan [119]. Nemzetközi kutatások, konferenciák, publikációk, szabadalmak és szabványok keretein belül fontos nemzetközi együttműködések alakultak ki. Ezek közül is a legfontosabb megemlíteni az elektrosztatika egyetlen nemzetközi folyóiratát - *Journal of Electrostatics* - valamint a világon egymást követő nagy konferenciákat, amelyeket adott rendszerességgel rendeznek meg - Institute of Physics elektrosztatikus konferenciája, European Federation of Chemical Engineering elektrosztatikai konferenciája (EFCE), Elektrosztatikus Porleválasztó Világkonferencia (ICEP). Fontos megemlíteni a magyar kutatók és tudományos személyiségek szerepét [20, 21, 55, 82, 109, 121, 146], amelynek részben elismeréseképpen elmondhatjuk, hogy a három nagy konferenciából kettő már megfordult hazánk területén (1989 - EFCE; 1996 - ICEP).

Az utóbbi években, évtizedekben olyan berendezések előállítása folyik, amelyeknek a pontos működési elvét nem ismerjük. Ez néha komoly veszteségeket és károkat okozhat, hiszen a kapcsolódó berendezések hatására olyan alacsony hatásfok adódik, ami a termelést teljesen lehetetlenné teszi az egyik helyen, míg a másikon kiváló hatásfok érhető el egy apró paraméter megváltoztatásával (pl. porszemcseméret) [20, 124, 128]. Ennek során a 80-as években több olyan berendezést helyeztek üzembe a leválasztóberendezések között, amelynél maximális energia-felvételre törekvő nagyfeszültségű táplálást alkalmaztak, ami elvileg hibás, hiszen a leválasztó térben létrejövő nagy ellenkorona

kisülések – a földelt elektródán lerakódott porréteg hatására létrejövő kisülés – a porleválasztás hatásfokát a felével - harmadával csökkentik, ráadásul igen nagy energiaveszteséget okoznak.

A beruházók és üzemeltetők által támasztott minőségi követelmények erősödése miatt egyre fontosabbá válik, hogy az évtizedek óta változatlan, a tervezési eljárásokat ugyan segítő elméletek és alapelvek helyett fejlett mérésekkel és kísérletekkel alátámasztott elméleti fejlődés, fejlesztés következzen be, amellyel helyesbíteni lehet a korábbi elméletek hibáit, és meg lehet határozni az „általános” érvényű megállapítások valós korlátait, ami a jövőbeni fejlesztéseknél és tervezéseknél elengedhetetlenül szükséges.

Az ipari elektrosztatika két nagy csoportra osztható. Az első csoport a szórási technikák, amely csoportba a festékszórás, a porszórás, az elektrosztatikus permetezés a fénymásolás és a XEROX eljárások tartoznak, míg a másik csoportba, az elektrosztatikus leválasztások csoportjába a por-, csepp- és pernyelelválasztások, valamint az elektrosztatikus szeparálók tartoznak.

Ezek - a szórási és a leválasztási technológiák - az alap gondolat tekintetében nem különböznek egymástól, hiszen mindkét esetben feltöltött részecskék és a villamos erőtér közötti kölcsönhatáson alapszanak. A jelentős különbség abban van, hogy míg az elektrosztatikus festék-, illetve porszórás esetén egy szórópisztolyból általunk kiáramoltatott feltöltött festék, illetve porszemcséket kívánunk eljuttatni egy előre meghatározott tárgyra, felületre, vagy annak csak egy kisebb részére, addig a leválasztásoknál egy áramló többkomponensű közegből próbáljuk meg összegyűjteni annak bizonyos részeit.

Munkám során az ipari elektrosztatikának a leválasztási részével foglalkoztam, lássuk ennek részletesebb ismertetését.

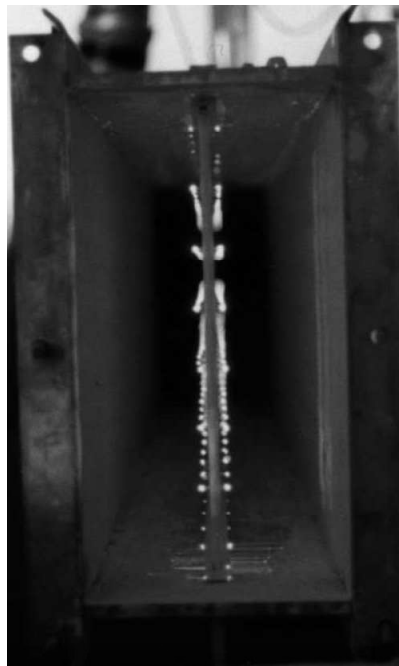
1.2.2. A leválasztási eljárások

A villamos erőtér segítségével megoldható például a két, vagy több anyagból álló keverékek elemeire való szétválasztása, illetve a két, egymástól minőségben eltérő anyagi áramlásból való részecskék leválasztása. A feltöltött részecske pályáját a villamos erőtér határozza meg, illetve módosítja.

Az elektrosztatikus csepp-, pernye- és porleválasztás a szállító közegnek - a leggyakrabban áramló levegőnek - a vele együtt áramló szennyező részecskéktől való megtisztítására szolgál.

A leválasztással azonos módon működő elektrosztatikus szeparálási technológiáknál a különböző anyagok szétválasztása a cél. Ily módon lehet például az áramló porok keverékéből kiválasztani a vezető anyagokat, felhasználva azoknak a többitől eltérő villamos tulajdonságait. Az eljárásnak komoly szerepe van a mezőgazdaságban, ahol a terménynek, illetve a magoknak a pelyvától, portól és lehántolt héjtól való megtisztítása, valamint a különböző méretű és fajsúlyú magvak egymástól való elválasztása is ezen az úton történik.

A technológia eredetileg a következő elgondolások alapján bontakozott ki a XIX. század végén, a XX. század elején, és amit még mind a mai napig nagyléptékekben megtalálhatunk a jelen kérdéskörrel foglalkozó tudósok és szakemberek tudományos munkáiban. A szennyezőanyagokkal telített áramló közeget egy nagy egyenfeszültség (50-100 kV) hatására kialakuló villamos erőtéren vezetjük át, ahol az erőtér a földelt felfogó elektróda és a potenciálra kapcsolt töltőelektródok között alakul ki. A potenciálra kapcsolt elektródok alakját rendszerint kis görbületű sugárral alakítják ki, hogy ezáltal könnyen alakuljon ki koronakisülés az elektróda felületén [87] (1.1. ábra). Az elektróda lekerekítési



1.1. ábra Koronakisülés az elektródák felületén

sugarának megválasztásakor fontos felfigyelni arra a mérésekkel igazolt tényre [75], hogy a koronakisülés létrejötte csak egy bizonyos fokig segíthető elő a görbületi sugár csökkentésével. Kimutatható, hogy adott feszültségen egy bizonyos fokú lekerekítésnél kisebbet választva található egy olyan lekerekítési sugár, ahol már nem jön létre koronakisülés az elektróda felületén.

Napjainkban szerencsére egyre nagyobb hangsúlyt fektetünk a környezetünk védelmére. A környezetünket az egyre nagyobb iramban fejlődő és megerősödő ipari termelés és az ezzel szoros összefüggésben álló energiatermelés jelentős mértékben szennyezhetné, ha ennek megakadályozása érdekében nem történne semmi, amivel a létesítmények károsanyag kibocsátását csökkenteni lehetne. A levegőbe jutó káros gázok (CO_x , NO_x , SO_x), és a különböző nagyságú porszemcsék kibocsátásának csökkentése érdekében komoly erőfeszítések történnek az utóbbi időben világszerte és hazánkban is. Sajnos hazánkban a környezetvédelem tekintetében komoly lemaradások tapasztalhatóak, ami az EU-hoz való csatlakozás következtében jelentős erőfeszítésre ösztönzi a felelős vezetőket.

Az ipari létesítményekből a fent említett káros anyagok általában a kéményeiken keresztül távoznak, így kiválasztásuknak egyik lehetséges eszköze a füstgázok kivezetési útjába telepített porleválasztó berendezés, amelyeknek a legelterjedtebben és legszélesebb körben alkalmazott csoportja az elektrosztatikus elven működő porleválasztók.

1.3. Elektrosztatikus porleválasztó

Az elektrosztatikus porleválasztó berendezés a levegőben elosztott finom szemcséjű, főleg szilárd részecskékből álló anyag összegyűjtésére és eltávolítására alkalmas berendezés. A porok, különösen a $0.25\text{-}0.5\ \mu\text{m}$ szemcseméretűek – az egészségre károsak, ezért már keletkezési helyükön célszerű őket összegyűjteni, szétterjedésüket és lerakódásukat meggátolni [56].

1.3.1. Történeti áttekintés

Az elektrosztatikus porleválasztók működésének alapelvét a XVI-XVII. század tudósai fedezték fel. Az ókori görögök is foglalkoztak már a kérdéssel, bár ők még a töltések által kifejtett vonzó erőt valamilyen ragasztó hatásnak tekintették. Az elektrosztatikus erő és a

vele kapcsolatos összefüggések felismerése és formába öntése érdekében a tudósok számtalan kísérletet végeztek el, és végül Coulomb 1785-ben egy torziós mérleg segítségével meghatározta, hogy egy pontszerű töltés hatására egy másik pontszerű töltésen fellépő erő a két töltés távolságának négyzetével fordítottan arányos [63, 122]. Ezek az összefüggések képezik az elektrosztatika tudományterületének alapösszefüggéseit.

A kísérletek korai szakaszában található a mai leválasztókkal szoros kapcsolatban álló próbálkozásokat is. Az első porleválasztással kapcsolatos időpont 1600, amikor William Gilbert, angol fizikus megadja a fűtrészecskére ható villamos erő tapasztalati leírását a *De Magnete* című művében. 1745-ben Benjamin Franklin leírja az elektromos tüzek hatásait, majd Giovanni B. Beccaria foglalkozik a füstös gázok villamos kisüléseivel és az ionszél jelenségével az 1772-ben megjelent könyvében. M. Hohlfeld német matematikus 1824-ben, illetve Guitard 1850-ben dohányfüst és ködök leválasztását vizsgálta, bár kísérleteik eredménye egy időre feledésbe merült, 1885-ben Sir Oliver Lodge javaslatára mégis hasznosítják őket egy ólomkohászati üzemben. Ezt valamivel megelőzve 1878-ban R. Nahnwold leírja annak a jelenségét, hogy egy feszültségre töltött tüske hatására a levegőben lévő por csoportbarendezeit megnöveli [66, 90].

Laboratóriumi kísérletek tömegének elvégzése után a XX. század elején Cottrell arra az eredményre jutott, hogy a nagyfeszültséget az eddiginél jobb és stabilabb formában biztosító berendezésre (szinkronozott mechanikus egyenirányító felhasználásával), valamint az elektróda hosszegységére jutó koronaáram növelésével lehetséges a porleválasztás hatásosságát megnövelni. A megfigyeléseinek felhasználásával 1908-ban adta be a szabadalmát a berendezésekre, amelyek hosszú ideig és nagy hatásfokkal működtek. Az első kénes savat összegyűjtő laboratóriumi berendezését Berkeley-ben állította üzembe 1906-ban, majd 1912-ben Riverside-ban nagyméretű, cement port gyűjtő berendezést indított el [90].

1962-ben H.J. White ad ki könyvet az ESP-k akkori technológiáját, elméleteit összefoglalva. Ebben a korban tevékenykednek a téma első magyar szakemberei is, Czibók Ernő, Hirsch Lajos, Horváth Károly, Dr. Koncz István és Raschovszki Lajos.

A kutatók felfigyelnek arra, hogy a leválasztó térben döntő jelentősége van a tértöltéseknek. Az első leírást I.P. Verescsagin 1974-ben végzi el. 1975-ben kezdenek el foglalkozni a leválasztás hatásfokát erősen rontó ellenkorona jelenséggel is Senichi Masuda vezetésével [147].

1.3.2. Az elektrosztatikus porleválasztó előnyei-hátrányai

Az elektrosztatikus porleválasztók legfontosabb paramétere a leválasztási hatásfok, amely igen sok elektrosztatikus és áramlástanai tényező függvénye. Ezen tényezők nagy részének hatását fizikailag mind a mai napig nem tudjuk megmagyarázni, kedvező és kedvezőtlen hatásaikat csak a „porleválasztó berendezésben tanyázó manóra” fogjuk [18, 20].

A berendezések általában közel 100%-os leválasztási hatásfokkal üzemeltethetők, a hatásfok csekély csökkenése is a környezet porterheltségének jelentős emelkedéséhez vezethet, így a környezetszennyezés elkerülése érdekében nagyon fontos a pontos tervezés, építés, valamint a rendszeres karbantartás.

Az elektrosztatikus porleválasztók működtetésének hátránya a más elven működő berendezésekkel szemben, hogy táplálásához nagyfeszültségű tápegység kell, ami jelentős energiaszükséglettel jár [139, 141].

Feltétlen előnye azonban a magas hatásfok, ami más berendezésekkel nem érhető el, valamint az, hogy igen széles mérettartományban képes a porszemcsék leválasztására.

Összefoglalás képpen elmondható, hogy az elektrosztatikus porleválasztó előnyei közé tartozik, hogy

- 0.01 μm – 100 μm nagyságrendig képes 99%-os hatásfokkal összegyűjteni a port,
- magas hőmérsékleten képes üzemelni (650°-ig),
- nagy gáznyomás mellett üzemeltethető (10 Atmoszféra nyomásig),
- nagy áteresztőképességgel rendelkezik (1500 m^3/s),
- nagy pormennyiséggel képes megbírkózni (500 g/m^3).

Fontos, hogy a berendezés folyamatosan üzemeljen, hiszen a viszonylag magas beruházási költségek mellett az üzemeltetési költségei relatív alacsonyak. Jó és pontos szabályzás mellett a robbanással járó jelenségek (pl. átütés) kiküszöbölhető.

1.3.3. Felépítésük és csoportosításuk

Az elektrosztatikus porleválasztóban két különböző elektróda található, a töltő, vagy koronázó elektróda és a felfogó elektróda. A töltő elektróda a nagyfeszültség hatására rajta kialakuló korona jelenségről – amely az elektrosztatikus porleválasztó működésének alapját képezi – kapta nevét. A töltő elektróda nagy görbületű és vékony drótból, vagy tüskerendszerből áll [101, 102], míg a felfogó elektróda nagy sugarú, vagy sík lemez, amely a por leválasztását segítő és a por visszajutását megakadályozó kiszögelésekkel rendelkezik.

Az elektródák kialakítása alapján megkülönböztetjük a kamrás és a csöves típusú elektrosztatikus porleválasztót. A kamrás berendezés egymással párhuzamosan elhelyezett töltő elektródákból és ezekkel párhuzamos felfogó elektródákból áll. A csöves változatnál a töltő elektróda a felfogó hengeres elektróda tengelyében halad [96].

A porleválasztók lehetnek egy-, illetve kétfokozatúak. Az egyfokozatú berendezéseknél az átáramló por feltöltése és leválasztása egy cellában történik, míg a kétfokozatú esetben először történik meg a por feltöltése és ezt követi a leválasztás.

A leválasztó berendezések hatásfokát csökkentő ellenkorona kisülés kialakulását meggátlandó valamint a felfogott szennyezőanyag eltávolítása érdekében a felfogó elektródákat folyamatosan tisztítani kell. A tisztítás folyamata alapján a leválasztókat száraz és nedves csoportba sorolhatjuk. A száraz esetben a földelt elektródát ütogetéssel, vagy rázással tisztítják, míg nedves esetben az elektródát mossák. A tisztítás során a porok különböző tulajdonságait is figyelembe kell venni, mint a nedvességtartalmukat, a szemcsék méretét és alakját [18, 20].

Az elektrosztatikus porleválasztók táplálása nagyfeszültségű feszültségforrásról történik. Mind az egyenfeszültségű, mind a váltakozó feszültségű táplálást alkalmazzák, azonban mindkét esetben a felfogó elektróda földelt. Egyenfeszültség esetén a töltő elektródára általában a negatív pólust kapcsolják, a felfogó elektródát pedig a pozitív pólusra. A korábban alkalmazott folyamatos nagyfeszültség helyett egyre inkább elterjed az impulzus üzemű gerjesztés használata [38].

1.3.4. Működési elvek

A töltőelektródákon a rákapcsolt nagy feszültség miatt elektronlavinák, illetve pamatos, vagy vezér kisülések keletkeznek [44, 77, 135, 140]. A kisülésekből származó töltött részecskék feltöltik az áramló porszemcséket. A villamos erőtér révén az eddigi mozgási irányukra közel merőleges irányban ható erő lép fel a nagy felszínnel rendelkező, földelt felfogó és a potenciálra kapcsolt töltő elektródák között fellépő feszültség által gerjesztett villamos erőtér hatására, ami a porszemcsék leválasztásához vezet [27, 138]. A feltöltött porszemcsék az erőtér hatására a leföldelt felfogóelektródák irányába mozognak, majd elérve őket a felületére tapadnak és az ily módon megtisztult áramoltató közeg szabadon távozhat az elektródasor végén. A feltöltött részecskék a vezetőképességüknek megfelelő sebességgel elvesztik a töltésüket, amikor elérik a felfogóelektródát [97]. A falra lerakódott por hatására egy kondenzátorhoz hasonló elem jön létre, hiszen a por szigetelő tulajdonságának hatására nem képes a töltéseket levezetni. A kialakuló töltés hatására a földelt elektródán is létrejöhet koronakisülés, amelyet ellenkoronának nevezünk [65]. Ez az oka annak, hogy a földelt falakra tapadó porszemcséket a felfogó elektróda felületéről valamilyen mechanikai eljárás segítségével megfelelő időközönként el kell távolítani, hiszen az ellenkorona hatására jelentős mennyiségű korábban már leválasztott pormennyiség juthat vissza a légáramba, ami jelentősen csökkentheti a leválasztási hatásfokot. Az elektróda tisztítása során az eredeti porszemcseméret többszörösére „hízott” porcsomók mechanikai hatásra lehullanak a gyűjtő edény aljába. Méreteik miatt az áramló közeg nem képes ezeket magával ragadni [43, 84, 110]. Az elektrosztatikus porleválasztó akkor van helyesen méretezve (méretei, a benne áramló por vándorlási sebessége), ha a legkedvezőtlenebb helyről induló feltöltött porszemcse is elérheti a leválasztó elektródát.

Az elektrosztatikus porleválasztóban a két elektróda, a földelő és a töltő elektróda távolságát viszonylag kicsire szokták megválasztani [49, 92], a leválasztó térerősség növelése érdekében. Az optimális leválasztás elérése érdekében a feszültséget és az áramot minél nagyobbra kell választani, hiszen az áram növelésével nő a por feltöltődése, a feszültség pedig a térerősséget növeli. A por feltöltését befolyásolhatja az is, hogy milyen áramlási sebességgel mozgatjuk a leválasztóberendezésben a poráramot.

Fontos megemlíteni, hogy a feszültség és az áram értékét nem lehet túlzott mértékben növelni, hiszen ez folyamatos átütésekhez vezetne, ami komoly károkat okozhat (esetleges

robbanás), valamint a leválasztás hatásfokát is jelentősen rontja [19]. Ennek elkerülése érdekében az elektrosztatikus porleválasztás villamos vezérlését úgy állítják be, hogy a feszültséget az átütés közelében tartásák.

A tervezések során alkalmazott „megdönthetetlen elméletek”, valamint a leválasztás paramétereinek pontos meghatározásának nehézségei komolyan befolyásolják az elektrosztatikus porleválasztó hatásfokát. Ennek tudható be az, hogy a szakemberek sűrűn beszélnek egy „gonosz kis manó” jelenlétéről, aki a jól megtervezett és kivitelezett porleválasztó hatásfokát jelentősen lerontja. Ezen kívül problémát okoznak a nem villamos paraméterek bizonytalanságai is, mint például az áramló levegő turbulenciája, a nagyfeszültségű elektródák korrodálódása és mechanikai rögzítése, a földelt elektródán megtelepedő por letisztítása és eltávolítása.

Az elektrosztatikus porleválasztó működéséhez teljesen hasonló technológiával végzik a csepp- és pernyeleválasztást, csak néhány apró kérdésben találhatunk eltérést, mint a leválasztott anyagok eltávolításánál.

1.3.5. Az elektrosztatikus porleválasztó modellezése

Az elektrosztatikus porleválasztók modellezése összetett probléma, amelyben több fizikai folyamatot, - transzportfolyamatokat, elektrosztatikus hatásokat - és ezen folyamatok egymásra gyakorolt hatásait is figyelembe kell venni.

A két talán legnehezebben megoldható probléma a modellezés során a koronázó elektródok elektron és ion emissziója, valamint a leválasztandó szennyezőanyagok feltöltődésének szimulálása, pedig ezek azok a jelenségek, amelyek a leválasztási folyamatok modellezését a leginkább befolyásolják.

A töltő elektródok elektron és ion emissziója hozza létre a leválasztó térben a villamos szelet is. Az ionáram számítására több eljárást alkalmaznak, amelyeket tulajdonképpen két nagy csoportba sorolhatunk. Az első csoportba azok a számítási eljárások tartoznak, amelyek csak az ionáramot számítják [89], míg a másik csoportba sorolt kutatók az ionáram mellett a kialakuló tértöltések hatását is figyelembe veszik [98, 99]. A vizsgált térrészben lévő töltéshordozók számát a rekombinációs folyamat csökkenti.

A szennyezett levegőben mozgó porszemcsék feltöltődését is számos paraméter befolyásolja, amelyek közül a legjelentősebbek a porszemcsék alakja, a mérete, a vezetőképessége és a sűrűsége. Általában a gömb alakú részecskék számítását írják le az

irodalomban, a telítéssel töltést véve alapul. Az ettől eltérő alakú részecskék töltődési folyamatának leírása csak numerikus módszerekkel a folyamat anyagtudományi szempontból való elemzése és vizsgálata után lehetséges.

A modellezésnél figyelembe kell venni az áramlások hatásait is. A porszemcsék mozgását befolyásolják az áramlásokból, a villamos erőterből és gravitációból adódó erőhatásokat is. Ezeknek a modellezéséhez a Navier-Stokes egyenlet módosított változatát használják [98], illetve a turbulens transzportegyenlet [136].

A modellezéshez használt térszámítási modellek tekintetében a kutatók általában a véges differenciák [2], a peremelem [34] és a végeselem módszereket [42, 46, 47, 98, 99] használják, bár figyelembe véve, hogy a tértöltések a vizsgált tartomány egészében eloszlának, ezért a véges térfogat eljárás éppúgy alkalmazható, mint a donor cella módszer.

1.4. A kutatási feladat

A kutatási feladat tárgya annak vizsgálata, hogy a villamos erőter numerikus térszámítása miképpen végezhető el az \mathbf{R} -függvények módszerével és ebbe az eljárásba hogyan illeszthetők be különböző, a számítások során alkalmazandó egyéb eljárások, mint például a „karakterisztikák módszere” (Method of Characteristics), vagy a töltésáramlást leíró Navier-Stokes egyenlet.

Célkitűzésem olyan eljárás kidolgozása, amely lehetővé teszi egy egyszerűsített elektrosztatikus porleválasztó modellben lejátszódó folyamatok leírását és numerikus szimulációját. Vizsgálataim célja az elektromágneses tér eloszlásának és a térjellemzők változásának meghatározása, és az ezeket leíró numerikus eljárások illesztése a globális variációszámítás módszeréhez.

A vizsgálatok során elemezni kívánom a 2 dimenziós és 3 dimenziós elektromágneses tereket szimuláló modellekben lejátszódó folyamatokat, az egyes paraméterek figyelembevételének, illetve elhanyagolásának hatásait.

A kutatási feladatban felhasználásra numerikus eljárásához egy olyan iterációs eljárást kívánok kidolgozni, amely lehetővé teszi a geometriai tér egyes pontjaiban a fellépő villamos erőteret befolyásoló tértöltések meghatározását.

Célkitűzésem során a következő feladatokat oldom meg

Célom megvizsgálni a kétdimenziós elektrosztatikus porleválasztó modellben lejátszódó folyamatokat. Eljárást kívánok kidolgozni a szabad tértöltések hatásainak numerikus vizsgálatára és összehasonlító elemzést kívánok végezni mások által elvégzett számításokkal. Meg kívánom mutatni a globális variáció számítás és a karakterisztikák módszerének ötvözésének segítségével, hogy a szimmetria hatása miképp vehető figyelembe és miként befolyásolják a kialakult erőteret.

A fenti módszert felhasználva ki kívánom terjeszteni a 2 dimenziós modellt és meg kívánom vizsgálni a 3 dimenziós modell alkalmazásának lehetőségeit. Eljárást kívánok kidolgozni a töltések mozgását leíró áramlási egyenletek figyelembevételére. Elektrosztatikus porleválasztó modellen végzett mérési adataim alapján a numerikus térszámítások elvégzése után a kapott eredményeket össze kívánom hasonlítani a mérési eredményekkel és elvégezni az értékelésüket. Meg kívánom vizsgálni, hogy különböző típusú elektródák, elektróda elrendezések, illetve más típusú gerjesztések hatására miképpen változik a porleválasztó cellában kialakuló áramok értéke.

Eljárást kívánok kidolgozni az elektrosztatikus porleválasztó modellben mozgó porszemcsék hatására kialakuló elektromágneses tér, valamint a porszemcsék feltöltődés utáni mozgási pályáinak, illetve a porleválasztó modell falán kialakuló porszemcsék elrendeződésének a három dimenziós modellezésére.

2. Numerikus térszámítás

2.1. A térszámítási módszerek fejlődése

A modern elektronikus eszközök építése, tervezése és biztonságos üzemeltetése mind fejlettebb ismereteket igényel a berendezésen belüli és körüli elektromágneses térről. A számítástechnika fejlődése lehetővé tette a numerikus térszámítási eljárások mind szélesebb körben való elterjedését.

A numerikus térszámítási módszerek lényege az, hogy megfelelő peremfeltételek és geometriai paraméterek megadása után a diszkretizált tér pontjaiban adja meg a közelítő függvény segítségével a keresett értékeket. A numerikus módszereket először kétdimenziós terek meghatározásához használták. Ennek oka abban állt, hogy a numerikus térszámítási eljárások viszonylag nagy számítógépes memóriakapacitást igényelnek, amellyel a kezdeti időben a számítástechnikai eszközök nem rendelkeztek.

A numerikus térszámítás történetében többtípusú numerikus eljárást használtak a kutatók az elektromágneses tér meghatározásához. Ezek közül az integrál egyenletek módszere [68, 82, 146] és a variációs elven alapuló eljárások [40, 54] azok, amelyeket napjainkban a leggyakrabban használnak. A gyakorlati szempontból a legfontosabbak a globális variációszámítás [60, 88], a peremelem módszer [4, 30, 33, 67] és a végelem módszer [39, 91, 120, 143, 145].

Az elektromágneses térszámítás fő összefüggéseit a Maxwell egyenletek írják le [51, 76, 123, 126, 127]. A számítások során különféle skaláris, illetve vektor potenciálokat lehet bevezetni [25, 105, 108], amelyek segítségével a Maxwell egyenletek megoldása visszavezethető egyszerű, a bevezetett potenciáloktól függő differenciálegyenletek, differenciálegyenlet-rendszerek megoldására [26].

A statikus villamos-, illetve mágneses terek megoldását ily módon vissza lehet vezetni a Laplace, illetve a Poisson egyenlet megoldására. Sok esetben, főleg nemlinearitások jelenléte esetén a feladat csak az időtartományban oldható meg. Ekkor a bevezetett változók diffúziójának, illetve hullámeqyenleteinek megoldása jelenti a numerikus térszámítás számára a feladatot [41, 83, 85].

Az elektromágneses teret leíró differenciálegyenletek megoldását a műszaki gyakorlatban a vizsgált térrészt körülvevő felszínen előírt kezdeti feltételei és a

peremfeltételek határozzák meg. A peremfeltételeket három csoportba lehet sorolni. Az első csoportot a Dirichlet típusú peremfeltételek jelentik, amelynél a peremfelületen a keresett potenciál értéke ismert. A második csoportot a Neumann típusú peremfeltételek rendelkező felületek jelentik. Ebben az esetben a potenciál helyett annak a normális irányú deriváltjára van feltétel szabva. A harmadik csoportot az első két csoportból együttesen szereplő peremfeltételek alkotják (vegyes peremfeltétel), tehát egy olyan felületet kell elképzelnünk, amelynek az egyik részén a változó, és ugyanott a változó normális irányú deriváltja ismert az előírt feltételekből. Ez a típusú peremfeltétel az elektrosztatikában soha nem fordul elő. Időtartománybeli megoldás esetén nemcsak a peremfeltételeket, hanem a kezdeti feltételeket is figyelembe kell venni [1, 100, 137].

Az elektromágneses terek megoldását szintén három csoportba sorolhatjuk. Az első esetben a teret leíró differenciálegyenleteket és a peremfeltételeket is közelítőleg kielégítő modell alkalmazása is elegendő. A második csoportba azok a megoldások tartoznak, amikor a differenciálegyenleteket kielégítő megoldást találunk, a peremfeltételekre azonban nem kapunk általánosan pontos megoldást. Ezeket az eseteket végül is bármely numerikus módszerrel meg lehet oldani, akár az integrál egyenletekkel, akár a variáció számítás elvét alkalmazó eljárásokkal. A leggyakoribb megoldási eljárás a peremelem, illetve a végeelem módszer. Ezek az eljárások a differenciálegyenletek közelítő megoldását elégítik ki, míg a peremfeltételekre csak a diszkretizáláshoz használt háló rácspontjaiban kapunk pontos értéket. Ez sok esetben nem okoz gondot, azon esetekben azonban, amikor a peremfelületeken fellépő értékek meghatározása elengedhetetlen a diszkretizálástól függően különböző értékek léphetnek fel [28, 32, 78].

