

Transzportmodell fejlesztése relativisztikus nehézion-reakciók vizsgálatára

PhD értekezés

2022

Szerző: Balassa Gábor

Témavezető: Dr. Wolf György

Konzulens: Dr. Takács Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi kar
Fizikai Tudományok Doktori Iskola



Wigner Fizikai Kutatóközpont
Részecske- és Magfizikai Intézet
Elméleti Fizikai Osztály, Nehézion-fizikai Kutatócsoport



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Nehézion-ütközések	5
2.1. Az erős kölcsönhatás, magfizika és nehézion-ütközések kapcsolata	5
2.2. Nehézion-ütközések dinamikai modellezése	13
2.3. Elemi hadron-hadron hatáskeresztmetszetek, kvarkónium-állapotok és szerepük a nehézion-ütközésekben	16
3. Statisztikus modell elemi hadron-hadron ütközések leírására	18
3.1. A statisztikus modell általános leírása	19
3.2. Exkluzív/Inkluzív hatáskeresztmetszetek meghatározása és hibabecslés . .	38
3.3. Példák exkluzív és inkluzív reakciókra	43
3.4. Proton-antiproton nyugalmi annihiláció Monte-Carlo módszerrel	51
3.5. c - és b -kvarkokat tartalmazó hadronok keltési hatáskeresztmetszetei	54
3.6. Tetrakvark hatáskeresztmetszetek dikvark közelítésben	67
4. Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) transzport	78
4.1. A BUU-transzportkód általános leírása	78
4.2. Charmónium állapotok közegbeni módosulása	85
4.2.1. Bementi paraméterek a BUU-transzportszimulációkhoz	85
4.2.2. Charmónium tömegeltolások $\bar{p} + Au$ ütközésekben, $E_k = 6-9$ GeV labor kinetikus energiákon.	91
5. Összefoglalás	98
Hivatkozások	103

1. Bevezetés

A nagyenergiás magfizikai kutatások a 80-as évektől kezdve óriási lendületet vettek, amely elsősorban az erős kölcsönhatással kapcsolatos rengeteg új megfigyelt, vagy elméletből megjósolt jelenségnek köszönhető. Ezen kutatások között is kiemelkedő jelentőségűek az úgynevezett nehézion-ütközések, melyek során ionizált, nehéz atommagokat ütköztetnek egymásnak nagy, tipikusan relativisztikus energiákon [1]. Általános esetben a bombázó energiák és az ütköztetett magok is igen széles tartományokon mozoghatnak, melyet az 1. táblázat foglal össze, ahol néhány működő, illetve tervezett nehézion kísérlet került felsorolásra az alkalmazott részecskék, illetve az elérhető energiatarományok feltüntetésével.

	\sqrt{s} [GeV]	Részecskék
RHIC [2]	3 – 500	p,d,Cu,Au,Zr,U,...
SPS [3]	< 450	p,Pb
LHC [4]	200 – 8000	p,Pb
NICA [5]	< 11	* p, d, nehézionok Au-ig
J-PARC [6]	< 6.2	* nehézionok U-ig
FAIR [7]	< 7	* nehézionok és antiproton

1. táblázat. Működő, illetve tervezett nehézion gyorsítók. A csillaggal jelölt sorok a még nem működő gyorsítókat jelölik.

Nehézion-ütközések során igen magas hőmérsékletű, és igen nagy sűrűségű állapot hozható létre [8, 9, 10], mely lehetőséget teremt számos olyan jelenség vizsgálatára is, amely a szokásos hadron-hadron, elektron-positron és egyéb ütközésekben nem lenne lehetséges. Ilyen például az úgynevezett kvark-gluon plazma (QGP) kialakulásának lehetősége [11, 12, 13], melynek létrejöttéhez megfelelően nagy energiasűrűség és hőmérséklet szükséges. Ilyen hőmérsékletek létrehozhatóak laboratóriumi körülmények között is például nehézion-reakciók során, ahol nehéz magokat (vas, ólom, arany,...) ütköztetnek egymással nagy energiákon [15]. Természetesen nehézion-reakciók során a kölcsönhatások számos más tulajdonságát is vizsgálhatjuk, mint például az erősen kölcsönható anyag fázisdiagramját, fázisátmeneteinek tulajdonságait, nemegyensúlyi transzportegyütthatókat, illetve az anyag kollektív viselkedését, hidrodinamikai tulajdonságait. Egy másik igen érdekes terület az erősen kölcsönható anyag állapotegyenletének meghatározása, amely a neutroncsillagok vizsgálatában játszik igen fontos szerepet [16]. Ezeken felül a keletkezett részecskespektrumából, illetve annak energia- és impulzuseloszlásaiból következtetni lehet a részecskék viselkedésére az ütközés során kialakult sűrű közegben, amely értékes információkkal szolgálhat egzotikus részecskék tulajdonságairól [17, 18]. Ezen részecskék vizsgálata segíthet továbbá jobban megismerni az erős kölcsönhatás vákuumstruktúráját is, mely a disszertáció szempontjából is egy igen fontos és érdekes terület. Összességében elmondható tehát, hogy a nehézion-ütközések vizsgálata a fizika igen szerteágazó területeire felhasználható, mint például a részecskefizika, statisztikus fizika, relativisztikus hidrodinamika, illetve asztrofizika.

Jelen dolgozatban a c -, illetve anti- c -kvarkok kötött állapotainak, az úgynevezett charmoniumoknak a nagy sűrűségű közegbeli viselkedését vizsgálom pár GeV/nukleon bombázó energiás antiproton-mag ütközésekben, melynek során becslés tehető a gluonkondenzátum várhatóértékére véges sűrűségeken, amely egy igen fontos jellemzője az

erős kölcsönhatást leíró elmélet, a kvantum-színdinamika (QCD) vákuumstruktúrájának. A kondenzátumok olyan nemperturbatív jellemzői az erős kölcsönhatásnak, melyek fontos szerepet játszanak a hadronok tulajdonságaiban, mint például azok tömege, vagy bomlási szélességei, így ismeretük igen fontos a modern részecskefizika szempontjából. Értékükre nulla hőmérsékleten, és nulla sűrűségeen tudunk becsléseket tenni, azonban véges sűrűségeen jelenleg csakis a mérések adhatnak módszert azok meghatározására. A disszertációban egy olyan módszert adok a gluonkondenzátum mérésére, amely pár év múlva elvégezhető lesz a PANDA/FAIR kísérletben Darmstadt-ban. Ehhez egy nehézion-ütközések leírására kifejlesztett transzportkódot alkalmazok, mellyel a charmónium állapotok tömegeltolását megvizsgálva lehet következtetni a gluonkondenzátum várhatóértékére az ütközésben kialakuló véges sűrűségeken. Az transzportmódszer fontos bemeneti adatai a vizsgált folyamatra jellemző hatáskeresztmetszetek, például a $p + \bar{p} \rightarrow J/\Psi + X$ inkluzív charmóniumkeltési folyamat, melyekre sok esetben nem, vagy csak igen kevés mérési adat létezik. Az ilyen folyamatok hatáskeresztmetszeteinek becslésére a disszertációban kidolgoztam egy statisztikus modellt, mellyel becsülhetőek a transzportszimulációkhoz elengedhetetlen hatáskeresztmetszetek.

Maga a modell az alkalmazott elvekből kiindulva több szempontból is eltér az irodalomban jelenleg ismert módszerektől és akár alternatívát adhat a jelenleg alkalmazott eseménygenerátorokra is. Míg a szokásos statisztikus modellek az egyszerű n-részecskes fázistérintegrálokból kiindulva adnak becslést az egyes folyamatok arányaira, tipikusan nagyobb energiákon, addig a saját modell, tűzlabda folyamatok kaszkádjá segítségével, a rezonanciák bomlási paramétereit, az állapotsűrűségeket, illetve a hadronok kvarktartalmát ún. kvark-kombinatorikai faktorokon keresztül figyelembe véve képes becslést adni exkluzív, illetve inkluzív folyamatok hatáskeresztmetszeteire, akár alacsony energiákon is (pár GeV), amely energiatartomány a transzportszimulációk és a disszertációban bemutatott jelenségek vizsgálata szempontjából is jelentős.

A modellt ezen felül kiterjesztettem az $X(3872)$ lehetséges tetrakvark állapot alacsonyenergiás hatáskeresztmetszeteinek becslésére proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben, amely igen fontos lesz néhány jövőbeli transzportszimuláció során, ahol a tetrakvarkok viselkedését fogjuk vizsgálni nehézion-ütközésekben. Az említett $X(3872)$ részecske vizsgálata azért is igen fontos, mivel mérésekből meghatározott kvantumszámai, illetve tömege alapján nem fér be a szokásos mezon/barion modellbe, így egzotikus állapotként kezelendő. A tényleges struktúrája azonban nem ismert és jelenleg több lehetőséget is vizsgálnak, például dikvark-antikvark kötött állapot, $D^0\bar{D}^{*0}$ mezon-mezon molekuláris állapot, gluon-charmónium hibrid stb. Ahhoz, hogy tényleges döntés szülessen a részecske belső struktúrájáról minél több modellszámítás, illetve mérés szükséges, melyek összehasonlításával a jövőben valószínűleg döntést lehet hozni. Jelen munkában dikvark-antikvark közelítést alkalmazva határoztam meg az $X(3872)$ részecske inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteit alacsony energiás proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben.

A disszertáció felépítése a következő. A 2. fejezetben némileg történelmi sorrendben összefoglalom a nehézion-ütközések megértéséhez szükséges eszközöket és modelleket, ahol első körben az erős kölcsönhatás és a magfizika kapcsolatáról, majd a nehézion-ütközések jelentőségéről, illetve lehetséges modellezési módszereiről ejtek szót. Ezen összefoglaló után a disszertációban két főbb vonalat érintek, ahol megfelelő alfejezetekre bontva mutatom be az elért eredményeket. A 3. fejezetben bemutatok egy saját fejlesztésű statisztikus alapokon nyugvó modellt, amely számos inkluzív és exkluzív hadron-

hadron hatáskeresztmetszet becslését tette lehetővé, melyeket később, mint bemeneti adatokat használtam fel a transzport szimulációkban. Ez a fejezet 6 alfejezetre bomlik, ahol elsőként 3.1-ben a modell általános leírása történik meg, mely után 3.2-ben a modell hibabecslését, majd egy egyszerű módszert mutatok be az inkluzív hatáskeresztmetszetek számítására. Ezek után 3.3-ban néhány példán keresztül bemutatom a modell alkalmazási lehetőségeit inkluzív és egyszerűbb exkluzív folyamatok leírására. A következő 3.4. fejezetben bemutatok egy Monte-Carlo-kódot és annak alkalmazását proton+antiproton nyugalmi annihiláció során létrejött többpionos végállapotok valószínűségének leírására. A 3.5 alfejezetben c -, illetve b -kvarkokat tartalmazó hadronok keltési hatáskeresztmetszeteinek számítását részletezem, míg az utolsó 3.6. alfejezetben a modellt kiterjesztem tetrakvark hatáskeresztmetszetek számítására is, ahol becslést teszek az $X(3872)$ lehetséges tetrakvark állapot alacsonyenergiás inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteire is proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben. Ezek után a 4. fejezetben bemutatok a Boltzman-Uehling-Uhlenbeck transzportmodellt (BUU), amely képes a nehézion-ütközések során kialakult nemegyensúlyi rendszerek dinamikai modellezésére. Ez a fejezet két alfejezetre oszlik, ahol először 4.1-ben a BUU-modell általános leírását, míg 4.2-ben annak alkalmazását charmonium állapotok közegbeni viselkedésére $\bar{p} + Au$ ütközésekben adom meg. Végezetül, az 5. fejezetben összefoglalom a disszertáció lényegi részeit és felvázolom azon további lehetséges irányokat, ahol az itt leírt eredmények a jövőben közvetlen hasznosíthatóak lesznek.

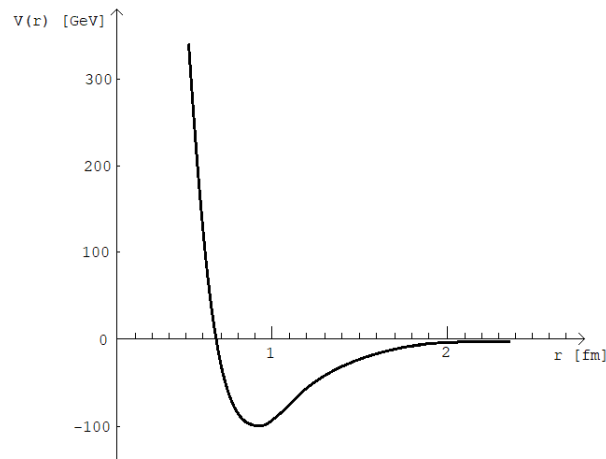
2. Nehézion-ütközések

Ebben összefoglalom azokat az erős kölcsönhatással és nehézion-ütközésekkel kapcsolatos fogalmakat, melyek elengedhetetlenek lesznek a továbbiak megértéséhez. A négy elemi kölcsönhatás, az erős, gyenge, gravitációs, illetve elektromágneses kölcsönhatások közül ez a disszertáció az erős kölcsönhatással foglalkozik, így a következőkben az kerül részletesebb bemutatásra.

2.1. Az erős kölcsönhatás, magfizika és nehézion-ütközések kapcsolata

Az erős kölcsönhatás első matematikai leírását Yukawa kísérelte meg 1935-ben, aki feltette, hogy a nukleonok (protonok, neutronok) közötti kis hatótávolságú, ám annál nagyobb erejű kölcsönhatását a protonok és neutronok között kicserélt részecskék az ún. pionok közvetítik, melyek tömegére a határozatlansági reláció alkalmazásával becslést is tudott tenni [19]. Mivel ez a kölcsönhatás felelős az atommagok kialakulásáért, ezt az erőt magerónak nevezték el, amely mint később kiderült az erős kölcsönhatásnak és az azt leíró elméletnek egy nagyon fontos következménye. A magerók legfontosabb tulajdonságai között szerepelnek a következők: (1) csakis hadronok között lépnek fel, (2) egy bizonyos távolság (≈ 0.4 fm) alatt erősen taszító, míg azon felül vonzó jellegű, (3) töltésszimmetrikus, (4) spinfüggő, (5) nemcentrális, tenzor jellegű [20, 21]. Ezekre a tulajdonságokra elsősorban ütközési kísérletekből lehetett következtetni, amihez protonokat, neutronokat, illetve a proton és neutron kötött állapotát, deuteronokat alkalmaztak [22]. Ez utóbbi különösen alkalmas volt a magerók, azon belül is a magpotenciál vizsgálatára. Természetesen, mint az a kísérleti eredmények értelmezésekor kiderült az egyszerű egypioncserés modell nem képes az összes tulajdonság, mint például a kis távolságokon érzett taszító jelleg magyarázatára. Később az erős kölcsönhatás modern elméletének, a kvantum színdinamikának (QCD) megalkotása után az is egyértelmű lett,

hogy az ilyen alacsonyenergiás folyamatok megértése közel sem triviális. Egy tipikus magpotenciált szemléltet a 1. ábra. Manapság a magpotenciál matematikai leírására



1. ábra. A nukleon-nukleon potenciál sematikus ábrája.

többféle parametrizációt alkalmaznak [23, 24], melyeket a Schrödinger-egyenlet megoldásával illesztnek a kísérletileg mért tulajdonságokhoz, mint például szórási hatáskeresztmetszetekhez, fázistolásokhoz, illetve a deuteron kötési energiájához.

Az 1950-es évektől egyre több addig ismeretlen részecskét detektáltak ütközési kísérletekben, melynek kategorizálására a kvarkmodell (Murray Gell-Mann, 1964) adott lehetőséget [25]. A kvarkmodell szerint a hadronok, azaz azon részecskék, amelyek részt vesznek az erős kölcsönhatásban, nem fundamentális részecskék, hanem vegyérték kvarkokból és antikvarkokból épülnek fel, melyek egyértelműen meghatározzák azok kvantumszámait, mint például töltés, barion szám, illetve spin. Alapvetően két hadroncsaládot különböztetünk meg, a barionokat, melyek három kvark kötött állapotai, illetve a mezonokat, melyek egy kvark és egy antikvark kötött állapotai. Természetesen léteznek egyéb, egzotikus állapotok is, melyekről később több szó is esik. Az erős kölcsönhatás mai modern elmélete a kvarkmodellre épülő kvantum-színdinamika [26], amely feltételezi, hogy a hadronok elektromosan töltött, feles spinű kvarkokból épülnek fel, melyek rendelkeznek egy extra, színtöltésnek nevezett szabadsági fokkal. A modell 6 különböző típusú (ízű) kvarkot, illetve antikvarkot tartalmaz, amelyek az $SU(3)_c$ fundamentális ábrázolásaiban élnek, azaz 3 különböző kvarkot/antikvarkot különböztethetünk meg minden típusból. Ezt a szabadsági fokot nevezzük színtöltésnek. A kvarkokhoz három színt (r,g,b), míg az antikvarkokhoz három antiszínt ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$) rendelünk. Minden kvark, mint színes objektum, kölcsönhathat a többi színes objektummal, amely kölcsönhatást az elmélet mértékbozonjai, a gluonok közvetítik. A gluonok matematikailag az $SU(3)_c$ csoport adjungált ábrázolásaiban élnek, vagyis 8 darab gluont különböztethetünk meg. Az elmélet nemábeli (nem kommutatív) volta miatt a gluonok is rendelkeznek színtöltéssel így kölcsönhathatnak egymással, ami nagyban bonyolítja az elméletet. Az elemi kvark és gluon összetevők paramétereit foglalja össze a 2. táblázat.

Típus	Íz	Tömeg	Töltés	spin	szín
kvark	u	2.2 MeV	2/3	1/2	r,g,b
kvark	d	4.7 MeV	-1/3	1/2	r,g,b
kvark	s	96 MeV	-1/3	1/2	r,g,b
kvark	c	1.28 GeV	2/3	1/2	r,g,b
kvark	b	4.18 GeV	-1/3	1/2	r,g,b
kvark	t	173.1 GeV	2/3	1/2	r,g,b
gluon	-	0	0	1	$r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{b}, g\bar{r}, b\bar{r}, b\bar{g}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$

2. táblázat. Kvarkok és gluonok összefoglaló táblázata.

Matematikailag a modell egy olyan nemábeli-mértékelmélet, amely lokális $SU(3)_c$ szimmetriával rendelkezik, és a következő Lagrange-sűrűséggel jellemezhető:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_q \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi_q, \quad (1)$$

ahol $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$ a gluon térerősség tenzor, $D_\mu = \partial_\mu - ig T_a \mathcal{A}_\mu^a$ a kovariáns derivált, ψ_q a ($q=u,d,s,c,b,t$) ízű kvark mezőt jellemző spinor, m_q a kvarktömeg, továbbá f_{abc} az $SU(3)$ csoport struktúra együtthatóit, míg T_a az $SU(3)$ csoport generátorait jelölik, ahol $a, b, c = 1..8$. A térerősség tenzorban, illetve a kovariáns deriváltban szereplő \mathcal{A}_μ^a mennyiségek a már korábban említett gluon mezők, melyek az $SU(3)_c$ csoport adjungált ábrázolásában élnek, így $a = 1..8$ darab van belőlük. Ezzel ellentétben a kvarkok az $SU(3)_c$ csoport fundamentális reprezentációi, így az i és j indexek 1..3-ig futnak, melyek az adott színállapotot jelölik. Megfigyelések szerint csakis színtelen hadronok létezhetnek, vagyis kvarkok és antikvarkok olyan kötött állapotai, melyek színszinglettek. Az erős kölcsönhatásnak ezt a tulajdonságát nevezik színbezárásnak, amely nagyban leszűkíti a lehetséges kötött állapotok számát. Ilyenek például a már említett egész spinű mezonok, illetve a feles spinű barionok, melyek csoportelméleti megfontolásokból a színtriplet ábrázolások direkt szorzataival fejezhetőek ki. A mezonok esetében egy triplet és antitriplet ábrázolás direkt szorzata felbontható egy színszinglet és egy oktett ábrázolás direkt összegére, azaz $3 \otimes \bar{3} = 1 + 8$. Barionok esetében három kvark, azaz három színtriplet ábrázolás direkt szorzatát véve kapjuk, hogy $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 + 8 + 8 + 10$, azaz szintén létezik színszinglet ábrázolás. A kvantum színdinamika szerint azonban egyéb, egzotikusabb állapotok is létrejöhetnek, mint például a két kvarkból és két antikvarkból álló tetrakvarkok [27], vagy a 4 kvarkból és 1 antikvarkból álló penta-kvarkok [28]. Tekintve, hogy az elmélet megengedi a gluonok önkölcsönhatását is, elvben semmi sem akadályozza meg, hogy a gluonok is kialakíthassanak kötött állapotokat az ún. gluonlabdákat [29], vagy akár kvarkokkal kölcsönhatva egyfajta gluon-kvark hibrid állapotot hozzanak létre [30]. A modell nemlineáris jellege miatt az adott rendszer dinamikai leírása igen bonyolult is lehet, így különösképpen az egzotikus állapotoknál igen nehéz pontos képet felállítani azok struktúrájáról. A 3.6. fejezetben erre láthatunk majd példát a tetrakvarkok esetében, ahol a tetrakvarkokat az ún. dikvark-antikvark közelítésben vesszük figyelembe.

A kvantum színdinamika, mint nemábeli mértékelmélet egyik nagyon fontos tulajdonsága az ún. aszimptotikus szabadság, amely azt mondja ki, hogy a kölcsönhatás erőssége az energiaskála növelésével csökken, amely kellően nagy energiákon lehetőséget

teremt perturbációs számítás alkalmazására [31]. Az aszimptotikus szabadság a (2). kifejezésben szereplő $\alpha_s(Q^2)$ csatolási állandó Q^2 skála függőségének a következménye, mely skálafüggést a renormalizációs csoportegyenlet segítségével lehet meghatározni [32]. A 2. ábrán látható Feynman-diagrammok meghatározása ¹, majd a renormalizációs csoportegyenlet megoldása után, legalacsonyabb 1-hurok rendben a csatolás skálafüggésére az alábbi kifejezés kapható:

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g(Q^2)^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad (2)$$

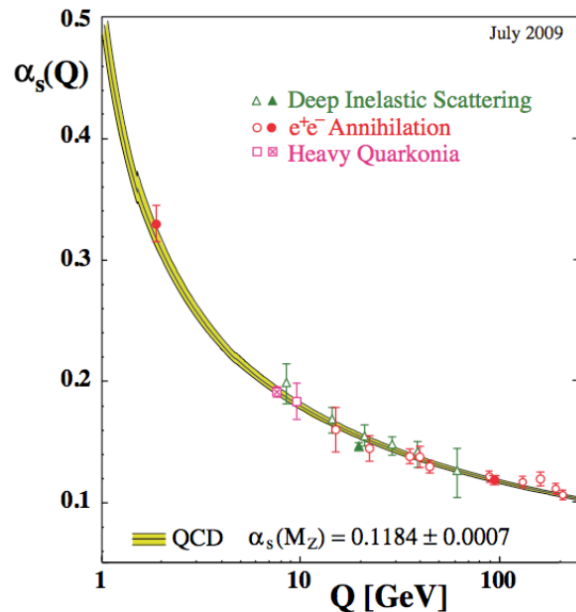
ahol n_f a kvark-ízek számát, Q^2 az adott folyamat skáláját, míg Λ_{QCD} a QCD skála-paraméterét jelöli. A Λ_{QCD} skála-paraméter jelzi azt a határt, ahol a nemperturbatív effektusok elkezdnek domináns szerephez jutni. Értékét kísérletekből, például a Z-bozon tömegének méréséből lehet meghatározni. Tipikus értéke $\Lambda_{QCD} \approx 200 - 300$ MeV körül van, ami függ az alkalmazott renormalizációs eljárástól is.



2. ábra. Feynman-diagrammok a QCD csatolás futásának számításához.

A csatolási állandó skálafüggését mutatja a 3. ábra, amin egyértelműen látszik, hogy kis energiaskálán a csatolás nagysága lehetetlenné teszi a perturbációs számítás alkalmazását, vagyis ezen energiákon az elmélet nemperturbatív, így a nemlineáris egyenletek bonyolultsága miatt igen nehéz egzakt megoldásokat találni adott problémákra. Ilyen kis energiás problémák például a magfizikai folyamatok, kötött állapotok létrejötte, bomlási állandók meghatározása, vagy éppen a színbezárás jelensége.

¹Háttérmező-mértékben és 1-hurok rendben csakis a 2. ábrán szereplő két gráf ad járulékot.



3. ábra. Az erős kölcsönhatás csatolásának skálafüggése. Az ábra [33]-ból származik.

Természetesen léteznek olyan módszerek, melyek alkalmasak a nemperturbatív régiók vizsgálatára is, ám ezek legtöbb esetben vagy numerikusan igen komplex problémákat adnak, vagy valamilyen közelítést, egyszerűsítést alkalmaznak, így csakis egy-egy jól definiált problémára alkalmazhatóak. Ilyenek például a királis perturbációs számítás (ChPT) [34], a nehézkvark effektív térelmélet (HQFT) [35], vagy a Nambu-Jona-Lasinio (NJL) modell [36, 37]. Ezen modellek mindegyike egy adott energiaskálán, adott problémákra képes kvantitatív eredményeket adni és tipikusan valamilyen a kvantum-színdinamika Lagrange-sűrűségében szereplő paraméter szerinti kifejtést, illetve annak valamilyen szimmetriájának, vagy közelítő szimmetriájának a felhasználását jelenti. A királis perturbációs számítás például azt a tényt használja ki, hogy ha az u és d kvarkok tömege elhanyagolhatóan kicsi, akkor az $m_{u,d} \rightarrow 0$ határesetben az $SU(2)_L \times SU(2)_R$ királis szimmetria egzakt. A királis szimmetria spontán sérülése esetén megjelenik három tömegtelen Goldstone bozon, melyeket a pionokkal azonosíthatunk. A valóságban a kvarkok tömeges volta miatt a királis szimmetria nem egzakt, így a Goldstone bozonok pseudo-Goldstone bozonokká válnak és tömeget nyernek. Az így kialakított elméletben a szabadsági fokok már nem a kvarkok, illetve gluonok lesznek, hanem azok kötött állapotai, a hadronok, így a modell az azok közötti alacsonyenergiás kölcsönhatások leírására alkalmas. Természetesen minden effektív modell tartalmaz szabad paramétereket, mint például kvark tömegek, csatolási állandók, melyeket kísérletek felhasználásával illeszteni kell.