A globális variációk elvét alkalmazva a Kantorovics módszer [80] segítségével meghatározható a megoldás ebben az esetben konvex térrész esetén. Abban az esetben, ha a zárt térrész konkáv részekkel is rendelkezik a megoldást az **R**-függvények módszere jelenti [86, 112, 113, 114, 118], amely a téregyenletek megoldásához vezet, biztosítva a peremfeltételek pontos kielégítését [69, 70, 71].

A térszámítás legtöbb esetben olyan térrészt vizsgál, ahol nyitott a térrész az egyik irányban. Ez a legtöbb numerikus térszámítás esetén a megoldást pontatlanná teszi, hiszen a térrész lezárása azt jelenti, hogy az elektromágneses teret leíró összetevők részére egy visszaverődő felületet kell beiktatni, ami az eredményeket meghamisítja a visszaverődés miatt. Ennek a problémának a megoldásán ma sok kutatócsoport dolgozik, a megoldást a

PML-ek (perfectly matched layer) pontosan illesztett réteg alkalmazása jelentheti, amelynek az illesztése ugyanakkor igen komoly gondot okoz [15, 16, 79 130, 131].

Az eredményeket jelentősen befolyásolja a diszkretizálás mértéke. Ha a vizsgált térrészt túlzottan finoman osztjuk fel, a szükséges memória kapacitás, valamint a számítási idő jelentős mértékben növekedik. Ellenben a nagyobb léptékű diszkretizálás hatására komoly problémákat jelenthet a konvergencia teljesítése [5, 94, 134]. A konvergenciát ugyanakkor az alkalmazott numerikus eljárás is befolyásolhatja. A régebben alkalmazott előre, illetve hátralépő Euler módszer alkalmazása során is ez jelenti a fő különbséget. Fontos megemlíteni azonban, hogy míg az Euler módszer csak feltételesen konvergens, addig a Crank-Nicolson eljárás feltétel nélkül, mindig stabil megoldást ad.

2.2. Térszámítási eljárások

Az elektromágneses terek numerikus módszerei a téregyenletek közelítő megoldásának előállításán alapulnak. A közelítések a vizsgált geometriai térrészen az elektromágneses terek térjellemzőire, illetve a bevezetett segédváltozókra, a potenciálokra vonatkozó differenciálegyenletek megoldását jelentik, a vizsgált térrész határfelületein előírt Dirichlet, illetve Neumann típusú határfeltételek kielégítése mellett. A közelítő módszereket többféle képen lehet osztályozni.

A közelítés elvei szempontjából variációs elveken, Galjerkin módszerrel, illetve az integrálegyenletek módszerén alapuló eljárásokkal lehet a megoldandó feladatot úgy megfogalmazni, hogy a közelítő eljárások alkalmazhatók legyenek. Ebben az esetben a feladat megfogalmazása a differenciálegyenlet, illetve a határfeltételek kielégítésén alapul.

A közelítő eljárásokat lehet osztályozni a vizsgált térrész geometriája szempontjából, annak megfelelően, hogy a teljes geometrián, vagy csak annak diszkretizált elemein kívánjuk a megoldást realizálni. A közelítő megoldásnak a vizsgált térrész teljes geometriáján való megvalósítása a globáliselem módszer alkalmazásához vezet. A véges differenciák módszerének alkalmazásakor a teret leíró differenciálegyenletet a vizsgált térrész egyes lokális pontjaiban közelítjük. Abban az esetben, ha a vizsgált térrészt véges térrészekre bontjuk és a közelítő megoldást ezeken a véges elemeken kívánjuk meghatározni, úgy a végeselem módszer használata javasolt. Ha a diszkretizálást a peremfelületén végezzük el a peremelem módszer alkalmazásához jutunk.

A feladat megoldása során sokszor elegendő, hogy a határfeltételeket és a differenciálegyenleteket is csak közelítőleg elégítsük ki, ekkor a végeselem módszer, vagy a véges differenciák módszerének alkalmazása célszerű. Ha a határfeltételeket korrekten, teljes mértékben ki kell elégíteni, akkor a variációs számítás globáliselem módszerének az R -függvényekkel való kombinációjával érhetjük el a kívánt eredményt. Ha azonban a differenciálegyenlet kielégítése a cél, úgy, hogy a határfeltételek közelítő teljesülése is elegendő, akkor a peremelem módszert célszerű alkalmazni.

2.2.1. Véges differenciák módszere

A numerikus térszámítási módszerek közül az elsők között a véges differenciák elvét kezdték el a kutatók használni [125]. Ez a numerikus eljárás egyike a legnépszerűbb és legelterjedtebb módszereknek [35, 132]. Az eljárás származtatása, a közelítő megoldás előállítása történhet egyszerűen a Taylor sorbafejtéssel és annak a rácspontokon történő kiértékelésével. Más szerzők a differenciálás operátorának a kiterjesztésével vezetik be a véges differenciák módszerét [106]. Ekkor a parciális differenciálegyenletek magasabb rendű deriváltjait a differencia operáció többszörös alkalmazásával állítják elő és ezzel közelítik a differenciálegyenlet operátorát. A legújabb elméletek a súlyozott maradék elv alapján definiálják a véges differenciák módszerét [29, 31]

A differenciálegyenletek rácsmódszerrel történő megoldásának technikája a deriváltaknak véges differenciákkal való közelítésén alapul. Az elektromágneses terek meghatározása nagyrészt a Laplace és a Helmholtz egyenletek megoldásának numerikus meghatározását jelenti.

A differenciálegyenlet megoldásának közelítésekor felmerül a konvergencia kérdése [111]. A konvergencia vizsgálatok során kétféle hibát különböztetünk meg. Az egyik a diszkretizálási hiba, ami a parciális differenciálegyenlet közelítő és pontos megoldása közötti különbség, amely hibátag a rácsosztás finomságától, valamint az alkalmazott Taylor sorból elhanyagolt magasabb rendű deriváltak fokszámától függ. A másik hibátag a differenciálegyenlet és az azt közelítő differencia egyenlet közötti eltérés, amely a konvergencia mértékéből származik. A véges differenciák módszerrel kapott megoldás – mint minden más megoldás esetén is – akkor konvergens, ha a vizsgált térrész minden

rácspontjában a közelítő megoldás a pontos értékhez tart, ha a rácsosztást minden határon túl csökkentjük, de a fő kritérium, hogy $r < \frac{1}{2}$ legyen, ahol r a konvergencia sugár.

Ezt az eljárást a végeelem módszer megjelenése és elterjedése követte, ami a vizsgált térrész belsejében írja le a teret, de nem alkalmas a nyitott térrészek pontos meghatározására, az elemi módszerek felhasználásával. Ennek a problémának a megoldására jelent meg a peremelem módszer, mint új megoldási technika, amely képes a nyitott térrészekben történő folyamatok leírására. Manapság a legtöbb probléma bonyolultsága miatt a leggyakoribb eljárási módszer a két előbb említett eljárás, a végeelem módszer és a peremelem módszer közös alkalmazása, ahol a végeelem módszerrel leírják a zárt térrész vizsgált mennyiségeit, míg a peremelem módszerrel a környező tér leírása lehetséges. A megoldás során a közös peremen illeszteni kell a kétféle megoldást. Ez a két eljárás az, amelyet napjainkban a leggyakrabban alkalmaznak. Ez köszönhető annak, hogy mindkét módszer igen könnyen használható, fejlett geometriai preprocesszorral rendelkeznek, így igen alkalmasak a felhasználásra.

2.2.2. Végeelem módszer

A végeelem módszer [143] lényege, hogy a vizsgált térrészt felosztja kisebb térrészek összességére. A leggyakrabban alkalmazott eljárások 2D esetben a háromszög, vagy négyszög elemekre való bontás, míg 3D esetén a tetraéder elemek [107, 133].

A térrész felosztása után a keletkezett csomópontokban határozzuk meg a keresett érték(ek)et. Miután ott már ismerjük a megoldásokat, a kisebb elemekben is meghatározhatjuk a keresett értéket egy alkalmasan megválasztott közelítő függvény (lineáris, négyzetes, stb.) segítségével. A megoldás során lényeges kérdés lehet, hogy az alkalmazott rácsban mekkora elemeket alkalmaztunk. A megoldás értéke annál pontosabb lesz, minél kisebbek ezek az elemek. Ez különösen fontos lehet olyan helyeken, ahol a vizsgált térrész kissugarú görbülettel rendelkezik [6]. Ebből a szempontból vizsgálva tehát a minél kisebb elemek alkalmazása adná a legjobb eredményt.

Másfelől megvizsgálva a kérdést minden egyes új csomópont felvétele új egyenleteket és új ismeretlent jelent a megoldás során, ami a számítógépes tárigényt és ezzel együtt a megoldáshoz szükséges időt jelentős mértékben megnöveli. Igaz ez még abban az esetben

is, amikor a matematikusok és a módszert alkalmazó mérnökök által mind több és több szolver eljárás lát napvilágot [47, 48].

A nyitott térrészek vizsgálatának megkönnyítése érdekében a kutatók bevezették a végtelen végelemek [22, 23, 24, 144].

2.2.3. Peremelem módszer

A peremelem módszer a vizsgált térrészen a megoldandó parciális differenciálegyenletet a térrész határán előírt határfeltételekkel együtt egy integrálegyenletbe transzformálja és a vizsgált térrész határfelületén előírt feltételek ismeretében állítja elő az integrálegyenlet közelítő megoldását [29, 31, 50].

A peremelem módszer kis elemekre bontja a vizsgált térrész peremfelületét. Az egyes peremelemeken csomópontokat definiálva, azokhoz potenciálértékeket rendel [103, 142]. A szegmenseken a potenciálfüggvény értéke ezen csomópontokhoz tartozó potenciálértékekkel adható meg. Az elem közepén felvéve a csomópont és a potenciálfüggvény értékét ezen csomóponti értékkel adva meg a konstans közelítés alkalmazását jelenti. Amennyiben a csomópontokat a szegmensek végén, a csatlakozási pontokban vesszük fel lineáris közelítés vezethető be, de az elemben további csomópontok felvétele magasabb fokszámú közelítés alkalmazására is lehetőséget ad [129].

Az eljárás alkalmas a nyitott térrészek vizsgálatára, de zárt térrészek vizsgálatánál az eredmények meghatározása jóval bonyolultabb, mint a végelem módszer alkalmazásánál.

Az egyik legalkalmasabb eljárás az ilyen nyitott térrészek számításánál a kombinált végelem és peremelem módszer, ahol a végelem módszer segítségével meghatározhatjuk a tér által egy felületen létrejövő potenciálértékeket, míg a felületen kívüli térrészt a peremelemek segítségével határozhatjuk meg [53, 62, 77]. Az elektromágneses térszámítás elősegítése érdekében egyéb más módszerek kombinációi is megjelentek a térszámítás palettáján, mint a „Face-edge” és a végelem módszer, vagy a véges differenciák és Whitney elemek kombinációja [3, 52]. A nyitott térrészek vizsgálata sok esetben jelentett és jelent még a jövőben is problémát. Ennek elkerülésére a térszámítással foglalkozók egy új eljárást kerestek és találtak is az ***R***-függvényeket.

2.3. Az R -függvények

Az R -függvényeket V.L. Rvachev ukrán matematikus dolgozta ki. A mérnökök számára több könyvben tette ismerté a függvények használatát [112, 113, 114]. Az R -függvények háromdimenziós térrel és a hozzá kapcsolódó logikai operációkkal való kapcsolatát több munka is bizonyítja [70, 72, 73, 113, 117]. A mérnöki gyakorlatban elsőként a mechanikai és melegezési problémák kezelésében használták [115, 116]. Elsők között alkalmazta munkáiban az R -függvények elméletét és matematikai leírását Orkisz. A mechanikai peremfeltételek teljesítésének problémáját sikerült megoldaniuk az R -függvények és a peremelem módszer kombinálásával [74, 86].

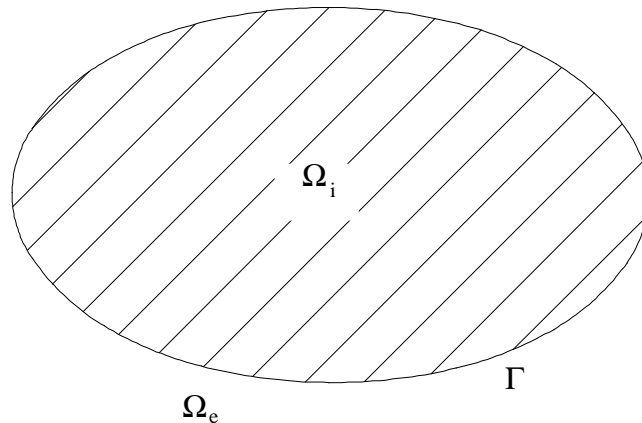
Az R -függvények alkalmazásánál az egyik legjelentősebb problémát a határfeltételek geometriai összetevőinek pontos leírása jelenti. Ez egy egyszerű geometria esetén természetesen nem jelent problémát, de bonyolultabb esetben jelentős időt vehet igénybe. A feladat voltaképpen igen egyszerű. Egy olyan geometriai függvényt kell találni, amely teljesíteni tudja azt az igen egyszerű kívánalmat, hogy a határfelület minden pontjában a függvény értéke pontosan megegyezzen nullával, a vizsgált térrészben lévő pontokban pozitív, míg a „külső” térben lévő pontokra negatív értékkel rendelkeznek

$$\begin{aligned} w &= 0, \text{ ha } P \in \Gamma, \\ w &> 0, \text{ ha } P \in \Omega, \\ w &< 0, \text{ ha } P \notin \Gamma \cap \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Általában azonban a határfelületek összetett geometriai leírással rendelkeznek. Ezeket a felületeket azonban mindig fel lehet építeni kisebb részfelületek egyesítésével, metszetével, illetve több részegység komplementereként. Ezekben az esetekben a határfelületeket leíró R -függvényeket a részfelületek R -függvényeinek felhasználásával, az R -konjunkció, az R -diszjunkció, illetve az R -negáció segítségével lehet meghatározni.

2.3.1. R -függvények műveletei

A háromdimenziós teret osszuk két részre egy Γ zárt felület segítségével, ekkor kapunk egy Ω_e külső és egy Ω_i belső tartományt (2.1.ábra). Definiálhatjuk az Ω zárt tartományt úgy, hogy a belső tartományhoz hozzávesszük a határfelületet is $\Omega = \Omega_i \cup \Gamma$.

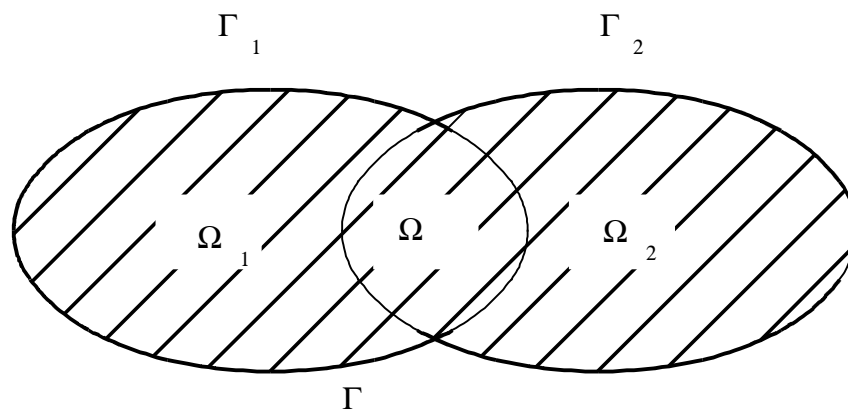


2.1. ábra A tartományokra osztás és a Γ határfelület, $\Omega = \Omega_i \cup \Gamma$

Megadunk egy skalár-vektor függvényt, amely implicit formában a következőképpen néz ki $w(\mathbf{r})=0$. Ez a skalár-vektor függvény legyen folytonos, a vizsgált tartományon belül pozitív, a határfelületen nulla, az Ω tartományon kívül pedig negatív (2.1)-nek megfelelően.

2.3.1.1. \mathbf{R} -függvények diszjunkciója

Az \mathbf{R} -diszjunkció a háromszög egyenlőtlenség elvén alapszik. Segítségével meghatározható két, az \mathbf{R} -függvényével adott Ω_1 és Ω_2 térrész uniója. Legyen adott az Ω_1 és az Ω_2 tartomány, valamint az őket határoló Γ_1 és Γ_2 felületek, 2.2. ábra.



2.2. ábra \mathbf{R} -függvények diszjunkciója $w = w_1 \vee w_2$

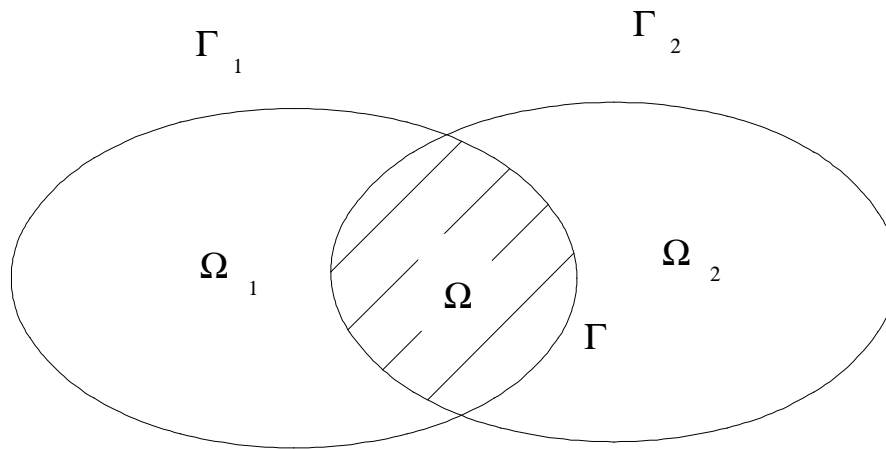
Ha w_1 az Ω_1 tartományhoz tartozó \mathbf{R} -függvény és w_2 az Ω_2 tartományhoz tartozó \mathbf{R} -függvény, akkor w_1 és w_2 függvények \mathbf{R} -diszjunkciója

$$w = w_1 \vee w_2, \quad w = w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2}. \quad (2.2)$$

módon határozható meg. Az eljárást az elektródák felületének kialakításakor használom fel, például amikor a 3.3 ábrán a CD és DE pontok által kifeszített egyenesek által leírt területeknek az unióját kell meghatároznom.

2.3.1.2. \mathbf{R} -függvények konjunkciója

A konjunkció során két tartomány közös részét, metszetét tudom meghatározni. Legyen adott két tartomány Ω_1 és Ω_2 , az őket határoló felületek Γ_1 és Γ_2 , (2.3. ábra).



2.3. ábra \mathbf{R} -függvények konjunkciója $w = w_1 \wedge w_2$

Ha w_1 az Ω_1 tartományhoz tartozó \mathbf{R} -függvény és w_2 az Ω_2 tartományhoz tartozó \mathbf{R} -függvény, akkor w_1 és w_2 függvények \mathbf{R} -konjunkciója

$$w = w_1 \wedge w_2, \quad w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2}. \quad (2.3)$$

képpen határozható meg.

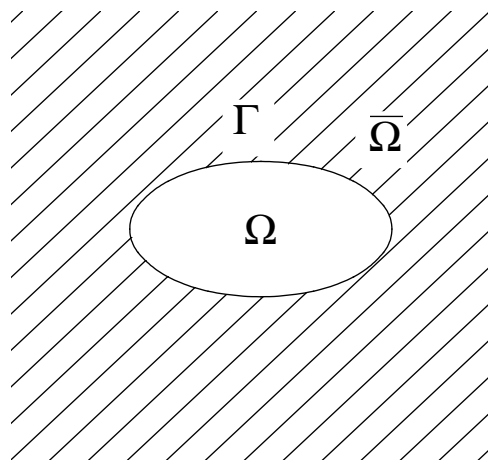
2.3.1.3. \mathbf{R} -függvények negációja

Legyen adott egy Ω tartomány. Olyan \mathbf{R} -függvényt keresünk, amely a Ω komplementer teret írja le, 2.4. ábra.

Ha w az Ω tartományra vonatkozó \mathbf{R} -függvény, akkor az Ω komplementer tartomány \bar{w} \mathbf{R} -függvényét az \mathbf{R} -negáció segítségével állíthatjuk elő $\bar{w} = -w$.

Az Ω tartomány sok esetben – még bonyolult geometria esetén is – felbontható olyan résztartományokra, amelyek \mathbf{R} -függvénye elemi függvényekből áll. Az előbb megismert

módszerek segítségével az elemi R -függvények összeállításából meghatározható az Ω tartomány R -függvénye, ami a módszer egyik nagy előnye.



2.4. ábra R -negáció Ω komplementer tartománya

2.3.2. Az R -függvények néhány tulajdonsága

Ebben a pontban az R -függvények néhány lényeges tulajdonságát mutatom be.

1. Legyen w az Ω tartomány R -függvénye. Ha szorzom a w R -függvényt egy c konstanssal, amelynek az értéke nem nulla, az eredmény cw lesz. Ez az állítás könnyen belátható. Ha c pozitív ($c > 0$), az R -függvény tehát cw az Ω tartományon. Ha c negatív értékű ($c < 0$), akkor a cw R -függvény az Ω tartomány Ω komplementerét írja le. Ha a c konstans nulla értékű, akkor az állítás semmiféleképpen nem érvényes.
2. Ha az Ω tartományt Ω_i ($i=1,2,\dots,n$) résztartományokból konstruálok, a metszet és az unióképzést használva

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad \bar{\Omega} = \bigcap_{i=1}^n \bar{\Omega}_i, \quad (2.4)$$

akkor a w R -függvény egyszerre írja le az Ω tartományt. Alkalmazzuk az R -konjunkciót, illetve az R -diszjunkciót összesen n -szer. Az egyes tartományok R -függvényei w_i ($i=1,2,\dots,n$), amelyek az Ω_i ($i=1,2,\dots,n$) tartományokat írják le

$$w = \bigvee_{i=1}^n w_i, \quad w = \bigwedge_{i=1}^n w_i. \quad (2.5)$$

3. Differenciálás tulajdonságai: Ebben a pontban az \mathbf{R} -függvények differenciálásának néhány tulajdonságát írom le, az \mathbf{R} -diszjunkció, az \mathbf{R} -konjunkció és az \mathbf{R} -negáció vonatkozásában.

a) Definiáljuk az Ω tartományt, mint két résztartomány Ω_1 és Ω_2 uniója Γ_1 és Γ_2 határfelületekkel. Az Ω tartományt leíró \mathbf{R} -függvény w , w_1 és w_2 az Ω_1 és Ω_2 tartományokhoz tartozó \mathbf{R} -függvények, ezekre az \mathbf{R} -konjunkció formulája

$$w = w_1 \vee w_2. \quad (2.6)$$

A w \mathbf{R} -függvény gradiense a P – az egyesített Ω tartomány felületéhez tartozó – pontban egyenlő, annak a tartománynak az \mathbf{R} -függvényének a gradiensevel, amelyik felületén a P pont van. Matematikailag ez a következő:

Ha a P pont az egyesített Ω tartomány határfelületének egy pontja és ugyanakkor ez a P pont Ω_1 tartomány Γ_1 határfelületének is eleme, azaz w_1 és w_2 \mathbf{R} -függvények leírják a résztartományokat és eleget tesznek a

$$w_1(P) = 0, \quad w_2(P) < 0 \quad (2.7)$$

feltételeknek, akkor Ω_1 tartományon: $grad(w) = grad(w_1)$. Hasonlóan járhatunk el, ha a P pont az Ω -tartományt határoló terület azon részén helyezkedik el, amely Ω_2 résztartomány határfelülete, akkor az Ω_1 és Ω_2 tartományt leíró \mathbf{R} -függvények értékei

$$w_1(P) < 0, \quad w_2(P) = 0. \quad (2.8)$$

Ebben az esetben a w \mathbf{R} -függvény gradiense a w_2 Ω_2 résztartományhoz tartozó \mathbf{R} -függvény gradiensevel egyezik meg, $grad(w) = grad(w_2)$.

A fenti eredményekből az egyesített Ω tartomány felületén a w \mathbf{R} -függvény gradiense a következő alakot ölti az \mathbf{R} -diszjunkció tulajdonságainak megfelelően:

$$grad(w_1 \vee w_2) \Big|_{P \in \Gamma} = \begin{cases} grad(w_1), & \text{ha } P \in \Gamma_1 \subset \Gamma, \\ grad(w_2), & \text{ha } P \in \Gamma_2 \subset \Gamma. \end{cases} \quad (2.9)$$

b) Definiáljuk Ω zárt tartományt, mint két résztartomány Ω_1 és Ω_2 metszetét. A w \mathbf{R} -függvény, amely leírja a metszetképzés után kapott Ω tartományt, megkonstruálható a w_1 és w_2 \mathbf{R} -konjunkciójával

$$w = w_1 \wedge w_2 \quad (2.10)$$

A w \mathbf{R} -függvény gradiense az Ω tartomány Γ felületén elhelyezkedő P pontban egyenlő, annak a tartománynak az \mathbf{R} -függvényének a gradiensével, amely határfelületén a P pont van

$$\text{grad}(w_1 \wedge w_2)|_{P \in \Gamma} = \begin{cases} \text{grad}(w_1), & \text{ha } P \in \Gamma_1 \subset \Gamma, \\ \text{grad}(w_2), & \text{ha } P \in \Gamma_2 \subset \Gamma. \end{cases} \quad (2.11)$$

Az eredmény hasonlóan indokolható, mint az előző esetben. Ha a P pont a Γ felületnek része és az \mathbf{R} -függvények a következő feltételeket kielégítik

$$w_1(P) = 0, \quad w_2(P) > 0, \quad (2.12)$$

akkor a w \mathbf{R} -függvény gradiense a P pontban: $\text{grad}(w) = \text{grad}(w_1)$.

Ha a P pont az Ω tartomány Γ felületének azon részéhez tartozik, amely Ω_2 tartomány felülete is, akkor az \mathbf{R} -függvényekre a következő relációk vonatkoznak:

$$w_1(P) > 0, \quad w_2(P) = 0, \quad (2.13)$$

és ebben az esetben a w \mathbf{R} -függvény gradiense a diszjunkcióval kapott Ω tartományon: $\text{grad}(w) = \text{grad}(w_2)$.

Az \mathbf{R} -függvények előbbi tulajdonságainak a bizonyításához felhasználjuk az \mathbf{R} -konjunkció és az \mathbf{R} -diszjunkció definíciós formuláit.

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[w_1 \begin{pmatrix} \vee \\ \wedge \end{pmatrix} w_2 \right] &= \text{grad} \left(w_1 + w_2 \pm \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \right) = \\ &= \text{grad}(w_1) + \text{grad}(w_2) \pm \frac{1}{2\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} [2w_1 \text{grad}(w_1) + 2w_2 \text{grad}(w_2)] = \\ &= \text{grad}(w_1) \left(1 \pm \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right) + \text{grad}(w_2) \left(1 \pm \frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ebben a kifejezésben a pozitív előjel az érvényes, ha \mathbf{R} -diszjunkcióról van szó, és akkor alkalmazzuk a negatív előjelet, ha \mathbf{R} -konjunkcióról beszélünk. Az (2.7) és (2.12) feltételek egyidejűleg teljesülnek, ha $w_1 = 0$, és a P pont Ω_1 tartomány

Γ_1 felületének azon részén található, amely része Ω tartomány Γ felületének, akkor

$$\left. grad(w_1) \left(1 \pm \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right) \right|_{w_1=0} = grad(w_1). \quad (2.15)$$

Vegyük a következő tagot az (2.7) és (2.12) feltételek egyidejű teljesülése mellett.

$$\left. grad(w_2) \left(1 \pm \frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right) \right|_{w_1=0} = grad(w_2) \left(1 \pm \frac{w_2}{|w_2|} \right). \quad (2.16)$$

Legyen két résztartomány uniójáról szó, ahol w_2 az Ω_2 tartományt írja le. Továbbá w_2 negatív előjelű, $w_2 < 0$, ha P pont a Γ_1 felület egy pontja úgy, hogy egyidejűleg Γ pontja is, akkor

$$\frac{w_2}{|w_2|} = -1. \quad (2.17)$$

ezért (2.16) egyenlő nullával.

Hasonlóan járhatunk el abban az esetben, ha a két résztartomány metszetéről van szó. A w_2 függvény pozitív előjelű, $w_2 > 0$ a Ω és Ω_1 tartományok közös határpontján. Ebben az esetben (2.16) egyenlet szintén nulla értéket vesz fel, mert $\frac{w_2}{|w_2|} = 1$ és (2.16)-ban az **R**-diszjunkció miatt a negatív előjelet kell figyelembe venni. Ez az eljárás hasonlóan alkalmazható (2.8) és a (2.13) esetekre is.

2.3.3. Az **R**-függvények normálása

Az elektromágnesességben a bonyolult határfeltételeket megkövetelő feladatok megoldásában nyújtanak segítséget az **R**-függvények és a normált **R**-függvények.

2.3.3.1. A normálás folyamata

A w **R**-függvény megadja az Ω tartomány Γ határfelületét, az előzőekben már megismert módon. Ebben a pontban a normálás folyamatát tárgyalom. A későbbiekben

látni fogjuk, hogy számításaink könnyebbé válnak, ha a határfeltételeket leíró \mathbf{R} -függvény gradiense egységnyi a határfelületen. Ilyen eset például, amikor a közelítő függvénynek az arctg függvényt használom, hiszen ebben az esetben a függvény hasznos értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ tartomány.

Legyen w^n a normált \mathbf{R} -függvény, amely természetesen megfelel az \mathbf{R} -függvények definíciójának. Legyen tehát a tartomány határfelületén az \mathbf{R} -függvény gradiense egység értékű. Az Ω tartomány Γ határfelülete mentén az \mathbf{R} -függvény eleget tesz a

$$w^n|_{\Gamma} = 0, \quad \left| \text{grad}(w^n) \right|_{\Gamma} = 1, \quad (2.18)$$

feltételeknek. A w definíciója értelmében a normált \mathbf{R} -függvény pozitív a tartomány belsejében

$$w^n|_{P \in \Omega} > 0, \quad (2.19)$$

a tartományon kívül pedig negatív értéket vesz fel

$$w^n|_{P \notin \Omega} < 0. \quad (2.20)$$

Normált \mathbf{R} -függvényt konstruálhatunk az \mathbf{R} -függvényekből és a gradienseiből, az Ω tartomány Γ felületére vonatkozó előírásokkal.

Ha a w \mathbf{R} -függvény nem veszi fel a nulla értéket az Ω tartomány egyetlen belső pontjában sem, akkor a következőképpen definiálhatjuk a normált \mathbf{R} -függvényt:

$$w^n = \frac{w}{k|\text{grad}(w)|_{\Omega}}, \text{ ha } \text{grad}(w)|_{\Omega} \neq 0. \quad (2.21)$$

Ha az \mathbf{R} -függvény gradiense a nulla értéket is felveszi az Ω tartományon, akkor a normált \mathbf{R} -függvény definíciója:

$$w^n = \frac{w}{\sqrt{w^2 + k|\text{grad}(w)|^2}}, \text{ ha } \text{grad}(w)|_{\Omega} = 0 \text{ és } k=1. \quad (2.22)$$

Könnyű belátni, hogy ezek a definíciós alakok kielégítik a fentebb megszabott feltételeket. A normált \mathbf{R} -függvény gradiensek alakja

$$\text{grad}(w^n) = \frac{\text{grad}(w)\text{grad}(w) - w \cdot \text{grad}(|\text{grad}(w)|)}{|\text{grad}(w)|^2}, \quad (2.23)$$

és

$$\text{grad}(w^n) = \frac{\text{grad}(w)\sqrt{w^2 + |\text{grad}(w)|^2} - w \cdot \text{grad}\left(\sqrt{w^2 + |\text{grad}(w)|^2}\right)}{w^2 + |\text{grad}(w)|^2}. \quad (2.24)$$

Vizsgáljuk meg ezeknek a gradienseknek az értékét a Γ felületen, ahol a $w=0$ definíció szerint. A (2.21) egyenlettel definiált normált \mathbf{R} függvény gradiense

$$\text{grad}(w^n)|_{\Gamma} = \frac{\text{grad}(w)\text{grad}(w)}{|\text{grad}(w)|^2} = \frac{\text{grad}(w)}{|\text{grad}(w)|} = \pm 1, \quad (2.25)$$

míg a (2.22) kifejezés gradiense

$$\begin{aligned} \text{grad}(w^n)|_{\Gamma} &= \frac{\text{grad}(w)\sqrt{w^2 + |\text{grad}(w)|^2}}{w^2 + |\text{grad}(w)|^2} = \frac{\text{grad}(w)\text{grad}(w)}{|\text{grad}(w)|^2} = \\ &= \frac{\text{grad}(w)}{|\text{grad}(w)|} = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Összességében elmondhatjuk, a normált \mathbf{R} -függvények eleget tesznek az előírt határfeltételeknek, az \mathbf{R} -függvények egyenletei miatt. Gradiensük abszolútértéke egység értékű az Ω tartomány Γ felületén. Röviden:

$$w^n|_{\Omega \cup \Gamma} \geq 0, \quad |\text{grad}(w^n)|_{\Gamma} = 1. \quad (2.27)$$

2.3.3.2. A felület normálvektora

Mint ismeretes a felület egyik fő jellemzője a normálvektora. A normált \mathbf{R} -függvények nemcsak a tartományt írják le, hanem a határfelület normálvektorát is definiálják.

Legyen adott az Ω tartomány, az azt határoló zárt Γ felület és az ezt leíró w^n normált \mathbf{R} -függvény. Könnyű belátni azt, hogy a normált \mathbf{R} -függvény gradiense a felület befelé mutató normálvektora. A felületből kifelé mutató normálvektor nyilvánvalóan

$$\mathbf{n} = -\text{grad}(w^n). \quad (2.28)$$

Ortogonalis koordinátákban, ahol a koordinátaváltozók x_1, x_2, x_3 , és $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egyenként a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok. A normálvektor és az egységvektorok közötti összefüggés, $\mathbf{n} = -grad(w^n)$ alapján:

$$\mathbf{n} = -grad(w^n) = -\left[\frac{\partial w^n}{g_1 \partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial w^n}{g_2 \partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial w^n}{g_3 \partial x_3} \mathbf{e}_3 \right], \quad (2.29)$$

ahol g_1, g_2, g_3 koordinátafüggvények. Descartes-koordinátákban ezek a függvények - ahol a koordinátafüggvények x, y , és z - $g_1=g_2=g_3=1$. Hengerkoordinátákban - ahol a koordinátaváltozók r, φ, z - $g_1=1, g_2=r, g_3=1$. Végül gömbkoordinátákban r, ϑ, φ változókkal a keresett függvények $g_1=1, g_2=r, g_3=r \cdot \sin \vartheta$.

2.3.3.3. A normált \mathbf{R} -függvények tulajdonságai

A bevezetett normált \mathbf{R} -függvények nemcsak a tartományt írják le, hanem a felület normálvektorát is megadják. Az \mathbf{R} -függvényeken definiált műveletek érvényesek a normált \mathbf{R} -függvényekre is. A normált \mathbf{R} -függvények deriváltja a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

Legyenek a vizsgált tartományok Ω_1 és Ω_2 Γ_1, Γ_2 határfelületekkel, és a hozzájuk tartozó normált \mathbf{R} -függvények w_1^n és w_2^n .

$$\begin{aligned} w_1^n|_{\Omega_1} &\geq 0, & \left| grad(w_1^n) \right|_{\Gamma_1} &= 1, \\ w_2^n|_{\Omega_2} &\geq 0, & \left| grad(w_2^n) \right|_{\Gamma_2} &= 1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Az Ω tartomány Γ határfelületének normálvektora \mathbf{n} . Az Ω_1, Ω_2 tartományok Γ_1, Γ_2 határfelületeinek normálvektora \mathbf{n}_1 , illetve \mathbf{n}_2 . Vegyünk fel egy pontot Ω tartomány határán - $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ - úgy, hogy ez a pont egyidejűleg Ω_1 tartomány Γ_1 felületének eleme, és Ω_2 külső pontja is legyen, ekkor:

$$w_1^n = 0, \quad w_2^n < 0. \quad (2.31)$$

A w^n normált \mathbf{R} -függvény gradiensének, és az Ω tartomány normálvektorának a skalár szorzata

$$\left[\mathbf{n} \cdot grad(w_1^n \vee w_2^n) \right]_{\Gamma \in \Gamma} = \left[\mathbf{n}_1 \cdot grad(w_1^n) \right]_{\Gamma_1}. \quad (2.32)$$

Hasonlóan járhatunk el, ha a felvett pont a Γ_2 felületen helyezkedik el, és a pont kívülesik az Ω_1 tartományon

$$w_1^n < 0, \quad w_2^n = 0. \quad (2.33)$$

Az előző skalár szorzat a következőképpen alakul

$$\left[\mathbf{n} \cdot \text{grad}(w_1^n \vee w_2^n) \right]_{\Gamma_2 \in \Gamma} = \left[\mathbf{n}_2 \cdot \text{grad}(w_2^n) \right]_{\Gamma_2}. \quad (2.34)$$

Hasonló összefüggéseket kapunk, ha az Ω tartományt metszéssel állítjuk elő, amelynek határfelülete Γ , és a felvett pont belső pontja az egyik résztartománynak ugyanakkor határpontja a másik tartománynak, akkor

$$w_1^n = 0, \quad w_2^n > 0, \quad (2.35)$$

a következő reláció érvényes

$$\left[\mathbf{n} \cdot \text{grad}(w_1^n \wedge w_2^n) \right]_{\Gamma_1 \in \Gamma} = \left[\mathbf{n}_1 \cdot \text{grad}(w_1^n) \right]_{\Gamma_1}. \quad (2.36)$$

Ha a pontot a másik tartomány felületének eleme, akkor

$$w_1^n > 0, \quad w_2^n = 0. \quad (2.37)$$

Az idevágó skalár szorzat

$$\left[\mathbf{n} \cdot \text{grad}(w_1^n \wedge w_2^n) \right]_{\Gamma_2 \in \Gamma} = \left[\mathbf{n}_2 \cdot \text{grad}(w_2^n) \right]_{\Gamma_2}. \quad (2.38)$$

2.4. Az R -függvényekhez kapcsolódó térszámítás variációs elvei

A (3.1) Poisson egyenlet Ω térrészen történő megoldása a variációs elv szerint a következő funkcionál minimalizálásával állítható elő:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot \text{grad}^2 \varphi - 2\rho\varphi] \mu\Omega. \quad (2.39)$$

A függvény változójának értékét módosítom egy αh taggal. Ekkor a funkcionál értéke a következő képpen változik

$$\begin{aligned}
 W(\varphi + \alpha \cdot h) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot \text{grad}^2(\varphi + \alpha \cdot h) - 2\rho(\varphi + \alpha \cdot h)] d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot (\text{grad}\varphi + \alpha \cdot \text{grad}h)^2 - 2\rho(\varphi + \alpha \cdot h)] d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \cdot (\text{grad}^2\varphi + 2\alpha \cdot \text{grad}h \cdot \text{grad}\varphi + \alpha^2 \cdot \text{grad}^2h) d\Omega \\
 &\quad - \int_{\Omega} \rho(\varphi + \alpha \cdot h) d\Omega .
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Beláthatjuk, hogy ennek a funkcionálnak az első variációja nulla lesz, a feladat által megszabott peremfeltételek mellett. A deriváltját képezve

$$\frac{\partial W(\varphi + \alpha \cdot h)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot (2\text{grad}h \cdot \text{grad}\varphi + 2\alpha \cdot \text{grad}^2h) - 2\rho h] d\Omega, \tag{2.41}$$

$$\delta W(\varphi, h) = \left. \frac{\partial W(\varphi + \alpha \cdot h)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot \text{grad}h \cdot \text{grad}\varphi - \rho h] d\Omega. \tag{2.42}$$

Felhasználva a következő vektoranalízisbeli azonosságot

$$\text{div}(h \cdot \text{grad}\varphi) = \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}h + h \cdot \Delta\varphi. \tag{2.43}$$

a funkcionál első variációja a következő alakra hozható

$$\delta W(\varphi, h) = \left. \frac{\partial W(\varphi + \alpha \cdot h)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{\Omega} [\varepsilon \cdot (\text{div}(h \cdot \text{grad}\varphi) - h \cdot \Delta\varphi) - \rho h] d\Omega. \tag{2.44}$$

A Gauss-Osztrogradszkij tételt alkalmazva

$$\delta W(\varphi, h) = \left. \frac{\partial W(\varphi + \alpha \cdot h)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = - \int_{\Omega} h[\varepsilon \cdot \Delta\varphi - \rho] d\Omega + \varepsilon \oint_{\Gamma} h \cdot \text{grad}\varphi \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \tag{2.45}$$

Az Ω tartományon az első tag nulla, ha a $\varepsilon \cdot \Delta\varphi - \rho = 0$ Poisson egyenlet kielégítésre kerül.

Az Ω tartomány Γ határfelületére kétféle peremfeltételt írhatunk elő. Ezek a Dirichlet és a Neumann típusú peremfeltételek.

A funkcionál első variációja valóban nulla lesz, ha teljesülnek a feladat által kitűzött Dirichlet és Neumann típusú peremfeltételei, ezért alkalmas a feladat megoldására. A kitűzött feladat megoldását variációs problémára vezethetem vissza. Ezzel a bizonyítást befejeztem.

A továbbiakban feladatommak tekintem a felírt funkcionál minimalizálását, amit közelítünk Ritz-módszere szerint. Így egy n egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszert kapok. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai szolgáltatják a feladat megoldását az előre megválasztott bázisfüggvények mellett. Ritz-módszere szerint a bázisfüggvény az egész térrészen értelmezett, a keresett potenciálfüggvényt a következő alakban keressük

$$\varphi = \varphi_\delta + \sum_{k=1}^n w_D f_k a_k, \quad (2.46)$$

ahol φ_δ az inhomogén Dirichlet peremfeltételeket kielégítő potenciálfüggvény, w_D a feladat geometriájára jellemző \mathbf{R} -függvény, f_k a teljes függvényrendszer k -adik eleme, a_k -k pedig az ismeretlen együtthatók. Az \mathbf{R} -függvények definíciója miatt a vizsgált tartomány határfelületén $\sum_{k=1}^n w_D f_k a_k$ azonosan nulla, tehát homogén Dirichlet-peremfeltételt ír elő, amíg φ_δ arra hivatott, hogy az inhomogén Dirichlet peremfeltételeket szabja meg. Így tehát a φ -függvény kielégíti a feladat által meghatározott inhomogén Dirichlet-peremfeltételeket az Ω -tartomány határfelületén. Behelyettesítjük a φ potenciálfüggvényt a W funkcionálba.

$$\begin{aligned} W\left(\varphi_\delta + \sum_{k=1}^n w_D f_k a_k\right) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\varepsilon \cdot \text{grad}^2 \left(\varphi_\delta + \sum_{k=1}^n w_D f_k a_k \right) - 2\rho \left(\varphi_\delta + \sum_{k=1}^n w_D f_k a_k \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.47)$$

az az ismeretlen a_k paraméterek függvénye lesz. Azokat az a_k paramétereket keressük, amelyeknél a fenti függvénynek szélsőértéke van

$$\frac{\partial W(\varphi)}{\partial a_1} = 0, \quad 1=1,2,\dots,n. \quad (2.48)$$

ahonnan az a_k paraméterekre egy lineáris egyenletrendszer adódik. Kifejtve

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\varphi)}{\partial a_1} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[2\varepsilon \cdot \text{grad} \left(\varphi_{\delta} + \sum_{k=1}^n w_D f_k a_k \right) \cdot \text{grad}(w_D f_l) - 2\rho w_D f_l \right] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

azaz

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\varepsilon \cdot \left(\text{grad}(\varphi_{\delta}) + \sum_{k=1}^n \text{grad}(w_D f_k) \right) \cdot \text{grad}(w_D f_l) a_k - \rho w_D f_l \right] d\Omega &= 0, \\ \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon \int_{\Omega} \text{grad}(w_D f_k) \text{grad}(w_D f_l) d\Omega \right] a_k & \\ &= - \int_{\Omega} (\varepsilon \cdot \text{grad}(\varphi_{\delta}) \text{grad}(w_D f_l) - \rho w_D f_l) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ez a következő lineáris egyenletrendszer formájában is megadható:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (2.51)$$

ahol

$$\mathbf{A}[k,l] = \mathbf{A}[l,k] = \varepsilon \int_{\Omega} \text{grad}(w_D f_k) \text{grad}(w_D f_l) d\Omega \quad (2.52)$$

az egyenletrendszer \mathbf{A} mátrixának elemei, \mathbf{a} vektor az ismeretlenekből alkotott oszlopvektor, míg a jobb oldal elemei

$$\mathbf{b}[k] = - \int_{\Omega} (\varepsilon \cdot \text{grad}(\varphi_{\delta}) \text{grad}(w_D f_l) - \rho w_D f_l) d\Omega \quad (2.53)$$

alakban adhatóak meg. Az alkalmazott funkcionál energiát fejez ki. Azt kell belátnunk, hogy

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon \cdot (\text{grad} \varphi)^2 - 2\rho \varphi) d\Omega - \int_{\Gamma_N} (\varepsilon \varphi \psi_N) d\Gamma_N \quad (2.54)$$

funkcionál valóban energiát fejez ki. Vegyük az első tagot, és induljunk ki az elektrosztatikus energia összefüggéséből

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} (\varepsilon \mathbf{E}) d\Omega = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\Omega} E^2 d\Omega = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\Omega} (\text{grad} \varphi)^2 d\Omega, \quad (2.55)$$

most fejtük ki másképpen az előző összefüggést

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} EDd\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\varphi \cdot Dd\Omega, \quad (2.56)$$

most alkalmazzuk a

$$\text{div}(\varphi \cdot v) = \varphi \cdot \text{div}v + v\text{grad}\varphi \quad (2.57)$$

vektoranalitikai összefüggést és a Gauss-Osztrogradszkij tételt továbbá a Maxwell IV. egyenletét alkalmazva

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}\varphi \cdot Dd\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{div}(\varphi \cdot D) - D\text{grad}\varphi]d\Omega, \quad (2.58)$$

$$W = \int_{\Omega} \varphi\rho d\Omega - \oint_{\Gamma} \varphi Dnd\Gamma \quad (2.59)$$

egyenlőséget kapjuk. Ezzel állításunkat beláttuk.

Összefoglalásként elmondhatom, hogy az \mathbf{R} -függvényekkel való számítási eljárás sok esetben lényegesen egyszerűbbé teszi a potenciálszámítást [148], hiszen segítségével a feladat megoldásánál nincs szükség nagy elemszámú végelemekháló létrehozására, a számításokat nem befolyásolja a háló finomsága, és a Neumann típusú határfeltételek jelenléte esetén sem kell nagyobb adathalmazzal dolgozni, sokkal kisebb számítástechnikai tárigénnyel megoldható a feladat.

2.5. Karakterisztikák módszere

A térszámítási eljárások használata során felmerül az igény olyan paramétereknek a vizsgálatára is, amelyek közvetlenül az egyenletekből nem jönnének ki. Az eljárás lényege az, hogy az adott paraméter vizsgálata során a térben az értékét lépcsenként állapítjuk meg, és a számításokból kapott értékek befolyásolják az eredeti számításoknál a kiindulási értéknek tekintett térjellemzők értékeit, így a számítások egy iterációs ciklus során nyerik el végleges értéküket.

Az eljárást fel lehet használni például a tértöltések meghatározásánál, ahol a vizsgált térrész minden egyes pontjában elhelyezve egy virtuális töltést, megvizsgálható, hogy az adott helyről ez a töltés mennyi idő alatt képes eljutni a nagyfeszültségű elektróda felületére, úgy, hogy az útja során a sebessége – és ehhez kapcsolódóan természetesen az iránya is – függ az adott vizsgálati pontban lévő villamos térerősség értékétől.

Természetesen a valóságban a töltés mozgása pont ellentétes lenne, azonban a befutott pályák megegyeznek egymással. A számítások során azonban az első módszer segítségével lényegesen egyszerűbben lehet meghatározni a pályát, ezért alkalmazom ezt az utat. A vizsgált térrész minden pontjából egy virtuális iont mozgatva a nagyfeszültségű elektróda felülete felé v sebességgel és meghatározható a felület eléréséhez szükséges t időt. A kapott t idő segítségével megkapható az adott pontban található virtuális töltés ρ_1 ion töltéssűrűség első közelítő értékét egy előre felvett ρ_{w1} elektróda töltéssűrűség mellett. Meghatározva a vizsgált térrész minden pontjában a ρ_1 értékét számítással megkapható a villamos térerősség értékének második közelítő értéke, amelyik már figyelembe veszi a ρ_1 szabad tértöltéseket is. A végleges megoldás tehát két, egymásba ágyazott iterációs cikluson keresztül kapható meg. Az első ilyen ciklusban a szabad tértöltések ρ_1 értékére kell egy konvergens megoldást találni. Ezt követi a második iterációs ciklus, amivel a nagyfeszültségű elektróda felületén disszipálódó elektronok mennyiségét és az ott fellépő villamos térerősséget kell úgy meghatározni, hogy a térerősség értéke az elektródán E_w egyenlő legyen a koronázó térerősséggel E_c .

2.6. A Gauss kvadratúra

Munkám során sokszor került sor az integrálok numerikus kiértékelésére. Ezen integrálok analitikus módszerekkel történő meghatározása igen nehézkes lenne, ezért alkalmaztam a Gauss kvadratúrát. Más numerikus módszerekkel szemben ennek az eljárásnak az alkalmazása igen előnyös, mivel az n osztáspontú Gauss kvadratúra a $(2n-1)$ fokszámú polinómkat pontosan integrálja és az általam kiintegrálandó függvények nagyrészt polinómok lineáris kombinációjából áll.

2.6.1. Egydimenziós integrálok meghatározása

Legyen az integrálandó függvényünk $f(x)$. Ha $w(x)$ pozitív súlyfüggvény, akkor mindig meghatározhatóak az A_{in} együtthatók és az x_{in} $i=1,2,\dots,n$ alappontok úgy, hogy az alábbi kifejezés igaz legyen:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_{in}f(x_{in}) + \frac{f^{2n}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b (\Pi_n(x))^2 w(x)dx, \quad (2.60)$$

ahol ξ az (a,b) intervallum egy tetszőleges belső pontja, f^{2n} az f függvény $2n$ -edik deriváltja, n a Gauss kvadratura osztáspontjainak a száma,

$$\Pi_n(x) = (x-x_{1n})(x-x_{2n})\dots(x-x_{nn}) \quad (2.61)$$

produktum, ahol x_{in} -ek a

$$a \leq x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn} \leq b \quad (2.62)$$

módon helyezkednek el az (a,b) intervallumban. Az egymás mellett lévő x_{in} osztáspontok nem egyenlő távolságra vannak egymástól, a Gauss kvadratura egy nem ekvidisztáns osztású integrálkvadratura. Az x_{in} pontok a $(-1,1)$ intervallumban helyezkednek el, nem ekvidisztánsan, a Csebisev-polinomok gyökeinek megfelelően.

Az A_{in} súlyokat egy integrál segítségével határozhatjuk meg.

$$A_{in} = \int_a^b L_{in}(x)w(x)dx, \quad (2.63)$$

ahol

$$L_{in}(x) = \frac{(x-x_o)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_o)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (2.64)$$

a Lagrange-polinom, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy $L_{in}(x_i)=1$ és $L_{in}(x_k)=0$, ha $i \neq k$. A (2.60) egyenletet az $a = -1$, $b = 1$ és az $w(x) = 1$ megszorításokkal alkalmazható, ellenkező esetben integráltranszformációt kell alkalmazni, amelyet a két dimenziós esetben tárgyalom. A (2.60) egyenletet második tagját el szokták hagyni, mert az konvergens integrál esetén nullához tart.

Az x_{in} és az A_{in} értékeit táblázatok segítségével is meghatározhatjuk.

2.6.2. Kétdimenziós integrálok meghatározása

A Gauss kvadratura alkalmazásakor könnyű növelni az integrálás dimezióját. A két dimenziós integrálok kiértékelésére alkalmas Gauss összefüggés a következő:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)dx dy = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} A_{in} A_{jn} f(x_{in}, x_{jn}) \quad (2.65)$$

ahol n_x és n_y az integrálás x és y irányú osztásainak száma, az A_{in} és x_{in} együtthatókat ismét táblázatokból kereshetjük elő.

Mint azt a (2.65) egyenletből láthatjuk az integrálási határok -1 és 1 , ami csak igen ritkán fordul elő a valóságban, így ezt csak egy transzformáció segítségével határozhatjuk meg. Általában egy téglalap alapú tartományon kell elvégeznünk az integrálást, annak határainak megfelelően:

$$\int_{x_a}^{x_f} \int_{y_a}^{y_f} f(x, y) dx dy, \quad (2.66)$$

A (2.66) összefüggést nem tudjuk közvetlenül kiintegrálni (2.65) alapján, mert a határok nem egyeznek meg. A (2.66) összefüggést úgy kell transzformálni, hogy x -ben és y -ban egyaránt integrálhassunk a $(-1,1)$ tartományon (2.65) alapján.

Vezessünk be két új változót, az x helyére ξ -t az y helyett η -t, úgy, hogy $-1 \leq \xi \leq 1$ valamint $-1 \leq \eta \leq 1$ kritériumok teljesüljenek. Használhatjuk a következő transzformációs összefüggéseket:

$$x = \frac{x_f - x_a}{2} \xi + \frac{x_f + x_a}{2} \quad y = \frac{y_f - y_a}{2} \eta + \frac{y_f + y_a}{2} \quad (2.67)$$

Áttérve a ξ és az η szerinti integrálásra

$$\begin{aligned} & \int_{x_a}^{x_f} \int_{y_a}^{y_f} f(x, y) dx dy = \\ & = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_f - x_a}{2} \xi + \frac{x_f + x_a}{2}, \frac{y_f - y_a}{2} \eta + \frac{y_f + y_a}{2}\right) |J| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.68)$$

ahol J a Jacobi féle determináns,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_f - x_a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{y_f - y_a}{2} \end{vmatrix} = \frac{x_f - x_a}{2} \frac{y_f - y_a}{2}. \quad (2.69)$$

A nagyobb tartományokra történő integrálást nem a pontok számának növelésével lehet pontosabbá tenni, hanem a tartományt felosztjuk kisebb résztartományokra, majd külön-külön integrálunk minden résztartományra, a kapott eredményeket pedig összegezzük.

2.7. Az elsőfajú Csebisev polinomok

Az elsőfajú Csebisev függvényeket a bázisfüggvények meghatározásánál használtam. Elsőfajú n -edfokú Csebisev polinomnak nevezzük az alábbi alakban felírható függvényeket [81]:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

A Csebisev polinom generálható rekurziós formula segítségével. Az $(n+1)$ -edik Csebisev polinom megadható az előző kettő segítségével, csak a nulladfokú és az elsőfokú

Csebisev polinom szükséges hozzá, amelyek a [81]-ban található definíció alapján közvetlenül felírhatóak.

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, \\T_1(x) &= x, \\T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).\end{aligned}\tag{2.71}$$

3. A 2D porleválasztó modell

Munkám során első lépésként azt vizsgáltam meg, hogy az általam alkalmazott numerikus számítási eljárás mennyire egyezik meg a korábban az irodalomban előfordult esettel [42], ahol a cikk szerzője az általa végelem módszerrel meghatározott ekvipotenciális görbéket és tértöltéseloszlást mutatott be.

A számítások során a térszámítást az R -függvények segítségével végeztem el, míg a szabad tértöltések meghatározását és figyelembevételét a MOC módszer, Karakterisztikák módszere, felhasználásával [37, 67] hajtottam végre.

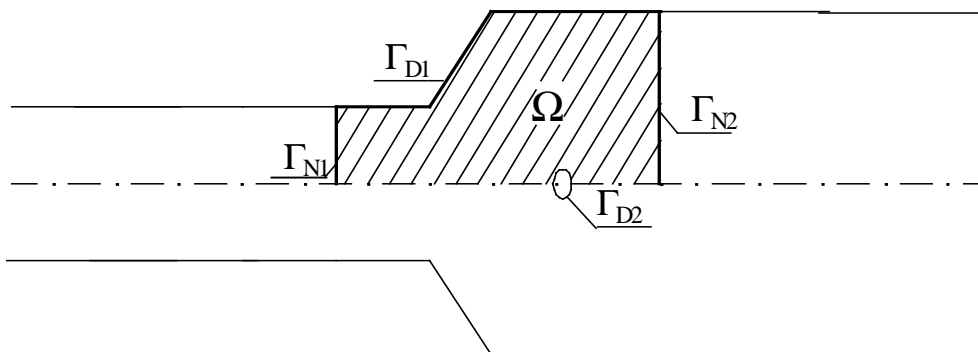
Megvizsgáltam, hogy az irodalomból átvett [42] esettel megegyező két dimenziós elektródaelrendezésben milyen villamos erőtér alakul ki, ezt mennyire befolyásolja, ha a vizsgált térrészben figyelembe veszem a tértöltéseket. Vizsgáltam, hogy mennyire változtatja meg a erőteret a geometria változtatása (pl. szimmetria figyelembevétele), de csak az elektrosztatikus erőteret vizsgáltam, a tértöltések mozgását elhanyagoltam.

3.1. A vizsgálat tárgya

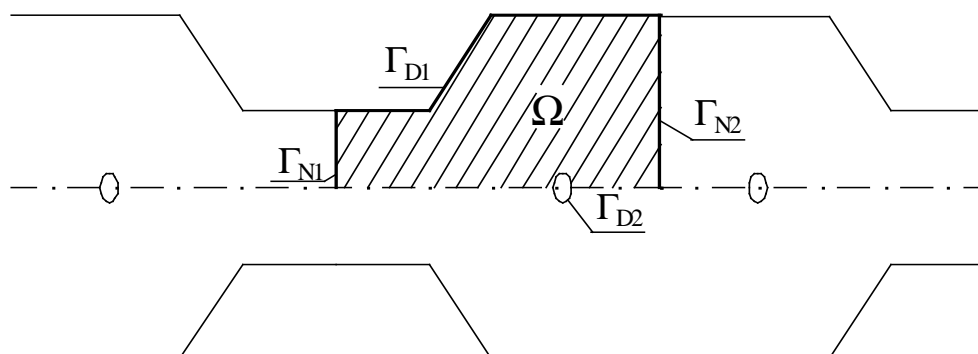
A numerikus számítások során alkalmazott kétdimenziós elektrosztatikus porleválasztó modellek keresztmetszetét az 3.1. és 3.2. ábra mutatja. A modellek fala földelt, a modellek közepén lévő hengeres elektródák pedig nagy feszültségre vannak kapcsolva. A nagyfeszültségű elektróda felszínén kialakuló koronakisülések hatására a leválasztótérbe töltéssel rendelkező részecskék kerülnek, amelyek ráragadnak a földelt lemezek között átviramló szennyezett levegő porszemcséire, majd a feltöltött por a kialakuló villamos erőtér hatására elkezd a földelt elektróda felé mozogni. Amikor azt eléri, a töltése miatt ráragad a falra, ahonnan kopogtatással, vagy más mechanikus eljárás segítségével eltávolíthatják, megóvva ezáltal a környezetet a szennyezéstől. A porleválasztási eljárásnak az egyik legkritikusabb és a lehető legnehezebben modellezhető részéről akkor beszélünk, amikor az átviramló porszemcsék feltöltődését vizsgáljuk. Ezt több kutató is vizsgálta, vizsgálja napjainkban is, de egzakt megoldást nem tudtak adni. Az általam kidolgozott eljárás során egy véletlenszám generátor segítségével végeztem el az adott részecskére vonatkozó adatok meghatározását, figyelembe véve az adott térrészre jellemző villamos térerősségre, az elektronok elnyelődésére és az ütközési ionizációra vonatkozó adatokat.