Egy másik módszer az erős kölcsönhatás alacsonyenergiás régiójának vizsgálatára a QCD összszabály módszer [38, 39, 40], amely diszperziós relációk segítségével képes bizonyos összefüggések felállítására, melyekkel kapcsolatot létesíthetünk a kvark szabadsági fokok, illetve a hadronikus szabadsági fokok között. Ezen összszabályokban megjelennek bizonyos, kondenzátumoknak nevezett Lorentz-invariáns mennyiségek, melyek az erős kölcsönhatás vákuumállapotát jellemzik, így igen fontos szerepük van olyan tulajdonságok meghatározásában, mint például a hadrontömegek, vagy éppen a bomlási állandók. Az alacsony dimenziós kondenzátumok közül néhány például a (királis) kvark

$\langle q\bar{q} \rangle$, illetve a gluonkondenzátumok $\langle GG \rangle$. A királis kondenzátum véges értéke okozza a királis szimmetria spontán sérülését, amely többek között alkalmazhatóvá teszi a korábban említett királis perturbációs számítást is. Az összegszabály módszer során az elsődlegesen vizsgált mennyiség a (3). kifejezésben látható korrelátor, amely két különböző módon, hadron-, illetve kvarkszinten is kifejezésre kerül az ún. $\eta(x)$ interpoláló mezők segítségével:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \eta(x) \bar{\eta}(0) | 0 \rangle. \quad (3)$$

Itt $\eta(x)$ a kvark mezőkből felépülő interpoláló mező, míg $|0\rangle$ az alapállapotot jelöli, amely lehet vákuum, vagy akár véges sűrűségű maganyag. Az interpoláló mező úgy kell felépülnön, hogy annak legyen átfedése a hadronállapottal, azaz $\langle \eta | \text{hadron} \rangle \neq 0$, amely megköveteli, hogy $\eta(x)$ a helyes kvantumszámokkal rendelkezzen. Egy adott hadronhoz természetesen több interpoláló mező is tartozhat, melyek közül például a nukleonra egy lehetőség az Ioffe által bevezetett nukleonáram [41]:

$$\eta(x) = \epsilon_{abc} \left[\bar{u}^a(x) C \gamma_\mu u^b(x) \right] \gamma_5 \gamma^\mu d^c(x), \quad (4)$$

ahol a, b, c indexek a kvarkok színét, míg u, d a kvarkok ízet jelölik. Az ϵ_{abc} tenzor szerepe, hogy a végállapot színsinglett legyen. A fenti áram fizikailag egy $[uu]$ dikvark állapot összekapcsolódását jelenti egy $[d]$ kvarkal, kiadva a proton $[uud]$ kvark struktúráját, illetve helyes kvantumszámait. Ezen a szinten egy operátorszorzat-kifejtés alkalmazásával megjelennek a már említett kondenzátumok. A kapcsolat a hadronikus szektorral úgy alakítható ki, hogy a $\eta(x)$ mezőhöz nukleonspinorokat rendelünk nem törődve azok kvark struktúrájával, majd ebből diszperziós relációk segítségével kifejezzük a hadron szintű fenomenologikus korrelátort. A két leírás két teljesen más energiaskálát jelent, ám feltételezzük, hogy a kvark, illetve hadron szintű leírásnak van egy közös régiója, melyet a jobb konvergencia tulajdonságok elérése érdekében Borel-transzformáció segítségével egyeztetünk [42]. Tekintve, hogy kvark oldalon az operátorszorzat-kifejtésnek megfelelően megjelennek az érdekes kondenzátumok, illetve a hadron oldalon megjelennek olyan mérhető mennyiségek, mint például hadrontömegek, a módszer képes olyan relációk felállítására, amely kapcsolatot létesít ezen mennyiségek között. A nukleon tömegére felállított egyszerű összegszabályt mutat a (5). kifejezés, amely kapcsolatot létesít a nukleon tömege, illetve a királis kondenzátum között.

$$M_N \approx -\frac{8\pi^2}{M^2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle. \quad (5)$$

Itt M_N a nukleon tömege, $M \approx 1$ GeV pedig a Borel-transzformáció során bevezetett paraméter. Néhány kondenzátum mérésekből meghatározott vákuumvárhatóértékei a következők [43]:

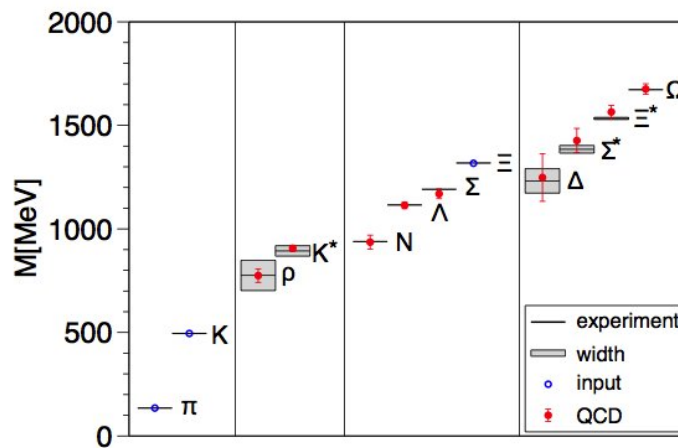
$$\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle \approx -(0.24 \text{ GeV})^3 \quad (6)$$

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \bar{q}q | 0 \rangle \approx 0.012 \text{ GeV}^4 \quad (7)$$

Megjegyzésre érdemes az a tény, hogy a királis kondenzátum egy jó rendparamétere lehet a királis szimmetria helyreállításának [44], mely szerint a királis kondenzátum a hőmérséklet növelésével csökken, majd $T = T_c \approx 150 - 200$ MeV kiritikus hőmérséklet elérésével eltűnik. A királis kondenzátum eme tulajdonságára rácsstérelméleti [45], illetve

effektív modell számításokból következtetnek [46]. nehézion-ütközések során elérhetőek ilyen hőmérsékletek, amely lehetőséget teremthet a QCD ezen, igen érdekes részecskefizikai tulajdonságának a vizsgálatára. A QCD vákuumstruktúrájának, illetve alacsonyenergiás folyamatainak elméleti vizsgálatára ezen felül léteznek még más érdekes modellek is, melyek képesek magyarázni egy-egy kísérleti eredményt például állapotsűrűségeket, ütközési folyamatokat, bomlási állandókat, vagy hadrontömegeket. Ilyenek például a Statisztikus Bootstrap Modell [47], a kvarkok, illetve nukleonok zsákmodellje [48, 49], a Regge-modell [50], az instanton modell [51].

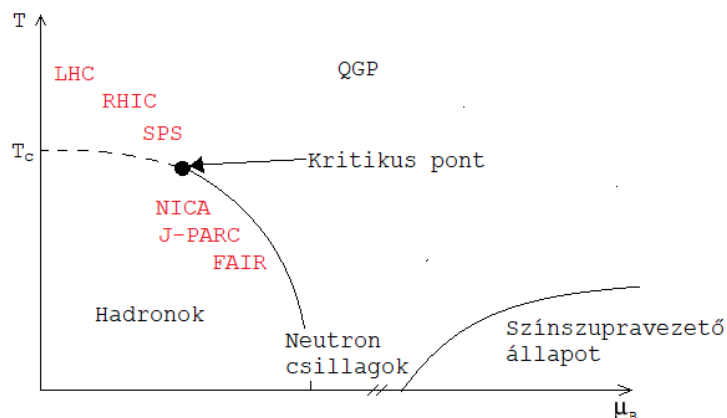
Az említetteken túl egy igen fontos módszer az ún. rácstérelmélet, melynek a kvantumszindinamikára alkalmazott változatát nevezzük rác-QCD-nek [52]. Ez a nemperturbatív módszer egy diszkretizált tér-idő rácson oldja meg a téregyenleteket, numerikusan, Monte-Carlo módszerrel. Ehhez óriási számítási kapacitás szükséges és még a mai technológiával is hónapokig tarthat egy-egy paraméter pl. hadrontömeg meghatározása. A módszernek egyéb hátulütői is léteznek, mint például az ún. előjel probléma [53], amely miatt a módszer jelenlegi matematikai megfogalmazásában nem alkalmas véges sűrűségű, illetve véges kémiai potenciálú számításokra. A hátrányokat mégis felülmúlja az a tény, hogy megoldható néhány olyan probléma, amely máshogy nem lenne hozzáférhető csakis közelítések, illetve egyéb illesztendő paraméterek alkalmazásával. Numerikus módszer lévén a rácstérelmélet is alkalmaz közelítéseket névszerint a rácállandót, melynek határesetét véve (kontinuum limit) bízunk abban, hogy megkapjuk a folytonos elmélet eredményeit. A módszer működőképességét jelzi, hogy a rác-QCD módszerrel például igen jó hibahatáron belül meg lehet határozni néhány hadron tömegét [54], melyet a 4. ábra szemléltet. kiszámíthatóak továbbá a különböző kondenzátumok vákuum várhatóértékei is, mint például a már említett királis kondenzátumé [55], de ugyanígy számolhatóak akár ezen mennyiségek hőmérséklet függései is nulla kémiai potenciál környékén.



4. ábra. Rács-QCD-ből származtatott hadrontömegek [54]-ből.

Egy nagyon fontos és érdekes alkalmazási területe a rác-QCD-nek az erősen kölcsönható anyag fázisdiagrammjának feltérképezése, amely megadhatná azon hőmérséklet-sűrűség párokat, melyeken fázisátalakulás történik. Ez sajnos az említett előjel probléma miatt véges sűrűségeken nem lehetséges, viszont nulla kémiai potenciálon léteznek számítások, melyek például a királis fázisátalakulás hőmérsékletét $T_c \approx 150$ MeV környékére helyezik [56].

A fázisdiagram feltérképezésének egyik kísérleti módszere a nehézion-ütközések alkalmazása, melyek során különböző magokat ütköztetnek egymással nagy energián. Az ütközések során igen nagy hőmérséklet, illetve igen nagy sűrűség érhető el, nagyságrendileg $T \approx 100 - 200$ MeV, illetve $\rho \approx (1 - 10)\rho_0$, ahol $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ a normál magsűrűség. A konkrét hőmérséklet-, illetve sűrűségértékeket nem lehet előre beállítani, viszont transzportszimulációkból lehet rájuk következtetni, illetve modellszámításokból közvetve meghatározhatóak [57]. Jelenleg ezzel a módszerrel próbálják különböző helyeken, különböző magokkal és bombázó energiákkal meghatározni a kvark-gluon plazma átmenetének tulajdonságait, ám jelen pillanatig (2022) nincsen minden eldöntő bizonyíték az átmenet tulajdonságainak pontos alakjára. Az egyes kísérletek az ütközési energiától, illetve ütköztetett részecskéktől függően más-más kémiai potenciálú, illetve hőmérsékletű régiókat képesek tesztelni, melyről az 5. ábra mutat egy sematikus képet, figyelembe véve a jelenleg működő, illetve a tervezett gyorsító komplexumokat is. Látható továbbá az is, hogy az új gyorsítók egy igen fontos feladata a hadron-QGP fázisátalakulás kritikus pontjának megtalálása lenne, amelyhez tartozó nagyobb bariónikus sűrűségek, pár GeV/nukleon-os tömegközépponti energiás ütközésekkel elérhetőek lehetnek. A disszertációban a nehézion-ütközéseknek egy másik alkalmazási területét,

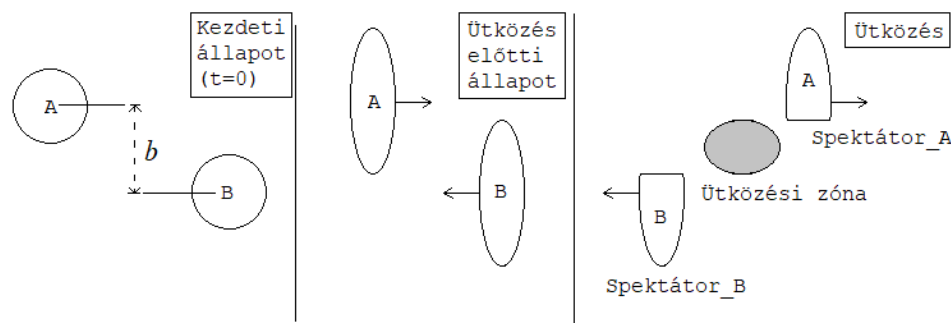


5. ábra. A különböző gyorsítók által elérhető kémiai potenciál-, illetve hőmérséklet-tartományok.

nevezetesen a vektormezonok (1-es spinű és páratlan paritású állapotok) sűrű közegbeni módosulásának vizsgálatát tűztem ki célul, melyről a 4. fejezetben lesz részletesen szó. Előzetesen azonban megjegyzésre érdemes az a tény, hogy az ilyen részecskék közegbeni tömeg módosulásának vizsgálatával értékes információ nyerhető a már korábban említett kondenzátumok, esetünkben a gluonkondenzátum értékéről [58]. A fentiekből következik, hogy a nehézion-ütközéseknek a jövőben, még egy jó darabig nagy szerepük lesz mind asztrofizikai, mind a magfizikai, mind részecskefizikai kutatásokban, így ezen ütközések minél jobb megértése nélkülözhetetlen az eredmények értelmezésében. A következő alfejezetben bemutatásra kerül néhány olyan módszer, melyek képesek nehézion-ütközések modellezésére. Tekintve, hogy a disszertáció nagyban épít a nemegyensúlyi transzport módszerekre, így ebben az összefoglalóban is ezen módszerek jutnak nagyobb szerephez.

2.2. Nehézion-ütközések dinamikai modellezése

Nagyenergiás nehézion-ütközések elméleti vizsgálata során az elsődleges célunk a kísérletileg mért paraméterek, részecskespektrumok, energia-, és impulzuseloszlások helyes magyarázata. Nagy energiák alatt jelen esetben tipikusan azt értjük, hogy az ütközési folyamatok relativisztikusak, azaz $\sqrt{s} > \text{GeV}$, amely esetekben relativisztikus modellek alkalmazása szükséges. Egy-egy nehézion-reakció során, főleg nagyobb magok ütköztetése esetén, rengeteg nukleon (proton és neutron) hathat kölcsön egymással, vagyis alapvetően egy relativisztikus soktest probléma megoldása a cél. Egy tipikus ütközési elrendezést mutat a 6. ábra, ahol a két mag a z-tengely mentén közelít egymás felé. Ezt a tengelyt nevezzük ütközési tengelynek, melynek mentén a laborrendszerből nézve a relativisztikus sebességek miatt a kezdeti gömbszimmetria egy ellipszoidba torzul. Az ábrán jelölt b paraméter az ütközés impaktparamétere, amely megadja, hogy a két mag mennyire fogja átfedni egymást az ütközés során. Ha $b = 0$, akkor az ütközést centrálisnak, míg ha $b \approx b_{max}$, akkor periferiálisnak nevezzük.

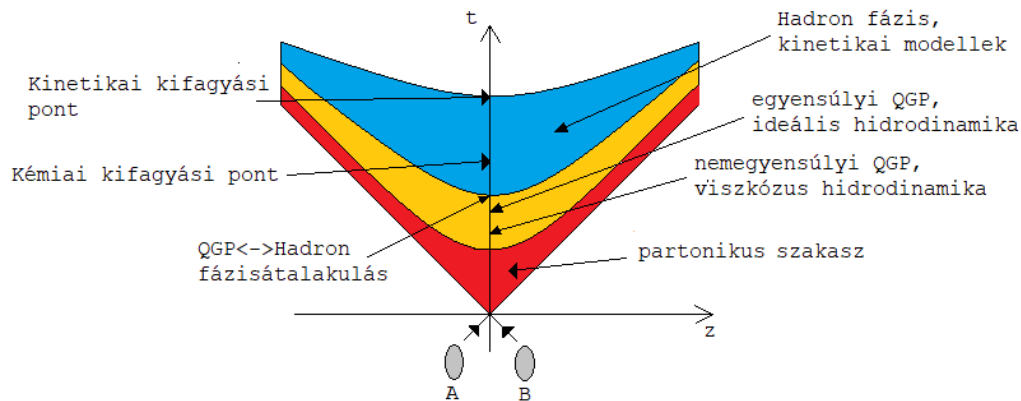


6. ábra. Egy tipikus nehézion-ütközési elrendezés.

A bal oldali ábrán az ütközés előtti állapot, míg a jobb oldali ábrán az ütközés utáni állapot jelenik meg, ahonnan jól látható, hogy nem feltétlenül vesz részt minden nukleon az ütközésben. Ezeket a nukleonokat, amelyek közvetlen nem ütköznek a másik mag nukleonjaival, ám a teljes kölcsönhatásban például a mag átlagterének a kialakításában részt vesznek, spektátoroknak, míg azokat a nukleonokat melyek ütköznek is, résztvevőknek nevezzük. A középső telített zónát nevezzük ütközési zónának. Ez az a része a nehézion-ütközéseknek, ahol inelasztikus ütközések során új részecskék, mint például pionok, kaonok, hyperonok stb... keletkezhetnek. Az ütközések relativisztikus leírásának egy nagyon fontos paramétere a rapiditás [59], melynek definíciója:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z c}{E - p_z c}, \quad (8)$$

ahol p_z a z-tengely irányú impulzus, melyet longitudinális impulzusnak nevezünk, E az energia és c a fénysebesség. A rapiditás jelentősége, hogy Lorentz-transzformációk során additívan transzformálódik, szemben a sima sebességgel, így a relativisztikus számolások, például boost a tömegközépponti- és a laborrendszerek között egyszerűbbé válik. Az ütközések során keletkezett részecskéknek sokszor a rapiditáseloszlását vizsgáljuk, amelynek alakja alkalmas például a kezdeti energiasűrűség meghatározására [60]. Általános esetben egy ultrarelativisztikus nehézion-ütközésnek időben és térben több szakaszát különböztethetjük meg, melyet a 7. ábra mutat be, ahol a rendszer időfejlődését az ütközési tengely függvényében ábrázoltam.



7. ábra. Nehézion-ütközések időfejlődésének sematikus ábrája.

Az ultrarelativisztikus ütközések kezdeti szakaszában megkezdődnek a partonok kemény ütközései, melynek során kialakulhatnak a jet-ek, illetve a c és b kvarkokat tartalmazó nehéz hadronok. Elméleti jósálatok szerint itt kialakulhat egy nemegyensúlyi, úgynevezett GLASMA állapot [61], amelyet szaturált, erős, klasszikus gluon terek jellemznek. A partonikus szakasz adja meg a következő rész kezdeti feltételeit, mint például kezdeti eloszlások, nyomás, sebességek. Ezek után egy táguló szakasz következik, ahol megjelenhet a kvark-gluon plazma, azaz a kvarkok és gluonok nemegyensúlyi kavalkádja, mely a kvarkok és gluonok közötti kölcsönhatások következtében fokozatosan tartanak egy egyensúlyi állapotot felé. A kvark-gluon fázis nemegyensúlyi állapota modellezhető viszkózus hidrodinamikai modellekkel, míg a lokális egyensúlyi állapot ideális hidrodinamikával írható le [62, 63]. Mérések erős anizotrópiát mutattak ki a keletkezett részecskék impulzusspektrumában, amely magyarázható a viszkózus hidrodinamikai szakaszban elért térbeli anizotrópiával, mely az ideális hidrodinamikai szakaszban a keltett részecskék impulzusbeli anizotrópiájává konvertálódik [64, 65, 66]. Elérve egy kritikus hőmérsékletet, megtörténik a QGP-hadron fázisátalakulás, melynek során a rendszer elsődleges szabadsági fokai a színtelen hadronok lesznek [67]. A fázisátalakulás után a hadronok közti ütközési ráta gyorsan csökken, amely lehetőséget teremt a kinetikus módszerek alkalmazására a hidrodinamika modellek helyett. Ebben a szakaszban megkülönböztethető két kifagyási pont, a kémiai, illetve a kinetikai kifagyás, melyekhez két karakterisztikus hőmérséklet, T_μ , illetve T_k tartozik [68]. A kémiai kifagyási pont után beáll a kémiai egyensúly, majd a hadronok rugalmas ütközései lévén egy rövid időn belül a rendszer eléri a kinetikai kifagyási pontot is, mely után a hadronok szabadon tovább repülve érik el a detektorokat. Mérések szerint a kémiai kifagyás időben előbb történik meg, mint a kinetikai, amely azt is jelenti, hogy $T_\mu > T_k$. Nem ultrarelativisztikus, de még kellően nagyenergiás esetekben ($\sqrt{s} \approx 1 - 10$ GeV/nukleon) elegendő a hadronikus szakasz vizsgálata, amely jelentősen egyszerűsíti az ütközések dinamikai modellezését. Az általunk alkalmazott transzportmódszer is alapvetően ezekre az energiákra lett kifejlesztve, ahol a rendszer elsődleges szabadsági fokai a hadronok, azaz a mezonok, barionok, illetve egyéb egzotikus hadronok lesznek.

A fentiekből következik, hogy egy-egy ultrarelativisztikus nehézion-ütközés teljes dinamikai fejlődését nem lehet csupán egy modellel leírni, ahhoz több modell együttes alkalmazása szükséges. A nehézion-ütközések tervezése során egy tipikus cél a nagy

sűrűségű szakasz elérése, melyhez nem szükséges ultrarelativisztikus energiák alkalmazása, hiszen modellszámítások alapján pár GeV/nukleon tömegközépponti energián is már igen nagy $\rho \approx (1 - 5)\rho_0$ sűrűségek érhetőek el [69]. Ezen energiákon várhatóan még nem alakul ki a kvark-gluon plazma, és a rendszer alapvető szabadsági fokai a hadronok lesznek, így a kinetikus modellek alkalmasak lehetnek a rendszer teljes dinamikai fejlődésének leírására [70, 71, 72]. A kinetikus modellek tekintetében ütközési energiától függően két fő vizsgálati módszer létezik. Viszonylag kis energiákon (pár GeV/nukleon) elég csak a hadronikus szabadsági fokokat figyelembe venni, míg nagyjából 10 GeV/nukleon bombázó energia felett a partonok is szerephez jutnak. Ez utóbbira egy gyakran alkalmazott modell az Ultrarelativisztikus Kvantum Molekuláris Dinamika (UrQMD) kód [73], amely képes a partonikus, illetve a hadronikus szabadsági fokok modellezésére is. A jelen dizertációban alkalmazott BUU-transzportmodellben csupán hadronikus szabadsági fokok vannak, vagyis az jelen állapotában csak pár GeV/nukleon bombázó energián alkalmazható biztonsággal. A modellről és lehetőségeiről részletes leírás található a III.fejezetben. A gyakorlatban a transzportkódok képesek megadni az ütközések utáni részecskespektrumot, azok energia-, impulzus- és szögeloszlásait. Ezen információkat később felhasználják detektorszimulációs programokban, a detektorok tervezéséhez, illetve finomhangolásához. Egy ilyen, széleskörben alkalmazott szimulációs program a GEANT [74], melyet az összes nagyobb gyorsítónál alkalmaznak.

Azokat a modelleket, melyek képesek egy-egy ütközési eseményt szimulálni és megadni a keletkezett részecskék típusát, számát, energiaeloszlását, illetve egyéb tulajdonságait, eseménygenerátoroknak nevezzük. Az ütközések fajtái igen változatosak lehetnek pl. mag-mag, proton-mag, antiproton-mag, proton-antiproton, elektron-proton stb. A bevezető részben említetteknek megfelelően az ütközési energiát tekintve is igen nagy skálán lehet mozogni, hiszen a pár GeV-es ütközésektől, egészen a TeV-es skáláig bezárólag léteznek kísérletek, melyeket magyarázni kívánunk a különböző modellekkel. Mint az a korábbiakból kiderült a mag-mag ütközések során kialakuló nemegyensúlyi rendszer miatt, a nehézion-ütközéseket tipikusan valamilyen kinetikus modellel modellezzük. Természetesen más módszerek is léteznek a részecskespektrumok, energiaeloszlások stb. számítására. Ilyenek például a statisztikus modellek [75, 76, 77], melyek feltételezik, hogy a rendszerben már beállt a kémiai egyensúly, így a statisztikus fizika módszerei alkalmazhatóak. Az egyik kiemelkedően sikeres modell volt az ún. statisztikus bootstrap [78, 79, 80], amely többek között képes magyarázni néhány, az ütközések során kialakult részecskearányt, illetve impulzus- és energiaeloszlásokat. Nagyobb ütközési energiákon $\sqrt{s} > 10$ GeV alkalmazhatóak különböző partonikus modellek, melyek már figyelembe veszik a partonok kölcsönhatásait is. Ezen módszerek mind tartalmaznak valamilyen hadronizációs modellt, melynek során a partonok színtelen hadronokká válnak [81]. A legismertebb ilyen hadronizációs eljárás az ún. LUND-húr modell [82], amely a PYTHIA eseménygenerátor [83] szerves része. A PYTHIA Monte-Carlo eseménygenerátor az egyik talán leggyakrabban alkalmazott eszköze a nagyenergiás nukleon-nukleon ütközések leírásának.

Tekintve, hogy a nehézion-ütközéseket leírni kívánó transzportkódok az elemi hadron-hadron interakciókat felhasználva modellezik a teljes rendszer dinamikai viselkedését, az egyik legfontosabb bemeneti információ amelyre szükségük van, az elemi hadron-hadron ütközési hatáskeresztmetszetek. Ezt az információt mérésekből és számításokból lehet beépíteni a modellekbe. A következő alfejezetben összefoglalunk néhány olyan módszert, melyek alkalmasak ezen mennyiségek számítására.

2.3. Elemi hadron-hadron hatáskeresztmetszetek, kvarkónium-állapotok és szerepük a nehézion-ütközésekben

Az elemi hadron-hadron ütközési hatáskeresztmetszeteknek igen fontos szerepük van a nehézion-ütközések dinamikai leírása során, hiszen, mint az az előző fejezetben összefoglalásra került, a nehézion-ütközéseknek létezik egy hadronikus szakasza, ahol a rendszer elsődleges szabadsági fokai, a hadronok elasztikus, illetve inelasztikus kölcsönhatásai lévén újabb részecskék keltése, illetve a rendszer termalizációja történik meg. A teljes rendszerben a kezdetben is jelen levő protonok, illetve neutronok mellett az időfejlődés során megjelenhetnek egyéb részecskék is, mint például pionok, kaonok, nukleon rezonanciák, antiprotonok stb. Az elemi reakciók során természetesen ki kell elégtíteni bizonyos megmaradási tételeket, mint például barionszám, töltés, izospin, impulzusmomentum, paritás, G-paritás megmaradás, mely kényszerek nagyban lecsökkentik a lehetséges reakciók számát. A manapság alkalmazott transzportkódokban tipikusan $2 \rightarrow 2$ reakciók vannak beépítve, ám vannak olyan változatok is, ahol $2 \rightarrow 3$, illetve $3 \rightarrow 2$ reakciókat is felhasználnak a számítások során [84]. Az utóbbi folyamatok, azaz az olyan ütközések, melyek során kettőnél több részecske ütközhet egymással, igen fontosak is lehetnek a nagyenergiás nehézion-reakciókban, hiszen a rendszer teljes dinamikai fejlődése során létrejött igen sűrű közegben feltehetőleg több részecske is olyan közelségbe kerülhet egymással, hogy a kölcsönhatásuk nem lesz elhanyagolható. Sajnos a relativisztikus tárgyalás nem teszi lehetővé, hogy az ilyen kölcsönhatásokat egyszerűen kezeljük, ám ennek ellenére létezik pár számolás, ahol kísérletet tettek a többszörös ütközések általánosabb vizsgálatára is transzportszimulációkban [85, 86].

A hatáskeresztmetszetek elsődleges forrásai a mérések, ám nagyon sok esetben olyan reakciók is érdekesek lehetnek, melyeket még sosem mértek meg. Ilyenek például a disszertáció számára is fontos küszöbenergia környeki charmónium, illetve bottomónium keltési hatáskeresztmetszetek proton-antiproton ütközésekben. Az elemi hatáskeresztmetszetek elméleti leírására rengeteg módszer létezik, melyek bizonyos energiákon, bizonyos típusú részecskékre működnek. A legfontosabb mérhető paraméter két részecske ütközése esetén az ütközési hatáskeresztmetszet, melyet (9). kifejezés definiál:

$$\sigma(s) = \frac{1}{2s} \int \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n. \quad (9)$$

Itt s az ún. Mandelstam változó a tömegközépponti energia négyzete, \mathcal{F} egy kombinatorikai faktor, \mathcal{M} a szórási amplitúdó, illetve $d\Phi_n$ az alább definiált n -részecske fázisteret jelöli:

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P^\mu - \sum_{j=1}^n p_j^\mu \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^3} \delta(p_j^2 - m_j^2), \quad (10)$$

ahol P^μ a teljes négyeslendületet, p_j^μ és m_j a j -edik részecske négyeslendületét, illetve tömegét jelölik. $2 \rightarrow 2$ események esetén $n = 2$, így a fázistér nagyban leegyszerűsödik. A modellszámítások során elsődlegesen meghatározandó mennyiség a folyamat átmeneti amplitúdója \mathcal{M} , amely megadja az adott reakció átmeneti valószínűségét. alacsonyenergiás folyamatokra $\sqrt{s} \approx 1 - 2$ GeV alkalmazhatóak a királis perturbációszámításra épülő, illetve ahhoz hasonló alacsonyenergiás effektív modellek [87], ám ennél nagyobb energiákon más módszerek szükségesek. Egy érdekes kiterjesztése az alacsonyenergiás effektív modelleknek a Regge-elmélet alkalmazása, amely az amplitúdók számítása során

figyelembe tudja venni a magasabb tömegű rezonanciákat is ún. Regge-propagátorok bevezetésével [88]. Az ilyen modellek tipikusan rengeteg szabad paramétert tartalmazhatnak, amely nem könnyíti meg azok alkalmazását, hiszen mielőtt érdembeni becsléseket tehetnénk, az összes paramétert illeszteni kell valamilyen alkalmas mérési eredményekhez. Nehézion-ütközések során korábban sokszor feltételezték, hogy egy elemi hadron+hadron folyamatban, az átmeneti mátrixelem konstans, így az adott reakció valószínűsége, illetve a folyamatok egymáshoz viszonyított aránya csupán az n -részesekés fázistértől függ [89]. Ezt az egyszerű fázisteres modellt igen gyakran alkalmazták, ha sok részecske/rezonancia ütközését kívánták modellezni.