A két modell alkalmazását a számítások során az indokolta, hogy bemutathassam a numerikus térszámításhoz használt R -függvények módszer előnyeit a végeselem, illetve peremelem módszerrel szemben [7, 8].

A számítások során a határfelületekre előírt Dirichlet típusú peremfeltételek mindkét modellnél azonosak voltak, a Γ_{D1} jelű földelt elektródán a φ_0 potenciál azonosan nulla értékű volt, míg a Γ_{D2} jelű nagyfeszültségű elektróda felületén φ_2 potenciált írtunk elő.



3.1. ábra Az elsőnek vizsgált modell keresztmetszete



3.2. ábra A másodsorra vizsgált modell keresztmetszete

A vizsgálatok során két esetet tárgyaltam, hogy megvizsgálhassam a geometriának a villamos erőteret befolyásoló hatásait. Mindkét modell esetén végtelen hosszú elektródákat tételeztem fel, ezért vehető figyelembe a modell kétdimenziósként.

3.2. Téregyenletek

Az elektromos tér és a szabad töltések eloszlását a Maxwell egyenletekből lehet levezetni, bevezetve az elektromos skalár potenciált

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{J} = \mu \rho \mathbf{E}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi, \quad (3.4)$$

ahol \mathbf{E} az elektromos térerősség vektora, φ a elektromos skalárpotenciál, ε_0 a levegő permittivitása, ρ az ionizálódott töltések sűrűsége, \mathbf{J} az áramsűrűség vektora és μ az ionok mozgékonyasága. Az (3.1) és (3.4) egyenlet adja a térszámítás egyik alapegyenletének nevezett Poisson egyenletet

$$- \Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.5)$$

amelynek a megoldása adja a potenciál értékét a vizsgált térrészben.

Az (3.1), (3.3) és (3.4) egyenleteket behelyettesítve a (3.2) egyenletbe, majd a kapott eredményt felhasználva megkapjuk az \mathbf{E} elektromos térerősség által gerjesztett térben lévő ionok \mathbf{v} sebességét

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \mu \frac{\rho^2}{\varepsilon_0} = 0. \quad (3.6)$$

A villamos erővonalak mentén a (3.6) egyenlet megoldását a következő, a töltéssűrűség értékére a Karakterisztikák módszerének felhasználásából adódó egyenlet felhasználásával határozhatjuk meg:

$$\rho = \left(\frac{1}{\rho_w} + \mu \frac{t}{\varepsilon_0} \right)^{-1}, \quad (3.7)$$

ahol ρ_w a nagyfeszültségű elektróda által a vizsgált térrészbe emittált töltések sűrűsége az elektróda felületén és t az az idő, amely ahhoz szükséges, hogy a vizsgált pontból az elektromos töltéssel rendelkező részecske elérje a nagyfeszültségű elektróda felületét a karakterisztika által meghatározott útvonalon [67]. Az eljárás lényege az, hogy a vizsgált térrész minden egyes pontjában elhelyezünk egy virtuális töltést, és megvizsgáljuk, hogy az adott helyről ez a töltés mennyi idő alatt képes eljutni a nagyfeszültségű elektróda felületére, úgy, hogy az útja során a sebessége – és ehhez kapcsolódóan természetesen az

iránya is – függ az adott vizsgálati pontban lévő villamos térerősség értékétől. A vizsgált Ω térrészben (3.1., 3.2. ábra) a szabad tértöltések sűrűségét, ρ -t a (3.7) egyenlet megoldásával lehet meghatározni abban az esetben, ha ismerjük a nagyfeszültségű elektróda felületén a részecskék sűrűségét ρ_w , valamint az E elektromos térerősséget.

Természetesen a valóságban ez pontosan fordítva játszódik le, hiszen a töltések az elektródáról indulnak el, és érkeznek meg egy adott pontba. Azonban egyszerűen belátható, hogy közben ugyanazon a pályán mozognak, – a töltés az ekvipotenciális felületekre merőlegesen mozog – és az út megtételéhez szükséges idő is ugyanannyi. Az ok, amiért a valóság fordított modelljét használtam az volt, hogy így a számítások jelentősen leegyszerűsödnek, hiszen nem kell külön vizsgálni azt, hogy az adott pontba a nagyfeszültségű elektróda mely pontjából kiindulva érhetünk el.

A vizsgálat során két modellt vizsgáltam. Az első modell esetén a vizsgált tartományt figyelembevéve egy tágulatban kialakuló erőtér vizsgálatát végeztem el, míg a második esetben kihasználtam, hogy a modell szimmetrikus, periódikusan ismétlődő. Ennek megfelelően az elsőnek megvizsgált modell esetében Γ_{N1} és Γ_{N2} jelű homogén Neumann típusú peremfeltételek természetes határfeltételként adódnak az alkalmazott funkcionál megoldásaként. A második esetben, az elrendezés mindkét irányban vett szimmetriáját is figyelembe kívántam venni a fent említett két határfelületen, ezért ezekre a felületekre Neumann típusú peremfeltételt kellett előírnom

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_{N1}} = 0, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_{N2}} = 0. \quad (3.11)$$

A két modell közül az első modellt vizsgálta a [42] publikáció, ahol a térszámítást végelem módszerrel végezte a szerző. A számításokhoz alkalmazott modelleket azért választottam a [42] publikációban azonos módon, hogy a kapott erővonalképet és a töltés pályákat össze lehessen hasonlítani a régebbi eredményekkel. A szimmetria kérdése ott nem merült fel, míg az általam kidolgozott megoldás során ezt egyszerűen kivitelezhető.

Az (3.5) egyenletben szereplő Poisson egyenlet megoldásához a globális variáció számítás módszerét alkalmaztam, ahol a differenciálegyenlet megoldása az a potenciál

függvény, amely biztosítja, hogy a térrész energiájával kapcsolatos funkcionál minimális értéket vegyen fel.

Zárt felülettel határolt vizsgált térrész esetén a statikus elektromos tér funkcionálja a (2.39) szerint a következő képpen adható meg az elektromos skalár potenciállal

$$W(\varphi) = 1/2 \int_{\Omega} (\varepsilon (\text{grad} \varphi)^2 - 2 \rho \varphi) d\Omega. \quad (3.12)$$

A Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező felületeken az előírt peremfeltételek kielégítéséhez a potenciálfüggvény két részre bontható, egy ismert φ_{δ} és egy ismeretlen φ_{α} tag összegére

$$\varphi = \varphi_{\delta} + \varphi_{\alpha}. \quad (3.13)$$

Az ismert tagot úgy választottam meg, hogy folytonos legyen a vizsgált Ω térrészen, és teljesítse a előírt Dirichlet típusú peremfeltételeket a $\Gamma_D = \Gamma_{D1} \cup \Gamma_{D2}$ felületeken

$$\varphi_{\delta} \Big|_{\Gamma_{D1}} = 0, \quad (3.14)$$

$$\varphi_{\delta} \Big|_{\Gamma_{D2}} = \varphi_2. \quad (3.15)$$

A második, ismeretlen tagot annak megfelelően lehet előállítani, hogy értéke $\Gamma_D = \Gamma_{D1} \cup \Gamma_{D2}$ felület pontjaiban nem változtassa meg az előírt potenciált, azaz homogén Dirichlet típusú peremfeltételt elégítsen ki.

$$\varphi_{\alpha} \Big|_{\Gamma_D} = 0. \quad (3.16)$$

Ennek a feltételnek a teljesítésére a következő eljárást javaslom.

Először definiálni kell a Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező elektródák R -függvényeit.

3.2.1. Az elrendezés R -függvényei

Az R -függvények meghatározásához felhasznált változókat 3.3. ábra mutatja, ahol szimmetriai okokból csak az elrendezés felét rajzoltam fel. Az x - y koordináta rendszer középpontja a nagyfeszültségű elektróda középpontjával esik egybe, az x tengely egybe

esik a BG szakasszal, a modell szimmetria tengelyével, míg az y tengely erre merőleges. A változók tényleges értékeit a numerikus eredmények ismertetése során adom meg.

$$w_I = (a+b) - y, \quad (3.17)$$

$$w_{II} = a - y, \quad (3.18)$$

$$w_{III} = \frac{b}{d}x - y + (a+b) + \frac{b}{d}e, \quad (3.19)$$

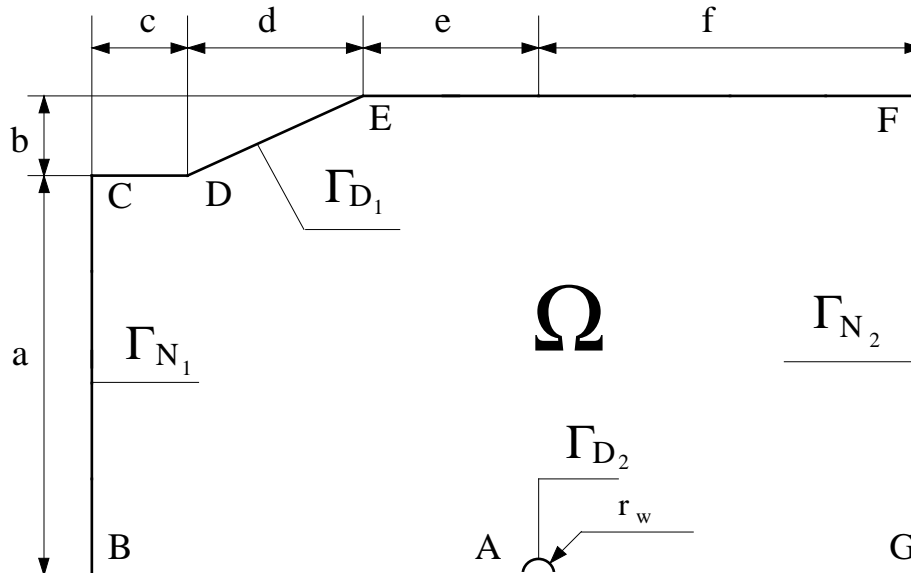
$$w_{IV} = w_I \wedge (w_{II} \vee w_{III}). \quad (3.20)$$

A w_{IV} R -függvény a földelt elektródát írja le. Ez azt jelenti, hogy a w_{IV} R -függvénynek az értéke 0 a Γ_{D1} földelt elektródán, negatív az elektródán kívüli térrészben, míg az elektróda alatt a vizsgált térrészben pozitív a kapott érték (2.1. feltételek alapján). A w_I , w_{II} , w_{III} a földelt elektróda felületét leíró egyenesek egyenlete, amelyekből a teljes elektródát leíró w_{IV} értékét a 2.3.1 pontban leírtak alapján lehet előállítani.

A nagyfeszültségű elektródát a következő R -függvénnyel lehet megadni

$$w_V = \sqrt{x^2 + y^2} - r_w, \quad (3.21)$$

ahol r_w az elektróda sugarát jelenti.



3.3. ábra Geometria paraméterek

A Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező felületeket leíró súlyfüggvényt a két R -függvény diszjunkciójának (2.3.1.1 pont) segítségével lehet előállítani. Ha megvizsgáljuk azonban w_{IV} és w_V értékét, akkor azt tapasztaljuk, hogy az egyik mennyiség a távolsággal, a másik pedig a távolság négyzetével arányos, tehát a kettő között egyszerű módszerekkel

nem lehet kapcsolatot felállítani. Enek a megoldására szolgál a normálás (2.3.3 pont). A két függvény értékét normálni kell, így számokat kapunk eredményül, amelyeket már minden további probléma nélkül kapcsolatba hozhatunk egymással.

$$w_D = w_{IVn} \wedge w_{Vn} \quad (3.22)$$

w_D kielégíti az \mathbf{R} -függvényekre vonatkozó feltételeket, tehát az elektródák közötti térben értéke pozitív, az elektródák felületén zérus, ezeken kívül negatív.

3.2.2. Az elektromos skalárpotenciál meghatározása

Az előírt potenciálértékek és az elektródákat leíró \mathbf{R} -függvények segítségével lehet meghatározni a potenciálfüggvény első, ismert komponensét:

$$\varphi_\delta = \frac{\varphi_2 w_{IV}}{w_{IV} + w_V}. \quad (3.23)$$

Mint ahogy azt a (3.23) egyenlet vizsgálatából megállapíthatjuk, ez a választás megfelel a potenciálfüggvényre előírt (3.14, 3.15) Dirichlet típusú peremfeltételeknek, hiszen a nagyfeszültségű elektródán, ahol a potenciál φ_2 , a φ_δ értéke pont φ_2 lesz, mert w_V értéke itt éppen zérus, w_{IV} értéke pedig kiesik ($w_V = 0$, $\varphi_\delta = \varphi_2$). A földelt elektródán φ_δ értéke az előírt nulla érték lesz, mivel ebben az esetben w_{IV} veszi fel a nulla értéket ($w_{IV} = 0$, $\varphi_\delta = 0$).

A potenciál függvény ismeretlen komponensének a Dirichlet típusú peremfeltétellel megadott felületeken nulla értéket kell felvennie a (3.16) értelmében, hiszen az ismert komponens már teljesíti az előírt feltételeket.

$$\varphi_\alpha \Big|_{\Gamma_{D1}, \Gamma_{D2}} = 0. \quad (3.24)$$

Az *első modell* numerikus megoldása során a vizsgált modell két végén, a Γ_{N1} és Γ_{N2} felületeken előírt Neumann típusú peremfeltételek a funkcionál minimalizálása során mint természetes peremfeltételek teljesülnek. Az potenciálfüggvény ismert komponensét úgy választva meg, hogy kielégítse a Dirichlet típusú peremfeltételeket, a potenciálfüggvény ismeretlen tagját - a Ritz módszernek megfelelően - egy lineáris egyenletrendszer első n elemének lineárkombinációja segítségével közelíthetem

$$\varphi_\alpha = \sum_{k=1}^n F_k(r, z) a_k \quad k=1,2,\dots,n, \quad (3.25)$$

ahol a_k ($k=1,2,\dots,n$) ismeretlen paraméterek, az n elemű \mathbf{a} oszlopvektor elemei. Az $F_k(r, z)$ közelítő függvény k -adik tagját úgy választottam meg, hogy kielégítse a $\varphi_\alpha=0$ homogén Dirichlet típusú peremfeltételt, azaz a potenciálfüggvény ismeretlen összetevőjének az értéke a Γ_D Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező felületeken ne változtassa meg a már meghatározott potenciálértéket, tehát ezeken a felületeken az értéke azonosan zérus legyen.

$$F_k(r, z) = w_D f_k(r, z), \quad k=1,2,\dots,n, \quad (3.26)$$

ahol $f_k(r, z)$ a közelítés bázisfüggvénye, amelyeket Csebisev polinómból állítottam elő, w_D pedig az \mathbf{R} -függvények segítségével előállított (3.22) súlyfüggvény.

Az alkalmazott súlyfüggvénynek biztosítania kell, hogy a közelítő megoldás során a potenciálfüggvény ismeretlen komponensének értéke a Γ_D Dirichlet típusú peremfeltételeken ne változtassa meg a már előre definiált értéket, azaz az ismeretlen komponens értéke ezeken a felületeken nulla legyen.

Az \mathbf{a} vektor elemeit a (3.12) a_k ($k=1,2,\dots,n$) szerinti első variációjának figyelembevételével állíthatjuk elő, amely egy lineáris egyenletrendszerre vezet.

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (3.27)$$

ahol \mathbf{A} egy $n \times n$ méretű kvadratikus mátrix, \mathbf{b} pedig egy n elemű oszlopvektor, amelyeknek az elemeit a potenciálfüggvény ismert komponensének (φ_δ), valamint a ρ tértöltések segítségével határozhatjuk meg. Az \mathbf{A} mátrix, valamint a \mathbf{b} oszlopvektor elemeit az alábbi módon lehet előállítani

$$\mathbf{A}[k, l] = \int_{\Omega} \epsilon \text{grad} F_k \text{grad} F_l d\Omega \quad (3.28)$$

$$\mathbf{b}[k] = - \int_{\Omega} (\epsilon \text{grad} \varphi_\delta \text{grad} F_k + \rho F_k) d\Omega \quad (3.29)$$

Az elemeket numerikus integrálás segítségével határoztam meg felhasználva a Gauss kvadratúrát.

A *második modell* számítási vizsgálatánál a homogén Neumann típusú peremfeltételt írtam elő az elrendezés két oldalán, amelynek a segítségével az elrendezés periodicitását lehet modellezni. Ennek során a Γ_{N1} és Γ_{N2} felületeken előírt Neumann típusú peremfeltételeket a (3.13) potenciálfüggvénynek egy addicionális összetevővel való kibővítésével vettem figyelembe [74].

$$\varphi = \varphi_{\delta} + \varphi_{\alpha} + \varphi_N w_{DN}, \quad (3.30)$$

ahol w_{DN} az \mathbf{R} -függvények segítségével meghatározott súlyfüggvény, amely kielégíti azt a feltételt, hogy értéke az előírt Dirichlet, illetve Neumann típusú peremfeltételekkel rendelkező felületeken zérus. A meghatározásához a két tükörtengely \mathbf{R} -függvényét az alábbiak szerint lehet figyelembe venni:

$$w_{VI} = (c + d + e) + x, \quad (3.31)$$

$$w_{VII} = f - x, \quad (3.32)$$

$$w_N = w_{VI} \wedge w_{VII}. \quad (3.33)$$

A w_N jelű \mathbf{R} -függvény értékének szintén normálnak kell lennie a további felhasználás érdekében. A függvényre teljesülnek a (2.18)-ban meghatározott feltételek. Annak, hogy a Neumann típusú peremfeltételekből származó potenciálváltozásokat a számítások során figyelembe tudjuk venni, szükséges feltétele az, hogy a potenciálfüggvény eddigi komponensei által meghatározott potenciálok a Dirichlet típusú peremfeltételekkel adott felületeken ne változzanak meg. Ezért a Neumann típusú peremfeltétellel adott felületek w_{DN} súlyfüggvényének a Γ_D felületeken zérus értékűnek kell lennie. Ez könnyen teljesíthető a következő képpen

$$w_{DN} = w_N \wedge w_D. \quad (3.34)$$

Tehát a (3.13) potenciálfüggvényt kiegészítő (3.30) addicionális tag $\varphi_N w_{DN}$ nem változtatja meg az eddigi potenciálértékeket az elektródákon, hanem csak a térrész belsejében változik a potenciál értéke – amint azt az eredmények ismertetése során majd láthatjuk. A fentiekén kívül teljesítenie kell azon a feltételeket, hogy az értéke a Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező peremeken (Γ_D) nulla legyen, gradiensének abszolútértéke a Neumann típusúakon (Γ_N) pedig egységnyi.

$$w_{DN} = 0 \Big|_{\Gamma_D}, \quad (3.35)$$

$$\left| \text{grad } w_{DN} \right|_{\Gamma_N} = 1. \quad (3.36)$$

A homogén Neumann típusú peremfeltétel kielégítésének érdekében φ_N értékét a következő képpen kell megválasztani

$$\varphi_N = \text{grad}(\varphi_\delta + \varphi_\alpha) \cdot \mathbf{n} - \frac{d\varphi}{dn}, \quad (3.37)$$

ahol \mathbf{n} a felület normális vektora, amelyet a következőképpen választottam meg:

$$\mathbf{n} = - \text{grad } w_{DN}. \quad (3.38)$$

A fentiek figyelembevételéhez a megoldás során módosítani kell a (3.25) közelítés elemeit, aminek következtében megváltozik a (3.28) és (3.29) kifejezése is a következő képpen:

$$\varphi_\delta^m = \varphi_\delta + w_{DN} \text{grad} \varphi_\delta \mathbf{n}, \quad (3.39)$$

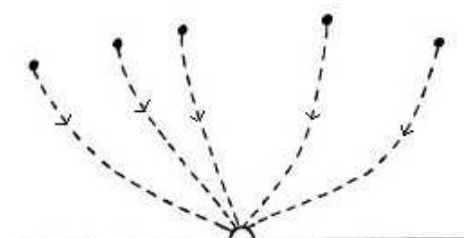
$$F_k^m = F_k + w_{DN} \text{grad} F_k \mathbf{n}. \quad (3.40)$$

A módosított potenciált a (3.25. – 3.29.) egyenletek segítségével határozhatjuk meg, a bennük szereplő φ_δ és F_k -nak φ_δ^m , illetve F_k^m -mel való helyettesítésével.

3.3. A kidolgozott iterációs eljárás

A megoldás első lépéseként a vizsgált térrészben a ρ töltéssűrűség értékét nullának választottam ($\rho_0=0$). Ezt felhasználva az (3.4), (3.5) és az (3.12) egyenletek segítségével meghatározható az elektromos térerősség első közelítésének (\mathbf{E}_1) azon értéke, amelyet a potenciálfüggvényre vonatkozó (3.13), illetve a második eset vizsgálata során alkalmazott (3.30) egyenlet alapján határoztam meg.

A szabad töltések modellezésének érdekében a vizsgált térrész minden pontjából egy virtuális iont mozgatunk a nagyfeszültségű elektroda felülete felé $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}_1$ sebességgel, a felület eléréséhez szükséges t időt pedig úgy határozhatom meg, hogy a virtuális



3.4 ábra A töltések mozgása

töltés által megtett utat rövid szakaszokra bontom, és a szakaszok megtételéhez szükséges időket összeadom az alábbi összefüggés segítségével [67]:

$$t = \sum t_i = 1 / (\mu \sum (l_i / |E_{i1}|)), \quad (3.41)$$

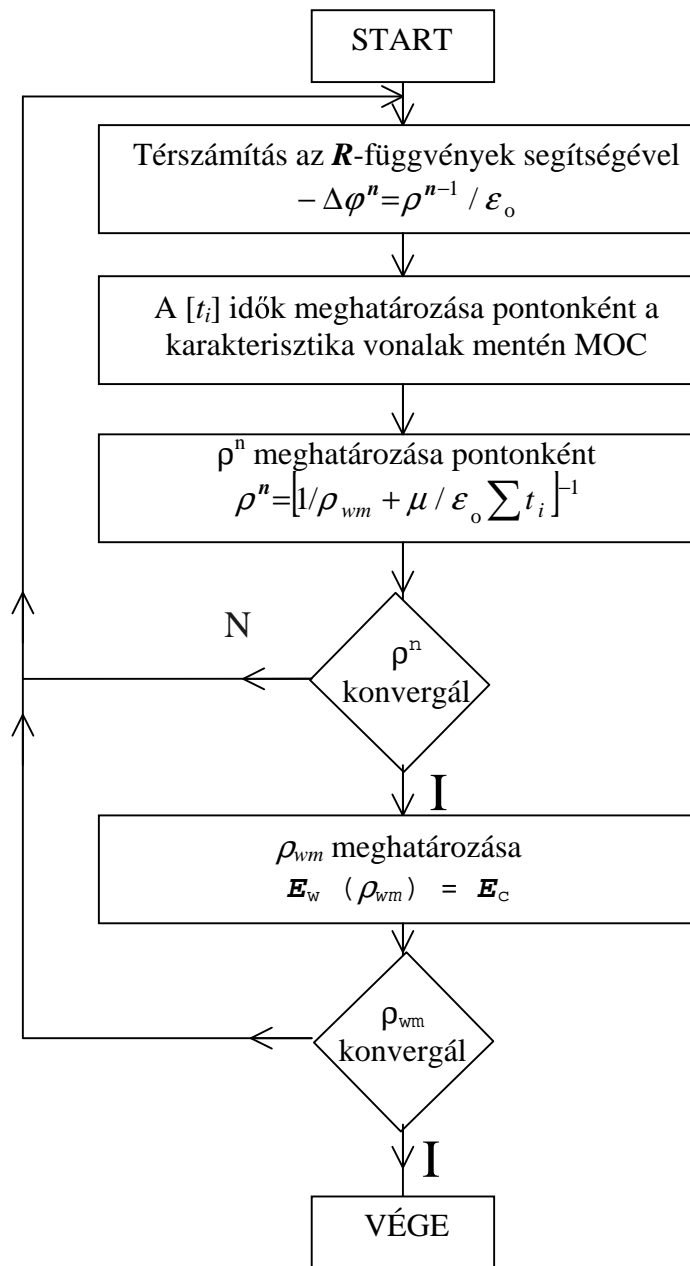
ahol l_i értéke a virtuális töltés mozgásához tartozó karakterisztika i -edik szakaszának hosszát jelenti. Az (3.41) egyenletet behelyettesítve (3.7)-be megkaphatjuk a ρ_1 töltéssűrűség első közelítő értékét egy előre felvett ρ_{w1} elektróda töltéssűrűség mellett. Miután a vizsgált térrész minden pontjában meghatároztam a ρ_1 értékét, számítással megkapom az elektromos térerősség értékének a második közelítő értékét (3.5) megoldásával, amelyik már figyelembe veszi a ρ_1 szabad tértöltéseket is.

A végleges megoldás tehát két iterációs cikluson keresztül kapható meg. Az első ilyen ciklusban a szabad tértöltések ρ értékére kell egy konvergens megoldást találni a tér minden pontjában egy előre felvett ρ_{w1} elektróda töltéssűrűség mellett. Ezt követi a második iterációs ciklus, amivel a nagyfeszültségű elektróda felületén disszipálódó elektronok mennyiségét és az ott fellépő elektromos térerősséget kell úgy meghatározni, hogy a térerősség értéke az elektródán E_w egyenlő legyen az empirikus Peek formulában leírt koronázó térerősséggel E_c [61]:

$$E_c = K_1 \delta (1 + K_2 / (\delta r_w)^{0.5}) \quad (3.42)$$

ahol δ a relatív levegősűrűség, r_w pedig a nagyfeszültségű elektróda sugara. (A képletben szereplő értékek $K_1 = 3.1 \cdot 10^6$ V/m, $K_2 = 3.08 \cdot 10^{-2}$ m^{0.5}.) Tehát a nagyfeszültségű elektróda felületéről disszipálódó töltések sűrűségét a $|E_w(\rho_w)| = E_c$ nemlineáris egyenlet numerikus megoldásából lehet meghatározni.

A megoldás menetét mutató menetdiagram a 3.5. ábárn látható. Amint azt a menetdiagramból jól lehet érzékelni az eljárás addig tart, míg egy kvázistatikus állapotot be nem áll, azaz a nagyfeszültségű elektróda felületén a töltéssűrűség konvergál.



3.5. ábra A megoldás menetdiagramja

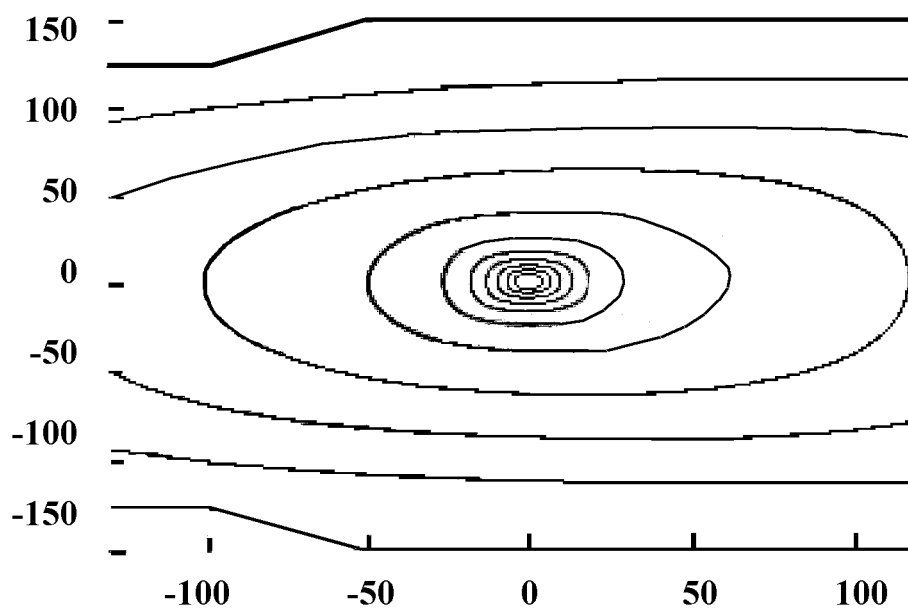
3.4. Numerikus eredmények

A vizsgált modell 3.3. ábra szerinti paraméterei sorrendben a következők voltak: r_w , a , b , c , d , e , f , a paraméterek értéke rendre 2.5, 125, 25, 30, 50, 50, 120 mm volt a második modell esetén, míg az első modell esetén c és f értéke ∞ volt.

Az első modell vizsgálata során Dirichlet típusú peremfeltételt írtam elő az A felületen (a nagyfeszültségű elektróda r_w sugarú felszínén $\varphi_2 = 52.5\text{kV}$) és a C-D-E-F pontok

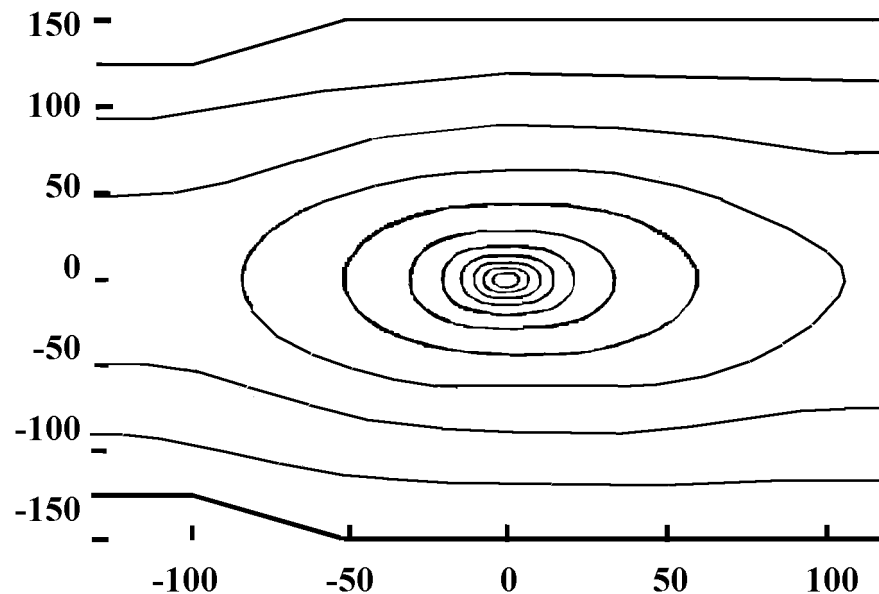
közötti felületen (a földelt elektróda mentén $\varphi_0=0$). A B és G pontok közötti szimmetria tengelyen a homogén Neumann típusú peremfeltétel a bázis függvények megválasztásával megfelelően teljesül.

Az első modell esetében, amikor a végtelen hosszú modell tágulatának villamos erőterét és potenciáeloszlását vizsgáltam a 3.3 ábrán jelölt B-C és az F-G oldalak mentén, a Neumann típusú peremfeltétel, mint természetes határfeltétel teljesül a funkcionál minimalizálása során. A második esetben ezeket a peremeket mint szimmetria tengelyeket veszem figyelembe, így rajtuk homogén Neumann típusú peremfeltételt írtam elő.



3.6. ábra Az első modell ekvipotenciális felületei a tértöltések nélkül

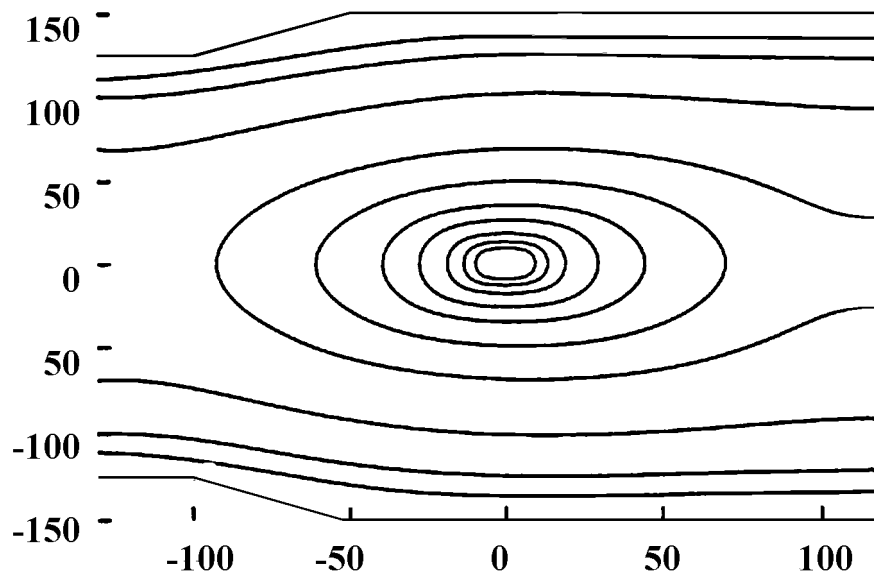
A két modellre számított ekvipotenciális felületeket az 3.6. és az 3.7. ábrák mutatják. Ezek az ábrák a modellekben fellépő elektromos teret mutatják azzal a feltétellel, hogy a vizsgált térrészen belül „nincs semmi”, azaz vákuum van. Az ábrák elkészítését az motiválta, hogy az indulásnál említett cikkben [42] hasonló körülmények között vizsgálták a modellt, és kíváncsi voltam a megoldás eredményességére. Az ábrákat megvizsgálva megállapíthattam, hogy a cikkben közölt ábrák és az általam meghatározott ekvipotenciális felületek egymáshoz teljesen hasonlóak.



3.7. ábra A második modell ekvipotenciális felületei a tértöltések nélkül

Az elektromos skalárpotenciál értéke egy hengeres elektróda felszínétől a távolsággal fordítottan arányosan csökken, így az ekvipotenciális felületeknek a nagyfeszültségű elektróda környékén sűrűbbek. Az ábrázolt ekvipotenciális felületek közötti potenciál különbség 5 kV, az ábrán a fenti jelenség jól követhető. Jól látható az alkalmazott két modell közötti különbség is, hiszen a második modellt ábrázoló 3.7. ábrán az ábra bal és jobb oldalán a szimmetria tengelynek megfelelően az ekvipotenciális felületek merőlegesek a szimmetriatengelyekre (Γ_{N1} és Γ_{N2}) és az erővonalak ebből következőleg párhuzamosak velük.

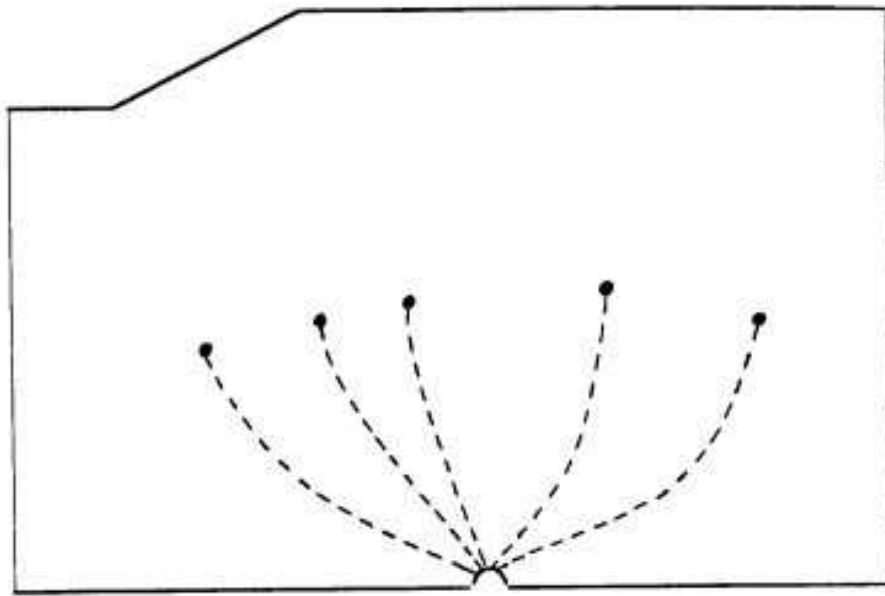
Az 3.8. ábrán a második modell ekvipotenciális felületei láthatóak abban az esetben, amikor a szabad tértöltéseket is figyelembe vettem. Az ábrázolás során ugyanazon ekvipotenciális felületeknek az ábrázolását végeztem el, mint az előző esetben. Ezt az ábrát megvizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy a nagyfeszültségű elektróda sugara „magnövekedett” a szabad tértöltések hatására és a potenciál a nagyfeszültségű elektróda felületétől távolodva nem változik olyan gyorsan, azaz a tértöltések leárnyékolják a nagyfeszültségű elektródát. Ezt az magyarázza, hogy a szabad tértöltések mintegy megnövelik az elektróda felszínét, és ez okozza azt, hogy a potenciál változása lassabb lesz.



3.8. ábra A második modell ekvipotenciális felületei tértöltésekkel

Az ábrán jól megfigyelhető, hogy a nagyfeszültségű elektródától távolabb a kialakuló villamos erőteret az ellentétes tértöltések hatása befolyásolja, és hatásukra változik az ekvipotenciális felületek alakja. A kialakuló ekvipotenciális felületekre természetesen a tértöltések eloszlása is hatással van. A tértöltések jelenléte módosítja az ekvipotenciális felületeket. A két azonos potenciálon lévő nagyfeszültségű elektróda közötti térrészben, ahol a tértöltések sűrűsége viszonylag kicsi – ami a villamos térerősség értékét is csökkenti, azaz az ábrázolt ekvipotenciális felületek távolságát növeli – mivel a töltéssel rendelkező részecskék az elektródához közelebb helyezkednek el. A szimmetriatengelyhez közeledve a tértöltések sűrűsége és így a hatása gyengül, a szemben lévő másik nagyfeszültségű elektróda hatására.

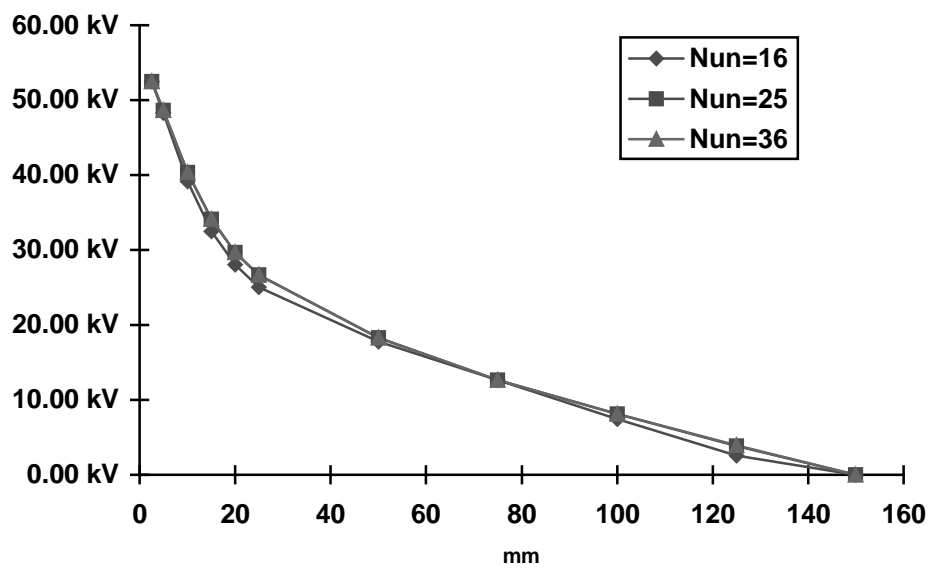
Az 3.9. ábrán az elektromos térerősség trajektóriái láthatók. Ezek azok a trajektóriák, amelyek mentén az adott pontban elhelyezett virtuális töltés a számítások során az elektróda felszíne felé – valójában ezzel épp ellentétes irányban – mozdulna el, így a Karakterisztikák módszerének alkalmazásánál a t_i idők meghatározásánál ilyen trajektóriákon való számításokkal határozta meg a tértöltések értékét.



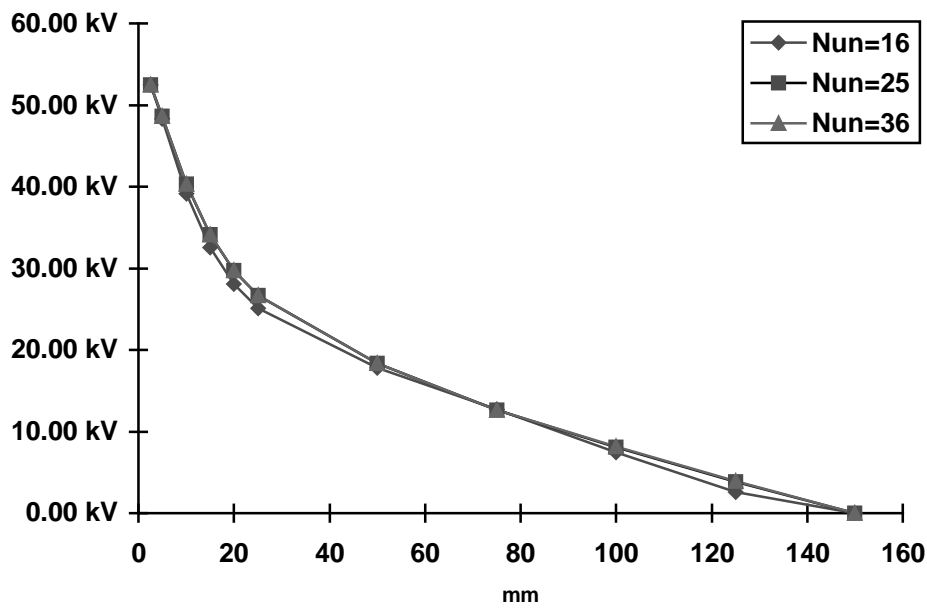
3.9. ábra Az elektromos térerősség vonalai

A számítások helyességének bizonyítása érdekében megvizsgáltam a modell numerikus számítási paramétereinek érzékenységét is. Az 3.10., 3.11. és 3.12. ábrákon a potenciál változásának a nagyfeszültségű elektródától való távolság függését ábrázoltam.

Az 3.10. ábrán az ismeretlenek számát változtattam, és a számítások során a 4 pontos Gauss kvadraturát használtam, az 3.11. ábrán pedig a 6 pontos Gauss kvadraturát. Az 3.12. ábrán az ismeretlenek számát állandónak tekintve a Gauss kvadratura értékét változtattam.

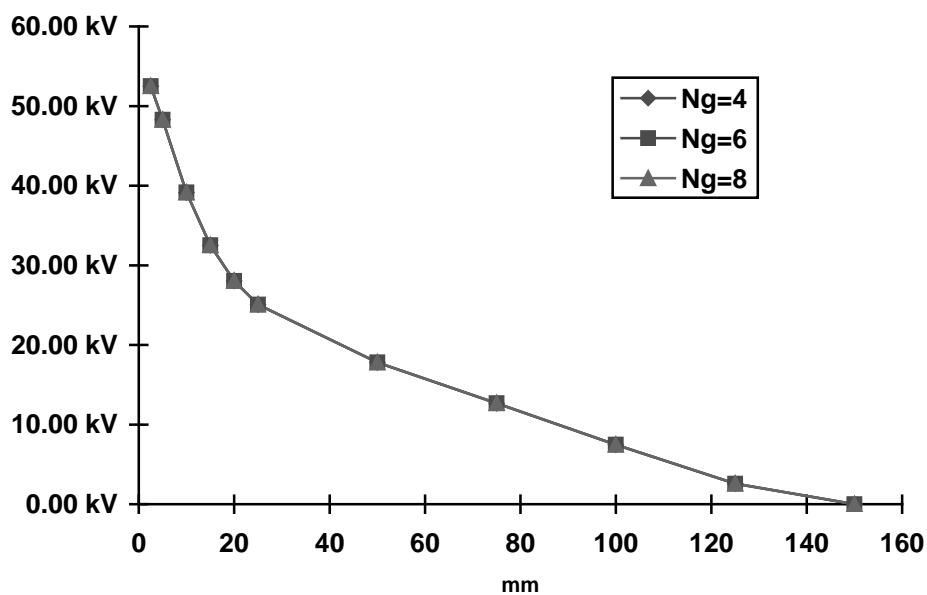


3.10. ábra Az ismeretlenek számának változtatása, $N_{\text{Gauss}} = 4$



3.11. ábra Az ismeretlenek számának változtatása, $N_{\text{Gauss}} = 6$

Mint azt az ábrák alapján megfigyelhettem a megoldásban nem mutatkozik szignifikáns különbség, tehát megállapíthatom, hogy a megoldás megfelelő, mert a paraméterek változtatásával nem módosul jelentősen az eredmény.



3.12. ábra A Gauss-kvadratura változtatása, $N_{\text{ismeretlenek}} = 16$

3.5. Összefoglalás

A kétdimenziós elektrosztatikus porleválasztó numerikus, elméleti vizsgálatát az R -függvények és a Karakterisztikák módszere segítségével végeztem el. A villamos térszámításban a Ritz módszerrel kombinálva az R -függvényeket a keresett értékeket differenciál egyenletek megoldásából kaptam meg. A megoldásból származó eredmények a vizsgált tartomány peremén pontosan megadják az előírt értékeket, anélkül, hogy az ismeretlenek számát változtatni kellene, mint arra a végeelem módszer, vagy a peremelem módszer esetében szükség van az egyre finomabb térfelosztás miatt. A bonyolult elrendezés, élek ellenére a megoldás során az ismeretlenek és változók száma nem haladta meg az ötszázat, ami lényegesen alacsonyabb, mint más módszerek használata során. A megoldás során az ábrák felrajzolásához a potenciál értékét ezer pontban határoztam meg, ehhez végeelem módszer használata esetén rengeteg elemre lenne szükség. A [42] publikációban a szerző ötezer háromszögelemről írt, és ő nem vette figyelembe a periodikusságot, ami az elemek, és így az ismeretlenek számát is növeli. A peremeken kialakuló potenciál értékek ebben az esetben nem befolyásolják a kapott eredményeket, hiszen a vizsgált térrészben az áramokat nem vizsgáltam, illetve elhanyagoltam az elektródák felületének változásait. Egy továbbfejlesztett – a gyakorlatban előforduló más paraméterek, mint például a koronázó elektródák felületének kopását, illetve a felfogó elektródán a leválasztásból adódó porréteg ráakódását figyelembe vevő – modell használata esetén igen könnyen használható megoldást nyújt, hiszen a geometriai paraméterek megváltoztatásával az elektródák felületének változása könnyen megadható, és az értékek számíthatóak. A Dirichlet típusú peremfeltételek teljesülnek az előírásoknak megfelelően, a Neumann típusú peremfeltételeket pedig a funkcionál megválasztásával akár természetes akár előírt határfeltételként figyelembe lehet venni, és a megoldás során ezek is automatikusan teljesülnek.

A vizsgálatok során egy kétdimenziós modellt vizsgáltam az eljárás megismerésének érdekében, azonban a módszer flexibilitásának köszönhetően igen könnyen kiterjeszhető háromdimenziós esetekre is, és ez az ismeretlenek alacsony száma miatt még jelentősebb számítógép kapacitás növekedést sem igényel.

A feladatban meghatároztam a vizsgált tartomány ekvipotenciális felületeit a szabad tértöltéseket figyelembe véve, illetve a figyelmen kívül hagyásukkal is, meghatároztam az elektromos térerősséget, valamint elvégeztem a modell hibaanalízisét.

3.6. Új tudományos eredmény

1. Tézis

Elméleti eljárást dolgoztam ki egy kétdimenziós elektroda elrendezés elektromos terének meghatározására, amely térszámítási eljárással figyelembe vettem a térben elhelyezkedő szabad tértöltéseket és ezek hatásait. Összekapcsoltam a globális variációszámítást az R -függvények numerikus térszámítási módszerével, valamint a tértöltések elhelyezkedését leíró Karakterisztikák módszerével. A kidolgozott módszer jelentős memória tár megtakarítást ért el korábbi módszerekkel szemben .

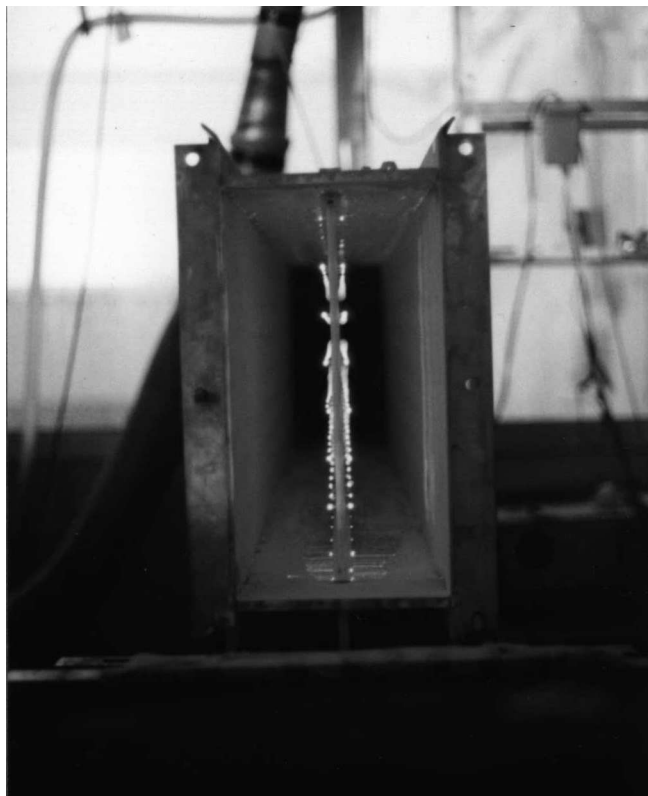
Az elméleti eljárás kidolgozása során a globális variációszámítás módszerét alkalmaztam a Ritz módszer és az R -függvények módszereinek felhasználásával. Az eljárás során lényegesen csökkentettem a szükséges memóriakapacitást, ezáltal lehetővé téve a számítások elvégzését kisebb kapacitású gépeken is. A tértöltések hatásainak figyelembevételére a térszámítási eljárásba illesztettem a Karakterisztikák módszerét és meghatároztam az elektródák felületén kialakuló elektromos jellemzőket két egymásba ágyazott iterációs ciklust tartalmazó numerikus eljárás segítségével. Az iterációs ciklusok megoldására eljárást dolgoztam ki, amely konvergens folyamatot eredményez. Elvégeztem az általam kidolgozott numerikus eljárás hibaanalízisét.

4. A 3D porleválasztó modell

Mint azt az előző fejezetben bebizonyítottam, az R -függvények és a globális variációs számítás segítségével a kétdimenziós térszámítási feladatok jól modellezhetőek. Ezután megvizsgáltam a háromdimenzióra való kiterjesztés lehetőségét. A vizsgálataimhoz rendelkezésemre állt a németországi Karlsruhe-i Műszaki Egyetem Institute für Elektroenergiesysteme und Hochspannung Technik tanszékén egy kialakított porleválasztó modellen elvégzett mérések sorozata, amelyeknek elvégzésében személyesen részt vettem.

A mérések során azt vizsgáltuk, hogy különböző elektródák, illetve feszültség szintek alkalmazása esetén miként változik a modell falán különböző pontokban a koronázó elektródából (4.1. ábra) kilépő töltések hatására megjelenő mérhető áram értéke. A számítási eljárások során ennek a modellnek az elektromágneses térszámítással való szimulációját végeztem el, meghatározva az áram értékét a háromdimenziós modellben.

A munkám során felhasználtam a térszámításhoz az R -függvények elméletét, valamint a töltések mozgásának meghatározásához a Navier-Stokes egyenleteket.



4.1. ábra Koronakisülések a nagyfeszültségű elektródákon

4.1. Tértöltések mozgása

Először azt vizsgáltam meg, hogy milyen módon lehet az elektrosztatikus porleválasztóban mozgó tértöltések pályáját meghatározni, és számítani a kilépő töltések hatására a porleválasztó földelt elektródáján keresztül folyó áramokat. Az áramok számításánál figyelembe kellett venni, az elektróda anyagi minőségét, valamint azt, hogy áramok csak abban az esetben tudnak létrejönni, ha a nagyfeszültségű elektródán a kilépő töltések száma megfelelő nagyságú, vagyis az elektróda felületén kialakul a koronakisülés.

4.1.1. A téregyenletek

Az elrendezésben lévő villamos erőtér meghatározásához most is a Maxwell egyenleteken keresztül lehet eljutni. Az alkalmazott egyenletrendszer némileg eltér az előző feladatban használttól. Az első különbség, hogy az előzőleg alkalmazott töltéssűrűség értéktől eltérően itt a pozitív, negatív ionok és az elektronok számát használom fel a számítások során, valamint a modell sajátosságaiból adódóan a tér mindhárom dimenzióját figyelembe vettem. A jelen esetben a következő egyenleteket vettem figyelembe, bevezetve az elektromos skalárpotenciált

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -e n / \varepsilon_0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi(t), \quad (4.2)$$

$$n = n_+ - n_- - n_e, \quad (4.3)$$

$$-\Delta\varphi = -e n / \varepsilon_0, \quad (4.4)$$

ahol \mathbf{E} az elektromos térerősség, e az elektron töltése, φ az elektromos skalárpotenciál, ε_0 a vákuum dielektromos állandója, n_+ és n_- a pozitív és negatív ionok számát, n_e pedig az elektronok számát jelöli. Ezeket az egyenleteket felhasználva az elektronok és az ionok áramsűrűségének meghatározásához a következő egyenleteket kapjuk:

$$e \partial n_+ / \partial t = -\operatorname{div}\mathbf{J}_+ + e n_+^*, \quad n_+^* = \alpha \mathbf{J}_e, \quad (4.5)$$

$$e \partial n_- / \partial t = -\operatorname{div}\mathbf{J}_- + e n_-^*, \quad n_-^* = \eta \mathbf{J}_e, \quad (4.6)$$

$$e \partial n_e / \partial t = -\operatorname{div}\mathbf{J}_e + e n_e^*, \quad n_e^* = e n_+, \quad (4.7)$$

ahol J_+ és J_- a pozitív és a negatív ionok áramsűrűségét, J_e a szabad elektronok áramsűrűségét, n_+ , n_- és n_e a vizsgált Ω térrészben keletkező pozitív, negatív ionok és elektronok számát jelenti, α az ütközési ionizáció, η pedig az elnyelődés mértékét jelenti [9, 11].

4.1.2. A vizsgált modell

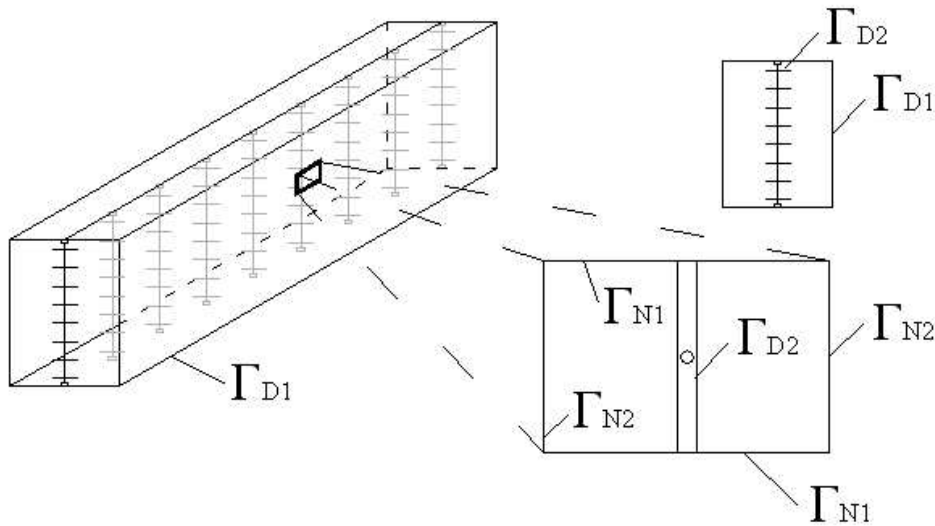
A számításaim során a Karlsruhe-i Műszaki Egyetem Institute für Elektroenergiesysteme und Hochspannung Technik tanszékén egy elektrosztatikus porleválasztó berendezés modelljét használtam fel, figyelembe véve, hogy a fenti berendezéssel méréseket is végeztem.

4.1.2.1. A mérés

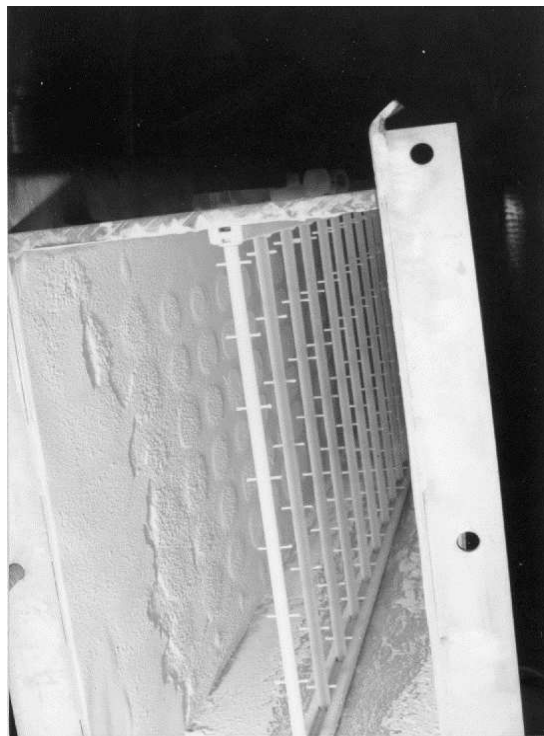
A számítások során felhasznált modell, illetve annak egy vizsgált cellája a 4.2. ábrán látható, míg a 4.3. ábrán a valóságban mért modell fényképe látható. A számítások során azért volt elég egy cellának a vizsgálata, mert az elektróda elrendezés egy szegmense függőlegesen, illetve a porleválasztó hossz tengelye mentén periódikusan ismétlődött [12].