Manapság rengeteg mérési eredmény létezik az egyszerűbb hatáskeresztmetszetek meghatározásához, így sok esetben nem kell modellszámításokra támaszkodni. Sokszor azonban olyan hatáskeresztmetszetekre is szükségünk lehet, melyeket még adott esetben sosem mérték meg, vagy a számunkra érdekes energiákon még nem történt mérés. Ilyenek például charmonium disszociációs $\pi J/\Psi \rightarrow D^* \bar{D}$, illetve charmonium keltési $p\bar{p} \rightarrow J/\Psi \pi^0$ folyamatok. Nagy energiákon $\sqrt{s} > 10$ GeV több modell is létezik, melyek képesek nehéz kvarkokat (c, b, t) tartalmazó hadronok inkluzív keltési hatáskeresztmetszetének igen jó becslésére. Ilyenek például az 1970-es években bevezetett szín-szinglet (Color Singlet Model - CSM), illetve a szín-evaporációs modellek (Color Evaporation Model - CEM), melyek a különbségeik ellenére igen nagy sikert értek el a '70-es '80-as években [90, 91]. Az említett két modellt elsősorban ún. kvarkónium-állapotok (egy nehéz kvark és egy ugyanolyan típusú nehéz antikvark kötött állapota) inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek számítására lehet alkalmazni nagy energiákon. A színszinglet modell abból a feltételezésből indul ki, hogy egy specifikus kvarkónium-állapot csakis akkor jöhet létre, ha a kvarkóniumot alkotó $Q\bar{Q}$ pár színszinglet állapotban keletkezik, a specifikus hadronra vonatkozó megfelelő impulzusmomentummal. Ezzel ellentétben a színevaporációs modellben a $Q\bar{Q}$ párnak nem kell rögtön színsinglett állapotban keletkeznie, mivel az a szín-mezővel való kölcsönhatás következtében neutralizálódhat. Ebben a modellben az inkluzív $AB \rightarrow H + X$ hatáskeresztmetszet a következő alakba írható:

$$\sigma_{CEM}^{AB \rightarrow H+X}(\sqrt{s}) = F_H \int_{4m_Q^2}^{4m_M^2} dm_{Q\bar{Q}}^2 \frac{d\sigma^{AB \rightarrow Q\bar{Q}+X}}{dm_{Q\bar{Q}}^2}, \quad (11)$$

ahol m_Q a kvarktömeget, $m_{Q\bar{Q}}$ a $Q\bar{Q}$ kvarkpár invariáns tömegét, AB az ütköző hadronokat, M a legkönnyebb olyan hadront, amely az adott nehéz kvarkot tartalmazza (pl. c -kvark esetén a D-mezon), H pedig az adott óniumállapotot jelöli. Az F_H paraméter egy nemperturbatív faktor, mely azt mondja meg, hogy az adott óniumállapot mekkora arányban keletkezik a többihez képest. A integrálban szereplő $d\sigma^{AB \rightarrow Q\bar{Q}+X}$ hatáskeresztmetszetet a partonmodell [92] segítségével lehet meghatározni felhasználva a parton eloszlásfüggvényeket, illetve kiszámítva az elemi kvark és gluon szintű kvark-antikvark keltési hatáskeresztmetszeteket. A partonmodellről részletesebben is lesz szó a 3.6. alfejezetben, így annak tárgyalását későbbre halasztom. Egy alapelveiben teljesen más modell a nemrelativisztikus kvantum-színdinamika (Nonrelativistic Quantum Chromodynamics - NRQCD) [93], amely a nehéz kvark "nehézségét" kihasználó effektív térelméleti modell. A modell leglényegesebb pontja az NRQCD faktorizációs formula, amely elszeparálja a nemperturbatív nagytávolságú effektusokat, a perturbatív kezelhető rövid hatótávolságú effektusoktól. Felhasználva az említett faktorizációs formulát egy $A + B$ ütközés során keltődő H óniumállapot inkluzív hatáskeresztmetszete a követ-

kező alakba írható:

$$\sigma_{NRQCD}^{AB \rightarrow H+X}(\sqrt{s}) = \sum_n c_n^{AB}(\Lambda) \langle \mathcal{O}_n^H(\Lambda) \rangle, \quad (12)$$

ahol c_n a rövid-távolságú, perturbatív együtthatók, melyek perturbációs számítás segítségével meghatározhatóak, míg \mathcal{O}_n a nagy-távolságú, nem perturbatív 4-fermion operátorok vákuum-várhatóértékeit jelölik, melyeket mérésekből határozhatunk meg. Felhasználva a faktorizációs formulát és a hatáskeresztmetszetekre kapott kifejezéseket, érdekes összefüggés található a CEM, illetve az NRQCD között, amely egyfajta közös keretrendszert biztosít az óniumentés fizikájára [94]. nehézion-ütközésekben az óniumentés állapotok létrejöttük után a sűrű közegben propagálhatnak, melynek során tulajdonságaik, mint például tömegük, vagy a bomlási szélességük változhatnak. Ezen változások detektálhatóak lehetnek a különböző bomlási állapotaik megfigyelésével. Vektormezonok esetén különösképpen a $H \rightarrow e^+e^-$ dilepton csatornák vizsgálata lehet igen érdekes, amely igen jó felbontással detektálható a mai detektorokban. Természetesen nem minden megkeltett óniumentés állapot jut el addig, hogy dileptonpárokra bomoljon, hiszen a sűrű közegben nukleonokkal, illetve mezonokkal ütközve ezek az állapotok könnyen disszociálódhatnak, azaz eltűnhetnek. Az ilyen disszociációs, illetve abszorpciós folyamatokat is modellezni kell, melyek egy kicsit más megfontolásokat igényelnek. Léteznek olyan effektív térelméleti modellek [95, 96], illetve QCD összszabály módszeren alapuló számítások [97], melyekkel becsülhetőek ezen hatáskeresztmetszetek is.

Ebben a disszertációban charmónium állapotok közegbeni módosulását vizsgálom meg pár GeV/nukleon-os antiproton-mag ütközésekben, melyhez elengedhetetlen volt meghatározni néhány charmónium állapot inkluzív keltési hatáskeresztmetszetét. A következő fejezetben egy olyan saját fejlesztésű statisztikus alapokon nyugvó modellt mutatok be, amely képes leírni igen sok, alacsonyenergiás hadron-hadron ütközési hatáskeresztmetszetet, proton-antiproton nyugalmi annihilációtól kezdve a nehéz c, b kvarkokat tartalmazó hadronok inkluzív keltéséig pár GeV-től 20-30 GeV tömegközépponti energiáig. A felső határt csupán numerikus nehézségek korlátozzák, ám a modell célszerűen alacsony energiára lett tervezve, így annak további kiterjesztése jelenleg nincs tervbe véve.

3. Statisztikus modell elemi hadron-hadron ütközések leírására

A 2.3. fejezetben bevezettem az elemi hadron-hadron ütközések fontosságának a nehézion-ütközések elméleti leírásában játszott szerepét, illetve néhány olyan modellt mellyel ezen hatáskeresztmetszetek adott energiatartományokon, adott részecsketípusokra becsülhetőek. Ebben a fejezetben egy olyan saját fejlesztésű, statisztikus alapokon nyugvó modellt mutatok be, amely képes pár GeV tömegközépponti energiától, egészen akár több tíz GeV energiáig igen jó becsléseket adni hadron-hadron reakciók széles körére. Ebbe beletartoznak a könnyű hadronok, melyek csupán u, d, s kvarkokat tartalmaznak ($\pi, \rho, p, n, K, \dots$), továbbá a c és b kvarkokat tartalmazó nehéz hadronok is ($\eta_c, J/\Psi, \Upsilon, D, B, \dots$). A legnehezebb t kvarkokat tartalmazó hadronok nem kerülnek vizsgálatra, mivel a transzportmodell számára érdekes energiatartomány jóval a t kvarkok tömege alatt van. A bemutatott modell alkalmas lehet továbbá egyéb, egzotikus hadronok keltési hatáskeresztmetszeteinek leírására is, mint például a tetrakvarkok.

A modell kiindulva a korai statisztikus modellek alapelveiből, azokhoz képest jelentős újításokat tartalmaz, például a később részletesen is bemutatandó kvark-kombinatorikai

faktorok, kvarkkeletkezési valószínűségek, rezonanciák, dikvarkok, illetve tűzlabda bomlási valószínűségek figyelembe vételével, melyek együttes alkalmazása a statisztikus Bootstrap alapelveivel egy egyedi és friss módszert nyújt az alacsonyenergiás hadron-hadron ütközések hatáskeresztmetszeteinek leírására, melyet rengeteg exkluzív-, illetve inkluzív folyamat hatáskeresztmetszetének meghatározásával fogok bemutatni az alábbiak során.

Ez a fejezet, felépítését tekintve hat részre osztható. Az első két alfejezetben a modell általános leírásával foglalkozom, ahol többek között kitérek a modell hibabecslési lehetőségeire is, mely után 3.3-ban néhány példán keresztül bemutatom a modell pár alkalmazási lehetőségét is. Ezek után 3.4-ben a modell egy bonyolultabb alkalmazását mutatom be, ahol proton-antiproton nyugalmi annihiláció során létrejött sokpionos állapotok valószínűségeit számítottam ki numerikusan, Monte-Carlo módszerrel. Ezek után 3.5-ben c , illetve b kvarkokat tartalmazó hadronok inkluzív keltését tárgyalom, majd a fejezet utolsó részében 3.6-ban bemutatom a modell kiterjesztését tetrakvark állapotok inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek leírására.

3.1. A statisztikus modell általános leírása

A statisztikus modellek tipikus alkalmazási területe az ütközések során létrejött egyes részecskék arányainak, impulzus- és energiaeloszlásainak meghatározása. A keletkezett hadronok multiplicitásai, illetve korrelációi igen fontosak a nagyenergiás ütközések szempontjából, hiszen értékes információkat képesek szolgáltatni olyan tulajdonságokról, mint például az ütközési rendszer összetétele, hőmérséklete, sűrűsége, illetve annak mérete. Az egyik legelső statisztikus módszer, amely képes volt egyes hadron-hadron ütközések hatáskeresztmetszetének magyarázatára Enrico Fermi (1950) nevéhez fűződik [98]. A Fermi által alkalmazott modell azon a feltevésen alapult, hogy az ütközés során létrejött "kis" térrészben (≈ 1 fm) lokalizált "energiakavalkád", az ún. tűzlabda, egy idő után elbomlik a különböző megmaradási tételeknek (töltés, barionszám, energia,...) eleget tevő hadronikus végállapotokba. Az előbbiekből kiindulva Fermi felállított egy általános hatáskeresztmetszet formulát, azzal a feltevessel, hogy az átmeneti mátrixelemek csupán a végállapotú rendszer állapotsűrűségétől függenek. Az ütközés kezdeti dinamikájának leírásához egy további feltétel volt, hogy az ütközés valószínűsége arányos kell legyen a Lorentz-kontrakciót szenvedő kezdeti részecskék térfogatával (Ω). Az előbbi feltevéseket figyelembe véve az ütközési hatáskeresztmetszetek az alábbi alakban írhatóak fel:

$$\sigma \propto \left(\frac{\Omega}{V}\right)^{n-1} \left(\frac{V}{8\pi^3}\right)^{n-1} \rho(\sqrt{s}, m_1, \dots, m_n), \quad (13)$$

ahol Ω az egyik ütköző részecskének a Lorentz-kontrakciót szenvedett térfogata, V a normalizációs térfogat, illetve ρ a végállapotú n -részecske rendszer állapotsűrűsége. A modell képes volt nagyságrendi becsléseket tenni néhány egyszerűbb ütközésre, amely lendületet adott a statisztikus modellek további fejlődéséhez [99].

A statisztikus modellek egy következő lépcsőfoka a Rolf Hagedorn által bevezetett Statisztikus Bootstrap Modell (SBM) [100, 101, 102], amely arra a feltevésre épül, hogy a részecskék nem elemiek, hanem minden egyes részecske önmagából, illetve rezonanciáiból épül fel, így alapvetően nem téve különbséget rezonanciák és stabil részecskék között. Ennek, az ún. Bootstrap-feltételnek a közvetlen következménye, hogy a rendszer termodinamikájában a rengeteg megjelenő rezonancia is ugyanolyan szerepet játszik, mint a stabil részecskék, amely feltevés elvezetett az ún. határhőmérséklet (T_c) fogalmáig. A Bootstrap-feltétel két megfogalmazását adta meg Hagedorn, illetve Frautschi, akik két különböző módon jutottak el egymással konzisztens eredményre. A

Hagedorn-féle megfogalmazás termodinamikai alapokon nyugszik, ahol az állapotsűrűség Laplace-transzformáltján keresztül vezette be a hőmérsékletet, míg Frautschi ezzel ellentétben az állapotsűrűségnek, a részecskefizikához jobban illő, fázisokkal kifejezett alakjából kiindulva oldotta meg az önkonzisztencia feltételt, melyben explicit nem jelenik meg a hőmérséklet [103]. A (14). kifejezés az önkonzisztencia feltétel Frautschi-féle megfogalmazását jelképezi, azaz, hogy egy adott m össztömegű állapot, nála kisebb tömegű, mozgásban levő állapotok összességéből épül fel, azzal a feltétellel, hogy a részrendszerek teljes energiája kiadja a felépítendő állapot invariáns tömegét.

$$\rho_{out}(m, V_0) = \delta(m - m_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{V_0}{(2\pi)^3} \right)^{n-1} \prod_{i=1}^n \int dm_i \rho_{in}(m_i) \int d^3 p_i \delta^{(4)}(\sum p_i^\mu - P^\mu). \quad (14)$$

Itt $\rho_{out}(m)$ az m invariáns tömegű teljes állapotsűrűség, $\rho_{in}(m_i)$ az integrálban szereplő m_i tömegű állapotra vonatkozó állapotsűrűség, míg m_0 és V_0 illesztendő paraméterek, melyek közül az utóbbit Hagedorn az erős kölcsönhatás hatótávolságával azonosított, és nagyságrendileg a pion tömegével definiált $V_0 \approx (4\pi/3)m_\pi^{-3}$. A $\rho(m)$ állapotsűrűségek kezdetben ismeretlen mennyiségek, melyek meghatározásához meg kell oldani az ún. Bootstrap-feltételt, amely matematikailag a $\rho_{out}(m) = \rho_{in}(m)$ egyenlet teljesülését írja elő. A gyakorlatban a gyengébb $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{out}(m) = \rho_{in}(m)$ aszimptotikus feltétel teljesítése is elegendő, melynek létezik analitikus megoldása. A gyenge Bootstrap-feltételt megoldva egy exponenciális állapotsűrűség spektrumot kapunk, melynek alakja:

$$\rho(m)_{m \rightarrow \infty} \propto cm^\alpha e^{bm}, \quad (15)$$

ahol b, c és α mérésekből illesztendő szabad paraméterek, melyek közül $b = 1/T_0$ paramétert azonosíthatjuk a Hagedorn-képből levezethető inverz hőmérséklettel. A T_0 paraméter állítja be a spektrum növekedési sebességét, melyet kísérletek alapján $T_0 \approx 130-170$ MeV környékére helyeznek [104, 105]. Az α paraméterre felső korlát adható, mind a Hagedorn-, mind a Frautschi-féle levezetésben, melyre az $\alpha \leq -5/2$ adódott. Tekintve, hogy ebben az esetben az állapotsűrűség $m \rightarrow 0$ határátmenetben divergál, Hagedorn és Ranft adott egy alkalmas parametrizációt ennek kiküszöbölésére [106]:

$$\rho(m) = \frac{am^b}{(m_0 + m)^{b+3}} e^{m/T_0}, \quad (16)$$

ahol a, b, m_0, T_0 kísérleti eredményekből, mint proton/kaon/pion részecske multiplicitásokból, és impulzuseloszlásokból illesztett szabad paraméterek. A határhőmérséklet fizikai jelentéséhez úgy jutunk el, hogy a Bootstrap-egyenletből kapott állapotsűrűséggel, hadronok ideális, relativisztikus gázát feltételezve meghatározzuk a partíciós függvényt:

$$\ln \mathcal{Z} \propto VT^{3/2} \int dm f(m) e^{-(m/T - m/T_0)}, \quad (17)$$

ahol $f(m)$ a tömeg valamilyen függvénye, V a térfogat, T a hőmérséklet, T_0 pedig a Hagedorn-hőmérséklet. A fenti kifejezés $T \rightarrow T_0$ határátmenetben divergens, azaz a Bootstrap-feltételt kielégítő termodinamika szerint a hadronikus fázis legmagasabb hőmérséklete $T = T_0$, melyet határhőmérsékletnek is nevezünk. A Bootstrap-modell egyik fontos alkalmazási területe az elemi ütközések során létrejött részecskesűrűségek meghatározása, melyhez az átlagos részecskeszámokat a partíciós függvényből lehet meghatározni a következő módon:

$$\bar{n} = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V}, \quad (18)$$

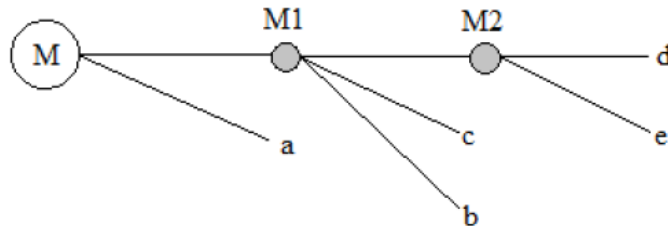
ahol \bar{n} jelöli az átlagos részecskeszámot. Később az 1970-es években a modell kiterjesztésre került nehézion-ütközésekre is, ahol a különböző töltésmegmaradási tételek (barionszám, elektromos töltés, ritkaság,...) is igen fontos szerephez jutottak. Ezeket a partíciós függvényben az egyes töltésekhez tartozó kémiai potenciálok (μ_i) bevezetésével lehet figyelembe venni egy $\exp(\sum_i C_i \mu_i)/T$ súlyozó faktorról, ahol C_i -k jelölik a megmaradó töltéseket [111]. A fenti kiterjesztés biztosítja azt, hogy a töltésmegmaradások átlagosan teljesüljenek.

A Bootstrap-modell építve a Fermi által bevezetett statisztikus modellre, feltételezi, hogy az ütközés által létrejött kölcsönhatási zóna, az ún. tűzlabda rövid időn belül stabil részecskékre bomlik, melynek bomlási valószínűségével lesz arányos a szórási hatáskeresztmetszet is. A hatáskeresztmetszetek számításánál a nagy különbség a Fermi-modellhez képest, hogy a tűzlabda bomlása nem olyan egyértelmű, mint az utóbbi változatban. Itt a részecskék önhasznos tulajdonságaiból kiindulva a tűzlabda először további tűzlabdákra bomolhat, amely később további tűzlabdákra bomolva végül elér egy olyan állapotot, ahol létrejöhetnek a stabil hadronok. A bomlási sor Frautschi-féle megfogalmazása [103] például arra a gondolatra épül, hogy a nehezebb rezonanciák (állapotok, tűzlabdák) minden esetben könnyebb rezonanciákká bomlanak, ahol a bomlástermékek számát az határozza meg, hogy az integrálokban szereplő fázisterek milyen multiplicitásoknál (milyen n értékeknél) adják a maximális kontribúciót a teljes állapotsűrűséghez. Ennek a feltételnek a matematikai megfogalmazása, hosszas levezetések után ad egy kifejezést arra, hogy egy állapot mekkora valószínűséggel bomlik el adott számú kisebb tömegű állapotokra:

$$P_n^d = \frac{(\ln 2)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (19)$$

Kiszámítva P_n^d -t ² különböző n -ekre, azt kapjuk, hogy $P_2^d \approx 0.69$, $P_3^d \approx 0.24$, $P_4^d \approx 0.06$, azaz csupán az $n = 2, 3$ esetek adnak domináns járulékot a fázistérhez. Természetesen többfajta bomlási modell is létezik (egy lépcsős, két lépcsős, stb...), melyek alkalmazásával igen sikeresen tudtak magyarázni bizonyos hatáskeresztmetszeteket, illetve részecske multiplicitásokat. Egy ilyen bomlási modell a 8. ábrán látható, ahol minden egyes bomlási lépésben a tűzlabda egy-, vagy két hadronná, illetve egy kisebb tűzlabdává bomlik, egészen addig, amíg a kisebb tűzlabda invariáns tömege eléri a minimális értéket, ami még kiadhat legalább két semleges piont.

²A P_n^d jelölés a későbbiek jobb átláthatósága miatt vezetem be, ahol a d index a bomlást (decay) reprezentálja.



8. ábra. Egy lehetséges tűzlabda bomlási séma, ahol a kezdeti M invariáns tömegű tűzlabda minden lépésben tovább bomlik kisebb invariáns tömegű tűzlabdába (M_1, M_2), illetve 2, vagy 3 hadronba (a,b,c,d,e).

A következőkben leírásra kerülő saját fejlesztésű modell [107, 108, 109, 110] épít az említett statisztikus módszerekre, ám azokhoz képest jelentős eltéréseket/kiegészítéseket tartalmaz, melyek nélkülözhetetlenek voltak bizonyos reakciók leírásához. A modell abból a feltevésből indul ki, hogy egy $n \rightarrow k$ hadronikus reakció során, az n -részecske ütközésének következtében létrejövő tűzlabda rövid időn belül elbomlik egy adott k -részecskés végállapotra, mely átmenetnek a valószínűsége faktorizálható egy kezdeti dinamikai részre, amely a tűzlabda kialakulását írja le, illetve egy statisztikus, hadronizációs szakaszra, amely megadja az adott végállapot kialakulásának valószínűségét. Ezen feltételek felhasználásával az n -részecske ütközési valószínűség a következő alakba írható:

$$\sigma^{n \rightarrow k}(\sqrt{s}) = \left(\int \prod_{i=1}^n d^3 p_i R(\sqrt{s}, p_1, \dots, p_n) \right) \times \left(\int \prod_{i=1}^k d^3 q_i w(\sqrt{s}, q_1, \dots, q_k) \right) \quad (20)$$

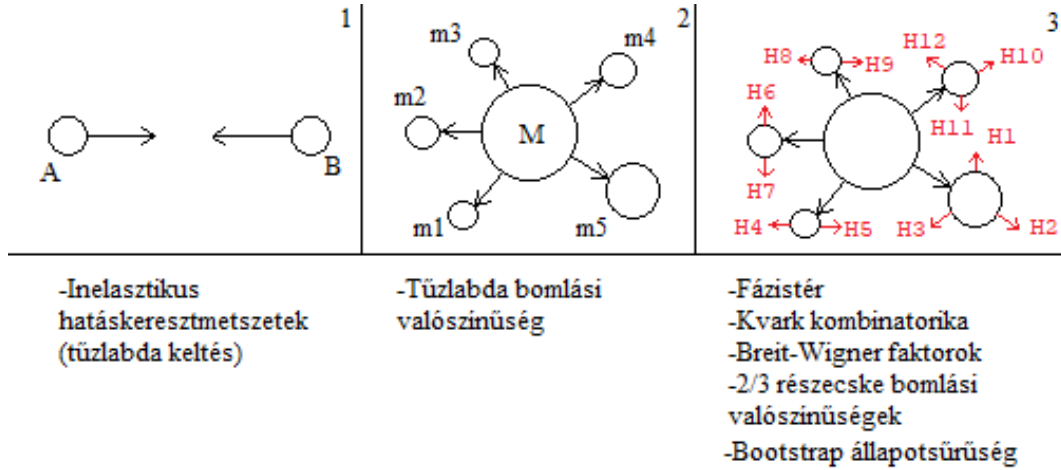
ahol $\sigma(\sqrt{s})$ az $n \rightarrow k$ reakció valószínűsége, p_1, \dots, p_n a bejövő részecskék impulzusai, q_1, \dots, q_k a kimenő részecskék impulzusai, $R(\dots)$ a bejövő részecskék impulzusainak egy kifejezése, amely az ütközés első szakaszát írja le, míg $w(\dots)$ a kimenő impulzusok függvénye, amely a hadronizációs szakasz valószínűségét határozza meg. A disszertációban csakis az $n = 2$ esettel foglalkozom, azaz két részecske ütközések valószínűségének a meghatározása a cél, mely esetben a (20). kifejezést a $2 \rightarrow k$ folyamat $\sigma^{2 \rightarrow k}$ ütközési hatáskeresztmetszetével azonosíthatjuk. Feltesszük továbbá, hogy a kezdeti dinamikai szakasz közelíthető a kétrészecske ütközés inelasztikus hatáskeresztmetszetével, azaz:

$$\int d^3 p_1 d^3 p_2 R(\sqrt{s}, p_1, p_2) \approx \sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s}) \quad (21)$$

ahol $\sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s})$ az $A + B$ reakció inelasztikus hatáskeresztmetszete, amely a lényegesebb részecskékre (proton, neutron, pion, kaon) kísérletileg igen széles energiatartományon ismert. Az ilyen feltevések nem idegenek a statisztikus módszerektől, ahol sokszor a totális hatáskeresztmetszetet használják a kezdeti dinamika leírására. Jelen modellben nem foglalkozunk a reakciók elasztikus komponensével, melynek egyik oka, hogy ezen hatáskeresztmetszetek a számunkra lényeges reakciók esetén (proton-proton, pion-proton, proton-antiproton) igen jól mért mennyiségek, míg a másik oka, hogy kis energiákon az elektromágneses kölcsönhatás akár domináns járulékokat is adhat az elasztikus komponenshez [112], mellyel a modellben nem foglalkozunk. A tűzlabda kialakulása után az adott $k \geq 2$ részecskés végállapot kialakulásának valószínűségét a tűzlabda bomlási

sémája, a kimenő részecskék impulzusai, az ütközés tömegközépponti energiája, illetve az adott részecskék kvantumszámait, és kvarktartalma határozzák meg.

Maga a bomlási séma grafikusan a 9.ábrán követhető, amely azt mutatja, hogy a kezdeti M invariáns tömegű tűzlabda valamilyen valószínűséggel elbomlik $k = 5$ darab kisebb m_1, \dots, m_5 tömegű tűzlabdába, melyek természetesen kielégítik a $m_1 + m_2 + \dots + m_k = M$ kényszerfeltételt. Ezek után a kialakult tűzlabdák valamilyen valószínűséggel hadronizálódnak, egyenként 2, vagy 3 hadronba (H_1, \dots, H_{12}), amely a Bootstrap-modell Frautschi-féle megfogalmazásának a következménye. A hadronizációs valószínűségek



9. ábra. A statisztikus modellben alkalmazott lépések grafikus ábrázolása.

függenek továbbá spin-, illetve szimmetria faktoroktól, a két-, illetve háromrészecske fáziserektől, rezonáns részecskék esetében Breit-Wigner-faktoroktól, továbbá az ún. kvark-kombinatorikai faktoroktól és a hozzájuk tartozó kvarkkeletkezési valószínűségektől, melyekre a következőkben részletesen is kitérek. Az előzőekből kiindulva a teljes hadronizációs integrál $W(\sqrt{s})$ a következő szimbolikus alakban írható fel:

$$W_{k,i_1,\dots,i_k}(\sqrt{s}) = P_k^{fb}(\sqrt{s}) \frac{1}{Z_k(\sqrt{s})} \frac{1}{N_{i_1,\dots,i_k}!} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \prod_{a=1}^k \left[dx_a \frac{T_{i_a}(x_a)}{\sum_{j \in i_a} T_j(x_a)} \delta\left(\sum_{a=1}^k x_a - \sqrt{s}\right) \right], \quad (22)$$

ahol P_k^{fb} annak a valószínűsége, hogy az ütközés során keletkezett $M = \sqrt{s}$ invariáns tömegű tűzlabda k darab kisebb tömegű tűzlabdává bomlik el, míg i_a ($a = 1..k$) az adott tűzlabda csatornát jelöli, amely hadronizálódik, azaz például $i_1 = (\pi^+ \pi^- n)$. A $\sum_{j \in i_a}$ összegzés minden i_a tűzlabdában végigmegegy az összes lehetséges 2- és 3-részecskes hadronikus végállapoton, normalizálva az adott tűzlabdacsatornát. Ezeneken felül N_{i_1,\dots,i_k} egy szimmetriafaktor, amely leszámolja az azonos hadronokba bomló tűzlabdákat, míg $Z_k(\sqrt{s})$ egy energiafüggő k -tűzlabdás normalizációs faktor, amely a következő alakban írható fel:

$$Z_k(\sqrt{s}) = \sum_{\langle l_1..l_k \rangle \in \mathcal{S}} \frac{1}{N_{l_1..l_k}!} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \prod_{a=1}^k dx_a \frac{T_{l_a}(x_a)}{\sum_{j \in i_a} T_j(x_a)} \delta\left(\sum_{a=1}^k x_a - \sqrt{s}\right), \quad (23)$$

ahol a $\langle l_1..l_k \rangle$ jelölés jelenti azt, hogy a normalizációs összeg csakis azokat az állapotokat veszi figyelembe, melyek a helyes \mathcal{S} kvantumszámokkal (barionszám, elektromos töltés,

izospin, s/c/b-kvark tartalom, stb...) rendelkeznek. A hadronizációs integrálban is szereplő x_a az energiát, míg x_{min}, x_{max} a kinematikai megfontolásokból meghatározható alsó, illetve felső energiahatárokat jelöli, melyeket a tűzlabda bomlási séma meghatározásával kaphatunk meg. Ezeken felül a $T_i(x)$ faktorok tartalmazzák a már említett, de még nem specifikált kvarkkombinatorikai faktorokat, illetve fázistereket a következő módon:

$$T_i(x) = C_{Q_i}(x)P_{n_i}^{H,i}(x), \quad (24)$$

ahol $C_{Q_i}(x)$ a már említett kvark-kombinatorikai faktor, amely leszámllálja, hogy egy adott hadronikus végállapot hányféleképpen épülhet fel az adott számú u, d, s, c, b, t kvarkokból. Ezen felül $P_{n_i}^{H,i}(x)$ jelöli azt a hadronikus részt, amely tartalmazza a fázistérintegrálokat, illetve a Bootstrap-modellből származó faktorokat a következő módon:

$$P_{n_i}^{H,i}(x) = P_n^d \frac{\Phi_n(x, m_1, \dots, m_n)}{(2\pi)^{3n-3} \rho(x) N_I!} \prod_{l=1}^n (2s_l + 1) \quad (25)$$

ahol P_n^d a (19) kifejezésben definiált bomlási valószínűség, $\Phi_n(x, m_1, \dots, m_n)$ az n -részes részecske fázistérintegrál, $\rho(x)$ a (16)-ban definiált állapotsűrűség, N_I egy szimmetriafaktor, amely az azonos hadronokat számlálja le, míg s_l az l -edik részecske spinjét jelöli. Kiindulva a (19)-es kifejezéshez fűzött megjegyzésekből, elegendő az $n = 2, 3$ esetek figyelembe vétele, azaz egy tűzlabda dominánsan kettő, vagy három hadronba bomolhat. A $P_{n_i}^{H,i}$ kifejezésben előforduló i index az i -edik tűzlabdát, a H index a hadronizációt, míg az $n_i = 2, 3$ az adott tűzlabdából keletkező hadronok számát jelölik. Az alábbiakban megmagyarázom a hadronizációs valószínűség kifejezésében szereplő minden faktor részletes jelentését, mely után néhány egyszerű példán keresztül mutatom be a modell alkalmazását alacsony multiplicitású, exkluzív, illetve inkluzív reakciók hatás-keresztmetszeteinek számítására.