A modell egy két méter hosszú, földelt fém hasáb belsejében elhelyezett, nagyfeszültségű elektróda rendszer által koronakisüléssel a vizsgálandó tér belsejébe juttatott töltésekből kialakult áramok mérésére szolgált. A földelt hasáb magassága 400 mm, míg a szélessége 300 mm volt. Az elektródák távolsága változtatható volt, általában az egymástól 100 mm távolságra helyeztük el őket, hogy a kialakuló áram értéke nagyobb, és így könnyebben mérhető legyen. A mérés során több fajta elektróda elrendezést is kipróbáltunk, így a sima körhenger, a négyszög alapú hasáb típusú elektródák mellett a 4.3. ábrán látható elektródákkal – ahol a körhenger elektródára több kisebb elektródát szereltünk, amelyek az eredetinek a hossz tengelyére merőlegesen álltak, a berendezés keresztmetszeti síkjában (IEH elektróda) – végeztünk méréseket. A laboratóriumi körülmények között végzett mérések során a helyi lehetőségekből adódóan az elektróda rendszerre kapcsolható maximális feszültség 60 kV volt. A kialakuló áramot a berendezés falán lévő mérőcellára kapcsolt árammérő készülék segítségével mértük, az adott helyen fellépő áramsűrűség értékét pedig a műszerről leolvasott értéknek, illetve a mérőcella felületének hányadosaként határoztuk meg. A 6 mm² felületű mérőcella helyét egy 240 mm átmérőjű körön belül bárhova lehetett pozicionálni három különböző sugarú

köralap segítségével. A berendezés sajátossága volt, hogy benne az áramlás lamináris volt, tehát ennyiben lényegesen eltért a valós porleválasztó berendezésektől.

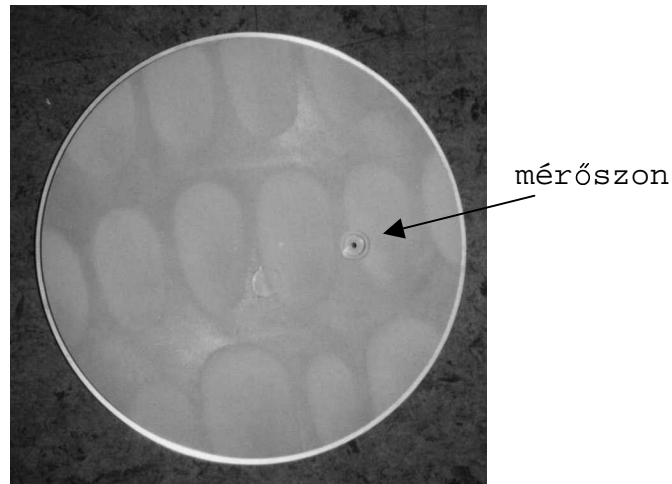


4.2. ábra A vizsgált modell és keresztmetszete



4.3. ábra A méréseknél használt porleválasztó

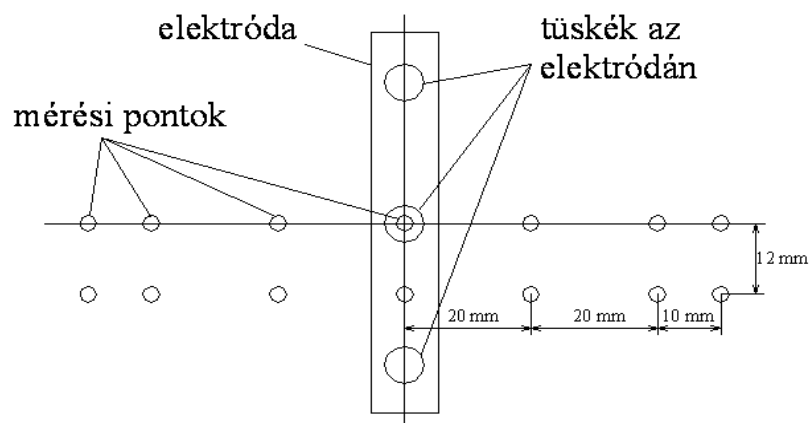
A méréseket úgy végeztük, hogy a porleválasztó modell földelt fém hasábjának a falán kiképzett fém ablakok egyikébe egy speciális, az ablak többi részétől elszigetelt elektródát tettünk (4.4. ábra), amelyre egy digitális árammérőt kötöttünk. A kör alakú fém ablak



4.4. ábra A mérőszonda fényképe

középpontja az elektródasor közepénél levő kis elektródák tengelyének vonalában helyezkedett el.

A szonda úgy működött, hogy mérte a felületén keresztül folyó áramot, és ebből a felület nagyságával osztva megkaptuk az áramsűrűség értékét. A szonda a fém ablakon belül több helyre is elhelyezhető volt, és a méréseket több feszültség szinten is elvégeztük. Mivel a gerjesztés egy nagy egyenfeszültség bekapcsolása volt, amit befolyásolhat a porleválasztó belsejében elhelyezkedő szabad tértöltések mennyisége, ezért a mérési eredményt csak az állandósult állapotban vettük figyelembe. Egy cellán belül 14 pontban végeztünk méréseket, mint azt a 4.5. ábra mutatja. A mérési pontok lefedték a földelt falon a kiselektrodák tengelyeinek meghosszabítása által kimetszett négyszög tartomány felét, azaz a modell szimmetrikusságát figyelembe véve a teljes vizsgálandó felületet.



4.5. ábra A mérőhelyek elhelyezkedése

4.1.2.2. A számítások során alkalmazott modell

A vizsgált háromdimenziós elrendezés a teljes modell egy részletét veszi figyelembe, a nagy elektródára szerelt egy kis elektródát, és a hozzá tartozó teljes keresztmetszetet. Ezzel egy olyan téglatest alakú elrendezéshez jutok, amelynek a hat határoló felületéből kettő a modellt határoló fémhasáb földelt elektródája, a másik négy pedig az elrendezésen belüli szimmetria tengely. A 4.2. ábrán látható modell keresztmetszetén feltüntettem az elrendezés határfelületeit meghatározó Dirichlet, illetve Neumann típusú peremfeltétellel rendelkező felületeket. A peremfeltételeket megvizsgálva azt kapjuk, hogy két felületre lehet Dirichlet típusú peremfeltételt előírni, az elektrosztatikus porleválasztó földelt oldalfalára Γ_{D1} , ahol a φ_1 potenciál értéke nullával lesz egyenlő a földelés miatt, valamint a modell közepén elhelyezkedő nagyfeszültségű elektróda felületére Γ_{D2} , ahol a $\varphi_2 = \varphi(t)$ a potenciál értéke, amely a gerjesztéstől függően az időben változhat.

$$\varphi \Big|_{\Gamma_{D1}} = \varphi_1 = 0, \quad (4.8)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_{D2}} = \varphi_2 = \varphi(t). \quad (4.9)$$

A vizsgált cella másik két irányban lévő felületei (Γ_{N1} és Γ_{N2}) a ciklikusság miatt Neumann típusú peremfeltétel előírásával valósíthatóak meg [14]. Figyelembe véve, hogy az elektrosztatikus porleválasztó berendezés belsejében viszonylag homogénnek tekinthető a tér, így feltételeztem, hogy a szomszédos cellák között a töltések átáramlása az egyik cellából a másikba megegyezik egymással, ezért a Γ_{N1} és Γ_{N2} felületek mentén homogén Neumann típusú peremfeltételt írtam elő

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{N1}} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{N2}} = 0. \quad (4.11)$$

A (4.4) Poisson egyenlet megoldásához a globális variációszámítás módszerét alkalmaztam, amelynél a differenciálegyenlet megoldásaként az az elektromos skalárpotenciál állítható elő, amely biztosítja, hogy a térrészre felírt, a térrész energiájával kapcsolatos funkcionál minimális értéket vesz fel.

A funkcionált az elektromos skalárpotenciál segítségével lehet felírni

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \varphi - 2en\varphi) d\Omega, \quad (4.12)$$

amely egyenletből az elektromos skalárpotenciál értékét Ritz módszer segítségével lehet meghatározni.

Ahhoz, hogy az előírt Dirichlet típusú peremfeltételeket teljesíteni tudjam az elektromos skalárpotenciált komponensekre bontottam. Az első komponensben az ismert potenciálértékek, az előírt Dirichlet típusú peremfeltételek által meghatározott függvény szerepel (φ_{δ}), a második, ismeretlen tag (φ_{α}) a közelítő függvényekből adódik, a harmadik tagban pedig a ciklikusság figyelembevétele történik. Az eredő elektromos skalárpotenciált e három tag összege adja

$$\varphi = \varphi_{\delta} + \varphi_{\alpha} + \varphi_{N} w_{DN}. \quad (4.13)$$

A potenciálfüggvény ismert φ_{δ} komponensét úgy választottam meg, hogy értéke folytonos legyen a vizsgált Ω térrészben, és teljesítse az elrendezés határaitra előírt Dirichlet típusú peremfeltételeket a $\Gamma_D = \Gamma_{D1} \cup \Gamma_{D2}$ felületeken.

$$\varphi_{\delta} \Big|_{\Gamma_{D1}} = 0, \quad (4.14)$$

$$\varphi_{\delta} \Big|_{\Gamma_{D2}} = \varphi_2. \quad (4.15)$$

Az ismeretlen φ_{α} összetevőnek ezeken a felületeken a homogén Dirichlet típusú határfeltételt kell teljesítenie

$$\varphi_{\alpha} \Big|_{\Gamma_D} = 0. \quad (4.16)$$

A harmadik tag a ciklikusság feltételeit leíró homogén Neumann típusú határfeltételek figyelembevételére szolgál. A képletben szereplő w_{DN} egy, az \mathbf{R} -függvények segítségével előállított súlyfüggvény, amely azt biztosítja, hogy ennek a komponensnek az értéke ne változtassa meg a már előre beállított Dirichlet és Neumann típusú határfeltételeket. w_{DN} függvényének előállításához háromdimenziós \mathbf{R} -függvényekre van szükség. Meghatároztam a nagyfeszültségű elektróda és a földelt elektróda \mathbf{R} -függvényeit és a kettő

konjunkciójából (2.3.1.2 pont) a Dirichlet típusú peremfeltétellel rendelkező felületeket leíró w_D függvényt, valamint a szimmetria tengelyeket leíró \mathbf{R} -függvényekkel a homogén Neumann típusú peremfeltétellel rendelkező felületeket meghatározó w_N függvényt. Mindkét függvény normált \mathbf{R} -függvényként állítom elő, így a kettő konjunkciójából előállítható a w_{DN} súlyfüggvény. A w_{DN} súlyfüggvénynek a következő feltételeket kell teljesítenie

$$w_{DN} \Big|_{\Gamma_D} = 0 \quad \left| \text{grad} w_{DN} \right| \Big|_{\Gamma_N} = 1, \quad (4.17)$$

$$\varphi_N = \text{grad}(\varphi_\delta + \varphi_\alpha) \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \rho_n}{\partial n}. \quad (4.18)$$

ahol \mathbf{n} a felület normálvektora, amelyre teljesül

$$\mathbf{n} = -\text{grad} w_{DN}. \quad (4.19)$$

Miután az elektromos skalárpotenciál ismert összetevője teljesíti a felületekre előírt Dirichlet típusú peremfeltételeket az ismeretlen φ_α komponenst a Ritz módszernek megfelelően közelítő függvényt sor segítségével elő lehet állítani

$$\varphi_\alpha = \sum F_k a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \varphi_\alpha = \mathbf{F}^T \mathbf{a}, \quad (4.20)$$

ahol \mathbf{a} az ismeretlen együtthatók egy oszlop vektora a_k ($k=1, 2, \dots, n$) elemekkel. A közelítő függvény sor k -adik elemét úgy lehet előállítani, hogy teljesüljenek az előírt homogén Dirichlet típusú peremfeltételek, azaz a potenciálfüggvény ismeretlen összetevőjének az értéke a Dirichlet típusú peremfeltételekkel rendelkező felületeken ne változtassa meg az előírt potenciál értékét, ezeken a felületeken azonosan nulla értékű legyen. Ezen kívül a szimmetriából adódó peremfeltételeket sem befolyásolhatja.

$$F_k(r, z) = w_D f_k(r, z) + w_{DN} \text{grad} w_D f_k(r, z) \mathbf{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

ahol $f_k(r, z)$ a közelítés bázisfüggvénye, amelyet a Csebisev polinomok segítségével állítottam elő, w_D az a súlyfüggvény, amely biztosítja, hogy az elektromos skalárpotenciál ismeretlen összetevőjének az értéke, a közelítő függvényektől függetlenül, nem változtatja meg az előírt Dirichlet típusú peremfeltételeket. A bázisfüggvények kialakításánál

figyelembe kellett vennem, hogy a teret normált térként írom le, ahol a normálásnak az értéke a vizsgált tartomány maximális kiterjedésének a duplája volt.

(4.20)-at behelyettesítve (4.12)-be az \mathbf{a} vektor elemeit a (4.12)-nek a_k ($k=1,2,\dots,n$) szerinti első deriváltjának segítségével lehet meghatározni, amely egy lineáris egyenletrendszer eredményez

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (4.22)$$

ahol \mathbf{A} egy n -ed rendű kvadratikusan mátrix, \mathbf{b} egy n elemű oszlopvektor amelyet az elektromos skalárpotenciál ismert összetevőjéből, a szabad tértöltések figyelembevételével lehet megformálni,

$$\mathbf{A}[k,l] = \int_{\Omega} \epsilon \text{grad} F_k \text{grad} F_l d\Omega, \quad (4.23)$$

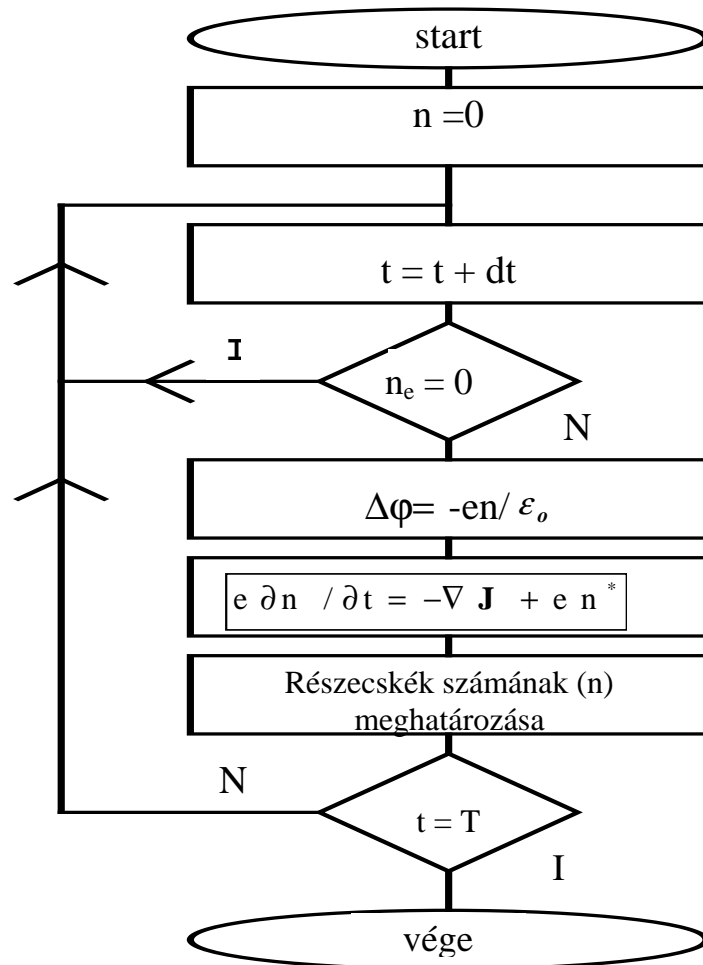
$$\mathbf{b}[k] = - \int_{\Omega} (\epsilon \text{grad} \varphi_{\delta} \text{grad} F_k + e n F_k) d\Omega. \quad (4.24)$$

Az elemeket numerikus integrálás segítségével határoztam meg felhasználva a Gauss kvadratúrát.

4.1.3. Az elektromos tér meghatározásának menete

A nagyfeszültségű elektródának a feszültsége az időben változhat, ennek következtében az elektromos töltéssel rendelkező részecskék száma (n_+ , n_- , n_e), valamint a hozzájuk kapcsolódó áramsűrűségek (\mathbf{J}_+ , \mathbf{J}_- , \mathbf{J}_e) értékei is egy az időben változó mennyiséget fognak adni [17]. A meghatározásuknál a következő módon jártam el.

Első lépésként a vizsgált Ω tartományban az elektromos töltéssel rendelkező részecskék számát nullának választottam. Ez eltér a valóságos helyzettől, mivel a levegőben mindig vannak szabad ionok. Ezek száma azonban annyira csekély, hogy a levegő tökéletes szigetelőnek tekinthető és még nagyon nagy feszültségen sem vezet számottevő áramot. Az ionokat a Nap ibolyántúli sugárzása, a természetes radioaktív sugárzások és a kozmikus sugárzás fotonjai hozzák létre, ha semleges atommal, vagy molekulával ütköznek. Az ilyen ionozás alkalmával a levegőben másodpercenként öt-hat elektron válik szabaddá, és ugyanennyi pozitív ion keletkezik. Az elektronok azonban nem maradnak sokáig szabadon, mert az oxigénmolekulák megkötik őket és ezáltal negatív ionok keletkeznek. A tiszta levegő egy köbcentiméterében 500-600 ionpár van jelen [64].



4.6. ábra A megoldás menetének vázlatja

Ezeknek az ionpároknak a jelenlététől eltekintettem, de ez a számítás és a mérések közötti fizikai folyamatot jellegében nem befolyásolja.

A (4.5, 4.6, 4.7) egyenletekből világosan látszik, hogy a folyamat akkor indul el, amint az első elektron megjelenik a vizsgált térrészben. Ezt az elektront az alkalmazott modellemben – valóságtól eltérően, ahol a kiindulást a sugárzásokból adódó töltéshordozó biztosítja – a nagyfeszültségű elektróda fogja biztosítani, mivel a feszültsége jóval meghaladja a koronakisülés létrejöttéhez szükséges (a mérések során – ezért a számítások során is – ez a feszültség 24 kV körüli értéknek adódott) feszültséget. A koronázó elektróda tehát elektronokat fog kibocsájtani magából, mégpedig az anyagától, illetve az anyag kilépési munkájától függően. Az elektronok akkor tudnak a térrészbe belépni, ha az elektródán felhalmozódó energia nagyobbá válik, mint az elektron kilépési energiája, ekkor egy elektron kilökődik. Ennek modellezésére az elektródából kilépő elektronok számának meghatározására a következő formulát dolgoztam ki és alkalmaztam:

$$n_e^{**} = e \int u(t) dt / W_{ki}, \quad (4.25)$$

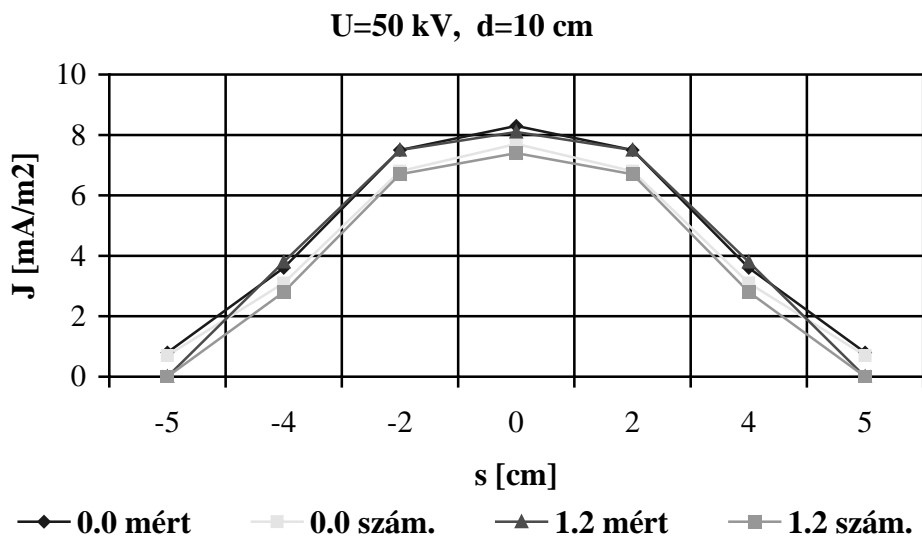
ahol W_{ki} az elektron kilépési energiája, n_e^{**} pedig az elektródából kilépő elektronok száma. A számításokat akkor lehet elkezdni, amikor az elektródán a feszültség értéke elég nagy értékűvé válik, és az első elektron kilép az elektróda felszínén. Ezt követően lehet az elektromos erőtér értékeit meghatározni, figyelembe véve a szabad tértöltéseket is. A megoldás menete a 4.6. ábrán látható [13].

4.1.4. Numerikus eredmények

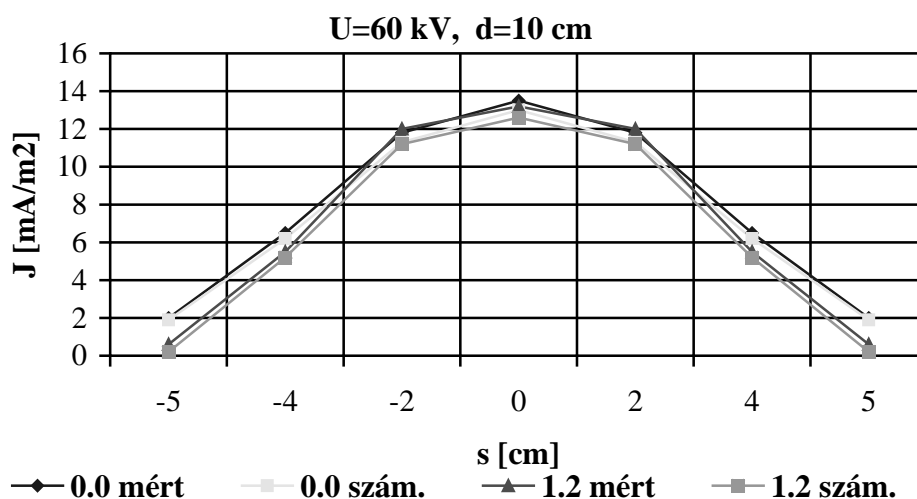
A modellt először ugrásfüggvénnyel gerjesztettem, annak érdekében, hogy a kapott eredményeket összevethessem a mérésekkel.

A mérőberendezés falán kialakuló J áramsűrűséget először 50 kV és 60 kV egyenfeszültség esetén vizsgáltam meg, több különböző elektróda esetén (hasáb, henger, IEH /a Karlsruhe-i egyetem tanszéke által kifejlesztett elektróda, alakja a 4.19. ábrán látható/). Ezeken a feszültségszinteken azonban csak az IEH elektróda típus esetén volt mérhető az eredmény, a másik két elektródánál nem tudtam áramot mérni. A 4.7. és 4.8. ábrákon a 4.2. és 4.3. ábrákon is látható IEH elektródát használva látható a mérési eredmények és a számítási eredmények összehasonlítása.

Mint azt már korábban említettem a mozgatható mérőszondának köszönhetően a méréseket több pontban is el lehetett végezni, természetesen a számításokat is ezekben a



4.7. ábra Az áramsűrűség értéke 50 kV esetén (elektróda távolság d=10 cm)



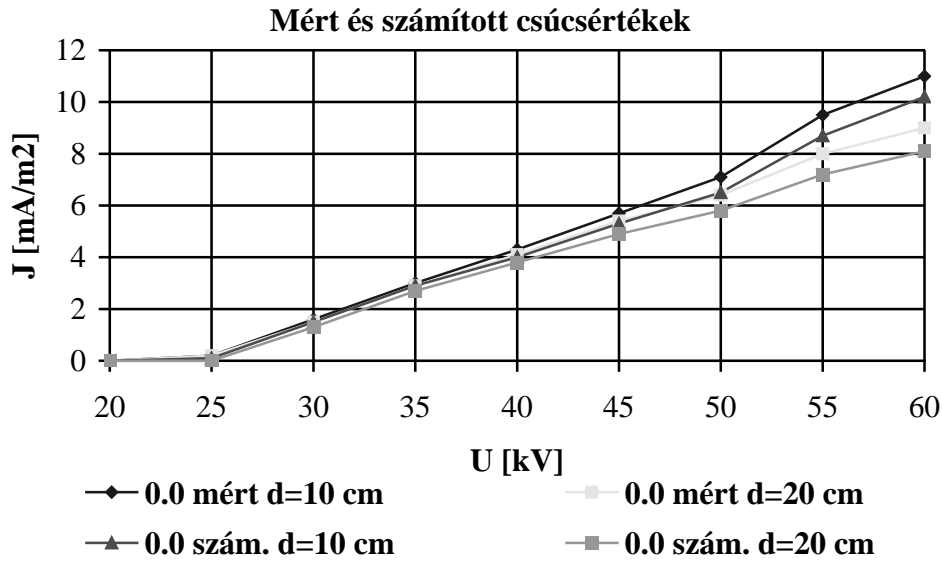
4.8. ábra Az áramsűrűség értéke 60 kV esetén (elektroda távolság d=10 cm)

pontokban végeztem. Ezek a pontok függőlegesen a kis tüske elektródák magasságában (0.0 szint), valamint attól 1.2 cm távolságra (1.2 szint) történtek, vízszintesen pedig a vizsgált tartomány egészét lefedték.

Mint az az ábrákból jól látható a számítási eredményekből kapott értékek alacsonyabbak, mint a mérésekben szereplők, ez azzal magyarázható, hogy a méréseknél a térben már eleve voltak tértöltések, míg a számítások során a kezdeti tértöltéseket elhanyagoltam. Természetesen a 60 kV gerjesztés esetén a kapott értékek nagyobbak az 50 kV esetén mért és számított értékeknél, de jellegét tekintve megegyezik egymással a két eset, hiszen az áramsűrűségnek a maximális értéke mindegyik esetben a 0.0 szinten és a nagyfeszültségű elektróda vonalában (0 cm) volt.

A számítások során a hasáb, illetve a henger alakú elektródák esetén az áramsűrűség értéke annyira kicsi volt, hogy igazolta a mérések során tapasztaltakat, azaz értéke az IEH elektródára kapott értékeknél 2-3 nagyságrenddel volt kisebb, jellegét tekintve megegyezett a fenti ábrákéval. Ezekkel az elektródákkal végzett mérési adatok nincsenek, mert az alkalmazott árammérő műszer nem volt alkalmas az értékek kimutatására, így azt azonosan nullának tekintettük (a műszer méréshatára 0.1 μ A volt).

A másik igen fontos befolyásoló tényező az α ütközési ionizációs együttható, az η abszorpciós tényező, valamint a W_{ki} kilépési munka értékének a megválasztása. Ezeket az értékeket egy korábbi irodalom alapján [17] választottam meg, figyelembe véve, hogy az



4.9. ábra Különböző elektródátávolságok hatásának összehasonlítása

α és η értéke más a korona kisülésen belül, és más az elektrosztatikus porleválasztó egyéb helyein.

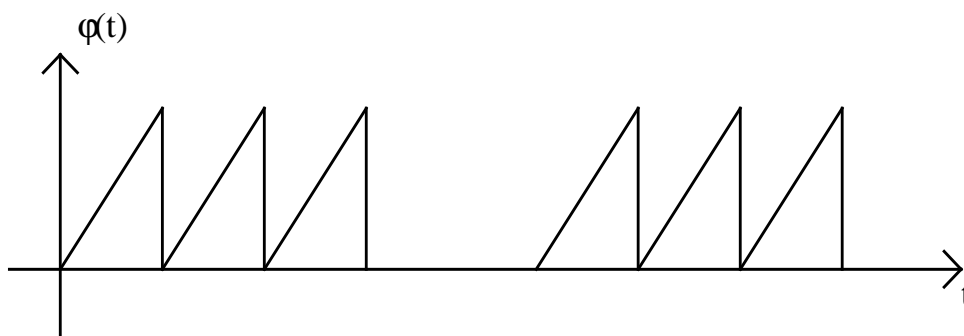
A 4.9. ábrán meghatároztam az áramsűrűség értékének az elektródák távolságától való függését. A számítási eredményeket természetesen most is a mérési eredményekkel összehasonlítva mutatom meg. Az ábrából jól látszik, hogy abban az esetben amikor az elektródákat egymástól 10 cm távolságra helyeztük el (az ábrán „d=10 cm”-el jelöltem), akkor az áramsűrűség értéke lényegesen magasabb volt mind a mérések, mind a számítások során, mint amikor a távolság 20 cm volt (az ábrán „d=20 cm”-el jelöltem).

A mérési eredmények mindkét esetben nagyobbak voltak a számítási értékeknél, ami abból következhet, hogy a számításoknál a kiinduló töltésmennyiség nulla volt, míg a mérések során voltak szabad töltések a térben.

Napjainkban azonban az elektrosztatikus porleválasztókat a magasabb leválasztási határfok elérésének érdekében egyre inkább impulzus üzemű gerjesztésekkel látják el. Ennek az a lényege, hogy az alkalmazott feszültség értékét lehet növelni az átütés rontó hatásának figyelmen kívül hagyásával, hiszen az impulzusok végén, amikor a feszültség értéke lecsökken biztosan megszűnik az átütés.

Az ilyen mérések elvégzésére sajnos nem volt lehetőség, ezért annak megvizsgálása érdekében, hogy az áramsűrűség értéke hogyan változik az impulzus sorozatokból álló gerjesztés hatására számításokat végeztem a kis tüske elektródok hossz tengelyének és a

földelt elektróda síkjának metszéspontjában (0.0 szint, 0 cm). A számítások során a 4.10. ábrán látható gerjesztést alkalmaztam, ahol a maximális feszültség 60 kV volt.



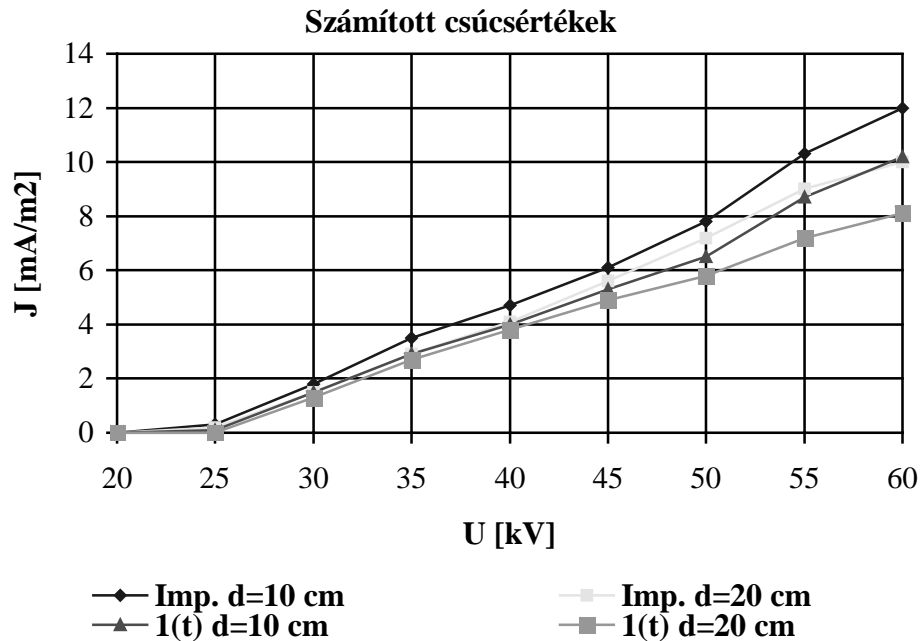
4.10. ábra A számítások során használt impulzusgerjesztés ábrája

Az áramsűrűségek számított csúcserőértékeit a 4.11. ábrán láthatjuk. Az ugrás típusú gerjesztések esetén a nagyfeszültségű elektródák körül kialakuló tértöltések hatására az elektronok rekombinációja megnő, ezáltal csökkentve az áram értékét. Az alábbi táblázatban összefoglaltam, hogy az impulzus gerjesztés számításai során az áramsűrűségekre kapott csúcserőértékek az ugrás gerjesztésre adódó értékeknél hány százalékkal nagyobbak. A táblázatban azokat az értékeket számítottam ki, ahol ez lehetséges volt (a $I(t)$ ugrásfüggvényre adott válasz értéke nem nulla).

1. táblázat Impulzus gerjesztés esetén az áramsűrűség értéke és százalékos növekménye

Feszültség értéke [kV]	30	35	40	45	50	55	60
Impulzus gerjesztés, d=10 cm [mA/m ²]	1.80	3.50	4.70	6.10	7.80	10.30	12.00
Impulzus gerjesztés, d=20 cm [mA/m ²]	1.50	2.90	4.10	5.60	7.20	9.00	10.00
Ugrás gerjesztés, d=10 cm [mA/m ²]	1.50	2.90	4.00	5.30	6.50	8.70	10.20
Ugrás gerjesztés, d=20 cm [mA/m ²]	1.30	2.70	3.80	4.90	5.80	7.20	8.10
d=10 cm távolság esetén [%]	20.00	20.69	17.50	15.09	20.00	18.39	17.65
d=20 cm távolság esetén [%]	15.38	7.41	7.89	14.29	24.14	25.00	23.46

Mint az az ábrából jól látható az impulzusgerjesztés hatására az áramsűrűségnek az értéke magasabb lesz, mint egy egyszerű ugrásgerjesztés esetén, ez is magyarázza azt,



4.11. ábra Az áramsűrűség számított csúcserőterei

hogy az impulzusüzemű elektrosztatikus porleválasztók leválasztási hatásfoka általában magasabb, mint a hagyományos társaiké.

Az adatokat megvizsgálva, amikor a nagyfeszültségű elektródák távolsága egymástól 10 cm volt, akkor egy egyenletesebb növekmény tapasztalható az áramsűrűség értékében, ami 15 – 21 %-ig növelte meg az ugrásfüggvénynél számított értékeket. A másik esetben, amikor az elektródátávolságot a kétszeresére növeltem már nem volt ennyire homogén az eredmény, a szórása is lényegesen nagyobb volt, 7 – 25 % között változott.

A berendezés alkalmas volt arra, hogy kis mennyiségű kréaport felhasználva, a leválasztás menetét modellezze. Természetesen a berendezés paramétereiből adódóan ez nem hasonlítható össze egy valóságos elektrosztatikus porleválasztóban történtekkel, hiszen például az ott lévő turbulens áramlást a modell berendezésben lamináris áramlás helyettesítette. A felhasználható por mennyisége nem tette lehetővé az ellenkorona kialakulását.

4.2. A porszemcsék mozgásának figyelembevétele

Az előző fejezetben igazoltam, hogy a kidolgozott numerikus térszámítási eljárás alkalmas a villamos erőtér meghatározására, valamint a vizsgált elektrosztatikus porleválasztó berendezésben fellépő áramok meghatározására. Azonban még nem vettem figyelembe a berendezés lényegét, a rajta átáramló port, amely a feltöltődéséből és áramlásából adódóan jelentős mértékben megváltoztathatja a villamos erőteret.

4.2.1. A porleválasztás

A nagyfeszültségű elektródán kialakuló koronakisülésből kilépő töltött részecskék ütköznek a porszemcsékkel a porleválasztó belsejében. Az ílymódon feltöltött részecskére hat a villamos erőtér, és ezeknek a hatására egyre gyorsuló mozgást fognak végezni a felfogóelektródák (általában földelt elektródák) felé. A porleválasztó berendezést úgy célszerű méretezni, hogy az összes porszemcsének legyen lehetősége arra, hogy a felfogó elektródát mozgása közben elérje [18, 20].

Amikor a feltöltött porszemcsék elérik a falat ezen a töltésük miatt megragadnak, az ott lévő többi porszemcsével esetleg össze is ragadnak, majd a vezetőképességük függvényében lassan elvesztik a töltésüket. Ez a kialakuló réteg viszont gátolja a töltéshordozók áramlását. A mind vastagabb por viselkedését tekintve egy kondenzátornak tekinthető, amelyet az adott ponthoz tapadó töltött porszemcsék töltenek fel. Amikor ez a feszültség eléri a szükséges értéket, akkor a „kondenzátor” átüt, azaz létrejön az ellenkorona kisülés, ami jelentős mértékben csökkenti a porleválasztó leválasztási hatásfokát, hiszen ekkor a falra már feltapadt por egy része, valamint a falhoz közeledő további porszemcsék eltávolodnak a faltól. A lerakódott porszemcsék ezen kívül a levegő turbulens áramlása miatt is visszakerülhetnek a légtérbe. Ennek érdekében a falakat rendszeresen szokták rázni, mosni, ezzel is megpróbálva a ráragadt port eltávolítani, ami egy porbunkerbe kerül, ahonnan később zárt rendszerben eltávolítható.

4.2.1.1. A feltöltődés menete

Az elektrosztatikus porleválasztó berendezésben az átáramló koszos levegőben lévő szennyező anyag részecskéinek a feltöltődés szempontjából a két legfontosabb jellemzője a vezetőképessége, valamint a villamos töltés felvevő képessége. A szemcséket a

legeredményesebben a koronakisülések segítségével lehet feltölteni. Ekkor két különböző módon is töltődnek az átáramló részecskék: egyrészt az iondiffúzió révén, másrészt pedig az ion ütközésből kifolyólag. Az első folyamat során az ionok a diffúzió segítségével jutnak el a szemcse felületére, ezt a töltéshordozók saját mozgása okozza [44]. Ennél jóval hatékonyabb az ionütközéses töltés, ahol a töltéseket a Coulomb erő juttatja el a részecskék felszínére. A folyamatok dominanciáját végső soron az dönti el, hogy az átáramló szennyező anyagnak mekkora a szemcsemérete.

A részecskéket csak egy bizonyos határig lehet feltölteni, amely határ a térerősséggel arányosan növekszik (Pauthenier-féle határérték). A feltöltés annál gyorsabban megy végre, minél nagyobb a térben kialakuló áramsűrűség (ez is indokoltá teszi az impulzus üzemi gerjesztések elterjedését!)

A feltöltődést több tényező is gátolhatja. Az első ilyen a porleválasztó berendezésben megjelenő nagy mennyiségű szabad tértöltés, amely jelentős mértékben csökkentheti a koronakisülés mértékét azáltal, hogy a koronázó elektróda felületét mintegy megnövelik (lásd az előző fejezetben) és ez arra is vezethet, hogy megszűnik a koronakisülés. Befolyásolja a feltöltés hatékonyságát az is, hogy az igen nagy ellenállású porok esetén a porszemcse felületén a töltött részecskék nem egyenletesen oszlanak el, amely egy helyi térerősség kialakulásához vezethet. Ennek hatására a további töltésekkel való feltöltődés akadályozva van. Ugyanígy gondot jelenthet az is ha a térben lévő nagyszámú töltésinjektáló hely miatt egyenetlen áramsűrűségek alakulnak ki, ami szoros összefüggésben van a töltődéssel, így ez is gátolhatja a feltöltődés hatásosságát.

4.2.1.2. A leválasztás menete

Miután a fenti módon feltöltöttük a porleválasztón átáramló eltávolításra ítélt részecskéket ezek a rájuk ható villamos erőtér hatására elkezdenek a felfogó elektróda felé mozogni. A villamos erőtér kialakítása kettős. Az egyik összetevője a két elektróda rendszer között fentálló potenciálkülönbségből származik, míg a másik komponensét a részecskékre tapadó töltött ionokból adódó szabad tértöltések adják. Mozgásukat természetesen a levegő áramlása is befolyásolja. Miután a feltöltött porszemcse eléri a földelt elektródát ott megtapad és a villamos vezetőképességétől függően elkezd a „felhalmozott” töltéseit elveszteni. A porszemcsék folyamatosan érik el a felfogó elektródát, a felgyülemelő por vastagságának növekedésével egyre nehezebben képesek a

töltésük leadására. A folyamatos lerakódás során kialakulhat egy olyan potenciálkülönbség a porrétegen keresztül amely átütést – ellen koronakisülést eredményezhet, ami nagy mennyiségű, már lerakódott port juttathat vissz a légáramba, ami a leválasztás hatásfokát csökkenti. Ezért a felfogóelektródán felgyülemelő port megpróbálják valamilyen mechanikai módon eltávolítani, majd a lerázott, vagy lemosott port a porbunkerben összegyűjtik és onnan lehetőség szerint zárt technikai láncon belül eltávolítják ezáltal megóvva a környezetet a további szennyeződésektől.

4.2.1.3. Az áramlás hatása a leválasztásra

Az levegő átáramlásának sebessége, és formája jelentős mértékben befolyásolhatja a leválasztás hatásfokát. Nagy levegősebesség esetén az áramló levegő magával ragadhatja a már leválasztásra került porszemcséket, ezzel rontva a berendezés hatásfokát.

A porleválasztón átáramló szennyezet levegőből a leválasztás akkor a leghatásosabb, ha a berendezésen belül az áramlási sebesség viszonylag egyenletes. Amennyiben ez nem teljesül a leválasztás hatásfoka csökkenhet. Ezt az κ leválasztási fok mutatja:

$$\kappa = 1 - e^{-(v_v A_f)/(v_a A_p)}, \quad (4.26)$$

ahol v_v és v_a a vándorlási, illetve a átlagos áramlási sebesség, A_f a felfogó elektróda felülete, A_p pedig a porleválasztó keresztmetszetének a nagysága. A berendezés keresztmetszetében a változó levegősebesség a leválasztási fok nagyságát csökkenti. Ez a hatásfokcsökkentés elérheti az 1-2 százalékot is, ami - figyelembe véve, hogy az elektrosztatikus porleválasztók leválasztási hatásfoka megközelíti a maximális 100 százalékot – jelentős környezetszennyezéshez vezethet.

4.2.2. Villamos téregyenletek

A villamos erőtér egyenletei teljes mértékben megegyeznek az előbbi modellnél használtakkal (4.1)-(4.25), így ezen a téren nem kell új egyenleteket felírni. Ami a megoldás során változni fog az az, hogy a porszemcsék közül is jó néhány rendelkezni fog töltéssel, és a villamos erőtér meghatározásánál ezeket is figyelembe kell venni. Ebben rejlik a lényeges változás, hiszen ezek a porszemcsék a térben változó, helyenként igen nagy sebességgel mozognak. Először tehát nézzük a por mozgásának meghatározását.

4.2.3. A részecskék mozgásának modellezése

A modellezés során azzal a közelítéssel éltem, hogy a porleválasztó berendezésbe való belépés előtt a por áramlása laminárisnak tekinthető, azaz a por sebesség vektorának csak a porleválasztó keresztmetszetére merőleges komponense van. A koronakisülés segítségével emittált ionok rátapadnak ezekre a szennyező részecskékre, és így a töltött részecskéknél új sebesség komponensei jelennek meg a Coulomb erő hatására

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (4.27)$$

ahol q a részecske töltése. Ez az erő változásokat okoz a feltöltött részecske pályájában, ami a keresztirányú sebesség összetevők megjelenésével és a turbulencia fok növekedésével járhat együtt. A részecskék elkezdenek a felfogó elektróda irányában mozogni, majd annak elérésekor felragadnak az elektróda felületére a töltésük miatt. A korábban a felfogó elektródát elért szennyeződések mintegy szigetelőréteget alakítanak ki a földelt elektróda felszínén, ami a később érkező szennyező részecskéket meggátolja a töltésük leadásában. Ez a folyamat vezet az ellen koronakisülés kialakulásához, amely jelenséget a modell kidolgozása során nem vettem figyelembe.

A részecskék mozgásának leírását a Euler egyenlet segítségével lehet leírni

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{p} = 0, \quad (4.28)$$

Az Euler egyenletből a surlódási erők figyelembevételével levezethető a Navier Stokes egyenlet

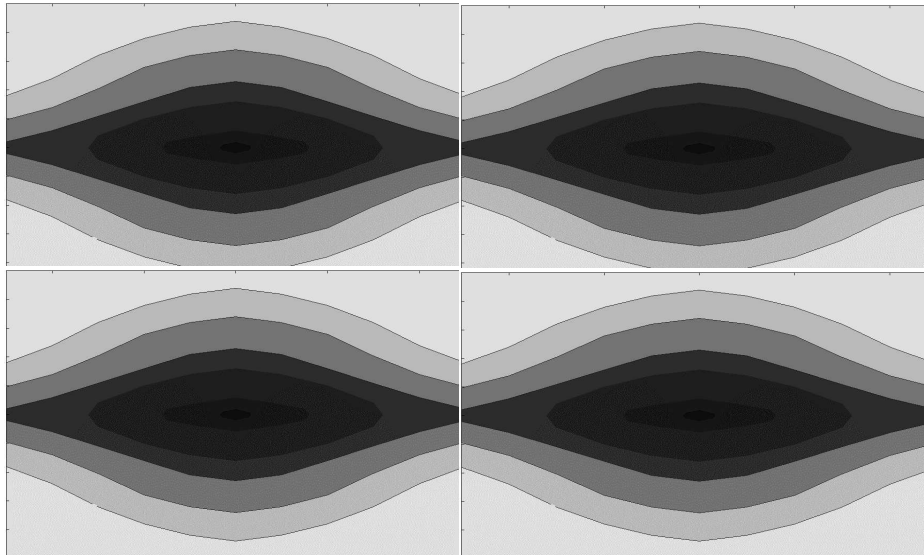
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{p} - \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (4.29)$$

ahol \mathbf{v} a sebesség, \mathbf{g} a gravitációs együttható, ρ a sűrűség, ν a surlódási együttható és \mathbf{p} az áramló gáz nyomása [136]. A Navier Stokes egyenlet a szennyező részecskék mozgását a villamos erőtérrel kívül írja le, ha nem hat rájuk semmiféle villamos erő. Itt azonban ennek az erőtérnek a hatását is figyelembe kell venni, tehát a (4.29) egyenletet még egy taggal ki kell egészíteni, és ez a tag a Coulomb erőből származó tag (\mathbf{a}_c) amely figyelembe veszi a részecskére ható villamos erőtér (\mathbf{E}), a részecske q töltését, valamint a részecske súlyát (m_r)

$$\mathbf{a}_c = \frac{q\mathbf{E}}{m_r}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{p} - \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{a}_c = 0. \quad (4.31)$$

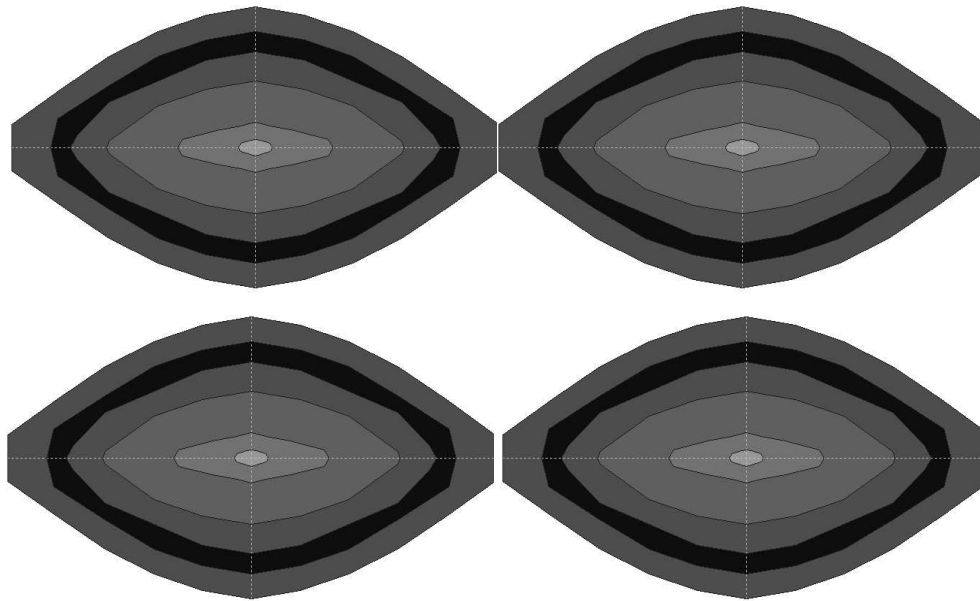
Amennyiben az elektrosztatikus porleválasztón átáramló levegő sebessége lényegesen nagyobb, úgy nem lehet azzal a feltételezéssel élni, hogy lamináris áramlással van dolgunk a porleválasztó előtti szakaszon. Ebben az esetben már a cellába való belépéskor egy turbulens áramlás hatásait kell figyelembe venni, amelyet a fenti egyenletek megoldásával lehet megoldani, a változtatásuk nélkül [10]. A fő problémát ebben az esetben a turbulens áramlásokból adódó konvergencia problémák leküzdése jelenti.



4.12. ábra A földelt elektródán a porszemcsék becsapódásának valószínűsége négy cellára

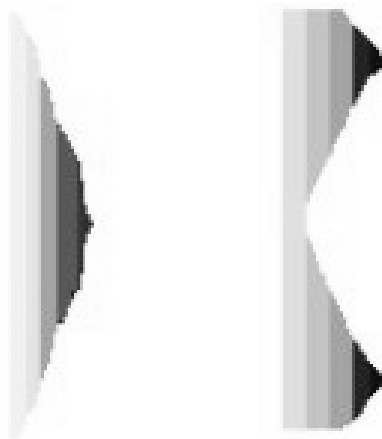
4.2.4. Numerikus eredmények

A 4.12. ábrán a falra kirakódó pormennyiség látható, ahol a sötétebb szín a vastagabb porréteget jelenti. Ezen diagrammok számítása során azzal a feltételezéssel éltem, hogy a földelt elektródát elérő töltések azon nyomban elvesztik töltésüket, és valamilyen mechanikus eljárás segítségével eltűnnek a falról. Az ábra tehát csak a feltöltött részecskék becsapódási helyeinek gyakoriságát hivatottak szemléltetni.



4. 13. ábra Az elektródán felgyülemelő por vastagsága négy cellára

A 4.13. ábrán azonban már figyelembe vettem azt, hogy a falat elérő részecskéknek a fal elérésének pillanatában még van a fal síkjával párhuzamos irányú sebesség komponense, amely a töltéseket a fal síkján és természetesen egymáson is további elmozdulásokra készíti. Ennek a sebességnek a csökkenését a számítások során befolyásolta a már a falon lévő por vastagsága, valamint a porszemcsének a fal síkjával párhuzamos irányú sebessége. Ennek eredményeként a legvastagabb porréteg nem a nagyfeszültségű elektródák tuskéivel szemben lévő falszakaszra estek, hanem attól egy kicsit távolabb, az elektródákon lévő kis tüskék elhelyezkedésének megfelelően ovális alakban. A két megoldás közötti különbséget jól szemlélteti a 4.14. ábra, ahol a földelt falon felgyülemelő porszemcsék keresztmetszeti képe látható.

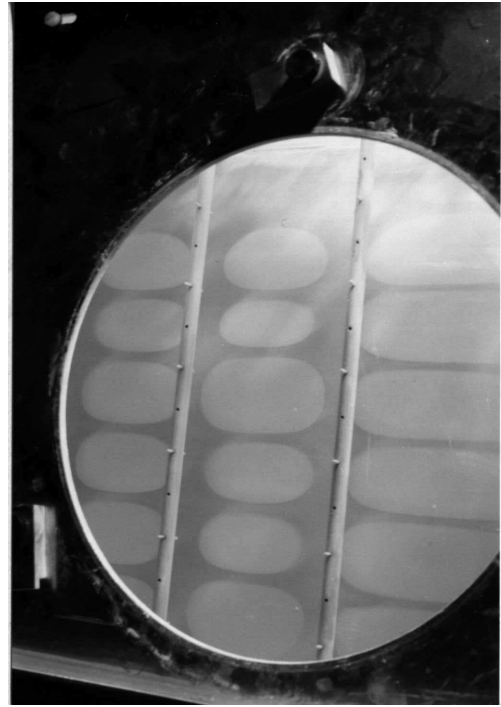


4.14. ábra A két különböző modell porrétegének keresztmetszete

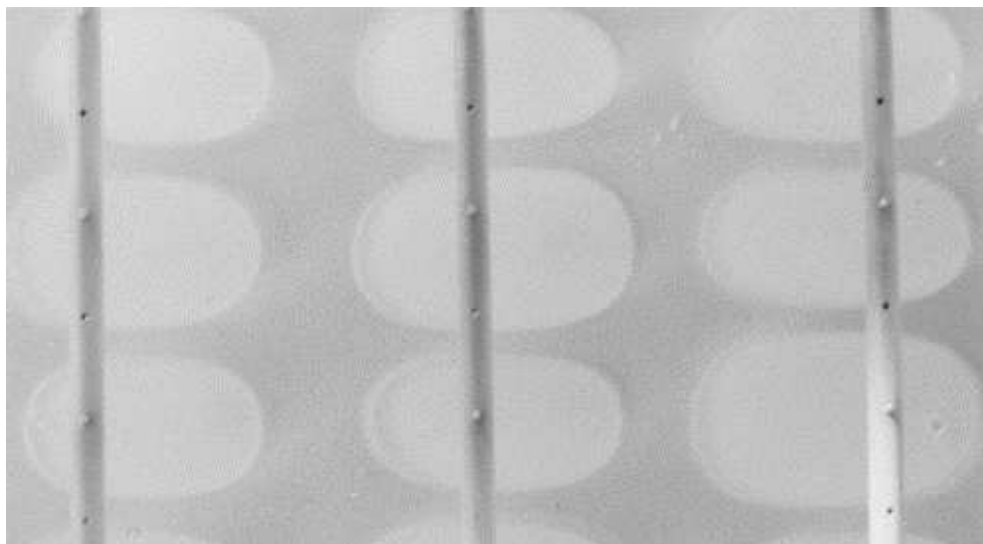
Ez a második elrendezés tulajdonképpen megfelel a valóságnak, hiszen a 4.15-4.19. ábrákon látható a valódi porleválasztó belsejéről készített felvételeken, hogy ebben az esetben is a kis elektródákat oválisan körülvevő gyűrűben a legnagyobb a porrétteg vastagsága.



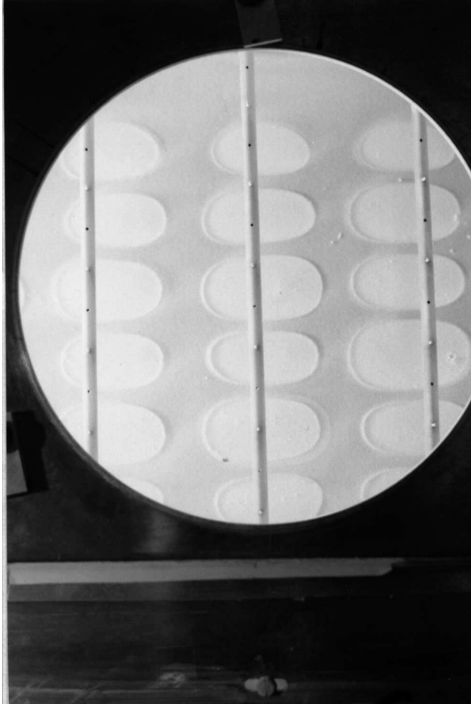
4.15. ábra A porleválasztó belseje



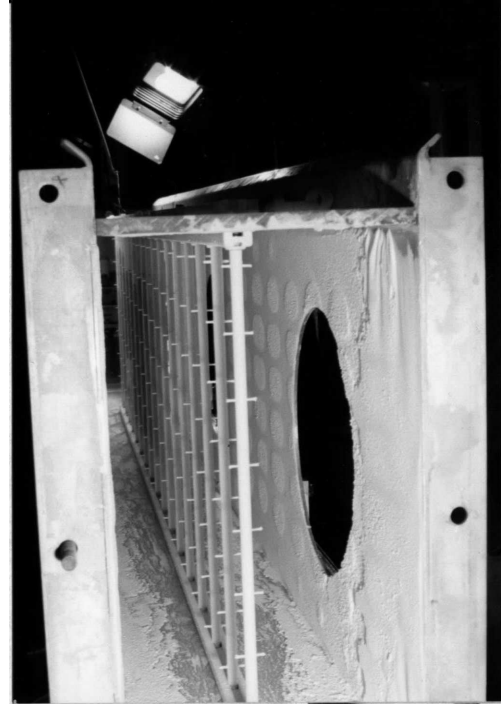
4.16. ábra A falon kialakuló elipszisek



4.17. ábra A valódi modellben a földelt elektródán keletkező por



4.18. ábra Por elipszisek



4.19. ábra A porleválasztó és az IEH elektródák

4.2.5. Összefoglalás

A Karlsruhe-i egyetemen működő elektrosztatikus porleválasztó háromdimenziós modelljének numerikus térszámítását végeztem el felhasználva az R -függvények és a Ritz módszer kombinációját. Az eredményeket a felírt differenciál egyenletek megoldásából határoztam meg, ami ebben az esetben visszavezethető volt egy egyszerű n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldására. Az eredményekből megállapítható, hogy a bevezetett eljárás segítségével az elektromos skalárpotenciál értéke a peremeken teljesen megegyezik az előírt értékekkel, és a segítségével számítható egyéb villamos jellemzők - mint például az áramsűrűség - értéke mérési eredményekkel jellegre megegyezik, azoktól csak kis mértékben tér el.

Az eljárás segítségével bebizonyítható, hogy így módon egy bonyolult háromdimenziós elrendezés villamos terét könnyedén meg lehet határozni viszonylag kevés ismeretlen segítségével, és viszonylag kis számítógép kapacitás felhasználásával. A feladat megoldása során meghatároztam az elektrosztatikus porleválasztó modellben létrejövő levegőáramlás modelljét, valamint a levegőben lévő szennyező részecskék pályáját. A fentiekből

következett az elektrosztatikus porleválasztó földelt elektródájának falára kirakódó por vastagságának meghatározása. A modell hiányosságai közé tartozik, hogy a falra kirakódó por hatására esetenként létrejövő ellen koronakisülést kezelésére nem alkalmas. Magasabb feszültség szintek használata esetén a modellben mindenféleképpen helyet kell, hogy kapjon, hiszen jelentős mértékben képes a leválasztás folyamatát módosítani. Nagy áramlási sebességek esetén a kirakódott por vastagsága eltérhet az általam felvázolt esettől, amiben a fő szerepet a jelentős mértékű turbulencia hatása okozza.

A háromdimenziós elektrosztatikus porleválasztó modell elektromos térszámítást numerikus úton elvégeztem, figyelembe véve az áramló szennyező anyag felületén felhalmozódó tértöltéseket.

4.3. Új tudományos eredmény

2. Tézis

Eljárást dolgoztam ki egy előre definiált modellben a statikus térben áramló töltött részecskék meghatározására és a szimulációs eljárást összekapcsoltam a globális variációszámítás és az \mathbf{R} -függvények numerikus térszámítási módszerével, majd a kapott eljárásba integráltam az általam kidolgozott, a térben áramló feltöltődő szennyező anyagok mozgásának szimulációját meghatározó numerikus modellt.

(2.1) A térszámítási feladatra adódó diffúziós egyenlet numerikus megoldására kidolgozott eljárásom segítségével meghatároztam a Karlsruhe-i Műszaki Egyetem Institute für Elektroenergiesysteme und Hochspannung Technik tanszékén működő elektromos porleválasztó modell villamos erőterét, valamint a porleválasztó berendezés belsejében a nagyfeszültségű elektródák felületéről kilépő töltött részecskék mozgását és meghatároztam az általuk létrehozott áram értékét. A kapott eredményeket összevettem az általam elvégzett mérés eredményeivel. A számítások során egy háromdimenziós probléma került megoldásra az \mathbf{R} -függvények segítségével. A Ritz módszerrel kombinált megoldási eljárás segítségével az eredményeket pontos értékkel határoztam meg az előírt felületeken, a módszer alkalmazása esetén az ismeretlenek száma igen alacsony szinten maradt, így a kidolgozott numerikus eljárást kisebb számítási kapacitásokkal rendelkező számítógép segítségével is meg lehet határozni. A számítási eredményeket összevettem mérési adatokkal, és azok jó egyezést mutattak.