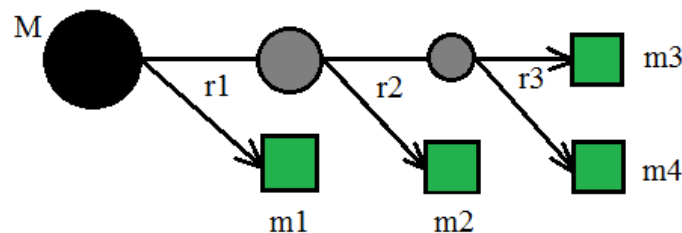
Kiindulva a hadronizációs valószínűség kifejezéséből, az alábbi három faktor szorul részletesebb magyarázatra:

- Tűzlabda bomlási valószínűség: $P_k^{fb}(\sqrt{s})$
- Két-, illetve háromrészecske fázistérintegrálok stabil részecskékre és rezonanciákra: $\Phi_n(x, m_1, \dots, m_n)$
- Kvark-kombinatorikai faktorok: $C_{Q_i}(x)$

Kezdve a tűzlabda bomlási valószínűséggel, feltételezzük, hogy az ütközés utáni első lépésben az $M = \sqrt{s}$ invariáns tömeggel rendelkező tűzlabda először kisebb tömegű tűzlabdába bomlik és csak azután hadronizálódik. A tűzlabda bomlás során csupán annyit teszünk fel, hogy a tűzlabdák egyenletes eloszlás szerint sorsolják ki a belőlük keletkező tűzlabdák invariáns tömegét, így ez a szakasz semmilyen extra, illesztendő paramétert nem tartalmaz. A modell előnye, hogy két tűzlabdáig a bomlási valószínűség zárt alakban kifejezhető, továbbá Monte-Carlo technikával numerikusan könnyen legerálható a sok tűzlabdás eset is, melyet a 3.4. alfejezetben erőteljesen ki is használok.

A bomlási modell kiindulási pontja, hogy az adott tűzlabda minden lépésben megpróbál tovább bomlani egy kisebb tömegű tűzlabdába, melynek tömege még elegendő ahhoz, hogy egy fizikai végállapot létrejöhessen belőle, azaz a tömegének el kell érnie legalább a legkisebb tömegű hadron tömegének kétszeresét. Ha ezt nem éri el, akkor

az addig kialakult tűzlabdák fognak hadronizálódni és az utolsó lépés semmisnek tekintendő. A bomlási séma a 10. ábrán követhető, ahol a bomlási sor végén a négy darab négyzet jelöli a hadronizálódó tűzlabdákat, a szürke körök a köztes lépésekben bomló tűzlabdákat, míg a nagy fekete kör az ütközés után rögtön kialakuló $M = \sqrt{s}$ invariáns tömegű tűzlabdát jelöli. Az ábrán feltüntetett r_i paraméterek egy egyenletes eloszlásból származó véletlen számot jelölnek $r_i \in U[0, 1]$, melyek megmondják, hogy a bomlás során mekkora arányban oszlik szét a kezdeti tűzlabda tömege.



10. ábra. A statisztikus modellben alkalmazott tűzlabda bomlási séma ábrázolása 4 kialakuló tűzlabda esetén (m_1, m_2, m_3, m_4) .

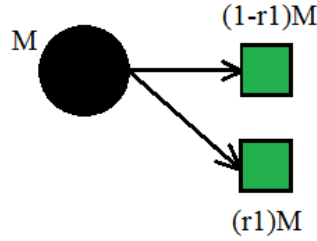
A bomlási séma szerint minden lépésben véletlenszerűen kisorsolunk egy 0 és 1 közötti r_i számot, mellyel leosztjuk a bomlani kívánó tűzlabda tömegét, azaz például az első lépésben az $[M] \rightarrow [r_1 M][(1 - r_1)M]$ két kisebb tömegű tűzlabdára kell megnézni, hogy a tömegük eléri-e a minimális m_{krit} kritikus tömeget, azaz teljesülnek-e a $r_1 M \geq m_{krit}$, illetve $(1 - r_1)M \geq m_{krit}$ feltételek. Amennyiben bármelyik feltétel nem teljesül, akkor a kezdeti tűzlabda nem bomolhat tovább, ellenben ha mindkét feltétel teljesül, akkor az egyik pl. az $r_1 M$ tömegű tűzlabdát lefixáljuk, míg a másik, $(1 - r_1)M$ tömegű tűzlabdának megengedjük, hogy tovább bomoljon ugyancsak két, kisebb invariáns tömegű tűzlabdába, melyhez egy új r_2 véletlen számot rendelünk. Ebben a lépésben ugyancsak megvizsgálva a kritikus tömegre vonatkozó feltételeket, ha azok közül bármelyik nem teljesül, akkor a bomlani kívánó tűzlabda mégsem képes tovább bomlani és végezetül maradunk az előző lépésben már biztosított két tűzlabdával, melyek mindkettő hadronizálódhatnak. A módszer különösen alkalmas iteratíván meghatározni az adott tűzlabda számok kialakulásának valószínűségeit, melyekhez a következő lépések szükségesek:

- $r_i \in U[0, 1]$ véletlen szám sorsolása.
- Az adott lépésben az m_i invariáns tömegű tűzlabda tömegének leosztása kétfelé $m_i \rightarrow [r_i m_i][(1 - r_i)m_i]$
- Ha bármelyik leosztott tűzlabda tömege nem éri el a küszöbenergiát, akkor vége a láncnak, egyébként a vissza az első pontra, melyben egy új véletlen szám generálása mellett a $[r_i m_i]$, vagy $[(1 - r_i)m_i]$ tűzlabdával folytatva újratekdjük a láncot. Természetesen bármelyik kisebb tömegű tűzlabdát választhatjuk további bomlásra, amely minden lépésben két fajta különböző topológiát generál, melyek egyenlő valószínűséggel valósulhatnak meg.

A fenti lépések végrehajtásával numerikusan igen könnyen meghatározhatóak a tűzlabda bomlási valószínűségek. Az egy és két tűzlabdás esetre létezik zárt alakú megoldás, me-

lyek számítási módszerét a könnyebb érthetőség kedvéért a következőkben részletesebben is bemutatom.

Kiindulva a fentiekből az 1-tűzlabda valószínűségének számítása a 11. ábrán követhető, amely esetben csupán egyfajta topológia lehetséges. Kezdeti lépésnek kisorsolva egy $r_1 \in U[0, 1]$ véletlen számot, bevezethető két valószínűségi esemény (A,B), melyek azt fejezik ki, hogy a két kisebb tömegű tűzlabda közül valamelyik nem képes hadronizálódni:



11. ábra. Az 1-tűzlabdás bomlási modell grafikus ábrázolása.

$$A : r_1 M < m_{krit} \quad (26)$$

$$B : (1 - r_1) M < m_{krit}, \quad (27)$$

ahol az m_{krit} küszöbenergia a legkönnyebb hadron tömegének kétszeresével azonosítható, azaz $m_{krit} = 2m_{\pi^0}$. Matematikailag annak a valószínűségét keressük, hogy az A vagy a B esemény bekövetkezik, azaz $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ meghatározása a cél. A keresett valószínűségek geometriai megfontolásokból könnyen meghatározhatóak, melyekre az alábbi eredményeket kapjuk:

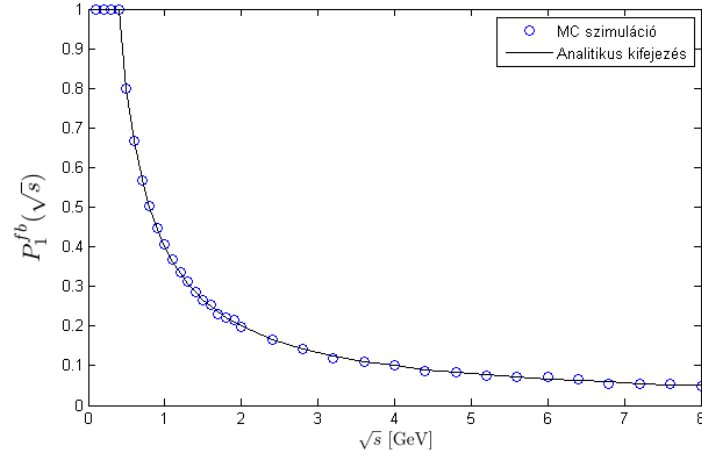
$$P(A) = \frac{\frac{m_{krit}}{M} - r_{1,min}}{|r_1|} = \frac{m_{krit}}{M} \quad (28)$$

$$P(B) = \frac{r_{1,max} - (1 - \frac{m_{krit}}{M})}{|r_1|} = \frac{m_{krit}}{M} \quad (29)$$

$$P(AB) = \frac{\frac{m_{krit}}{M} - (1 - \frac{m_{krit}}{M})}{|r_1|} = \frac{2m_{krit}}{M} - 1, \quad (30)$$

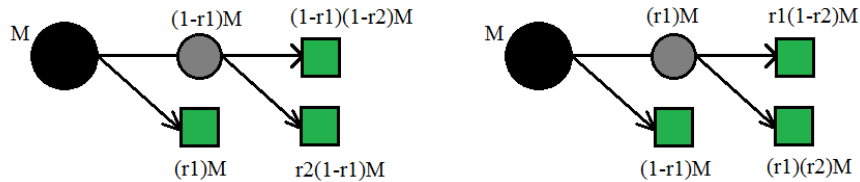
ahol $|r_1| = 1$ a teljes tartomány hossza, $r_{1,min} = 0$, illetve $r_{1,max} = 1$ a teljes tartomány határai. Az együttes valószínűség esetén az $1 - m_{krit}/M < r_1 < m_{krit}/M$ feltétel teljesülését kell vizsgálni, amely csak az $m_{krit}/M < 1/2$ feltétel esetén következhet be, vagyis $P(AB) = 0$, ha $m_{krit}/M < 1/2$. A fentieket összerakva kifejezhető az 1 tűzlabda kialakulásának valószínűsége, melyet a 12. ábra szemléltet:

$$P_1^{fb}(M) = \begin{cases} \frac{2m_{krit}}{M} & , 0 < \frac{m_{krit}}{M} < \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} \leq \frac{m_{krit}}{M} \leq 1 \end{cases} \quad (31)$$



12. ábra. Az 1-tűzlabda létrejöttének valószínűsége az energia függvényében. A fekete vonal az analitikus kifejezésből meghatározott valószínűséget, míg a körök a numerikus szimulációkból kapott értékeket jelölik.

A 2-tűzlabdás eset az előzőnél egy fokkal bonyolultabb, ám a modell alapelveit követve a számolás triviális. Ebben az esetben a 13. ábrának megfelelően kétfajta topológiát különböztethetünk meg, mely abból adódik, hogy a bomlási lánc második szakaszában két kisebb tűzlabda közül választhatjuk ki azt, amelyiknek megengedjük a további bomlást. A baloldali topológián a kezdeti bomlás után az $r_1 M$ tömegű tűzlabdát fixáljuk le, míg a jobboldali topológián az $(1-r_1)M$ tömegű tűzlabda marad fixen. Természetesen a két eset azonos $P = 1/2$ valószínűséggel jöhet létre, melyet a végeredményben figyelembe kell venni.



13. ábra. A 2-tűzlabdás bomlási modell grafikus ábrázolása. A két különböző topológia $P = 1/2$ valószínűséggel jöhet létre.

A baloldali topológiával kezdve a következő feltételek kielégítése a cél:

$$r_1 M > m_{krit} \quad (32)$$

$$1 - r_1 M > m_{krit} \quad (33)$$

$$(1 - r_1)(1 - r_2)M < m_{krit}, \quad \text{vagy} \quad (1 - r_1)r_2 M < m_{krit}, \quad (34)$$

ahol (32) és (33) jelképezik azt, hogy az első bomlás után létrejött $r_1 M$, illetve $(1-r_1)M$ tömegű tűzlabdáknak elegendő energiájuk áll rendelkezésre, hogy legalább két semleges piont kiadjanak, míg a (34) kifejezés jelzi azt a tényt, hogy a második bomlás során legalább az egyik tűzlabda tömege nem elegendő hadronizálódni. A jobboldali topológia

feltételei annyiban különböznek, hogy az r_1M tömegű tűzlabdát felcseréljük az $(1-r_1)M$ tömegű tűzlabdával, amellyel a (34) kifejezés a következőképpen módosul:

$$r_1(1-r_2)M < m_{krit} \quad \text{vagy} \quad r_1r_2M < m_{krit}. \quad (35)$$

A teljes (mindkét topológiát figyelembe vevő) valószínűség meghatározásához az alábbi 5 esemény (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4) definiálása szükséges:

$$A_0 : \left(r_1 > \frac{m_{krit}}{M} \right) \wedge \left(r_1 < 1 - \frac{m_{krit}}{M} \right) \quad (36)$$

$$A_1 : (1-r_1)(1-r_2) < \frac{m_{krit}}{M} \quad (37)$$

$$A_2 : (1-r_1)r_2 < \frac{m_{krit}}{M} \quad (38)$$

$$A_3 : (1-r_2)r_1 < \frac{m_{krit}}{M} \quad (39)$$

$$A_4 : r_1r_2 < \frac{m_{krit}}{M}, \quad (40)$$

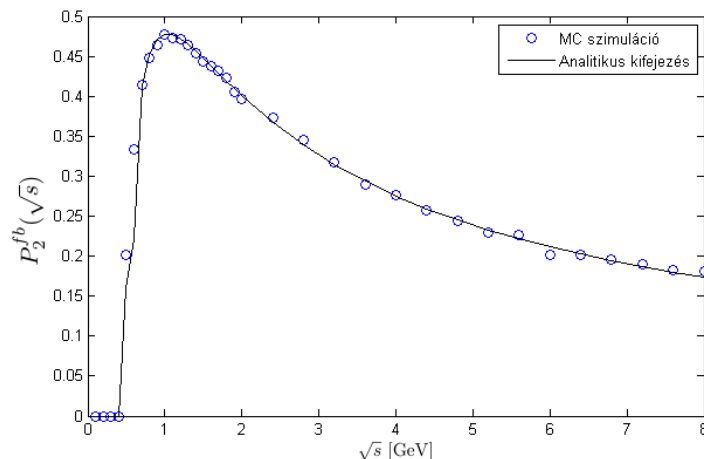
mely események segítségével a teljes 2-tűzlabda keletkezési valószínűség az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{aligned} P_2^{fb} &= \frac{1}{2} \left[P(A_1 \vee A_2 | A_0) + P(A_3 \vee A_4 | A_0) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[P(A_1 | A_0) + P(A_2 | A_0) - P(A_1 \wedge A_2 | A_0) + P(A_3 | A_0) + \right. \\ &\quad \left. + P(A_4 | A_0) - P(A_3 \wedge A_4 | A_0) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

ahol a $P(A_i | A_0)$ feltételes valószínűségek fejezik ki azt a tényt, hogy az első bomlás mindenképpen megtörtént (A_0 esemény). Meghatározva az egyes részeket a teljes valószínűség ismét kifejezhető zárt alakban:

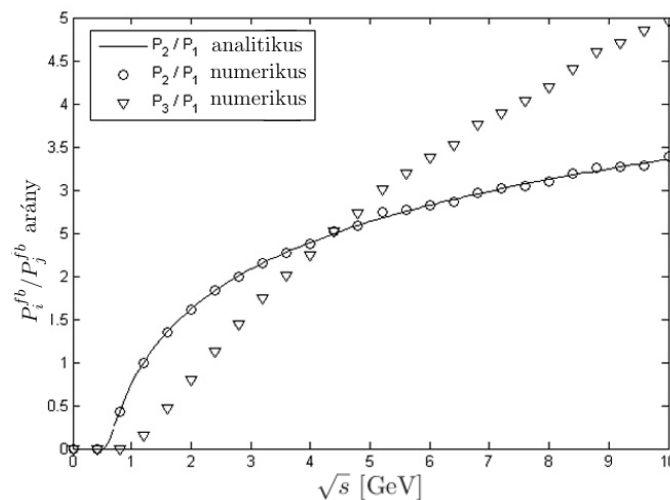
$$P_2^{fb}(M) = \begin{cases} \frac{2m_{krit}}{M} \left[\ln \left(\frac{M}{2m_{krit}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] & , 0 < \frac{m_{krit}}{M} < \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{2m_{krit}}{M} & , \frac{1}{3} \leq \frac{m_{krit}}{M} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (42)$$

melynek eredményét $m_{krit} = 2m_{\pi^0}$ kritikus tömeg esetén a 14. ábra szemlélteti, ahol az analitikus számítások mellett a numerikus eredményeket is feltüntettem.



14. ábra. 2-tűzlabda létrejöttének valószínűsége az energia függvényében. A fekete vonal az analitikus kifejezésből meghatározott valószínűséget, míg a körök a numerikus szimulációkból kapott értékeket jelölik.

A módszer ugyanígy alkalmazható 3, 4, ..., k tűzlabda esetén is, ám a $k \geq 3$ esettől mindenféleképpen numerikus integrálás szükséges a valószínűségek kiszámításához. Az 15. ábrán követhetőek az 1, 2, illetve 3-tűzlabda keletkezési valószínűségek arányai, ahol az első két esetben az analitikus, illetve numerikus Monte-Carlo számítások eredményeit is összehasonlítottam egymással.



15. ábra. A különböző számú tűzlabdák keltési valószínűségeinek arányai, ahol a 3-tűzlabdás esetet csakis numerikusan határoztam meg.

Az eredményekből könnyen belátható az a tény, hogy az ütközési energia növelésével egyre több tűzlabda keletkezik, amely magával vonja az azokból keletkező hadronok számának növekedését is. Tekintve, hogy a modell szerint minden egyes tűzlabdából 2, vagy 3 részecske keletkezhet, k tűzlabda keletkezése esetén a hadronok minimális száma $2k$, míg a maximális száma $3k$ lehet.

A következő magyarázatra szoruló része a hadronizációs valószínűségnek, a (25).

kifejezésében található $P_{n_i}^{H,i}$ fázisterek, illetve a Bootstrap-modellből származó faktorkok. Ez a rész felelős az adott (i)-edik tűzlabdából keletkező hadronikus végállapot valószínűségének meghatározásáért, melyben csakis hadronikus szabadsági fokok szerepelnek. A statisztikus Bootstrap-modellben előforduló különböző faktorokat ugyancsak ebben a részben tárgyalom. Mint azt korábban említettem, minden egyes kialakult tűzlabda 2, vagy 3 hadront adhat ki magából, amely a Bootstrap-egyenlet Frautschi-féle megoldásának egy következménye, ahol kiderült, hogy a bomlás során ezek lesznek a domináns kontribúciók és egy adott tűzlabdában a 3-nál nagyobb számú végállapotok valószínűsége elhanyagolható. Persze ettől függetlenül a tűzlabdák száma akármekkora is lehet, így ez nem korlátozza a kialakuló hadronok maximális számát. Két-, illetve három részecske esetében ez a hadronizációs faktor a következő alakot ölti:

$$P_2^{H,i}(x) = P_2^d \frac{\Phi_2(x, m_1, m_2)}{(2\pi)^3 \rho(x) N_I!} \prod_{l=1}^2 (2s_l + 1), \quad (43)$$

$$P_3^{H,i}(x) = P_3^d \frac{\Phi_3(x, m_1, m_2, m_3)}{(2\pi)^6 \rho(x) N_I!} \prod_{l=1}^3 (2s_l + 1), \quad (44)$$

ahol $P_2^d = 0.69$, $P_3^d = 0.24$ annak a valószínűségei, hogy az i -edik tűzlabda 2, vagy 3 hadront ad ki magából, továbbá N_I a végállapotban levő azonos hadronok számát, míg s_l a hadronok spinjét jelölik. A $\rho(x)$ állapotssűrűség a Bootstrap-egyenlet megoldásából kapott, egyfajta normalizációért felelős faktor, melyet (16)-ból kiindulva a következő alakban írunk fel:

$$\rho(x) = \frac{x^b}{(m_0 + x)^{3+b}} e^{x/T_0}, \quad (45)$$

ahol az m_0 , illetve b paramétereket lefixáltam $m_0 = 500$ MeV, illetve $b = 0.5$ értékekre. Tekintve, hogy a T_0 paraméter később még szerepet játszik a kvark-kombinatorikai faktoroknál, így azt a modell alkalmazása során illesztettem exkluzív és inkluzív hatáskeresztmetszetekhez, melynek értékére $T_0 = 160$ MeV adódott. Érdeemes megjegyezni, hogy az érték benne van a már korábban említett, a Bootstrap-modell alkalmazásával meghatározott 130-170 MeV-es tartományban. A különbség (16) és (45) kifejezések között az, hogy az utóbbiban nem szerepel az "a" szabad paraméter, amely ebben a modellben a (22)-ban szereplő normalizáció miatt mindig kiesik, így értéke itt nem releváns.

A fázisterek számításánál megkülönböztettem a "stabil", illetve "instabil" (rezonáns) hadronokat, mely eseteket külön kell kezelni. A modellben egy nem alapállapotú hadron instabil, ha nem elhanyagolható szélességgel rendelkezik és erősen tovább bomolhat egy alacsonyabban fekvő (kisebb tömegű) hadronikus állapotba. Ilyen részecskék például a nukleonrezonanciák, melyek tipikusan egy alapállapotú nukleonba (proton/neutron) és egy vagy több pionba bomolhatnak. Figyelembe véve a kétfajta részecskét a k -részecskés fázistér általánosan a következő alakban fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, m_1, \dots, m_k) = & V^{k-1} \left(\int \prod_{i=1}^k d^3 \vec{q}_i \right) \left(\int \prod_{r \in R} dE_r F_r^{BR}(x, m_r) \right) \times \\ & \times \delta \left(\sum_{j=1}^k E_j - x \right) \delta \left(\sum_{j=1}^k \vec{q}_j \right), \end{aligned} \quad (46)$$

ahol x a hadronizálódó tűzlabda energiája ³, E_j a j -edik részecske energiája, míg \vec{q}_j a j -edik részecske hármassimpulzusa. Az $\prod_{r \in R}$ szorzat azt jelképezi, hogy az energiára vonatkozó integrálás csakis rezonanciák (R) esetén szükséges, hiszen ekkor a határozatlansági reláció értelmében a részecskék nem feltétlenül vannak tömeghéjon, azaz a $\delta(E^2 - |\vec{q}|^2)$ kényszerfeltétel nem szorítja meg az energiát és az impulzusokat. Ennek értelmében a fenti szorzat csakis a rezonanciákon megy végig, míg stabil részecskék esetén az energiaszerinti integrálás eltűnik. Az utolsó faktor $F_r^{BR}(x)$, amely megjelenik az integrálban, azt hivatott jelképezni, hogy a rezonanciák invariáns tömegeloszlását egy normalizált Breit-Wigner faktoriall vesszük figyelembe, azaz:

$$F_r^{BR}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^2 \Gamma_i}{(x^2 - m_r^2)^2 + x^2 \Gamma_r^2}, \quad (47)$$

ahol m_r a rezonancia pólushelyzetét (tömegét), míg Γ_r annak a szélességét jelöli. Természetesen stabil részecskék esetén $F_r^{BR} = 1$ és csak a hármassimpulzus szerinti integrálokat kell elvégezni. Érdekes észrevenni, hogy a fázistérintegrálok relativisztikusan nem invariánsak, azaz nem tartalmazzák a Lorentz-invarianciát biztosító $1/2E_i$ faktorokat. Ennek elsődleges oka, hogy a Hagedorn, illetve Frautschi által levezetett Bootstrap-egyenlet alapvetően a nem-kovariáns fázisterekre lett megfogalmazva, így az azokból meghatározott állapotosságok is abból erednek. Létezik a Bootstrap-egyenletnek kovariáns felírása is, ám a kísérleti adatok értelmezésénél az alap Bootstrap-modell a legtöbb helyen jobbnak bizonyult. A fentiekből kiindulva, mivel a modell tartalmazza a Frautschi által levezetett állapotosságok is, a (46)-ban szereplő 2-, illetve 3-részecske fázistereknek a nem-kovariáns alakját alkalmazom. Ezek mindkét esetben zárt alakban kifejezhetőek az alábbi módon:

$$\Phi_2(x, m_1, m_2) = \frac{V\pi}{2x^4} \left(x^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2 \right) \sqrt{\lambda(x^2, m_1^2, m_2^2)}, \quad (48)$$

ahol $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ Källén-függvény.

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, m_1, m_2, m_3) = 8\pi^2 V^2 \left[\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 + \frac{x^2}{6} \sum_{i=1}^3 m_i^3 + \right. \\ \left. + \frac{x}{4} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 m_i^2 m_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i^4 \right] + \frac{1}{30} \sum_{i=1}^3 m_i^5 - \frac{1}{6} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \{i \neq j\}}}^3 m_i^3 m_j^2 \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Az utolsó magyarázatra szoruló faktor a hadronizációs valószínűség (24)-es kifejezésében az ún. kvark-kombinatorikai faktor, amely lényegében leszámolja az összes lehetséges kvark/antikvark konfigurációt, melyből felépülhetnek a tűzlabdákból kijövő hadronikus végállapotok, figyelembe véve az lehetséges szín, illetve íz szabadsági fokokat is. Normalizáció után ez a faktor egy valószínűséget definiál, amely megmondja, hogy az egy tűzlabdából kijövő 2, illetve 3 hadronból álló végállapot mekkora arányban keletkezhet az ütközés során létrejött, valamekkora számú u, d, s, c, b, t kvarkokból, illetve antikvarkokból. Ehhez első körben természetesen becslést kell tenni az adott energián létrejövő kvark és antikvark multiplicitásokra, melyhez egy egyszerű fázisteres modellt alkalmaztam [113, 114]. A modell kiindulási pontja, hogy tömegtelen kvarkokat

³A hadronizációs integrálokat a tűzlabdák nyugalmi rendszereiben végezzük el, azaz például az i -edik tűzlabda négyesmomentuma $Q_i = (x_i, 0, 0, 0)$.

feltételezve a kvarkokra vonatkozó Lorentzinvariáns n -részesce fázistérnek létezik egyszerű kifejezése:

$$\begin{aligned}\Phi_N^{kvark}(x) &= \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 p_i}{2E_i(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(P^\mu - \sum_{i=1}^N p_{\mu,i}\right) = \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^{2N-3}} \frac{x^{2N-4}}{\Gamma(N)\Gamma(N-1)},\end{aligned}\quad (50)$$

ahol x a hadronizálódó tűzlabda invariáns tömegét, míg $\Gamma(N)$ az ismert Gamma-függvényt jelöli. Termikus egyensúlyban, feltételezve, hogy az N kvark keletkezésének valószínűségi eloszlása arányos $\Phi_N(x)$ -el, kiszámítható x^2 (azaz az invariáns tömegnégyzet) várható értéke:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int dx x^2 \Phi_N^{kvark}(x) e^{-x/T_0}}{\int dx \Phi_N^{kvark}(x) e^{-x/T_0}} = 4N(N-1)T_0^2, \quad (51)$$

ahol N az x invariáns tömeg esetén kialakult kvarkok (antikvarkok) számát jelöli, míg a T_0 paramétert a Bootstrap-egyenletből meghatározott határhőmérséklettel azonosítottam, amely a (45). kifejezésben szereplő állapotsűrűségben is megjelenik. Megoldva a másodfokú egyenletet N -re, kifejezhető, az adott energián létrejövő kvarkok (antikvarkok) száma:

$$N(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2/T_0^2}}{2}. \quad (52)$$

Ezen a ponton még nincsen különbség a kvark ízek között, hiszen a számítások tömegtelen kvarkokra vonatkoztak. u , illetve d kvarkok esetén a kvarkok igen kis tömegei miatt ez a közelítés értelmes, ám a nehezebb kvarkok esetén más megfontolás szükséges. A modellben ezt a problémát úgy kezeltem, hogy minden kvarkízhez bevezetek egy kvarkkeletkezési-valószínűséget (P_i , ahol $i = u, d, s, c, b, t$), amely megadja annak a valószínűségét, hogy egy adott ízű kvark keletkezik. Ezek a valószínűségek lesznek a modell legfontosabb szabad paraméterei, hiszen a többi paramétert (V, T_0, m_0) a Bootstrap-modell vagy meghatározta, vagy legalábbis erősen korlátozta. Az u és d kvarkok esetén a keletkezési valószínűségekre értelmes közelítést tehetünk, ha feltesszük, hogy $P_u \approx P_d$. Ez a feltevés önmagában is elegendőnek bizonyult a könnyű kvarkokat tartalmazó végállapotok hatáskeresztmetszeteinek becslésénél. A nehezebb kvarkok esetén azonban szükséges a keletkezési valószínűségek illesztése, melyről később részletesen is szó esik majd. A keletkezési valószínűségek ismeretével meghatározható egy olyan eloszlás, amely megadja egy adott $[n_u, n_d, n_s, n_c, n_b, n_t]$ kvarkkonfiguráció valószínűségét:

$$F(N(x), n_i) = \frac{N(x)!}{\prod_i n_i!} \prod_i P_i^{n_i}, \quad (53)$$

ahol n_i az $i = u, d, s, \dots$ ízű kvarkok száma, $N(x)$ az x invariáns tömeg esetén létrejövő összes kvarkok száma ⁴, továbbá P_i az i ízű kvark keletkezési valószínűsége. Az $F(N, n_i)$ függvény multinomiális eloszlás néven is ismert, amely megadja, hogy N ismétlésből hányszor kapunk n_i eseményt, ha azok P_i valószínűséggel fordulnak elő, és kielégítik a $\sum_i n_i = N$, illetve $\sum_i p_i = 1$ kényszerfeltételeket. A kvarkszámok, illetve az azokból számolt kvark-kombinatorikai faktorok energiától való folytonosságának érdekében $n_i \geq$

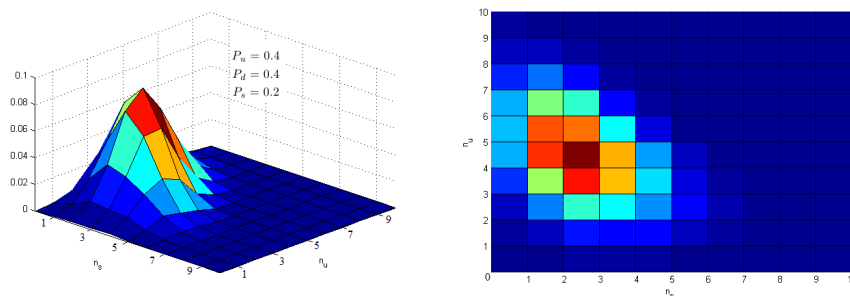
⁴A továbbiakban az egyszerűsítés érdekében elhagyásra kerül az $N(x)$ energiafüggés jelzése az összes kvarkok számáról.