(2.2) Meghatároztam az elektromos térben mozgó, töltéssel rendelkező szennyezőanyagok mozgását leíró egyenleteket és ezt felhasználva, valamint alkalmazva a fentiekben leírt numerikus módszereket meghatároztam a 3 dimenziós elektrosztatikus porleválasztó berendezés modelljének belsejében kialakuló elektromos teret, valamint a szennyezőanyag mozgását. Figyelembevétel a számítások során alkalmazott alacsony feszültség szintet a térszámítás meghatározása során elhanyagoltam a porleválasztó berendezés földelt oldalán esetenként fellépő ellenkorona (back-corona) kisülés jelenségét.

5. Tudományos eredmények

5.1. Új tudományos eredmények

1. Tézis

Elméleti eljárást dolgoztam ki egy kétdimenziós elektroda elrendezés elektromos terének meghatározására, amely térszámítási eljárással figyelembe vettem a térben elhelyezkedő szabad tértöltéseket és ezek hatásait. Összekapcsoltam a globális variációszámítást az \mathbf{R} -függvények numerikus térszámítási módszerével, valamint a tértöltések elhelyezkedését leíró Karakterisztikák módszerével. A kidolgozott módszer jelentős memória tár megtakarítást ért el korábbi módszerekkel szemben .

Az elméleti eljárás kidolgozása során a globális variációszámítás módszerét alkalmaztam a Ritz módszer és az \mathbf{R} -függvények módszereinek felhasználásával. Az eljárás során lényegesen csökkentettem a szükséges memóriakapacitást, ezáltal lehetővé téve a számítások elvégzését kisebb kapacitású gépeken is. A tértöltések hatásainak figyelembevételére a térszámítási eljárásba illesztettem a Karakterisztikák módszerét és meghatároztam az elektródák felületén kialakuló elektromos jellemzőket két egymásba ágyazott iterációs ciklust tartalmazó numerikus eljárás segítségével. Az iterációs ciklusok megoldására olyan módszert dolgoztam ki, amely konvergens folyamatot eredményez. Elvégeztem az általam kidolgozott numerikus eljárás hibaanalízisét.

2. Tézis

Eljárást dolgoztam ki egy előre definiált modellben a statikus térben áramló töltött részecskék meghatározására és a szimulációs eljárást összekapcsoltam a globális variációszámítás és az \mathbf{R} -függvények numerikus térszámítási módszerével, majd a kapott eljárásba integráltam az általam kidolgozott, a térben áramló feltöltődő szennyező anyagok mozgásának szimulációját meghatározó numerikus modellt.

(2.1) A térszámítási feladatra adódó diffúziós egyenlet numerikus megoldására kidolgozott eljárásom segítségével meghatároztam a Karlsruhe-i Műszaki Egyetem Institute für Elektroenergiesysteme und Hochspannung Technik tanszékén működő elektromos porleválasztó modell villamos erőterét, valamint a porleválasztó berendezés

belsejében a nagyfeszültségű elektródák felületéről kilépő töltött részecskék mozgását és meghatároztam az általuk létrehozott áram értékét. A kapott eredményeket összevettem az általam elvégzett mérés eredményeivel. A számítások során egy háromdimenziós probléma került megoldásra az \mathbf{R} -függvények segítségével. A Ritz módszerrel kombinált megoldási eljárás segítségével az eredményeket pontos értékkel határoztam meg az előírt felületeken, a módszer alkalmazása esetén az ismeretlenek száma igen alacsony szinten maradt, így a kidolgozott numerikus eljárást kisebb számítási kapacitásokkal rendelkező számítógép segítségével is meg lehet határozni. A számítási eredményeket összevettem mérési adatokkal, és azok jó egyezést mutattak.

(2.2) Meghatároztam az elektromos térben mozgó, töltéssel rendelkező szennyezőanyagok mozgását leíró egyenleteket és ezt felhasználva, valamint alkalmazva a fentiekben leírt numerikus módszereket meghatároztam a 3 dimenziós elektrosztatikus porleválasztó berendezés modelljének belsejében kialakuló elektromos teret, valamint a szennyezőanyag mozgását. Figyelembe véve a számítások során alkalmazott alacsony feszültség szintet a térszámítás meghatározása során elhanyagoltam a porleválasztó berendezés földelt oldalán esetenként fellépő ellenkorona (back-corona) kisülés jelenségét.

5.2. További kutatási feladatok

A kutatási munkát célszerű lenne kiterjeszteni a valós porleválasztó berendezések vizsgálatára. A kidolgozott eljárásba integrált a geometriai adatok feldolgozását segítő \mathbf{R} -függvények módszere alkalmassá teszi a rendszert arra, hogy az elektródák alakváltozását leíró programcsomagok (például a fraktálok módszere) felhasználása esetén a változásokat könnyen kezelhetővé tegye.

Ugyancsak alkalmas lehet a kidolgozott eljárás arra, hogy a porszemcsék lerakódásának figyelembevételével az ellenkorona jelenséget feldolgozza, hatásait figyelembe vegye.

Irodalom

- [1] Adamar, Z.: *Cauchy Problems for Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type*, Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)
- [2] Adamiak, K.: Simulation of Corona in Wire-Duct Electrostatic Precipitator by Means of Boundary Element Method, *IEEE Trans. Ind. Appl.* vol.30. 1994. pp.381-386.
- [3] Alotto, P.; Delfino, F.; Molino, P.; Nervi, M.; Perugia, I.: A Mixed Face-Edge Finite Element Formulation for 3D Magnetostatic Problems, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2445-2448.
- [4] Banerjee, P.K.; Butterfield, R.: *Boundary Element Method in Engineering Science*, McGraw Hill, London, 1981.
- [5] Barbarics, T.: Vasúti sín impedancia karakterisztikája térszámítással, *Diplomaterv, Budapesti Műszaki Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai kar*, Budapest, 1994., p.55.
- [6] Barbarics, T.; Gilányi, A.; Gyimóthy, Sz.: Vasúti sín impedanciakarakterisztikája térszámítási alapon, *TDK dolgozat, BME Elméleti villamosság tanterv*, 1993.
- [7] Barbarics, T.; Igarashi, H.; Iványi, A.; Honma, T.: Determination of the Electric Field and the Space Charges of a Precipitator Using the R -functions and the Method of Characteristics. *Proceeding of the 4th Middle East Power System Conference MEPCON'96*, Assuit University, Egypt. pp.191-194.
- [8] Barbarics, T.; Igarashi, H.; Iványi, A.; Honma, T.: Determination of the Electric Field and the Space Charges of a Precipitator Using the R -functions and the Method of Characteristics. *Journal of Electrostatics*, 38, (1996) pp.269-282
- [9] Barbarics, T.; Iványi, A.: Determination of Particles' Movement in Electrostatic Precipitators, *Journal of Electrical Engineering*, 48 (1997) No.8/S, pp.39-42
- [10] Barbarics, T.; Ivanyi, A.: Determination of the Particles Orbit in ESP, COMPUMAG'97, *Proceedings of the XI.Conference on the Computation of Electromagnetic Fields*, Nov.2-6. 1997. Rio de Janeiro, Brazil, Vol.1. PA4-8. pp.93-94.
- [11] Barbarics, T.; Ivanyi, A.: Discharge of Impulse Series in Presence of Space Charges, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21. June, 1996. pp 144-153.
- [12] Barbarics, T.; Ivanyi, A.: Electric Field Calculation for Precipitators, *Nonlinear Electromagnetic Systems*, ed. by V. Kose, J. Sievert, in series of Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, IOS Press, Amsterdam, vol.13. 1998. pp.737-740.

- [13] Barbarics, T.; Ivanyi, A.: Modelling the Charge Transport in ESP, *COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol.17. No.1/2/3, 1998. pp.201-205
- [14] Barbarics, T.; Ivanyi, A.: Particles Movement in Precipitator, in *Applied Electromagnetics and Computational Technology II.* ed. by H. Tsuboi and I. Vajda, in series of Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, IOS Press, Amsterdam, vol.16. 2000. pp.95-102.
- [15] Bárdi, I.; Biró, O.; Preis, K.: Perfectly Matched Layers in Static Fields, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2433-2436.
- [16] Bárdi, I.; Biró, O.; Preis, K.; Renhart, W.; Richter, K.R.: Parameter Estimation for PMLs Used with 3D Finite Element Codes, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2755-2759.
- [17] Bárdi, I.; Iványi, A.: Teremionizátor fejlesztése, *Kutatási jelentés, Elméleti Villamosság-tanszék, Budapesti Műszaki Egyetem*, Budapest, 1980.
- [18] Berta, I.: High Voltage Engineering, *Lectures in the 3rd year of Faculty of Electrical Engineering and Informatics*, Budapesti Műszaki Egyetem, 1991/92 I. félév
- [19] Berta, I.: *Ipari elektrosztatikai technológiák hatékony működése és fejlesztése*, Kandidátusi Értekezés Budapesti Műszaki Egyetem, 1987.
- [20] Berta, I.: Nagyfeszültségű technika, *Előadás a Villamosmérnöki és Informatikai kar doktori képzésén*, Budapesti Műszaki Egyetem, 1994/95 I. félév
- [21] Berta, I.; Horváth, T.: Mathematical Simulation of Electrostatic Hazards, Static Electrification, *Inst. Phys. Conf Series 27.*, 1975, pp.256-263.
- [22] Bettess, P.: Infinite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.11., 1977. pp.53-64.
- [23] Bettess, P.: More on Infinite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.15. 1980. pp.1613-1626.
- [24] Bettess, P.; Zienkiewicz, O.C.: Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.11. 1977. pp.1271-1290.
- [25] Biró, O.: Use of a Two-component Vector Potential for 3-D Eddy Current Calculations, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-24. 1988. pp.102-105.
- [26] Biró, O.; Richter, K.R.: CAD in Electromagnetism, in *series Advances in Electronics and Electron Physics*, Ed. P.W. Hawkes, vol.82, Academic Press, New York, 1991.
- [27] Böhm, J.: *Electrostatic Precipitators*, Elsevier, Amsterdam, 1982, p.366.

- [28] Bossavit, A.: A Rationale for „Edge-elements” in 3-D Field Computations, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-24. 1988. pp.74-79.
- [29] Brebbia, C.A.: *Progress in Boundary Element Methods*, vol.2. Pentech Press, 1983.
- [30] Brebbia, C.A.: *The Boundary Element Method for Engineering*, Pentech Press, London, 1978.
- [31] Brebbia, C.A.: *The Boundary Elements Method for Engineers*, Pentech Press, 1980.
- [32] Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C.: *Boundary Element Techniques, Theory and Application in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [33] Brebbia, C.A.; Walker, S.: *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [34] Buccella, C.: Numerical Computation of Ionized Fields in Electrostatic Pulse Powered Precipitators, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996., pp.178-183.
- [35] Buccella, C.; Orlandi, A.: Two-Dimensional FDTD Analysis for Ionized Electromagnetic Fields, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.3479-3482.
- [36] Bustin, W.M.; Dukek, W.G.: *Electrostatic Hazards in the Petroleum Industry*, Research Studies Press, John Wiley and Sons, New York 1984. p.84.
- [37] Butler, A.J.; Cendes, Z.J.; Hoburg, J.F.: Interfacing the finite-element method with the Method of Characteristics in Self-consistent Electrostatic Field Models, *IEEE Trans. Ind. Appl.* vol.25. No.3. 1989. pp.533-537.
- [38] Caputo, A.C.; Giacchetta, G.; Pelagagge, P.M.: Economical Comparison of Conventional and Pulsed Electrostatic Precipitators in Industrial Applications, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996. pp.215-220
- [39] Chari, M.V.K.; Silvester, P.P.: *Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems*, John Wiley, New York, 1960.
- [40] Chen, S.: Variational Principle of Transient Eddy Current Problems, *Proceedings of COMPUMAG'89*, Tokyo, Japan, pp.71-74.
- [41] Collatz, L.: *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [42] Cristina, S.; Dinelli, G.; Feliziani, M.: Numerical Computation of Corona Space Charge and V-I Characteristic in dc Electrostatic Precipitator, *IEEE Trans. on Industrial Application*, Vol.27. 1991. pp.147-153.

- [43] Czibók, E.: *Elektrofilterek szerkezete és üzeme*, Budapesti Felsőoktatási Jegyzetellátó, 1968, 180.
- [44] Davies, A.J.: Discharge simulations, *IEEE Proc. A.*, vol.133. No.4. 1986. pp.217-240.
- [45] Davies, D.K.: Harmful Effects and Damage to Electronics by Electrostatic Discharges, *Journal of Electrostatics*, Vol 16. 1985. pp.329-342.
- [46] Davis, J.L.; Hoburg, J.F.: Wire-Duct Precipitator Field and Charge Computation Using the Finite Element and Characteristics Methods, *Journal of Electrostatics*, vol.14. 1983. pp.187-199.
- [47] Deliége, G.; Henrotte, F.; Hamayer, K.: Finite Element Modelling of an Electrostatic Painting Device, *IEEE Trans. on Aut. Control*, 1999, pp.:100-103
- [48] Ebner, T.; Magele, Ch.; Brandstatter, B.R.; Richter, K.R.: Utilizing Feed Forward Neural Networks for Acceleration of Global Optimization Procedures, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5. Sept, 1998. pp.2928-2931.
- [49] Elektrosztatikus porleválasztók fejlesztése, *Kutatási jelentés I-V.* BME Erősáramú Intézet, Nagyfeszültségű Technika Tanszék, 1981-1985.
- [50] Enokizono, M.: Developments in BEM, *Lectures at STU Bratislava*, 1991.
- [51] Fano, R.M.; Chu, L.J.; Adler, R.B.: *Electromagnetic Fields, Energy and Forces*, John Wiley, New York, 1960.
- [52] Feliziani, M.; Maradei, F.: Mixed Finite-Difference/Whitney-Elements Time Domain (FD/WE-TD) Method, *IEEE Trans. on Magn*, vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.3222-3227.
- [53] Fetzer, J.; Kurz, S.; Lehner, G.; Rucker, W.M.: Transient BEM-FEM Coupled Analysis of 2-D Electromechanical Systems: A Watch Stepping Motor Driven by a Thin Wire Coil, *Proceedings of COMPUMAG'97*, Rio de Janeiro, Brazil, PC3-11, 1997. pp.303-304.
- [54] Fletcher, C.A.J.: *Computational Galerkin Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [55] Fodor, I.; Berta, I.; Palotai, T.: Porok villamos tulajdonságainak vizsgálata, *PORANAL Konferencia*, Balatonfüred, 1983,
- [56] Gács, I.; Katona, Z.: Környezetvédelem, <http://www.energia.bme.hu/docs/kornyezetvedelem.pdf>
- [57] Grabner P.; Berta I.; Iványi A.: Electrostatic sterility, *Proceedings of the 1997 International Conference on Electrostatics*, Poitiers, France, 4 – 6 June, 1997, Special Issue of the Journal of Electrostatics, 40&41, 1997, pp. 561-566.
- [58] Grabner P.; Czvikovszky G.; Berta I.: The role of accidental surface charges using

- PMMA implants, *XIth Congress of the European Society of Ophthalmology*, Hungary, Budapest, June 1 - 5, 1997.
- [59] Greason, W.D.: *Electrostatic Damage in Electronics Devices and Systems*, Research Studies Press, John Wiley and Sons, New York, 1987, p.241.
- [60] Hammond, P.: *Energy Method in Electromagnetism*, Oxford Sc. Pub., 1986.
- [61] Hartmann, G.: Theoretical Evaluation of Peek's Law, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, IA-20, 1984, pp.1647-1651
- [62] Hernández-Figuerova, H.E.; Rubio-Mercedes, C.E.: Transparent Boundary for the Finite-Element Simulation of Temporal Soliton Propagation, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.3228-3231.
- [63] Holics, L.: *Fizika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986, pp.501-518.
- [64] Horváth, T.: Pattogó szikrák, *Élet és irodalom*, 2002/33, pp:1036-1038.
- [65] Horváth, T.; Csernátony Hoffer, A.: *Nagyfeszültségű Technika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [66] <http://www.ntb.bme.hu/targykov/vrkh/esp.doc>
- [67] Igarashi, H.; Sakai, S.; Nakamura, T.; Morinaga, T.; Honma, T.: A Boundary Element Analysis of Space Charge Fields in a Corona Device, *IEEE Trans. on Magn.* vol.29. 1993. pp.1508-1511
- [68] Ishibashi, K.: Eddy Current Analysis by Integral Equation Method Utilizing Loop Electric and Surface Magnetic Currents as Unknowns, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2585-2588.
- [69] Iványi, A.: , A variációszámítás alkalmazása statikus és stacionárius elektromágneses terek megoldására, *Egyetemi doktori értekezés Budapesti Műszaki Egyetem*, 1980. p.105.
- [70] Iványi, A.: A variációszámítás alkalmazása elektrosztatikus síkproblémák megoldására, *Elektrotechnika*, Budapest, vol.71. 1978. pp.21-25.
- [71] Iványi, A.: Application of R -functions to the Determination of Electrical Field in Piecewise Homogeneous Medium, *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering*, Budapest, vol.29. 1985. pp.43-56.
- [72] Iványi, A.: *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997. ISBN 963 05 7416 0
- [73] Iványi, A.: *Magnetic Field Computation with R -functions*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998. ISBN 963 05 7562 0

- [74] Iványi, A.: *R-functions in Electromagnetism*, Technical Report, Ser. Electrical Engineering, Technical University of Budapest, 1993., No. TUB-TR-93-EE08
- [75] Iványi, A.; Bárdi, I.; Gyimesi, M.: Modelling Negative Corona Discharge by Digital Computers, *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*, Aug.25-29. 1986. Budapest, Hungary, Part B, pp.583-585
- [76] Jackson, J.D.: *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1962.
- [77] Kallio, G.A.; Stock, D.E.: Computation of Electrical Conditions Inside Wire-duct Electrostatic Precipitators Using a Combined Finite-element, Finite-difference Technique, *Journal of Applied Physics*, 59, 1986. pp.1799-1806
- [78] Kameari, A.: Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge Elements, *Proceedings of COMPUMAG'89*, Tokyo, Japan, pp.36-39.
- [79] Kantartzis, N.V.; Tsiboukis, T.D.: A Higher-Order FDTD Technique for the Implementation of Enhanced Dispersionless Perfectly Matched Layers Combined with Efficient Absorbing Boundary Conditions, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2736-2739.
- [80] Kantorovich, L.V.; Krylov, V.L.: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
- [81] Kis, P.: Gyűjtősínek árnyékolásának numerikus szimulációja, *Diplomaterv, Budapesti Műszaki Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai kar*, Budapest, 2000., p.103.
- [82] Koltai, M.; Magos, A.: Computation of Electrostatic Fields on Minicomputers by Integral Equations, *29. International Wiss. Koll.* TH Ilmenau, 1984. pp:75-77.
- [83] Kong, J.A.: *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley, New York, 1986.
- [84] Konz, I.: *Portalanítás és porleválasztás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970, p.223.
- [85] Koshlyakov, N.S.; Smirnov, M.M.; Gliner, E.B.: *Differential Equations of Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [86] Kucwaj, J.; Orkisz, J.: Computer Approach to the *R*-functions Method of Solution of Boundary Value Problems in Arbitrary Domains, *Computers and Structures*, vol.22. 1986. pp.1-12.
- [87] Lagarkov, A.N.; Rutkevich, I.M.: *Ionization Waves in Electrical Breakdown of Gases*, Springer-Verlag, New York, 1994. p.231.
- [88] Lavrentyev, M.A.; Ljuszternyk, L.A.: *Variációszámítás*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

- [89] Lean, M.H.: Particle Simulations of Ion Cloud in a Magnetic Field, *Proceedings of COMPUMAG'97*, Rio de Janeiro, Brazil, PA3-13, 1997., pp.75-76.
- [90] Leith, D.: History of electrical precipitator, <http://www.unc.edu/courses/2001spring/envr/245/001/ESPHistory.pdf>
- [91] Leonard, P.J.; Roger, D.: Finite Element Scheme for Transient 3D Eddy Currents, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-24. 1988, pp.90-93.
- [92] Levitov, V.I.: *Electrofilters for Flue Energie*, Moscow, 1980., p.447. (in Russian)
- [93] Lundquist, S.: On the Discharge of Static Electricity: Some Historic Notes with Comments and Remarks, *Journal of Electrostatics*, Vol 16, 1985, pp:221-230.
- [94] Marmin, F.; Clénet, S.; Piriou, F.; Bussy, P.: Error Estimation of Finite Element Solution in Non-Linear Magnetostatic 2D Problems, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.3268-3271.
- [95] Masrdiguian, M.: Electrostatic discharge, understand, simulate and fix ESD problems, *Interference Control Technologies*, Gainesville, Virginia, 1986.
- [96] McDonald, J.R.; Smith, W.B.; Spencer, H.W. III; Sparks, L.E.: A Mathematical Model for Calculating Electrical Conditions in Wire-duct Electrostatic Precipitator Device, *Journal of Applied Physics*, 48. 1977. pp.2231-2243
- [97] Meroth, A.M.; Fischer, U.C.; Levin, P.L.; Schwab, A.J.: On Self-Consistent Electrohydrodynamic Models of the Motion of Charged Particles in an Electrostatic Precipitator, *Proceedings of the 7th IGTE Conference*, Graz, Austria, 1996, pp.198-203.
- [98] Meroth, A.M.; Gerber, T.; Munz, C.D.; Schwab, A.J.: A Model of the Non-Stationary Charge Flow in an Electrostatic Precipitator, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996. pp.130-136.
- [99] Meroth, A.M.; Nicolaus, S.; Levin, P.L.; Schwab, A.J.: Effective Solution of 3D Charge Coupled Problems in Electrostatic Precipitators, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996. pp.137-141.
- [100] Mikhlin, S.G.: *Linear Partial Differential Equations*, Vysshaya Schkola, Moscow, 1977. (in Russian)
- [101] Miller, J.; Schmid, H.J.; Schmidt, E.; Schwab, A.J.: Local Desposition of Particles in a Laboratory-Scale Electrostatic Precipitator with Barbed Discharge Electrodes, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996. pp.325-334.

- [102] Miller, J.; Schmidt, E.; Schwab, A.J.: Improved Discharge Electrode Design Yields Favourable EHD-field with Low Dust Layer Erosion in Electrostatic Precipitators, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996. pp.335-342.
- [103] Minciunescu, P.: Boundary Element Method in Reduction of Cogging Torque, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2905-2908.
- [104] Moore, A.D.: *Electrostatics and its applications*, John Willey and Sons, New York, 1973, p.481.
- [105] Nakata, T.; Takahasi, N.; Fujiwara, K.; Okada, Y.: Improvements of the T- Ω Method for 3-D Eddy Current Analysis, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-24. 1988. pp.94-97.
- [106] Noye, J.: Numerical solution of partial differential equations, *Proceedings of the 1981 Conference on Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Queen's College, Melbourne University, Australia, North-Holland PC. Part I. Invited papers: pp.3-137.
- [107] Preis, K.; Bárdi, I.; Biró, O.; Richter, K.R.; Pávó, J.; Gasparics, A.; Tícar, I.: Numerical Simulation and Design of a Fluxset Sensor by Finite Element Method, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.MAG-34., No.5, Sept, 1998., pp.3475-3478.
- [108] Preston, T.W.; Reece, A.B.J.: Solution of 3-dimensional Eddy Current Problems: The T- Ω Method, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.MAG-18. 1982. pp.486-491.
- [109] Puskás, J.: *Elektrosztatikus porszóró berendezés laboratóriumi vizsgálata*, Diplomaterv, BME, Budapest, 1984.
- [110] Raschovszki, L.: *Elektrofilterek elmélete és villamos berendezései*, Budapesti Felsőoktatási Jegyzetellátó, 1968, 200.
- [111] Reinhart, H.J.: *Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations*, Springer, 1985. Chapter 1. Finite Difference Methods for Boundary-value problems, pp.1-19.
- [112] Rvachev, V.L.: *Geometrical Application of Logical Algebra*, Technika, Kiev, 1967. (in Russian)
- [113] Rvachev, V.L.: *Methods of Logical Algebra in Mathematical Physics*, Naukovo Dumka, Kiev, 1974. (in Russian)
- [114] Rvachev, V.L.: *Theory of R-functions with Applications*, Naukovo Dumka, Kiev, 1982. (in Russian)
- [115] Rvachev, V.L.; Kurpa, L.V.: *R-functions in Problems of Plate Theory*, Naukovo Dumka, Kiev, 1987. (in Russian)
- [116] Rvachev, V.L.; Procenko, V.S.: *Contact Problems of the Theory of Elasticity with Non-classical Domains*, Naukovo Dumka, Kiev, 1977. (in Russian)

- [117] Rvachev, V.L.; Slesarenko, A.P.: *Algebra of Logics and Integral Transformation in Boundary Value Problems*, Naukovo Dumka, Kiev, 1974. (in Russian)
- [118] Rvachev, V.L.; Slesarenko, A.P.: *Logical Algebra and General Description of Boundary Value Problems*, Naukovo Dumka, Kiev, 1976. (in Russian)
- [119] Scharfe, M.: *Electrophotography Principles and Optimatization*, Research Studies Press, John Wiley and Sons , New York, 1984, p.200.
- [120] Silvester, P.P.; Ferrari, R.L.: *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1983.
- [121] Simonyi, K.: *A fizika kultúrtörténete*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1978, p.487.
- [122] Simonyi, K.: *Electronfizika*, Tankönyvkiadó, 1969, p.571.
- [123] Simonyi, K.: *Elméleti Villamosságtan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [124] Sircz, J.: *Porleválasztó berendezések szerelése és karbantartása*, Műszaki Könyvkiadó, 1989.
- [125] Smith, G.D.: *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford University Press, 1965. p.179.
- [126] Smythe, W.R.: *Static and Dynamic Electricity*, McGaw Hill, London, 1968.
- [127] Stratton, J.A.: *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill, London, 1941.
- [128] Stroch, O: *Cleaning of Industrial Gases*, Műszaki Könyvkiadó, 1977.
- [129] Tanaka, M.; Du, Q.; Honma, T.: Boundary Element Method, Current Research in Japan and China, *Proceedings of the 5th Japan-China Symposium on Boundary Element Methods*, Sapporo, Japan, 1-4. June, 1993.
- [130] Teixeira, F.L.; Chew, W.C.: Extension of the PML Absorbing Boundary Condition to 3D Spherical Coordinates: Scalar Case, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.MAG-34., No.5, Sept, 1998., pp.2680-2683.
- [131] Teixeira, F.L.; Chew, W.C.; Oristaglio, M.L.; Wang, T.: Perfectly Matched Layer and Piecewise-Linear Recursive Convolution for the FDTD Solution of the 3D Dispersive Half-Space Problem, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2747-2750.
- [132] Thoma, P.; Weiland, T.: Numerical Stability of Finite Difference Time Domain Methods, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2740-2743.
- [133] Tsuboi, H.; Asahara, T.; Kobayashi, F.; Misaki, T.: Adaptive Triangular Mesh Generation for Boundary Element Method in the Three-Dimensional Electrostatic Problems, *IEEE Trans. On Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.3379-3382.

- [134] Tsukerman, I.: A General Accuracy Criterion for Finite Element Approximation, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998. pp.2425-2428.
- [135] Uman, M.A.: *Introduction to Plasma Physics*, McGraw Hill, New York, 1964., pp.41-71.
- [136] Varga, I: *Áramlástan*, Egyetemi jegyzet, Budapesti Műszaki Egyetem, 1993.
- [137] Vladimirov, V.S.: *Introduction to Theory of Partial Differential Equations*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [138] White, H.J.: *Industrial Electrostatic Precipitation*, Addison-Wesley Publishing Company, 1963, p.376.
- [139] White, H.S.: Review of the State of the Technology, *1st Conference on ESP*, Monterey, California, 1981, pp:16-53
- [140] Wu, Z.; Walters, J.K.; Thomas, D.W.P.: The Spectra of the Corona in an Electrostatic Precipitator, *Proceedings of the VI. International Conference on Electrostatic Precipitation*, Budapest, 18-21 June, 1996., pp.269-274
- [141] Yamamoto, T.: Some Aspects of Efficiency Theory for Electrostatic Precipitators, *2nd Int. Conf on ESP*, Kyoto, 1984, pp.:523-531
- [142] Yuferev, S.; Kettunen, L.: A New Boundary Element Technique for Transient Non-Linear Low Penetration Problems of Multiconductor Systems, *IEEE Trans. on Magn.* vol.MAG-34. No.5, Sept, 1998., pp.2613-2616.
- [143] Zienkiewicz, O.C.: *The Finite Element Method*, McGraw Hill, London, 1977.
- [144] Zienkiewicz, O.C.; Emson, C.; Bettess, P.: A Novel Boundary Infinite Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.19. 1983. pp.393-404.
- [145] Zienkiewicz, O.C.; Morgan, K.: *Finite Elements and Approximation*, John Wiley, New York, 1983.
- [146] Zombory, L.; Koltai, M.: *Elektromágneses terek gépi analízise*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [147] Masuda, S.: Recent Progress in Electrostatic Precipitation, *Electrostatics, Conf. Series of Institute of Physics*, No.27., London, 1975. pp.154-171.
- [148] Barbarics, T.; Kost, A.; Lederer, D.; Kis, P.: Electromagnetic Field Calculation for Magnetic Shielding with Ferromagnetic Material, *IEEE Trans. on Magn.* vol.36. Num.:4 2000. pp.986-989.