1 esetén a multinomiális eloszlásnak a Gamma-függvényekkel definiált alakját alkalmazom, ezzel megengedve nem egész n_i értékeket is:

$$F(N; n_i) = \frac{\Gamma(N+1)}{\prod_i \Gamma(n_i+1)} \prod_i P_i^{n_i}. \quad (54)$$

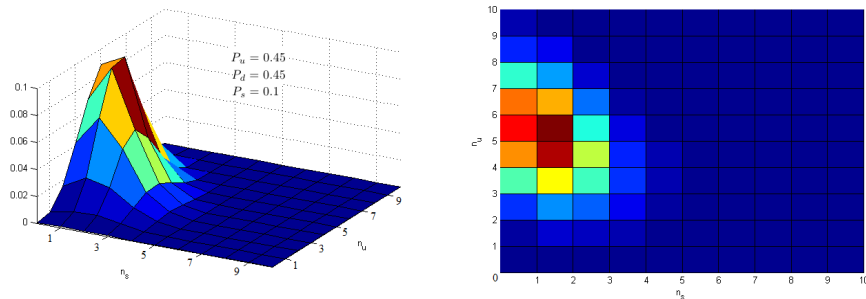
Ebből a kifejezésből könnyen belátható, hogy az adott ízű kvarkok számának várható értéke $\langle n_i(x) \rangle = P_i N(x)$, amely az eloszlás szimmetrikusságából következően annak éppen a maximumhelyével esik egybe. A modellben feltételezem, hogy az adott energián keletkezett kvarkok számát az (54)-ből meghatározott $\langle n_i \rangle$ várható értékekhez tartozó konfiguráció fogja megadni, melynek értelemszerűen csakis $n_i \geq 1$ esetén van értelme. Természetesen alapesetben az összes lehetséges konfigurációt figyelembe kéne venni a megfelelő valószínűséggel, majd kiintegrálni a teljes tartományra. Ennek kikerülése érdekében a megvalósuló kvark konfiguráció meghatározására az említett várhatóértékes módszert alkalmazom. Ekkor természetesen figyelembe kell venni, hogy az eloszlásnak minden részecskére van egy $\Delta n_i = \sqrt{N p_i (1 - p_i)}$ szórása, mely megadja a kvarkszámok bizonytalanságát. A modell kezdeti változatában a megvalósuló kvarkkonfigurációt a diszkrét multinomiális eloszlás maximumához (maximumaihoz) tartozó konfigurációval azonosítottam és csak egész n_i értékekkel számoltam, amely nem ad lényegi eltéréseket a folytonos modellhez képest.

Egy egyszerű példaként három kvarkot (u, d, s) feltételezve, tegyük fel, hogy azok keletkezési valószínűsége $P_u = 0.4$, $P_d = 0.4$, $P_s = 0.2$, melyre természetesen teljesül a $\sum_i P_i = 1$ feltétel. Kihasználva az $n_u + n_d + n_s = 1$ kényszerfeltételt, minden N esetre meghatározható egy két szabadsági fokú $F(N; n_u, n_d, 1 - n_u - n_d)$ eloszlás, amelynek maximuma megadja a legvalószínűbb kvarkkonfigurációt. Ezt az eloszlást ábrázolja az $n_u - n_s$ síkon $N = 10$ esetre az 16. ábra, ahol látható, hogy a legvalószínűbb esetben $(n_u, n_d, n_s) = (4, 4, 2)$, amely megegyezik az elvárt eredményekkel.



16. ábra. A multinomiális eloszlásból meghatározott $F(N = 10; n_u, n_d, 1 - n_u - n_d)$ kvarkszám eloszlás 3 kvark esetén $P_u = 0.4$, $P_d = 0.4$, $P_s = 0.2$ valószínűségekkel.

A fentiekből következtethető, hogy csökkentve a kvark keletkezési valószínűségeket az eloszlás maximumához tartozó várhatóértékek is csökkenni fognak, melyre egy jó példa az 17. ábrán szemléltetett eloszlás, ahol $P_s = 0.1$ -et és $P_u = P_d = 0.45$ -as valószínűségeket véve n_s még inkább lecsökken $n_{u,d}$ -hez képest. Említésre érdemes, hogy a diszkrét esetben ilyenkor két lehetőség adódik, azaz a $(n_u, n_d, n_s) = (4, 5, 1)$, illetve a $(n_u, n_d, n_s) = (5, 4, 1)$ konfigurációt egyenlő valószínűséggel választhatjuk. Folytonos esetben természetesen az $(n_u, n_d, n_s) = (4.5, 4.5, 1)$ konfigurációval lehet továbbszámolni.



17. ábra. A multinomiális eloszlásból meghatározott $F(N = 10; n_u, n_d, 1 - n_u - n_d)$ kvarkszámeloszlás 3 kvark esetén $P_u = 0.45$, $P_d = 0.45$, $P_s = 0.1$ valószínűségekkel.

Igen kis valószínűségek esetén előfordulhat azonban, hogy alacsony energiákon a legvalószínűbb esetben az adott ízű kvark várhatóértéke $\langle n_i \rangle \approx 0$ lesz, amely diszkrét esetben megtiltaná az ilyen kvarkokat tartalmazó hadronok létrejöttét. Ez természetesen nem igaz, hiszen az (54) eloszlás szerint ebben az esetben is van valamekkora valószínűsége az ilyen kvarkok létrejöttének. Az ilyen esetekben felteszem, hogy az adott hadron létrejöttéhez szükséges számú (kis valószínűségű) kvark biztosan keletkezni fog, majd azt a konfigurációt veszem megvalósulónak, ahol az $F(N; n_i)$ eloszlás az említett kényszerfeltétel mellett felveszi a maximumát. Ebben az esetben kifejezhető az ahhoz a konfigurációhoz tartozó elnyomás, amelyben a megfelelő számú kis valószínűségű kvark létrejöhet, ha összehasonlítjuk a kényszerfeltételek nélküli konfiguráció maximumával. Meghatározva a kétfajta eloszlás arányát, kifejezhető egy elnyomási faktort, amely megadja, hogy a kis valószínűséggel rendelkező kvarkot is tartalmazó adott konfiguráció milyen elnyomással jöhet létre az eredeti konfigurációhoz képest.

$$\gamma = \frac{F(N; \langle n'_i \rangle)}{F(N; \langle n_i \rangle)}, \quad (55)$$

ahol a vesszővel jelzett $\langle n'_i \rangle$ a kényszerfeltételekkel meghatározható új konfigurációhoz tartozó kvarkok számát, míg $\langle n_i \rangle = P_i N$ az eredeti konfigurációhoz tartozó kvarkszámokat jelöli. A későbbi fejezetekre előrevetítve tegyük fel, hogy egy nehéz kvarknak (legyen a c -kvark) igen kicsi a keletkezési valószínűsége, ami miatt az alap eloszlás szerint valamekkora energián 1-nél kevesebb (azaz praktikusán nulla) ilyen kvark keletkezhetne. A fentiekből kiindulva tegyük fel továbbá, hogy 1 darab c -kvark mégis keletkezni fog, mondjuk az s -kvark "kárára", azaz felteszem, hogy $\langle n'_c \rangle = 1$, illetve $\langle n'_s \rangle = \langle n_s \rangle - 1$. Ebben az esetben a kvarkok várható számát behelyettesítve az eloszlásokba, a következő eredményt kapjuk az elnyomási arányra:

$$\gamma = \frac{\Gamma(\langle n_s \rangle + 1) P_c}{\Gamma(\langle n_s \rangle) P_s} = P_c N. \quad (56)$$

Az eredmény szerint a kis valószínűségű kvarkokhoz tartozó elnyomások arányosak lesznek a keletkezési valószínűségükkel, illetve az összes kvark számával. Az energia növelésével természetesen N is nőni fog, ami magával vonja az elnyomás csökkenését is, amely értelemszerűen $\gamma = 1$ értékig értelmes, hiszen ekkor a globális maximum éppen egybe fog esni a kényszerfeltételekkel meghatározott lokális maximummal, vagyis nincs értelme többé elnyomásról beszélni. Ebben az esetben a kis valószínűségű kvark várhatóértéke

a szokásos $\langle n_i \rangle = P_i N$ lesz. Ez a példa megelőlegezte az 3.5. fejezetben bemutatásra kerülő pontokat, ahol c és b kvarkokat tartalmazó hadronok keletkezéseivel foglalkozom.

A modellszámítások, illetve a kísérletileg meghatározott hatáskeresztmetszetek összehasonlításából illesztett kvarkkeletkezési-valószínűségeket foglalja össze az 3. Táblázat.

Kvark íz	P_i	Illesztve
u	0.425 ± 0.025	p, n, π, Δ, \dots hatáskeresztmetszetekből
d	0.425 ± 0.025	p, n, π, Δ, \dots hatáskeresztmetszetekből
s	0.15 ± 0.05	K, K^*, Λ hatáskeresztmetszetekből
c	$a_c x, \left(a_c = 8.5 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1} \right)$	$J/\Psi, \Psi, \chi_c, D$ hatáskeresztmetszetekből.
b	$a_b x, \left(a_b = 1.05 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1} \right)$	Υ, χ_b, B hatáskeresztmetszetekből.
t	-	-

3. táblázat. A P_i kvarkkeletkezési-valószínűségek illesztett értékeinek összefoglalása.

Az u, d, s kvarkokhoz tartozó bizonytalanság annak a következménye, hogy mind a modellszámítások, mind a kísérleti eredmények hibákkal terhelték, így ezen értékeket is csak bizonyos hibákkal lehet meghatározni. A modellszámításoknak a már említett Δn_i kvarkszám bizonytalanság mellett nemsokára becslést teszek a teljes bizonytalanságra is melyeket mindenképpen figyelembe kell venni a paraméterek illesztésénél. Kis multiplicitású exkluzív folyamatok, illetve azok arányai esetében a kicsit nagyobb $P_s \approx 0.2$ körüli értékek tipikusan jobbnak bizonyultak, ám inkluzív hatáskeresztmetszeteknél a hibahatáron belüli minden érték kielégítő eredményeket képes adni. Mivel számomra elsődlegesen az inkluzív folyamatok az érdekesek, ezért az illesztéseket is főként arra alapoztam.

Az 3. Táblázatban összefoglalt c és b kvark keletkezési valószínűségek még ebben a részben némi további magyarázatra szorulnak. Ezekben az esetekben egy lineáris $P_{c,b} = a_{c,b} x$ funkcionális formát alkalmaztam, vagyis a c és b kvark keletkezési valószínűségek energiafüggőek. Ez fizikailag természetesnek hangzik, hiszen feltételezhető, hogy a kvarkkeletkezési-valószínűségek az energia növelésével tartanak egy közös értékhez, amit alátámasztanak a mélyen rugalmatlan ütközésekből meghatározható partonikus eloszlásfüggvények energiafüggései [115, 116], vagy éppen a PYTHIA eseménygenerátorból kiszedhető, a hadronizációs lépés előtti kvarkok számainak energiafüggései is. Ez az energia igen nagy is lehet (c kvarkokra TeV nagyságrend), melyre becslést is fogok adni a 3.6. fejezetben, ahol nagyenergiás $\sqrt{s} = 7$ TeV-es ütközésekben keltett tetra-kvarkok keltési hatáskeresztmetszeteit vizsgálom meg. Kis energiákon (pár GeV) az illesztés során azt az eredményt kaptam, hogy a lineárisan növekvő valószínűségek jobb eredményt adnak, mint a konstans értékek. Természetesen, ha ezek változnak az energia függvényében, akkor a többi értéknek is változnia kell, például a $P'_i = P_i - P_c/3 - P_b/3$ módon, ahol $i = u, d, s$. A modellszámítások, illetve a mérési eredmények összehasonlítása során belátható azonban, hogy az alacsonyenergiás $\sqrt{s} < 20$ GeV-es régióban, amely az elsődleges alkalmazási területe a modellnek, a változás elenyésző, így a fent meghatározott értékeket biztonsággal lehet alkalmazni, vagyis $P'_i \approx P_i$ becslés értelmes.

Egy utolsó megjegyzés a kvarkkeletkezési-valószínűségekkel kapcsolatban az s kvarkra vonatkozik, melynek értéke egy kicsit kisebb, mint az u, d kvarkoké, továbbá a vizsgált tartományban $\sqrt{s} < 20$ GeV nem energiafüggő. Természetesen ebben az esetben is feltehető, hogy P_s növekszik az energiával, ám az illesztés során alkalmazott energiatar-

ományon belül a konstans érték megfelelőnek bizonyult és nem volt szükség egyéb funkcionális forma alkalmazására. Ez vagy annak köszönhető, hogy a küszöbértékhez közeledve a növekedés lelassul és a sima lineáris forma már nem képes leírni a keletkezési valószínűségek küszöbkörnyéki viselkedését, vagy egyszerűen P_s meredeksége annyira kicsi, hogy a vizsgált tartományban a hibahatárokon belül nem lehetett értelmes különbséget tenni a konstans, illetve a lineáris forma között. Az előbbi megjegyzés természetesen igaz a konstans aktuális értékének megválasztására is, melyre az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a $P_s = 0.15$ értéket alkalmazom.

Továbbhaladva, ha ismertek a kvarkkeletkezési-valószínűségek, illetve az adott energián létrejövő n_i kvarkszámok, minden akadály elhárult az elől, hogy a kvark-kombinatorikai faktorok kiszámításra kerüljenek. Mint azt korábban láttuk ez a faktor adja meg az összes lehetséges szín-íz kombinációt, amely képes kiadni egy adott tűzlabdából kijövő 2, vagy 3 részecskés hadronikus végállapotot. Ennek érdekében leszámoljuk az összes színsemleges kombinációt a lehetséges $\langle n_i \rangle$ ($i = u, d, s, c, b, t$) kvarkokból, melyet beszorozva az $\langle n_i \rangle$ várható kvarkszámokhoz tartozó, (54)-ben meghatározott eloszlás értékével, majd normalizálva a 2, és 3 részecskés esetekre megkapjuk azt a kvark-kombinatorikai faktort, amely megmondja, hogy mekkora a valószínűséggel alakulhat ki a 2, vagy 3 hadronos végállapot, adott számú kvarkból és antikvarkból. Precízebben megfogalmazva egy Q_k tűzlabdából 2, illetve 3 hadronos esetekre (AB), illetve (ABC) hadronokkal:

$$C_{Q_k, (AB, ABC)} = \frac{1}{\mathcal{N}_k^{(2,3)}} F(N; \langle n_i \rangle) \left[\prod_{i=1}^{2,3} \mathcal{C}_i \right] \left[\prod_{i=1}^{M_{2,3}} \frac{\Gamma(\langle n_i \rangle + 1)}{\Gamma(\langle n_i \rangle - n_i^0 + 1)} \right], \quad (57)$$

ahol \mathcal{C}_i az i -edik hadronra vonatkozó színsinglet lehetőségeket leszámoló faktor, Q_k jelöli a k -adik tűzlabdát, az $M_{2,3}$ a 2/3 hadronos végállapotokban szereplő kvarkok száma, $\langle n_i \rangle$ a (54)-ből meghatározott várható kvarkmultiplicitás, míg n_i^0 a végállapotú hadronokban szereplő i -edik kvarknak a száma. Mivel a végállapotban mezonok, illetve barionok is lehetnek ezért például két mezon esetén $M_2 = 4$, míg 3 barion esetén $M_3 = 9$ lesz. Hasonló megfontolásokból indultak ki [117]-ben, ahol az s kvarkokat tartalmazó barionok és mezonok arányait kívánták magyarázni kvark-kombinatorikai faktorokkal.

Az $\mathcal{N}_k^{(2,3)}$ normalizációs faktorban 2, illetve 3 hadronos esetben felösszegzem az adott tűzlabda kvantumszámait által megengedett hadronikus végállapotok kombinatorikai faktorait a következő módon:

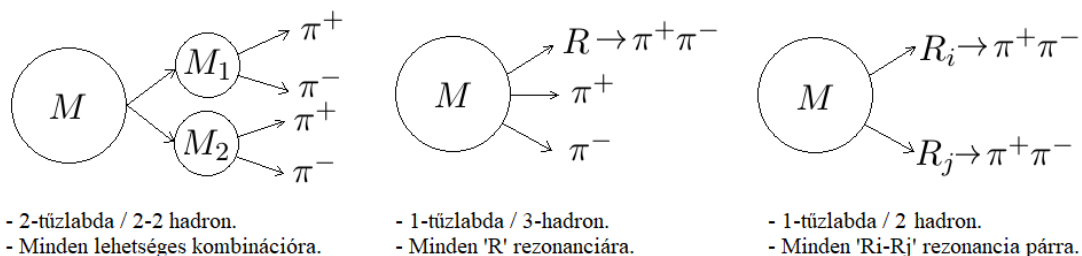
$$\mathcal{N}_k^{(2)} = \left[\sum_{ab \in \mathcal{S}} F(N; \langle n_i \rangle) \left[\prod_{i=1}^2 \mathcal{C}_i \right] \left[\prod_{i=1}^{M_2} \frac{\Gamma(\langle n_i \rangle + 1)}{\Gamma(\langle n_i \rangle - n_i^0 + 1)} \right] \right] \quad (58)$$

$$\mathcal{N}_k^{(3)} = \left[\sum_{abc \in \mathcal{S}} F(N; \langle n_i \rangle) \left[\prod_{i=1}^3 \mathcal{C}_i \right] \left[\prod_{i=1}^{M_3} \frac{\Gamma(\langle n_i \rangle + 1)}{\Gamma(\langle n_i \rangle - n_i^0 + 1)} \right] \right], \quad (59)$$

ahol \mathcal{S} jelöli azon hadronikus végállapotokat, melyeknek kvantumszámait azonosnak a k -adik tűzlabda kvantumszámaital. Látható továbbá, hogy a kvarkszámok várhatóértékéhez tartozó eloszlás értéke nem játszik nagy szerepet, hiszen az a normalizáció során eltűnik. Ennek a faktornak akkor van jelentősége, ha nagyon kis keletkezési valószínűségű kvarkokat tartalmazó hadronok kombinatorikai faktorait vizsgáljuk, hiszen ekkor, mint az korábban említésre került, figyelembe kell venni az (56)-ban definiált elnyomást

is. Egy további megjegyzés a kvark-kombinatorikai faktorokhoz a kezdeti kvarkkonfigurációkkal kapcsolatos, azaz azokkal a kvarkokkal melyek az ütköző hadronokat építik fel. Ahhoz, hogy a végállapotú hadronok felépítése után ne maradjanak párosítatlan kvarkok/antikvarkok, figyelembe kell venni a kezdeti részecskéket felépítő kvarkokat is, azaz ha az ütköző részecskék n_i^0 számú i -ízű kvarkot tartalmaztak, akkor a kombinatorikai faktoroknál $n_i = \langle n_i \rangle + n_i^0$ kvarkkal kell számolni. A megmaradási törvényeknek eleget tevő végállapotok biztosítják, hogy ebben az esetben az ütközés végén nem maradnak párosítatlan kvarkok és antikvarkok.

Ezzel a model általános leírásának végéhez értünk, azonban a leírtakhoz még két további megjegyzést érdemes tenni. Abban az esetben, ha egy adott végállapot többféleképpen is létrejöhet, az összes lehetséges esetet figyelembe kell venni, azaz meg kell határozni a $\sum_{k=1}^N W_{k,i_1,\dots,i_k}$ összeget, ahol N a lehetséges esetek száma. Ilyen például a $2\pi^+2\pi^-$ hadronos végállapottal rendelkező folyamat, amely a 18. ábrán látható 1-, illetve 2-tűzlabdás módokon jöhet létre.



18. ábra. A $(2\pi^+2\pi^-)$ végállapot lehetséges 1-, illetve 2-tűzlabdás folyamatainak szemléltetése.

A második megjegyzés a $2 \rightarrow 1$ folyamatokhoz kapcsolódik, mely esetekkel a statisztikus modellen belül nem foglalkozom, hiszen a Bootstrap-leírásból kiindulva a végállapotú részecskék számának minimuma kettő. Természetesen kis energiákon ezek is fontosak lehetnek, például $\pi^+\pi^-$ keltésnél, ahol a két pion létrejöhet egy ρ rezonancia bomlástermékeként is. Az ilyen folyamatokhoz relativisztikus Breit-Wigner-hatáskeresztmetszeteket rendeltek [118], melyek leírják az $A + B \rightarrow C$ folyamatok valószínűségeit a következő módon:

$$\sigma^{BR}(\sqrt{s}) = \frac{2s_C + 1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \frac{4\pi}{p_i^2} \frac{s\Gamma_{C \rightarrow AB}\Gamma_{tot}}{(s - m_C^2)^2 + s\Gamma_{tot}^2}, \quad (60)$$

ahol s_{ABC} az adott részecskék spinjeit, Γ_{tot} a rezonancia teljes szélességét, p_i a tömegközéppontbeli impulzust, míg $\Gamma_{C \rightarrow AB}$ a C rezonancia AB végállapotban bomló parciális szélességét jelöli. Figyelembe véve a fentebb leírtakat egy általános $2 \rightarrow n$ folyamat az alábbi alakban adható meg:

$$\sigma(\sqrt{s}) = \sum_j \sigma_j^{BR}(\sqrt{s}) + \sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s}) \sum_{k=1}^N W_{k,i_1,\dots,i_k}(\sqrt{s}), \quad (61)$$

ahol az első összegben figyelembe veszem az összes $2 \rightarrow 1$ folyamatot a Breit-Wigner-hatáskeresztmetszetekkel, míg a második összegben meghatározom a lehetséges k -tűzlabdás eseteket, melyek kiadhatják a keresett i végállapotot, majd ezek összegét beszorzom az $A + B$ folyamat inelasztikus hatáskeresztmetszetével.

A következő alfejezetben bemutatom a modell néhány alkalmazási lehetőségét, melynek során exkluzív és inkluzív reakciók hatáskeresztmetszeteinek meghatározása, illetve a modell hibájának becslése a cél. Ezek után néhány konkrét példán keresztül mutatom meg a modell alkalmazhatóságát különböző érdekesebb reakciókra is, mint például charmónium, illetve bottomónium állapotok, vagy éppen az $X(3872)$ lehetséges tetra-kvark állapot inkluzív keltése proton-antiproton, proton-proton, és pion-proton reakciókban.

3.2. Exkluzív/Inkluzív hatáskeresztmetszetek meghatározása és hibabecslés

A továbbiakban elhanyagolva a $2 \rightarrow 1$ reakciókat, majd kiindulva a (20). kifejezésből, egy adott $A+B \rightarrow X_1+X_2+\dots+X_l$ ütközési folyamat hatáskeresztmetszetét kifejezhetjük a folyamat inkluzív hatáskeresztmetszetének, illetve a statisztikus modellből meghatározott végállapoti valószínűségnek a szorzataként, azaz:

$$\sigma^{AB \rightarrow X_1, \dots, X_l}(\sqrt{s}) = \sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s}) \sum_k W_{k, i_1, \dots, i_k}(\sqrt{s}), \quad (62)$$

ahol AB az ütköző hadronokat, míg i_1, i_2, \dots, i_k a keletkező tűzlabdákat jelölik, melyek összességében adják ki az X_1, X_2, \dots, X_l végállapoti hadronokat. A k indexre vonatkozó összeg az adott folyamat különböző tűzlabdaszámú eseteit jelöli. Exkluzív és inkluzív reakciók során a hadronizációs valószínűség számításának a legkörülményesebb része a (22)-ben szereplő normalizációs összegek meghatározása, hiszen ahhoz az összes lehetséges tűzlabdás esetben figyelembe kell venni az összes létező részecskét és rezonanciát, amely feladat nem teljesen egyértelmű. Ennek oka, hogy a rengeteg jól ismert részecske mellett akadnak jó számmal olyanok is, melyek paramétereit, illetve kvantumszámait nem teljesen ismertek. Ezen részecskék nem ismerete értelemszerűen extra hibát ad a modellszámításokba, melyeket ahol lehet el kell kerülni. A modellben minden a PDG-ben szereplő legalább 3 csillagos részecskét és rezonanciát figyelembe veszek az ott szereplő paraméterekkel és kvantumszámokkal. A modell felépítéséből adódóan néhány esetben nem szükséges a teljes normalizációs összeg kiszámítása, amely jelentősen leegyszerűsíti ezen esetek számítását. Vegyünk például egy olyan folyamatot, amely csakis 1-tűzlabdás modellel írható le, azaz a végállapoti részecskék száma 2, vagy 3 lehet. Ekkor mondjuk két végállapoti részecskét véve az $A+B \rightarrow X_1+X_2$ folyamat hadronizációs valószínűsége kifejezhető a következő aránnyal:

$$W_{1, [X_1 X_2]}(\sqrt{s}) = \frac{\sigma^{AB \rightarrow X_1 X_2}(\sqrt{s})}{\sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s})}, \quad (63)$$

ahol feltesszük, hogy $\sigma^{AB \rightarrow X_1 X_2}$, illetve az $\sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s})$ hatáskeresztmetszetek ismertek. Legyen ez a folyamat egy olyan referencia csatorna, melynek segítségével egy másik $A+B \rightarrow Y_1 Y_2$ (nem ismert, szigorúan 1-tűzlabdás) folyamatot kívánok kifejezni. Ennek a folyamatnak a hadronizációs valószínűsége ugyancsak kifejezhető az $A+B$ ütközés inkluzív hatáskeresztmetszetével, azaz:

$$W_{1, [Y_1 Y_2]}(\sqrt{s}) = \frac{\sigma^{AB \rightarrow Y_1 Y_2}(\sqrt{s})}{\sigma_{inel}^{AB}(\sqrt{s})}, \quad (64)$$

ahol a keresett $\sigma^{AB \rightarrow Y_1 Y_2}$ exkluzív hatáskeresztmetszet egyelőre nem ismert. Véve a két folyamatra kapott hadronizációs valószínűségek arányát, a keresett hatáskeresztmetszet-

re azt kapjuk, hogy:

$$\sigma^{AB \rightarrow Y_1 Y_2}(\sqrt{s}) = \sigma^{AB \rightarrow X_1 X_2}(\sqrt{s}) \frac{W_{1,[Y_1 Y_2]}(\sqrt{s})}{W_{1,[X_1 X_2]}(\sqrt{s})}, \quad (65)$$

ahol kiestek az inkluzív hatáskeresztmetszetek, továbbá a keresett hatáskeresztmetszet csakis az ismert referenciacsatornától, illetve a modellből számítható hadronizációs valószínűségektől függ. Természetesen ennél több is állítható, hiszen tekintve, hogy mind a referencia, mind a keresett csatornák ugyancsak 1-tűzlabdás esetekből számíthatóak, továbbá mindkét folyamat ugyanazokkal a kvantumszámokkal rendelkezik a (22)-ben található normalizációs faktorok, illetve tűzlabda keletkezési valószínűségek mind kiesnek és marad a következő egyszerű kifejezés:

$$\sigma^{AB \rightarrow Y_1 Y_2}(\sqrt{s}) = \sigma^{AB \rightarrow X_1 X_2}(\sqrt{s}) \frac{T_{[Y_1 Y_2]}(\sqrt{s})}{T_{[X_1 X_2]}(\sqrt{s})}. \quad (66)$$

ahol a (24)-ben definiált $T(\sqrt{s})$ függvény tartalmazza a fázistérfaktorokat, illetve a kvark-kombinatorikai valószínűségeket. Az imént vizsgált esetben feltéve, hogy a hadronok nem tartalmaznak nagyon kis valószínűségű (c,b,t) kvarkokat, ebből a faktorból még egyéb dolgok is kiesnek, mint például a kvark kombinatorikai valószínűségek normalizációja, az állapotsűrűség $\rho(x)$, a 2-hadron keletkezési valószínűség P_2^d , illetve a megvalósuló kvarkkonfigurációhoz tartozó, a multinomiális eloszlásból meghatározott $F(N; \langle n_i \rangle)$ valószínűségek. Abban az esetben, ha az egyik csatorna 3-, míg a másik 2-hadronos végállapottal rendelkezik, akkor figyelembe kell venni $P_{2,3}^d$ faktorokat is, továbbá a kvark-kombinatorikai faktorok normalizációja sem esik ki. Az utolsó speciális eset, ha az egyik reakcióban szerepelnek nagyon kis valószínűségű kvarkok, míg a másikban nem, ami miatt figyelembe kell venni a (55)-ben definiált elnyomási faktort is, vagyis ekkor nem esnek ki a kvark-kombinatorikai faktorokban szereplő $F(N; \langle n_i \rangle)$ valószínűségek sem. Ilyen esettel találkozhatunk, ha például a $p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^-$ referenciacsatornához akarjuk hasonlítani a c kvarkot is tartalmazó $p\bar{p} \rightarrow J/\Psi \pi^0$ csatornát, amely ilyen reakciók számításakor elengedhetetlen, hiszen jelenleg nem léteznek alacsonyenergiás mérések exkluzív charmkeltési reakciókra. Az imént vizsgált esetről lényeges feltétel volt, hogy két olyan reakció került összehasonlításra, melyek csakis egy adott számú tűzlabdából jöhetnek létre, azaz nem keverednek más tűzlabdás esetekkel. Ez lényeges, ha azt szeretnénk elérni, hogy a normalizációs faktorok kiessenek, hiszen azok a különböző tűzlabdás esetekben eltérőek.

A fenti egyszerű módszer lehetőséget teremt rengeteg $2 \rightarrow 2$, illetve $2 \rightarrow 3$ reakció hatáskeresztmetszetének meghatározására anélkül, hogy az összes egy tűzlabdás esetre ki kéne számolni a hadronizációs valószínűséget, így sokszor egyszerű zárt alakban megadható a keresett hatáskeresztmetszet, melyre a következő fejezetben több példát is mutatok majd. Mielőtt azonban a konkrét példákra térnék, megmutatom, hogy egy hasonló módszer létezik az inelasztikus hatáskeresztmetszetek meghatározására is. Az ilyen $A + B \rightarrow X$ folyamatokat, ahol X bármilyen végállapot lehet, alapesetben igen nehéz lenne meghatározni, hiszen értelemeszerűen fel kéne összegezni az összes lehetséges folyamatra, amely a normalizáció miatt sok tűzlabda esetén igen számításigényes feladat lenne. A következőkben az olyan $A + B \rightarrow C + X$ folyamatokat vizsgálom meg részletesebben is, ahol egy C részecske lefexálása mellett a végállapotban bármi más (X) létrejöhethet. Az ilyen inkluzív folyamatok igen fontosak a nehézion-reakciók modellezése

során, ha kis valószínűséggel keltődő részecskék leírása a cél. Az exkluzív hatáskeresztmetszeteknél bemutatott módszerhez hasonlóan vegyünk kezdetnek egy referenciacsatornát, melynek hatáskeresztmetszetét jelöljük σ_{ref} -vel. Az előzőekből kiindulva tegyük fel, hogy ez a folyamat szigorúan k -tűzlabdás, azaz semmilyen más számú tűzlabdából nem jöhet létre, majd vegyük ennek a folyamatnak a hadronizációs valószínűségét két különböző normalizációval, amely csupán annyit jelent, hogy a normalizációs összegekben más folyamatok szerepelnek. Az első normalizáció legyen a szokásos inelasztikus összeg, amely figyelembe véve a megmaradási tételeket, tartalmazza az összes lehetséges k -tűzlabdás végállapotot. A második normalizáció kapcsolódjon az inelasztikus összeghez, ahol a normalizációs összegnek azon folyamatokat kell tartalmaznia, amelyben szerepel legalább egy C típusú részecske, és természetesen kielégítik a megmaradási tételeket. Ebben az esetben véve a k -tűzlabdás hadronizációs valószínűségek arányát a következő alakra jutunk:

$$\frac{\sigma_{ref}/\sigma_{inel}}{\sigma_{ref}/\sigma_{inkl}} = \frac{\sigma_{inkl}}{\sigma_{inel}} = \frac{\sum_{i \in inkl} \prod_{a=1}^k dx_a \frac{T_i(x)}{\sum_j T_j(x)} \delta(\sum_{a=1}^k x_a - \sqrt{s})}{\sum_{i \in inel} \prod_{a=1}^k dx_a \frac{T_i(x)}{\sum_j T_j(x)} \delta(\sum_{a=1}^k x_a - \sqrt{s})}, \quad (67)$$

ahol a referencia csatornára vonatkozó hadronizációs valószínűség egészében eltűnt és csak az adott k -tűzlabdás normalizációs összegek maradtak. Ebben az esetben a módszer előnye nem az, hogy kikerülhetjük a normalizáció kiszámítását, hanem az, hogy nem kell az összes tűzlabdás esetet kiszámítani ahhoz, hogy meghatározzuk az inkluzív hatáskeresztmetszetet. A legegyszerűbb esetben $k = 1$ -et véve az $A + B \rightarrow C + X$ inelasztikus hatáskeresztmetszet a következőképpen fejezhető ki:

$$\sigma^{AB \rightarrow CX}(\sqrt{s}) = \sigma_{inel} \frac{\sum_{j \in inkl} T_j(\sqrt{s})}{\sum_{j \in inel} T_j(\sqrt{s})} \quad (68)$$

A két tűzlabdás eset ennél kissé bonyolultabb, ám mint látni fogjuk a modell bizonytalansága ebben az esetben lecsökken, így érdemes velük foglalkozni. Ennek alakja:

$$\sigma^{AB \rightarrow CX}(\sqrt{s}) = \sigma_{inel} \left[\frac{\sum_{ij \in inkl} \frac{1}{N_{ij}!} \int dx \frac{T_i(x)}{\sum_a T_a(x)} \frac{T_j(\sqrt{s-x})}{\sum_a T_a(\sqrt{s-x})}}{\sum_{kl \in inel} \frac{1}{N_{kl}!} \int dx \frac{T_k(x)}{\sum_a T_a(x)} \frac{T_l(\sqrt{s-x})}{\sum_a T_a(\sqrt{s-x})}} \right] \quad (69)$$

A három tűzlabdás eset számítása numerikusan nem könnyű feladat a sok beépített rezonancia miatt, hiszen ekkor a lehetséges folyamatok száma is igen nagy is lehet. Praktikusan a két tűzlabdás esettel érdemes számolni, amely megfelelő modellbizonytalanság mellett képes igen jó becsléseket tenni inkluzív reakcióra.

A modell bizonytalanság becsléséhez össze kell hasonlítani a modellszámításokból kapott hatáskeresztmetszeteket a mérésekből származtatott hatáskeresztmetszetekkel. Tekintve, hogy mind a modell, mind a mérési eredmények hibákkal terheltek, a modell relatív hibájának kifejezéséhez első körben meghatározom a mérés és a modell relatív eltérését:

$$k = \frac{r_0 - W_1}{r_0}, \quad (70)$$

ahol $r_0 = \sigma_i/\sigma_{inel}$ mérésekből meghatározható mennyiség, míg W_1 az 1-tűzlabdás teljes hadronizációs valószínűség. A fenti arányt kiszámítva a 4 említett folyamatra egy széles energiatartományon, ahol minden energiához külön k érték tartozik, meghatározható

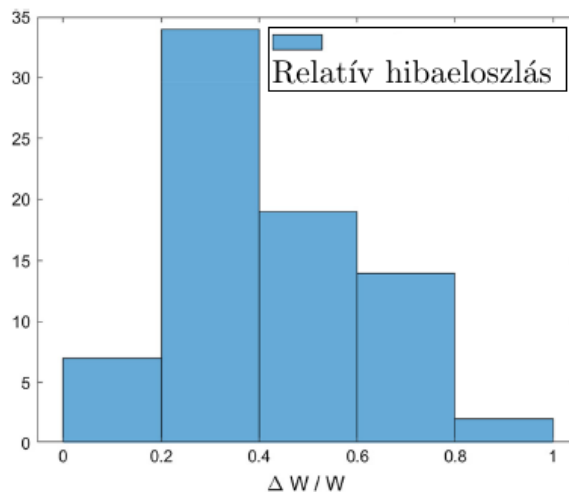
annak eloszlása. Alkalmazva a Gauss-féle hibaterjedési törvényt, feltételezve, hogy $\Delta\sigma_i \neq 0$, $\Delta\sigma_{inel} \neq 0$, és $\Delta W_i \neq 0$ kifejezhető a k "relatív hibaeloszlásnak" a Δk abszolút hibája:

$$\Delta k = \frac{W_1}{r_0} \left(\frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta W_1}{W_1} \right). \quad (71)$$

Mivel a mérésnek és a modellnek is figyelembe veszem a hibáját ezért Δr_0 és ΔW is szerepel a fenti képletben. Átrendezve (71)-et a modelltől származó relatív hibára, azaz $\Delta W_1/W_1$ -re, a következő kifejezést kapjuk, amely az 1-tűzlabdás modellszámítás relatív hibája lesz:

$$\frac{\Delta W_1}{W_1} = r_0 \frac{\Delta k}{W_1} - \frac{\Delta r_0}{r_0}. \quad (72)$$

Ezen a ponton felteszem, hogy a Δk bizonytalanság energiafüggetlen, továbbá becsülhető a mérések relatív hibaeloszlásának (k) szórásával. Ekkor a modell relatív hibájának eloszlása $\Delta W/W$ kifejezhető (72)-ből, melyet a 19. ábra szemléltet.



19. ábra. A statisztikus modell, mérésekből meghatározott relatív hibaeloszlásának hisztogramja ($f(\Delta W/W)$). A modell várható relatív hibáját ennek az eloszlásnak a várhatóértékéből származtatom.

Összefoglalva az előbbi lépéseket, a k relatív hiba kifejezéséből elméleti úton levezethető a $\Delta W_1/W_1$ 1-tűzlabdás modellszámítás relatív hibájának kifejezése, amely minden egyes mérési pontban más és más lesz. Ebben a kifejezésben szerepel a Δk relatív hiba megváltozása, melyet az összes mérési pontból meghatározott eloszlás szórásával becsültem meg. Ezen felül feltételezem, hogy Δk energiafüggetlen, azaz a (72)-es képletben Δk konstans lesz, mely az összes mérési pontból számítható. A (71)-es képletben szereplő további mennyiségek r_0 , Δr_0 , W_1 mind 1-1 értéket képviselnek minden egyes mérési pontban, vagyis a teljes képlet N mérési pont esetén N különböző értéket képvisel, amely a (19)-es ábrán látható eloszlást adja.

Továbbhaladva a modell relatív hibájára azt a feltételezést teszem, hogy becsülhető a rá vonatkozó hibaeloszlás várhatóértékével, azaz $\Delta W_1/W_1 \approx 0.4$. Egyszerűsítésként felteszem továbbá, hogy ez a bizonytalanság csakis a $T_i / \sum T_i$ faktorokból jön és nem tartalmazza a tűzlabda kialakulási valószínűségekért felelős P_i^{fb} faktorokat, így csupán egy

”legrosszabb eset” becslést teszek a normalizációt tartalmazó összegekre. A továbbiakban ezt az értéket veszem az 1-tűzlabdás valószínűség relatív hibájának, melyből a Gauss-féle hibaterjedési törvény további alkalmazásával meghatározhatóak a többi tűzlabdás esetek relatív hibái is. Korábban említettem, hogy az inelasztikus hatáskeresztmetszetek számítása során a 2-tűzlabdás összegek kiszámítása előnyösebb az 1-tűzlabdás eseténél. Ennek az elsődleges oka, hogy ebben az esetben a modell relatív hibája lecsökken, attól függően, hogy a normalizációs összegeket tartalmazó arányok mennyi lehetséges folyamatot tartalmaznak. Ezt a tényt a kvöetkezőkben egy egyszerű numerikus számolással mutatom be, amely természetesen általánosítható a tényleges folyamatokra is. Kezdetnek feltéve, hogy a (69)-ben szereplő minden $T/\sum_i T_i$ normalizált ”valószínűség” leírható egy $[0,1]$ közötti véletlen számmal (g^0), melyre egy egyenletes eloszlású zaj (hiba) rakódik, melynek szélessége $\pm 0.5g^0$. Az (69)-ben szereplő 2-tűzlabdás arány ebben az esetben egy új valószínűségi változót (f) definiál a következőképpen:

$$f(\sqrt{s}) = \frac{\int dx \sum_{i,j=1}^M g_i(x)g_j(\sqrt{s} - x)}{\int dx \sum_{i,j=1}^N g_i(x)g_j(\sqrt{s} - x)}, \quad (73)$$

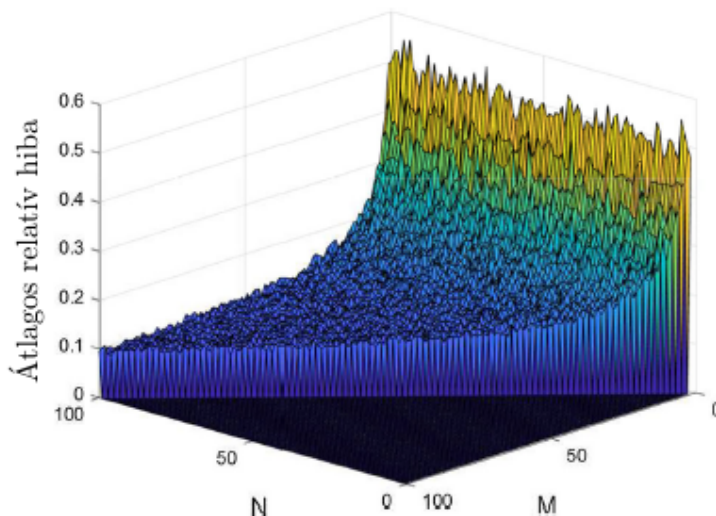
ahol $g = g^0 + \Delta g$ egy egyenletes eloszlású hibával terhelt véletlen változó, M az inkluzív összeghez tartozó folyamatok száma, míg N az inelasztikus folyamathoz tartozó folyamatok száma. Természetesen ebben az esetben $M < N$ feltételnek is teljesülnie kell. A továbbiakban tegyük fel, hogy a $g_i(x)$ eloszlások energiafüggetlenek, melyből következik, hogy az $f(\sqrt{s}) = f$ eloszlás szintén energiafüggetlen lesz. Az általánosság megszorítása nélkül egyszerűsítésként feltehetjük továbbá azt is, hogy $g_i = g_j$, melynek következtében az integrálás faktorizálható, azaz:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^M g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \quad (74)$$

Ebben az egyszerű alakban az összes i, j pár helyett elég a generált g_i véletlen számok négyzeteit venni és összegezni, mellyel a számolás nagyban leegyszerűsödik. A fő konklúziókat ez az egyszerűsítés nem zavarja meg, így a relatív hiba eloszlása végül (74)-ből kerül meghatározásra. Ehhez numerikusan a következő lépések szükségesek:

- N darab egyenletes eloszlású véletlen szám generálása $U[0,1] \rightarrow g_i^0$. Ez lesz a zajmentes mintahalmaz, vagyis ezen számok reprezentálják a hibamentes értékeket.
- Minden zajmentes értékhez hozzáadunk egy egyenletes eloszlású $\pm 0.5g_i^0$ szélességű véletlen zajt, azaz $g_i = g_i^0 + U[g_i^0 - 0.5g_i^0, g_i^0 + 0.5g_i^0]$.
- Kiválasztani M darab véletlen értéket az N mintából. Ezek reprezentálják a számlálóban szereplő inelasztikus mintákat.
- kiszámítani az arányokat a zajmentes (f_0), illetve a zajjal terhelt (f) mintákra.
- kiszámítani a relatív hibákat $r = |f_0 - f|/f_0$.

A fenti lépések sokszori végrehajtása után megkapjuk az r relatív hiba eloszlását, melyből véve az eloszlás várhatóértékét kiszámítható a várható relatív hiba is. A várható relatív hibának az inkluzív minták számától ($M = 1..100$), illetve az inelasztikus minták számától ($N = 1..100$) való függését mutatja a 20. ábra, ahol értelemszerűen csak $N > M$ esetén van 0-tól különböző érték.



20. ábra. A 2-tűzlabdás normalizációs összegek arányához tartozó várható relatív hiba függése az inkluzív (M), illetve az inelasztikus (N) összegekben szereplő folyamatok számától.

Az ábráról leolvasható, hogy kis multiplicitások esetén a relatív hiba várhatóértéke 0.5 körül van, vagyis az akkumulált relatív hiba nagyjából megegyezik az individuális relatív hibákkal. Ezzel ellentétben az M/N arány helyes megválasztásával a várható relatív hiba csökkenő tendenciát mutat. A 2-tűzlabdás összegek kiszámítása során ez az arány tipikusan 1/4-ére csökkenti a modell bizonytalanságot az alap bizonytalansághoz képest, amely igen előnyös tulajdonság az inkluzív hatáskeresztmetszetek számításánál.

Ezzel bemutattam azon módszereket, melyeket könnyedén lehet alkalmazni exkluzív és inkluzív reakciók leírására, figyelembe véve a mérések és a modellszámítások összehasonlításából eredő modellbizonytalanságokat is. A következő fejezetben néhány konkrét példán keresztül mutatom be a modell alkalmazhatóságát különféle reakciókra, mely után egy numerikus Monte-Carlo-kód bemutatása következik, melyet proton-antiproton nyugalmi annihiláció során létrejövő többpionos végállapotú valószínűségek meghatározására alkalmaztam.

3.3. Példák exkluzív és inkluzív reakciókra

Első példának tekintsük a $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ reakciót és számítsuk ki a $r = \sigma^{p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^-} / \sigma_{inel}^{p\bar{p}}$ arányt, melynek mérési bizonytalanságát az exkluzív, illetve inelasztikus hatáskeresztmetszetek hibáiból lehet meghatározni a következő módon:

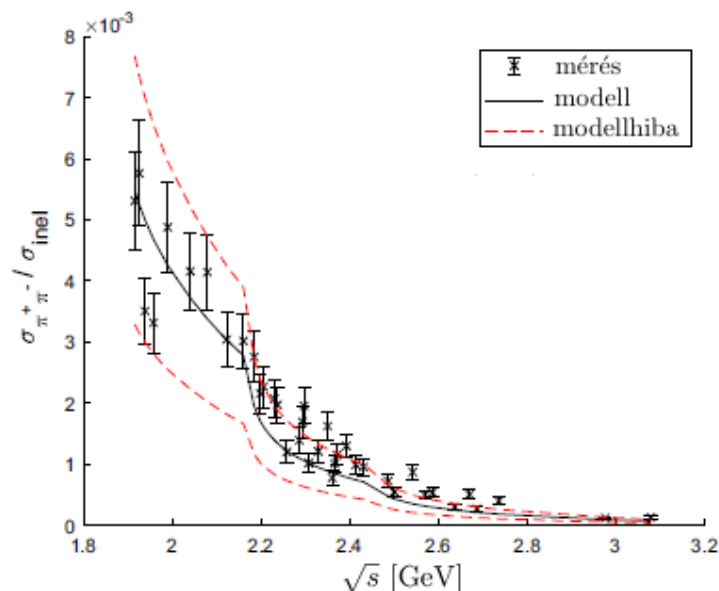
$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_{inel}^{p\bar{p}}} \Delta \sigma^{p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma^{p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^-}}{(\sigma_{inel}^{p\bar{p}})^2} \Delta \sigma_{inel}^{p\bar{p}}\right)^2}. \quad (75)$$

A hatáskeresztmetszeteket, illetve a hozzájuk tartozó bizonytalanságokat [119, 120] gyűjtemények tartalmazzák, ahol rengeteg nagyenergiás reakció hatáskeresztmetszete megtalálható. A továbbiakban, ahol azt külön nem jelöltem, az adott hatáskeresztmetszetek innen származnak. Ebben az egyszerű esetben a (76) kifejezés alkalmazásával kiszámítottam a teljes 1-tűzlabdás normalizált hadronizációs valószínűséget, melynek

eredményét az 21. ábra szemlélteti, melyen a modell-, és a mérési bizonytalanságok is jelölve lettek.

$$W_{1,\pi^+\pi^-}(\sqrt{s}) = P_1^{fb}(\sqrt{s}) \frac{1}{Z_1(\sqrt{s})} P_2^H \frac{\Phi_2(\sqrt{s}, m_{\pi^+}, m_{\pi^-})}{(2\pi)^3 \rho(\sqrt{s})} \frac{3^2 F(N; \langle n_i \rangle) n_u n_{\bar{u}} n_d n_{\bar{d}}}{\mathcal{N}_k^{(2)}}, \quad (76)$$

ahol P_1^{fb} az 1-tűzlabda keletkezési valószínűség, $\Phi_2(\dots)$ a két pionra vonatkozó fázisfőtag, m_π a pion tömege, ρ a Bootstrap-egyenletből meghatározott állapotssűrűség, P_2^H a Bootstrap-modellből meghatározott kéthadronos végállapothoz tartozó valószínűség, N az adott energián keletkezett kvarkok száma, n_u és n_d a kvarkeloszlás maximumához $F(N; \langle n_i \rangle)$ -hez tartozó u és d kvark-/antikvarkszámok plusz a kezdeti hadronok kvark-tartalma, azaz $n_i = \langle n_i \rangle + n_i^0$, ahol $n_u^0 = n_{\bar{u}}^0 = 2$, $n_d^0 = n_{\bar{d}}^0 = 1$. A Z_1 faktor a lehetséges 1-tűzlabdás folyamatokat magába foglaló normalizációs faktor, továbbá $\mathcal{N}_k^{(2)}$ a kvark-kombinatorikai faktorhoz tartozó normalizációs összeg.



21. ábra. A $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ reakció hatáskeresztmetszetének az inkluzív proton-proton hatáskeresztmetszetekhez viszonyított aránya a statisztikus modellből (fekete vonal), illetve mérésekből (fekete pontok hibahatárokkal) meghatározva.

A 21. ábrán jól látható, hogy a modellszámítások a hibahatáron belül igen jól visszaadják a mérési eredményeket. Figyelembe véve az összes mérési pontot az átlagos relatív hibára 24%-ot kapunk, amely benne van a korábban meghatározott átlagos modellhibában. Érdeemes megjegyezni, hogy ebben a számolásban nem szerepelnek a $p + \bar{p} \rightarrow X \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ rezonáns folyamatok, melyhez a Breit-Wigner-hatáskeresztmetszetek (60) kifejezését kellene alkalmazni. Ennek oka, hogy ezek a reakciók csupán keskeny energiasávokban, a rezonanciák pólushelye közelében adnának nem elhanyagolható járulékokat, továbbá a PDG-ből ismert lehetséges rezonanciák paraméterei nem jól ismertek, így azok csak fenntartásokkal kezelhetők. Mindenesetre az eredmények a rezonáns folyamatok nélkül is igen biztatóak a viszonylag nagy bizonytalanságok ellenére is. A következőkben bemutatandó folyamatok esetén sokszor csak igen kevés mérési

pont létezik, így az átlagos hibák numerikus meghatározása helyett csakis az ábrázolt hibaintervallumokkal jellemzem a modellszámolások jóságát, melyeket elfogadhatónak tekintek, ha a mérési- és modellhibák intervallumai átfednek.

Természetesen, mint azt az előző fejezetben említettem, az ilyen egyszerű 1-tűzlabdás reakciók nagyságrendi becslésére nem az imént alkalmazott "brute-force" módszer a legalkalmasabb. Érdemesebb inkább egy referenciacsatornához hasonlítva, a hadronizációs valószínűségek arányaiból kifejezni a keresett, illetve a referenciareakciók arányát, melynek során a normalizációs összegek, illetve egyéb közös faktorok is kiesnek. Sajnos ennek a módszernek az egyik nagy hátránya, hogy mind a modell, mind a mérési hibák nagyobbak lesznek, mivel ez esetben két hibával terhelt folyamat arányát kell kiszámítani. Érdemes ezért mindig olyan referenciacsatornát választani, mely kis hibával rendelkezik, így minél jobban elnyomni a lehetséges hibákat. Ennek a módszernek bemutatására legyen a következő példa a $p+\bar{p} \rightarrow n+\bar{n}$ folyamat hatás keresztmetszetének meghatározása, melyhez referencia csatornaként az előbbieken meghatározott $p+\bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ folyamatot használom fel. A kétpionos folyamat természetesen nem a legjobb választás referenciacsatornának, mivel a mérési pontok sokszor igen nagy bizonytalansággal terheltek, ám a folyamat egyszerűsége miatt első példának pont megfelelő. A keresett hatás keresztmetszet meghatározásához tekintsük a következő arányt:

$$r_{\pi^+\pi^-}^{n\bar{n}} = \left(\frac{\sigma_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}}}{\sigma_{inel}^{p\bar{p}}} \right) / \left(\frac{\sigma_{p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-}}{\sigma_{inel}^{p\bar{p}}} \right), \quad (77)$$

melynek során az inelasztikus hatás keresztmetszet kiesik és csak az exkluzív csatornák arányai maradnak meg. Az (77) kifejezés a modell szerint közelíthető a $R^{model} = W_{1,n\bar{n}}/W_{1,\pi^+\pi^-}$ aránnyal, melynek meghatározása során a közös normalizációs faktorok szerencsésen kiesnek, és marad a következő egyszerű kifejezés:

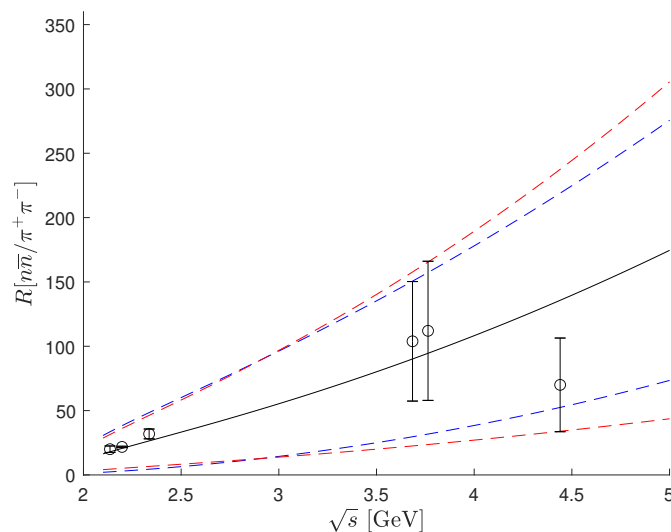
$$R^{model}(\sqrt{s}) = \frac{W_{1,n\bar{n}}(\sqrt{s})}{W_{1,\pi^+\pi^-}(\sqrt{s})} = 4(n_d - 1)(n_{\bar{d}} - 1) \left(\frac{s - 4m_n^2}{s - 4m_\pi^2} \right)^{1/2}. \quad (78)$$

Itt a kvark-kombinatorikai faktorok kiszámításánál ismét figyelembe kell venni a kezdeti (ütköző) proton és antiproton kvarktartalmát, mellyel az u és anti-u kvarkok száma kettő-kettővel, míg a d és anti-d kvarkok számai egyel nőnek meg a kvark-antikvark eloszlásokból meghatározható kvarkszámokhoz képest. A modell bizonytalanságát kifejezve a kvarkszámok bizonytalanságával, a multinomiális eloszlás varianciájából és a Gauss-hibaterjedési törvény alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\Delta R^{model} = 8(n_d - 1) \left(\frac{s - 4m_n^2}{s - 4m_\pi^2} \right)^{1/2} \Delta n_d, \quad (79)$$

ahol $\Delta n_d = \sqrt{P_d(1 - P_d)N}$ a létrejött d -kvarkok számának a bizonytalansága. Érdekességképpen összehasonlítottam ezt a bizonytalanságot a korábban megbecsült 1-tűzlabdás modell bizonytalanságával, amelyre ismét a hibaterjedési törvényt alkalmazva kiszámítható a két folyamat arányára vonatkozó továbbterjesztett hiba. Az eredményeket egy viszonylag széles energiaskálán (pár GeV) a 22. ábrán szemléltetem, ahol ismét a számolt hibahatárokon belüli eredményeket kaptunk. Az ábrán a kék szaggatott vonal jelzi a (79) kifejezésből meghatározott hibát, míg a relatív hibaeloszlásból származtatott becslést piros szaggatott vonallal jelöltem. Itt már igen jól látszik

az a korábban említett tény, hogy a mérésekből és a modellből származtatott arányok bizonytalansága akár igen nagy is lehet, így az arányokból meghatározható hatáskeresztmetszetek elsődlegesen nagyságrendi becslésekre alkalmazhatóak. Érdekes tény, hogy a kétfajta hiba kis energián szinte teljesen egybeesik, míg nagyobb energiákon a mérésekből megbecsült hiba nagyobbá válik, mint a kvarkszámok bizonytalanságából eredő hiba. Ez érthető is, hiszen a mérésekből megbecsült hiba egy olyan "worst-case" becslés, amely magában kell foglalja a kvarkszámokra vonatkozó hibákat is, amiből az látszik, hogy a modell legdominánsabb hibaforrása valószínűleg a multinomiális eloszlásból becsült kvarkszámok lehetnek.



22. ábra. A $p + \bar{p} \rightarrow n + \bar{n}$ és $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ reakciók hatáskeresztmetszeteinek arányai a statisztikus modellből (fekete vonal), illetve mérésekből (fekete körök hibahatárokkal) meghatározva. A kék szaggatott vonal a kvarkszámok bizonytalanságából meghatározott hibát, míg a piros szaggatott vonal a relatív hibaeloszlásból származtatott hibát jelölik.

A következő meghatározandó folyamat legyen a $p + \bar{p} \rightarrow p + \bar{p} + \pi^0$ reakció, ahol a direkt háromrészesekés ($p\bar{p}\pi^0$) végállapoton kívül figyelembe kell venni a lehetséges rezonáns $p + \bar{p} \rightarrow R + \bar{p}$, illetve $p + \bar{p} \rightarrow \bar{R} + p$ folyamatokat is, ahol $R \rightarrow p\pi^0$ egy adott nukleon- vagy Δ -rezonancia, míg $\bar{R} \rightarrow \bar{p}\pi^0$ azok antirészecskéje. A számításokban felhasznált rezonanciákat és azok paramétereit az 4. táblázatban soroltam fel, ahol minden olyan, legalább 3 csillagos részecskét figyelembe vettem, melyeknek a $p\pi^0$ -ra vonatkozó elágazási faktora legalább 0.15. Legyen a referencia folyamat ismét a $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ reakció és fejezzük ki az $R_{\pi^+\pi^-}^{p\bar{p}\pi^0} = W_{p\bar{p}\pi^0}/W_{\pi^+\pi^-}$ arányt a következőképpen:

$$\begin{aligned}
 R_{\pi^+\pi^-}^{p\bar{p}\pi^0} &= \frac{W_{p\bar{p}\pi^0}}{W_{\pi^+\pi^-}} = \frac{(n_u - 1)(n_{\bar{u}} - 1)}{\Phi_2(\sqrt{s}, m_{\pi^+}, m_{\pi^-})} \left[\frac{6P_3^d}{P_2^d(2\pi)^3} \frac{\mathcal{N}_k^{(2)}}{\mathcal{N}_k^{(3)}} \times \right. \\
 &\quad \times \left((n_u - 2)(n_{\bar{u}} - 2) + (n_d - 2)(n_{\bar{d}} - 2) \right) \Phi_3(\sqrt{s}, m_p, m_p, m_{\pi^0}) + \\
 &\quad \left. + 4 \sum_i B_i^{p\pi^0} (2s_{R_i} + 1) \Phi_2(\sqrt{s}, m_{R_i}, m_p) \right], \quad (80)
 \end{aligned}$$

	R_i	m_{R_i} [GeV]	s_{R_i}	$B_i^{p\pi^0}$
1	N_{1440}	1.43	1/2	0.22
2	N_{1520}	1.515	3/2	0.2
3	N_{1535}	1.535	1/2	0.15
4	N_{1650}	1.655	1/2	0.23
5	N_{1680}	1.685	5/2	0.23
6	Δ_{1232}	1.232	3/2	0.66
7	Δ_{1620}	1.63	1/2	0.17
8	Δ_{1910}	1.89	1/2	0.15
9	Δ_{1950}	1.93	7/2	0.27

4. táblázat. A $p + \bar{p} \rightarrow p + \bar{p} + \pi^0$ folyamat hatáskeresztmetszetének számításához figyelembe vett nukleon- és Δ -rezonanciák, illetve azok paraméterei.

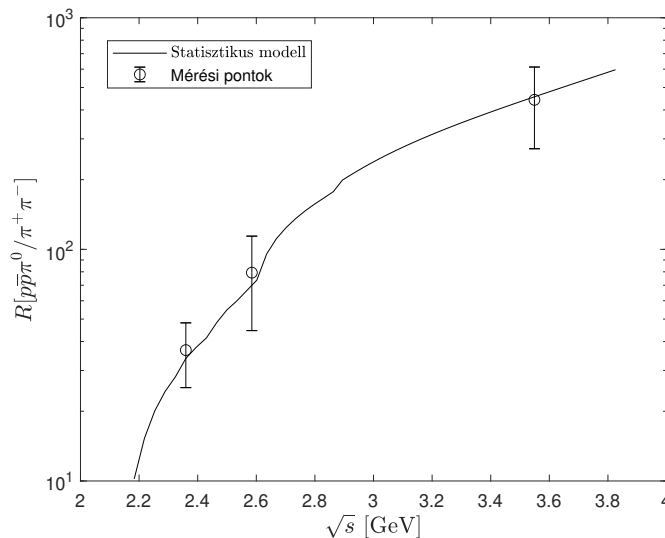
ahol m_{R_i} az adott rezonancia tömege, míg $B_i^{p\pi^0}$ a rezonanciák elágazási aránya, mely megadja, hogy az adott rezonancia mekkora arányban bomlik a $p\pi^0$ végállapotba. Az elágazási faktorokat a PDG-ben szereplő $N\pi$ -re vonatkozó értékekből lehet visszaszármaztatni a megfelelő izospin faktorokkal súlyozva. A zárójelben szereplő 6-os faktor a spin, illetve kvark-kombinatorikai faktorokban szereplő C/F multiplicitásokból következik, míg a második összegnél szereplő 4-es érték a protonra vonatkozó spin-multiplicitásból, illetve az antirezonanciák figyelembe vételéből ered, ahol mindkettő egy kettes szorzóval járul hozzá a végeredményhez. A kvark-kombinatorikai faktoroknál figyelembe kell venni, hogy a semleges pion hullámfüggvénye az $u\bar{u}$ és $d\bar{d}$ kombinációk egyenlő valószínűségű keveréke, mellyel a három részecskés végállapotra vonatkozó kvark-kombinatorikai faktor a következő lesz:

$$C_{Q_3, p\bar{p}\pi^0} = \frac{3^3 F(N; \langle n_i \rangle)}{\mathcal{N}_k^{(3)}} n_u n_{\bar{u}} (n_u - 1) (n_{\bar{u}} - 1) n_d n_{\bar{d}} \frac{(n_u - 2)(n_{\bar{u}} - 2) + (n_d - 1)(n_{\bar{d}} - 1)}{2}. \quad (81)$$

A rezonáns folyamatra vonatkozó kvark-kombinatorikai faktorok pedig:

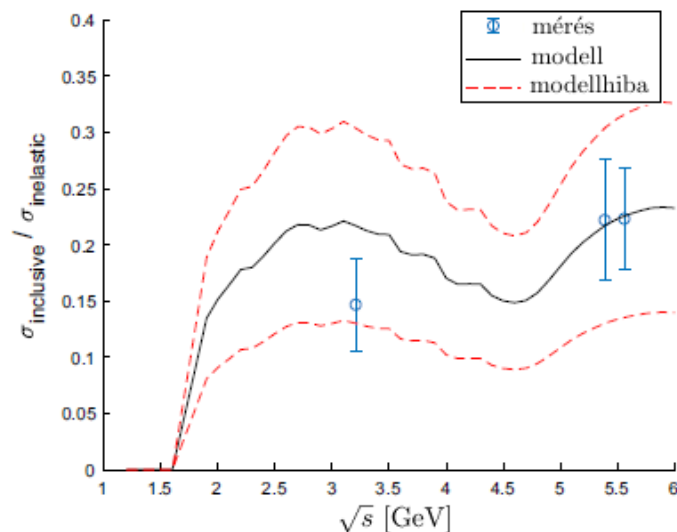
$$C_{Q_2, \bar{p}R} = \frac{3^2 F(N; \langle n_i \rangle)}{\mathcal{N}_k^{(2)}} n_u n_{\bar{u}} (n_u - 1) (n_{\bar{u}} - 1) n_d n_{\bar{d}}. \quad (82)$$

Az eredményeket az 23. ábra szemlélteti, ahol ismét hibahatáron belüli eredményeket értünk el.



23. ábra. A $p + \bar{p} \rightarrow p\bar{p}\pi^0$ és $p + \bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ folyamatok hatáskeresztmetszeteinek aránya. A fekete vonal a statisztikus modell eredményeit, míg a körök a hibahatárokkal a mérésekből származtatott arányokat jelölik.

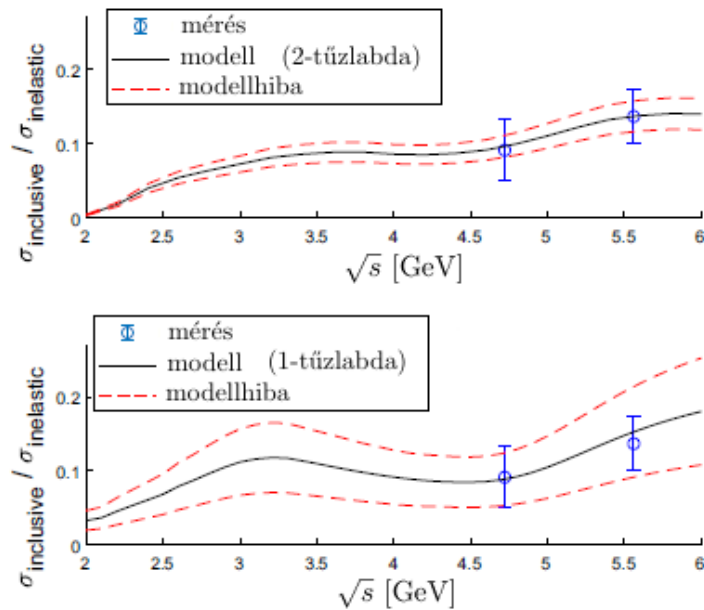
Az exkluzív hatáskeresztmetszetek után a következő néhány példában olyan inkluzív folyamatok hatáskeresztmetszeteinek számítását mutatom be, melyek csakis "könnyű" (u,d,s) kvarkokat tartalmaznak. A nehéz (c,b) kvarkokat tartalmazó folyamatokat az 3.5. fejezetben tárgyalom. Ezen inkluzív hatáskeresztmetszetek az 3.2. fejezetben leírtaknak megfelelően számolhatóak, ahol fix-tűzlabdás normalizációs összegek arányait véve kifejezhetőek a keresett valószínűségek. A következőkben 1-, illetve 2-tűzlabdás arányok számítását is megmutatom a rájuk vonatkozó hibákkal együtt. Az első reakció legyen a $p + \pi^- \rightarrow \rho^0 + X$ inkluzív folyamat, ahol a végállapotban egy fix ρ^0 mezon mellett bármilyen, a megmaradási törvényeknek eleget tevő további $X = 1, 2, \dots, N$ részecske megjelenhet, ahol a részecskék számát az alkalmazott k -tűzlabdás séma határozza meg. Alkalmazzuk erre a folyamatra a legegyszerűbb 1-tűzlabdás esetet, melynek során első lépésben meg kell határozni az inelasztikus összeget, azaz a sima 1-tűzlabdás normalizációs összeget, amely azokat a 2-, illetve 3-részecskés folyamatokat tartalmazza, melyeket a kezdeti $p\pi^0$ állapotból meghatározható megmaradási törvények megengednek. Ezek után az inkluzív összeg meghatározása következik, ahol a direkt ρ^0 részecskét adó folyamatok mellett figyelembe kell venni azon rezonanciákat is, melyek tovább bomlhatnak semleges ρ^0 mezonba. Ilyen rezonancia például az $N_{1700} \rightarrow \rho N$, amely mellett az összes PDG-ben szereplő legalább 3 csillagos nukleon- és Δ -rezonanciát figyelembe vettem, melynek létezik hasonló bomlása. A (67) kifejezés erre a folyamatra történő meghatározása után az eredményeket az 24. ábra mutatja, ahol a viszonylag nagy bizonytalanságok ellenére ismét hibahatáron belüli eredmények adódtak.



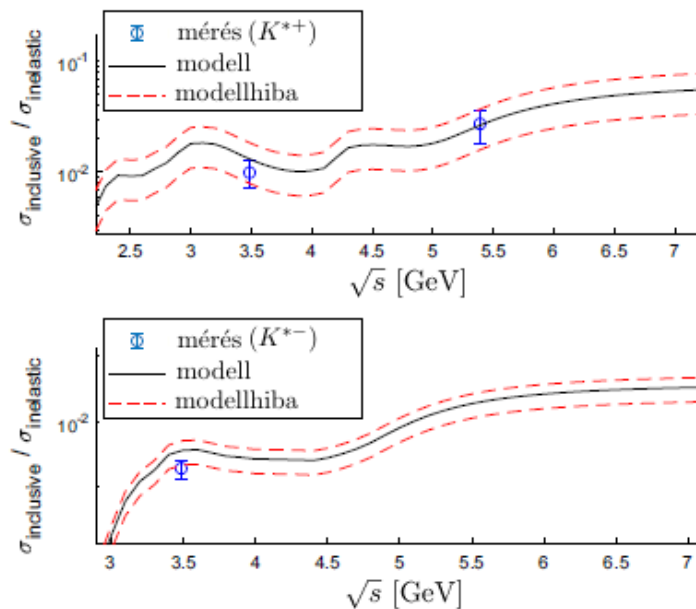
24. ábra. A $p + \pi^- \rightarrow \rho^0 + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetének aránya a $p\pi^-$ inelasztikus hatáskeresztmetszethez képest. A statisztikus modell eredményeit a fekete vonal, a hibahatárokat a piros szaggatott vonal, míg a mérésekből meghatározott arányokat, azok hibáival a kék körök jelképezik.

Következő példának meghatároztam a $p + \pi^- \rightarrow K^0 + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetét 1-, illetve 2-tűzlabdás összeggek arányainak kiszámításával. Ebben az esetben az inkluzív összegben figyelembe kell venni azon rezonanciákat melyek K^0 semleges kaonba bomolhatnak. Ilyen például néhány N , Δ és Σ rezonancia, illetve a legtöbb K^* rezonancia is. Az inelasztikus összegnek ezzel szemben tartalmaznia kell minden olyan végállapotot, melynek a barionszáma 1, a töltése 0, továbbá a ritkasága, c kvarktartalma, illetve b kvarktartalma 0. Az eredményeket a 25. ábra mutatja, ahol az alsó ábrán az 1-tűzlabdás, míg a felső ábrán a 2-tűzlabdás arányok helyezkednek el. Látható, hogy az eredmények mindkét esetben igen közel vannak mind egymáshoz, mind a mérési eredményekhez. Azt is könnyen látni, hogy 2-tűzlabdás esetben a modell bizonytalansága alacsonyabb, mint 1-tűzlabdás esetben.

Maradva az s -kvarkokat tartalmazó reakcióknál, harmadik példaként meghatároztam a $p + \pi^- \rightarrow K^*(892)^+ + X$, illetve a $p + \pi^- \rightarrow K^*(892)^- + X$ inkluzív reakciók hatáskeresztmetszeteit is, az 1-tűzlabdás arányok kiszámításával. Az s -kvarkokat tartalmazó vektormezonok inkluzív keltése, illetve propagálása nehézion-reakciók során létrejött sűrű közegben igen érdekes területe a nehézion-fizikai kutatásoknak, hiszen becslések szerint ezen állapotok paraméterei, mint például spektrális szélességük, tömegük stb.. erősen függnnek a közegben létrejött hőmérséklettől, illetve sűrűségtől. Az eredményeket a 26. ábra szemlélteti, ahol a felső ábrán a $K^*(892)^+$ keltési, míg az alsó ábrán a $K^*(892)^-$ keltési hatáskeresztmetszetek, a $p\pi^-$ inkluzív hatáskeresztmetszetekhez viszonyított arányainak energiafüggése látható.

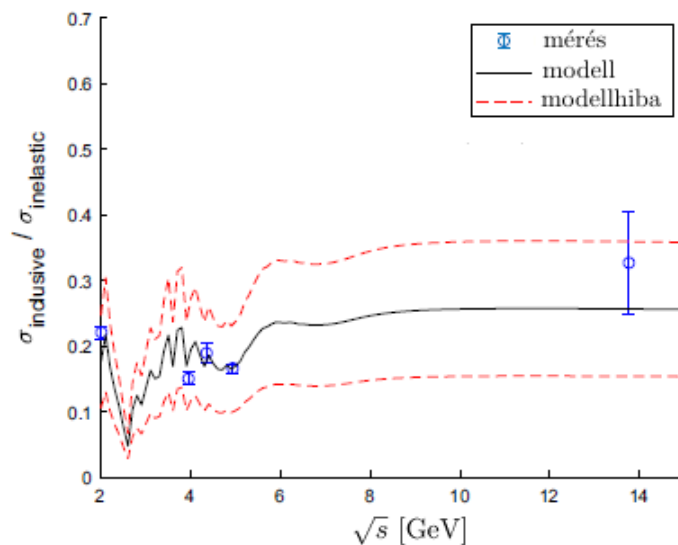


25. ábra. A $p + \pi^- \rightarrow K^0 + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetének aránya a $p\pi^-$ inelasztikus hatáskeresztmetszethez képest. A felső ábra a 2-tűzlabdás, míg az alsó ábra az 1-tűzlabdás összegek meghatározásával kapott eredményeket szemlélteti. A statisztikus modell eredményeit mindkét esetben a fekete vonal, a hibahatárokat a piros szaggatott vonal, míg a mérésekből meghatározott arányokat, azok hibáival a kék körök jelképezik.



26. ábra. Az $p + \pi^- \rightarrow K^*(892)^+ + X$ (felső ábra), illetve $p + \pi^- \rightarrow K^*(892)^- + X$ (alsó ábra) inkluzív reakciók hatáskeresztmetszeteinek aránya a $p\pi^-$ inelasztikus hatáskeresztmetszethez képest. A statisztikus modell eredményeit a fekete vonal, a hibahatárokat a piros szaggatott vonal, míg a mérésekből meghatározott arányokat, azok hibáival a kék körök jelképezik.

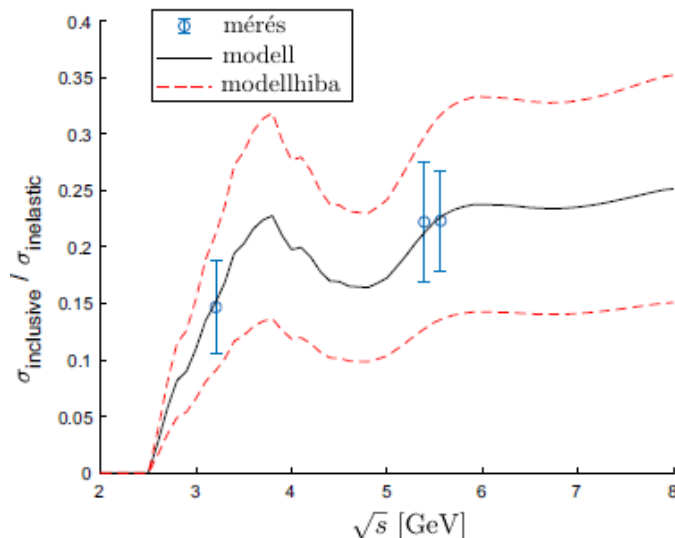
Negyedik és ötödik példaként a $p+\bar{p} \rightarrow \rho^0+X$, illetve $p+p \rightarrow \rho^0+X$ inkluzív reakciók hatáskeresztmetszeteinek számítását mutatom be, melyek esetében a direkt ρ^0 keltés mellett azon rezonanciákat is figyelembe kell venni, melyek ρ^0 -ba bomolhatnak. A két folyamat természetesen más-más megmaradási feltételeket generál, azaz míg a proton-proton ütközés esetén a barionszámnak 2-nek, a töltésnek 2-nek, addig proton-antiproton ütközés esetén a barionszámnak és a töltésnek is 0-nak kell lennie. A végállapotokban az s -, c -, illetve b -kvarktartalmaknak természetesen mindkét esetben 0-nak kell lenniük. Az eredményeket a $p+\bar{p} \rightarrow \rho^0+X$ reakcióra az 27. ábra, míg a $p+p \rightarrow \rho^0+X$ reakcióra az 28. ábra szemlélteti, ahol mindkét esetben a hibahatáron belüli eredményeket kaptunk.



27. ábra. A $p+\bar{p} \rightarrow \rho^0+X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetének aránya a $p\bar{p}$ inelasztikus hatáskeresztmetszethez képest. A fekete vonal a statisztikus modell eredményeit, míg a körök a hibahatárokkal a mérésekből származtatott arányokat jelölik.

3.4. Proton-antiproton nyugalmi annihiláció Monte-Carlo módszerrel

Ebben a fejezetben bemutatásra kerül a statisztikus modell automatizálására kifejlesztett Monte-Carlo-kód, amely lehetőséget teremt bizonyos analitikusan nehezen hozzáférhető végállapotok valószínűségeinek meghatározására is. Mint azt az előző fejezet példáiban is láttuk, minél többfajta módon jöhet létre egy adott végállapot, annál nehezebb kiszámítani a több tűzlabdás eseteket, melyekhez az integrálok elvégzése miatt mindenképpen numerikus módszerekhez kell folyamodni. Ennek egy áthidaló megoldása az itt bemutatandó Monte-Carlo-algoritmus, melyet proton-antiproton nyugalmi annihiláció [121] során létrejövő többpionos végállapotok valószínűségeinek leírására alkalmazok. A program követi a statisztikus modell által lefektetett szabályokat, melynek első lépéseként meg kell határozni a kialakuló tűzlabdák számát, majd a lehetséges két- és háromrészecskés végállapotok közül ki kell választani egy adott csatornát, melynek valószínűségét az előző fejezetben bemutatott kvark-kombinatorikai valószínűségek, fázistérfaktorok, spinmultiplicitások, stb... határozzák meg. Miután minden tűzlabdából létrejöttek a hadronikus végállapotok, a megmaradási tételek ellenőrzése után, az adott folyamat el-



28. ábra. A $p+p \rightarrow \rho^0 + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetének aránya a pp inelasztikus hatáskeresztmetszethez képest. A fekete vonal a statisztikus modell eredményeit, míg a körök a hibahatárokkal a mérésekből származtatott arányokat jelölik.

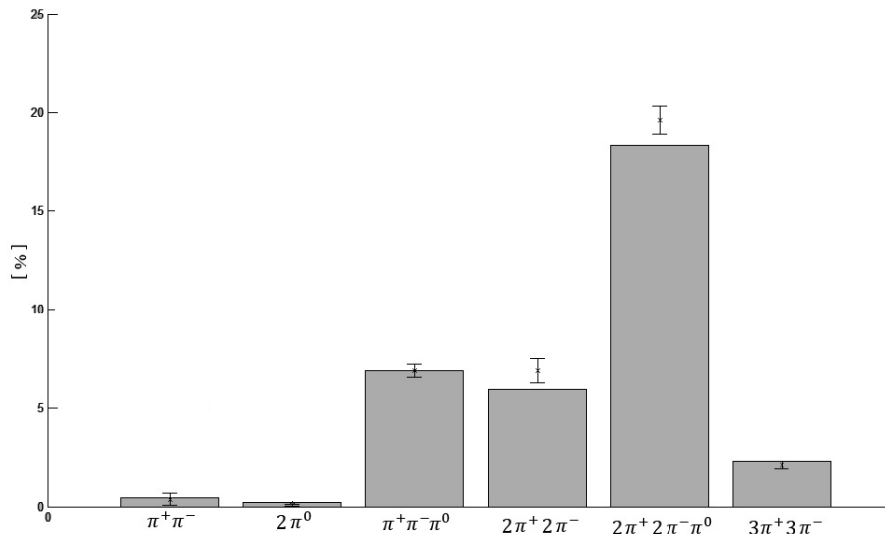
fogadásra, vagy eldobásra kerül. Az algoritmus bemeneti paramétereit az iterációk száma, a teljes energia, a részecskék tömegei, kvarktartalmi és egyéb paramétereit, mint például spin, bomlási szélességek, illetve a bomlásokhoz tartozó elágazási arányok, míg a lényeges kimenetek a keletkezett pionok számának eloszlása, illetve a kiválasztott csatornák valószínűségei. A módszert proton-antiproton nyugalmi annihiláció során létrejövő többpionos folyamatok arányainak leírására tesztelem, ahol a részecskekeltésre fordítható energia $\sqrt{s} = 2m_p \approx 1.9$ GeV lesz. Ez az energia még viszonylag alacsony a nehezebb részecskéket tartalmazó állapotok létrehozásához, viszont elegendő a többpionos (akár 5-6) végállapotok létrejöttéhez. A vizsgált folyamatokat és azok valószínűségeit az 5. táblázat foglalja össze, ahol a mérési eredmények [122, 123]-ból származnak.

Folyamat	valószínűség [%]
$\pi^+ \pi^-$	0.37 ± 0.3
$2\pi^0$	0.07 ± 0.05
$\pi^+ \pi^- \pi^0$	6.9 ± 0.35
$2\pi^+ 2\pi^-$	6.9 ± 0.6
$2\pi^+ 2\pi^- \pi^0$	19.6 ± 0.7
$3\pi^+ 3\pi^-$	2.1 ± 0.2

5. táblázat. Monte-Carlo-szimulációk során vizsgált folyamatok és azok mérésekből meghatározott valószínűségei.

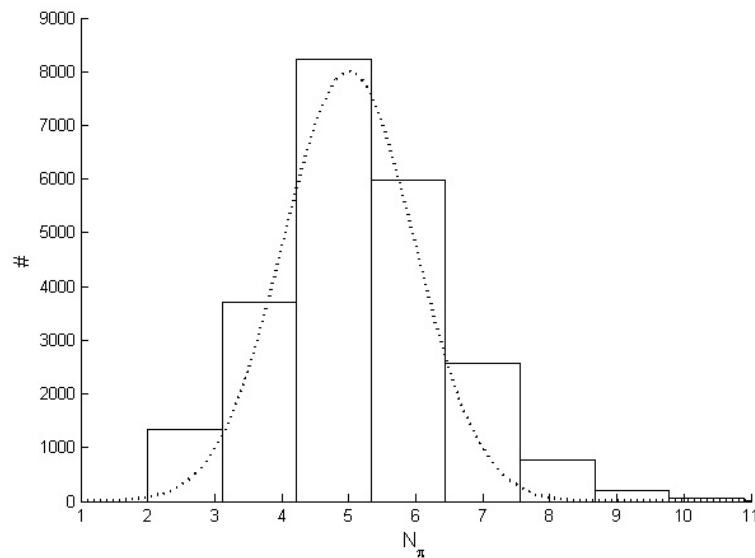
A Monte-Carlo-szimulációk során elért eredményeket a 29. ábra szemlélteti, ahol az egyes valószínűségeket az adott oszlopok mutatják. A szimulációk során láthatóan igen jó eredmények születtek, bár néhány helyen kis eltérések tapasztalhatóak. Ezek egyszerűen magyarázhatóak lehetnek azzal, hogy néhány mezonrezonanciának nem ismerjük pontosan a pionos végállapotokba bomló elágazási tényezőit, így azokat nem tudtuk

bevenni a megfelelő végállapotok számításába, másrészt, hogy a modell- és Monte-Carlo-bizonytalanságok miatt nem is lehet jobb becslést adni az adott valószínűségekre. Az elágazási tényezőkkel kapcsolatos probléma a következő fejezet utolsó példájában is előkerül, ahol a D^\pm , illetve D^0/\bar{D}^0 nehéz mezonok inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek meghatározásához hasonló módon szükség lenne a magasabb tömegű állapotok bomlási módjainak precíz ismeretére, amelyek sajnos csak kevés esetben állnak rendelkezésre. Ettől a problémától eltekintve az eredmények igen biztatóak mind itt, mind a következő fejezetben.



29. ábra. Monte-Carlo-szimulációk eredménye proton-antiproton nyugalmi annihiláció során létrejött többpionos végállapotok valószínűségére. A hibahatárokkal jelzett pontok a mérési eredményeket, míg a teli szürke téglalapok a szimulációk eredményeit mutatják.

Az egyes folyamatok valószínűségein kívül érdemes még meghatározni a végállapotú pionok számának eloszlását is. Mint az a 29. ábrán is látható, az 5 pionos végállapot valószínűsége a legdominánsabb, amely a végállapotú pionok számának eloszlásában is meglátszik, amely tipikusan egy $\langle N_\pi \rangle \approx 5$ várhatóértékű és $D \approx 1$ szórású normális eloszlással írható le [124]. Az eredményeket az 30. ábra szemlélteti.

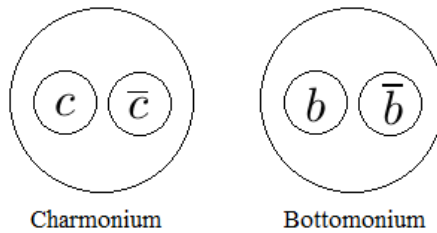


30. ábra. Monte-Carlo-szimulációk eredménye proton-antiproton nyugalmi annihiláció során létrejött végállapotú pionok számának eloszlására. A hisztogram a Monte-Carlo-szimulációk eredményeit, míg a szaggatott vonal egy $\langle N_\pi \rangle = 5$ várhatóértékű és $D = 0.97$ szórású normális eloszlást szemléltet.

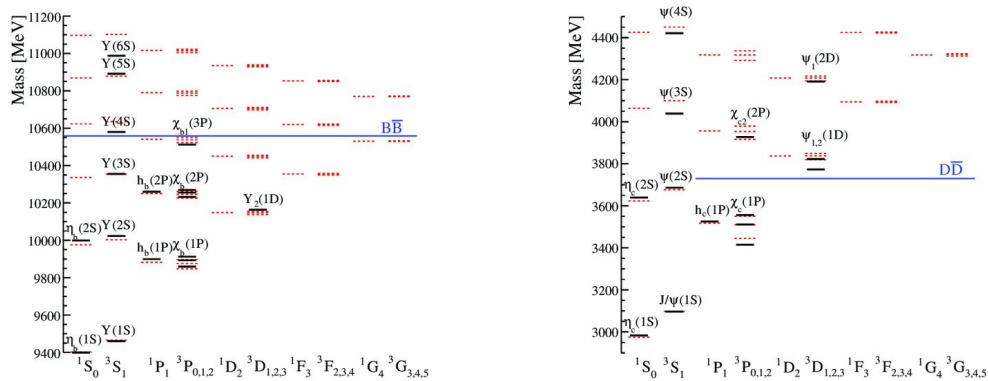
Az algoritmus láthatóan igen jól szerepel proton-antiproton nyugalmi annihilációra, melynek során mind a különböző végállapotú valószínűségeket, illetve a végállapotú pion eloszlásokat sikeresen le lehetett írni. Nagyobb energián természetesen egyre több lehetséges végállapot is szerepet kap, amely miatt a számítási idő igen megnőhet az alacsonyenergiás esethez képest. Az algoritmus akár beépíthető lehet különböző nehézion transzportkódokba is, mint a hadron-hadron ütközések eseménygenerátora, mely akár egy későbbi alkalmazási lehetőség is lehet.

3.5. c - és b -kvarkokat tartalmazó hadronok keltési hatáskeresztmetszetei

Ebben a fejezetben bemutatom a c és b nehéz kvarkokat tartalmazó végállapotok inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek becslését a korábbiakban alkalmazott statisztikus modell segítségével, melyet eddig csupán u, d, s könnyű kvarkokra alkalmaztam. A későbbiekben bemutatandó nehéziontranszport számítások során az itt kiszámított hatáskeresztmetszetek nélkülözhetetlenek lesznek. Ennek elsődleges oka, hogy az ilyen folyamatokra tipikusan csak igen korlátozott számú mérési adat áll rendelkezésre, illetve a modellszámítások is többnyire csak magasabb energákon megbízhatóak. A disszertáció szempontjából az ún. ónium (charmónium, bottomónium) állapotok inkluzív keltése az érdekes, melyek az 31. ábrának megfelelően egy nehéz kvarknak és antikvarkjának kötött állapota. Ezen állapotok az elméleti részecskefizika szempontjából igen érdekesek, mivel az őket alkotó kvarkok nagy tömege miatt nemrelativisztikus modellek is alkalmazhatóak azok tulajdonságainak leírására [125, 126, 127]. Az ónium állapotok spektroszkópiája is igen változatos a rengeteg lehetséges gerjesztett állapot, illetve bomlási csatorna miatt, melyet charmóniumra és bottomóniumra az 32. ábra szemléltet.



31. ábra. Charmónium és bottomónium állapotok sematikus ábrája.



32. ábra. Bottomónium (bal) és charmónium (jobb) spektrumok és egyes magasabb tömegű részecskék főbb bomlási módjainak összefoglaló ábrája [128]-ből.

A 6. táblázatban foglaltam össze azon c - és b -kvarkokat tartalmazó állapotokat, melyekkel közvetve, vagy közvetlenül is foglalkozni fogok. Ezen részecskéken kívül a fejezet végén kitérek még az ún. "nyílt-charm" állapotokat is, melyek egy könnyű u -, d -, s -kvark/antikvark mellett tartalmaznak egy nehéz c -kvarkot/antikvarkot is.

	R_i	m_i [GeV]	J^{PC}	Kvark tartalom
1	J/Ψ	3.096	1^{--}	$c\bar{c}$
2	χ_{c1}	3.51	1^{++}	$c\bar{c}$
3	χ_{c2}	3.556	2^{++}	$c\bar{c}$
4	$\Psi(3686)$	3.686	1^{--}	$c\bar{c}$
5	$\Psi(3770)$	3.77	1^{--}	$c\bar{c}$
6	$\Upsilon(1S)$	9.46	1^{--}	$b\bar{b}$
7	$\Upsilon(2S)$	10.023	1^{--}	$b\bar{b}$
8	$\Upsilon(3S)$	10.355	1^{--}	$b\bar{b}$
9	$\chi_{b1}(1P)$	9.892	1^{++}	$b\bar{b}$
10	$\chi_{b2}(1P)$	9.912	2^{++}	$b\bar{b}$
11	$\chi_{b1}(2P)$	10.255	1^{++}	$b\bar{b}$
12	$\chi_{b2}(2P)$	10.268	2^{++}	$b\bar{b}$

6. táblázat. A számítások során figyelembe vett c és b kvarkokat tartalmazó mezonok összefoglaló táblázata.

A 3.1. fejezetben a kvark-kombinatorikai faktorok leírásánál láttuk, hogy nehéz kvarkok esetén a rájuk vonatkozó kvarkkeletkezési valószínűségek annyira kicsik is lehetnek, hogy alacsony energián az (54) kifejezésből meghatározott várható kvarkszámok egynél kisebbek lesznek. Ennek a problémának a feloldásaként, bevezettem egy kényszerfeltételt, mely szerint 1, 2, 3... darab nehéz kvark/antikvark mindenképpen keletkezni fog, mely kényszerfeltétel bevezetésével meghatározható egy elnyomási faktor, amely megmondja, hogy ez a konfiguráció mekkora arányban van elnyomva az eredeti konfigurációhoz képest. A P_c , illetve P_b kvarkkeletkezési valószínűségeket ezzel a módszerrel határoztam meg, melynek illesztését ebben a fejezetben részletezem. Kiindulva a kvarkszámokra vonatkozó multinomiális eloszlásból, továbbá feltételezve, hogy a kényszerek meghatározásánál egy darab c/b -kvark keletkezik egy darab s -kvark kárára, a c és b nehéz kvarkokra vonatkozó elnyomási faktor a következő módon fejezhető ki:

$$\gamma_{c,b} = \frac{F(N; \langle n'_u \rangle, \langle n'_d \rangle, \langle n'_s \rangle, \langle n'_c \rangle, \langle n'_b \rangle)}{F(N; \langle n_u \rangle, \langle n_d \rangle, \langle n_s \rangle, \langle n_c \rangle, \langle n_b \rangle)} = \frac{\Gamma(\langle n_s \rangle + 1) P_{c,b}}{\Gamma(\langle n_s \rangle) P_s} = P_{c,b} N, \quad (83)$$

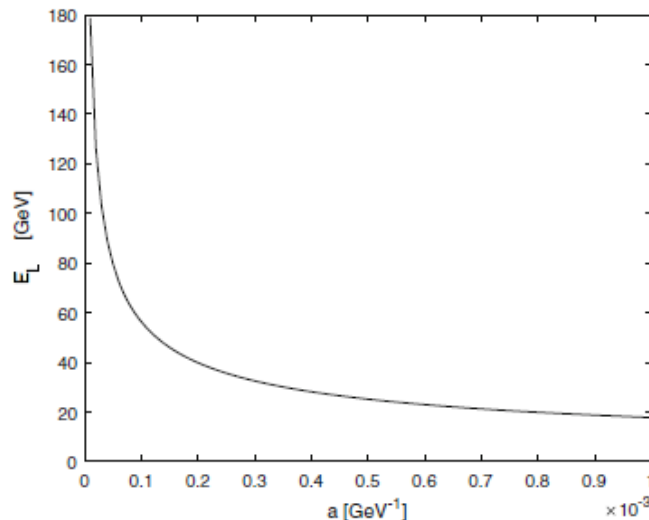
ahol $\langle n'_i \rangle$ a kényszerekkel meghatározott kvarkszámokat, $\langle n_i \rangle = P_i N$ a globális maximumhoz tartozó kvarkszámokat jelöli, ahol $\langle n'_s \rangle = \langle n_s \rangle - 1$, $\langle n'_c \rangle = 0$, $\langle n'_b \rangle = 0$, $\langle n'_u \rangle = \langle n_u \rangle$, $\langle n'_d \rangle = \langle n_d \rangle$, illetve [$\langle n'_c \rangle = 1$ és $\langle n'_b \rangle = 0$], vagy [$\langle n'_b \rangle = 1$ és $\langle n'_c \rangle = 0$] attól függően, hogy melyik nehéz kvark keletkezését vesszük figyelembe. Könnyen látható, hogy ez a kifejezés konstans $P_{c,b}$ esetén is energiafüggő, hiszen a kvarkszámokra vonatkozó (52). kifejezés (N) is energiafüggő. Mivel N az energiával nő ez azt is jelenti, hogy az elnyomás tart 1-hez, ami azt a pontot jelöli, ahol a multinomiális eloszlás globális maximuma megegyezik a kényszerfeltételekkel meghatározott lokális maximummal, vagyis ezen energia felett nincs már értelme a kényszerfeltétel alkalmazásának, és a globális maximumból meghatározható nehéz kvarkszámok $n_{c,b} = P_{c,b} N \geq 1$ lesznek. Ezt az energiát *korlátozó-energiának* neveztem el, amely megmondja, hogy a kényszerfeltételekkel meghatározott elnyomási tényező mikor válik 1-é és mikortól alkalmazható a multinomiális eloszlás globális maximuma a várható kvarkszámok meghatározására. Figyelembe véve, hogy a nehéz kvarkokra vonatkozó keletkezési valószínűség $P_{c,b} = a_{a,b} x$ alakú (ahol x az energia), majd visszahelyettesítve (52)-t (83)-ba, a következő kifejezést kapjuk a nehézkvark elnyomási tényezőre:

$$\gamma_{c,b} = a_{c,b} \frac{x + x \sqrt{1 + x^2/T_0^2}}{2}, \quad (84)$$

ahol x az energia, $T_0 = 160$ MeV, illetve $a_{c,b}$ a nehéz kvarkokhoz tartozó meredekség. A keletkezési valószínűségek illesztése során az $a_{c,b}$ paraméterek meghatározása a cél. A korlátozó-energia nagysága természetesen függ az $a_{c,b}$ paraméterek értékétől, melyet a $\gamma_{c,b} = 1$ feltétel teljesítésével lehet meghatározni, azaz meg kell oldani a következő egyenletet:

$$a_{c,b} \frac{E_L + E_L \sqrt{1 + E_L^2/T_0^2}}{2} = 1, \quad (85)$$

ahol E_L jelöli a korlátozó-energia nagyságát. A (85) kifejezésből meghatározható korlátozó-energia $a_{c,b}$ paramétertől való függését ábrázolja az 33. ábra, ahol látható, hogy minél nagyobb a kvarkkeletkezési valószínűség meredeksége, annál kisebb a korlátozó-energia, azaz minél gyorsabban nő az adott kvark keletkezési valószínűsége, annál gyorsabban elérni azt a pontot, ahonnan már nem kell a kényszerfeltételeket tovább alkalmazni.



33. ábra. A korlátozó-energia (E_L) függése a nehéz kvarkokra vonatkozó $P_{c,b} = a_{c,b}x$ kvark keletkezési valószínűségben szereplő $a_{c,b}$ paramétertől. Az E_L korlátozó energia jelöli azt az energiát, ahol a kényszerekkel meghatározott kvark/antikvark eloszlás maximuma megegyezik a kényszerek nélküli globális maximummal.

Ez természetesen nem azt jelenti, hogy az adott kvark keletkezése nem lesz tovább elnyomva az u, d, s kvarkokhoz képest, hiszen a $P_{c,b} = a_{c,b}x$ valószínűség még mindig sokkal tovább, jóval kisebb értékű lehet, mint $P_{u,d,s}$. A korlátozó-energia annyit mond csupán, hogy $x \geq E_L$ esetén, $n_{c,b} = P_{c,b} \geq 1$ lesz és nincs tovább szükség a $\gamma_{c,b}$ elnyomási tényező meghatározására.

A következőkben részletesen is bemutatom a c - és b -kvarkok keletkezési valószínűségeiben szereplő $a_{c,b}$ paraméterek illesztését, melyhez a következő hibafüggvényt vezettem be:

$$H = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{mérés}_i - \text{modell}_i}{\text{mérés}_i} \right)^2}, \quad (86)$$

ahol N az illesztéshez felhasznált mérési pontok száma, míg mérés_i az i -edik mérési pontot, modell_i pedig a modellszámításokból kapott értékeket jelölik. Bájos (c) kvarkok esetén a $\pi^- + p \rightarrow J/\Psi + X$, illetve $p + p \rightarrow J/\Psi + X$ ütközések inkluzív hatáskeresztmetszeteit határoztam meg, melyeket az illesztés, illetve validáció során a [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139]-ban összegyűjtött alacsonyenergiás mérési adatokkal hasonlítottam össze. Mivel igen kevés alacsonyenergiás mérési eredmény létezik, így az illesztéshez a lehető legtöbb elérhető mérési pontot megpróbáltam felhasználni. A modell validációjának szempontjából az egyik legfontosabb eredmény, hogy mind charmónium, mind bottomónium esetén, a modell képes leírni az alacsonyenergiás 3-4-szeres hatáskeresztmetszet növekedést $\pi + p$ reakciókban a megfigyelt $p + p$ reakciókhoz képest, illetve igen jól képes leírni a különböző charmónium állapotok, mint például χ_{c1} , χ_{c2} , $\Psi(3686)$ részecskék direkt keltésének arányait a különböző ütközésekben. A későbbi transzportszámításaink szempontjából az említetteken túl a legfontosabb eredménye a modellnek, hogy képes leírni a J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetek arányait $\bar{p} + p$ ütközésekben $p + p$ ütközésekhez képest. Bottomónium állapotok esetén az illesztést $\pi + p$ ütközésekben elérhető mérési pontokra végeztem el, míg az illesztett paraméterből igen

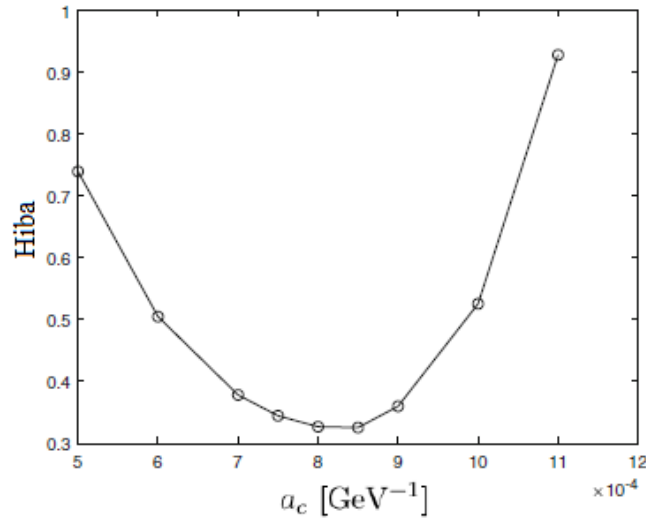
jó eredményekkel becsültem meg a bottomónium keltési hatáskeresztmetszeteket $p + p$ ütközésekben. Ezen felül becsléseket tettem az inkluzív bottomónium keltési hatáskeresztmetszetekre is $\bar{p} + p$ ütközésekben.

Charmónium állapotok esetén a hatáskeresztmetszetek számításánál a direkt J/Ψ keltés mellett figyelembe kell venni a 7. táblázatban felsorolt charmonium állapotok visszabomlását is a J/Ψ részecskébe, mely folyamatok hatáskeresztmetszeteinek meghatározásához a 2-tűzlabdás módszert alkalmaztam, azaz a (69) kifejezésben szereplő inkluzív és inelasztikus összegek meghatározásához a lehetséges 2-tűzlabdás folyamatokat használtam fel.

	m_i [GeV]	J_i	Br_i	Bomlási mód
χ_{c1}	3.51	1	0.34	$\gamma + J/\Psi$
χ_{c2}	3.556	2	0.19	$\gamma + J/\Psi$
$\Psi(3686)$	3.686	1	0.61	$J/\Psi + \text{hadronok}$

7. táblázat. J/Ψ részecskébe visszabomló lehetséges állapotok tulajdonságainak összefoglalása.

A J/Ψ keltésre vonatkozó hibafüggvény a_c paraméterfüggését mutatja az 34. ábra, ahol leolvasható, hogy a minimum helye $a_c = 8.5 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$, amely a várakozásoknak megfelelően egy igen kicsi érték.



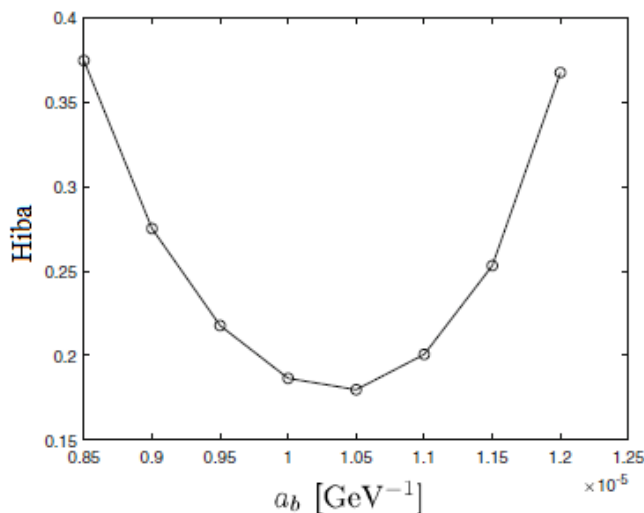
34. ábra. Az inkluzív J/Ψ charmónium keltéséhez tartozó hibafüggvény a_c paraméter függése. A hibafüggvény minimuma az $a_c = 8.5 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$ meredekséghez tartozik.

b -kvarkok esetében az a_b paraméter illesztésénél ugyanezt a módszert alkalmaztam, melyhez a $\pi^- + p \rightarrow \Upsilon(1S) + X$ inkluzív Υ keltési folyamat hatáskeresztmetszetét számítottam ki. A mérési adatokat [140, 141]-ből gyűjtöttem össze. Természetesen ebben az esetben is figyelembe kell venni azon gerjesztett bottomónium állapotokat, melyek radiatív-, vagy hadronikus folyamatok lévén képesek $\Upsilon(1S)$ mezonba bomlani. Ezen állapotok az 8. táblázatban kerültek összefoglalásra.

	m_i [GeV]	J_i	Br_i	Bomlási mód
$\Upsilon(2S)$	10.023	1	0.26	$\Upsilon(1S) + \text{egyéb}$
$\Upsilon(3S)$	10.355	1	0.16	$\Upsilon(1S) + \text{egyéb}$
			0.065	$\Upsilon(2S) + \text{egyéb}$
			0.13	$\chi_{b2}(2P) + \gamma$
			0.12	$\chi_{b1}(2P) + \gamma$
$\chi_{b1}(1P)$	9.892	1	0.35	$\gamma + \Upsilon(1S)$
$\chi_{b2}(1P)$	9.912	1	0.18	$\gamma + \Upsilon(1S)$
$\chi_{b1}(2P)$	10.255	2	0.11	$\Upsilon(1S) + \text{egyéb}$
			0.18	$\gamma + \Upsilon(2S)$
$\chi_{b2}(2P)$	10.268	2	0.077	$\Upsilon(1S) + \text{egyéb}$
			0.089	$\gamma + \Upsilon(2S)$

8. táblázat. Az $\Upsilon(1S)$ bottomónium állapotba visszabomló és a számítások során figyelembe vett részecskék összefoglalása.

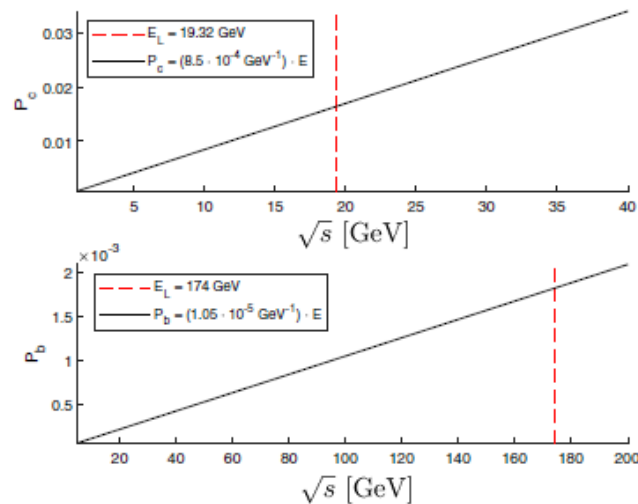
A számítások során a teljesség kedvéért figyelembe vettem azon kétlépcsős bomlási folyamatokat is, melyek két lépés után $\Upsilon(1S)$ részecskébe érkehetnek, mint például a $\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S) \rightarrow \Upsilon(1S)$ folyamat. Ezek a bomlási folyamatok tipikusan csak elhanyagolhatóan kicsi járulékokat adnak a végső eredményekhez. Az illesztés során kapott eredményeket szemlélteti az 35. ábra, melynek alapján a b -kvark keletkezési valószínűségének meredekségére az $a_b = 1.05 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ érték adódik.



35. ábra. Az inkluzív $\Upsilon(1S)$ bottomónium keltéséhez tartozó hibafüggvény a_b paraméter függése. A hibafüggvény minimuma az $a_b = 1.05 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ meredekséghez tartozik.

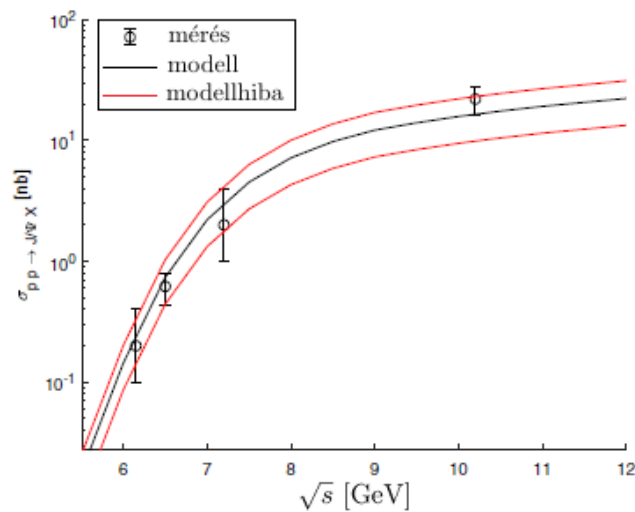
Felhasználva az illesztett $a_{c,b}$ meredekségeket, meghatározhatóak a $P_{c,b} = a_{c,b}x$ kvarkkeletkezési valószínűségek, melyeket az 36. ábra szemléltet, ahol mindkét esetben feltüntetésre kerültek a (85) kifejezésből kiszámítható korlátozó-energiák értékei is. Az ábráról leolvasható, hogy mindkét nehéz kvark esetén párszor 10 GeV-es energia-tartományon a keletkezési valószínűségekre igaz, hogy $P_{c,b} \ll P_{u,d,s}$, vagyis praktikusán nem kell korrigálni a már korábban illesztett P_u , P_d , illetve P_s értékeket. Amint viszont

a c -, illetve b -kvarkok keletkezési valószínűsége nagyságrendben megközelíti az u -, d -, és s -kvarkok keletkezési valószínűségeit, azokat korrigálni kell a megfelelő módon. Erre a következő, tetrakvarkokkal foglalkozó fejezetben térek ki, ahol becslést teszek azon energiákra is, ahol mind a c -, mind a b -kvarkok keletkezési valószínűségei elérik a könnyű kvarkokra vonatkozó értékeket. Ebben a fejezetben azonban csakis pár GeV-es charmónium és bottomónium keltési folyamatokkal foglalkozok, ahol mint azt az előbbiekben is láttuk, még nem szükséges külön korrigálni a könnyű kvarkok keletkezési valószínűségeit.



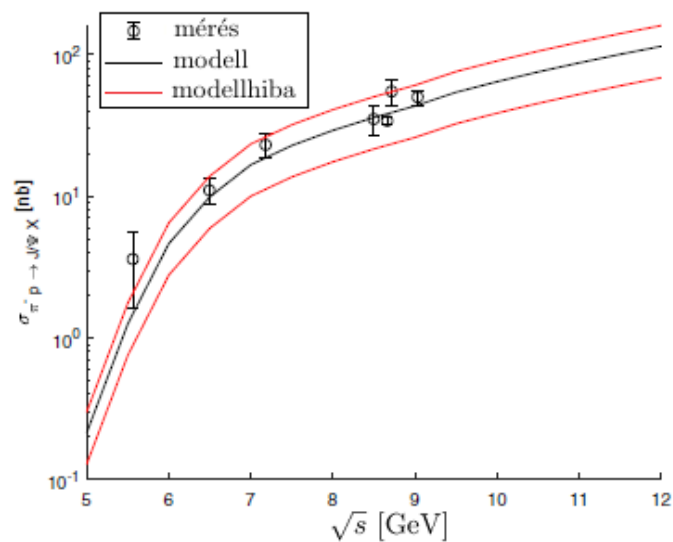
36. ábra. Az illesztéssel meghatározott P_c és P_b kvarkkeletkezési valószínűségek energiafüggése és az azokra vonatkozó korlátozó energiák (E_L). A felső ábrán a c -kvarkokra, míg az alsó ábrán a b -kvarkokra vonatkozó eredmények kerültek feltüntetésre.

Az első reakció amely meghatározásra került a $p + p \rightarrow J/\Psi + X$ inkluzív charmónium keltési folyamat, melyhez természetesen figyelembe kell venni az 7. táblázatban összefoglalt $\Psi(3686)$, χ_{c1} , illetve χ_{c2} részecskék bomlásait is. Az eredményeket az 37. ábra szemlélteti, amely a várakozásoknak megfelelően igen jó eredményeket mutat.



37. ábra. A $p + p \rightarrow J/\Psi + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszete a statisztikus modellből (fekete vonal), illetve mérésekből (körök hibahatárokkal) meghatározva.

A következő reakció, mely meghatározásra került a $\pi^- + p \rightarrow J/\Psi + X$ folyamat, melynek a mérések szerint 2-3-szoros hatáskeresztmetszete kell legyen a proton-proton ütközéshez képest. Az eredményeket ebben az esetben a 38. ábra szemlélteti, ahol az eredmények ismét hibahatáron belüli vannak.



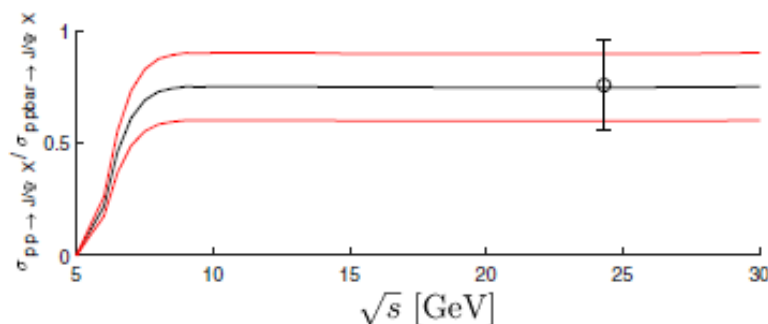
38. ábra. A $\pi^- + p \rightarrow J/\Psi + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszete a statisztikus modellből (fekete vonal), illetve mérésekből (körök hibahatárokkal) meghatározva.

Az említett két folyamat, azaz charmónium keltés proton-proton, illetve pion-proton ütközésekben viszonylag jól ismertek, és elég sok (10-20), főként nagyobb energiás mérési pont létezik az irodalomban [142]. Ennél lényegesen kevesebb mérés létezik antiproton-proton ütközésekre [143], amely a disszertáció szempontjából különösen érdekes len-

ne. Ezen okból kifolyólag következőnek becslést teszek a J/Ψ charmónium inkluzív keltés hatáskeresztmetszetére proton-antiproton ütközések esetén, azaz kiszámítom a $p + \bar{p} \rightarrow J/\Psi + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszetét és összehasonlítom a proton-proton, illetve pion-proton esetekkel. A számításokból kihagytam a $p + \bar{p} \rightarrow J/\Psi$ folyamatot, amely csak küszöb környékén adna jelentős járulékot, ám az itt vizsgált nagyenergiás régióban elhanyagolható a teljes inkluzív keltési hatáskeresztmetszethez képest. Validációnak meghatároztam a $\sigma^{pp \rightarrow J/\Psi X} / \sigma^{\bar{p}p \rightarrow J/\Psi X}$ arányt egy szélesebb energiatartományon (5–30 GeV) és az eredményeket összehasonlítottam a [143]-ban található mért értékkel $\sqrt{s} = 24.3$ GeV tömegközépponti energián. A mérési pont és a modellszámítás eredményét a 9. táblázat tartalmazza, míg a számított arány energiafüggése az 39. ábrán látható.

	Mérés	Statisztikus modell
$\sigma^{pp \rightarrow J/\Psi X} / \sigma^{\bar{p}p \rightarrow J/\Psi X}$	$0.76 \pm 0.14 \pm 0.06$	0.73 ± 0.15

9. táblázat. Inkluzív J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetek aránya proton-proton és proton-antiproton ütközésekben, $\sqrt{s} = 24.3$ GeV tömegközépponti energián. A mérési eredmények [143]-ból származnak.



39. ábra. Inkluzív J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetek aránya proton-proton és proton-antiproton ütközésekben egy széles energiatartományon. A mérési pont [143]-ból származik.

A modell láthatóan igen jó eredményt ért el a mért ponttal való összehasonlítás során, amely igen biztató. Érdekes észrevenni azt is, hogy hiába nagyobb a proton-antiproton eset a proton-proton-hoz képest, a küszöbtől távol még így is a pion-proton ütközések hatáskeresztmetszete a legnagyobb a háromfajta reakció közül. A modellben ezen különbségek a különböző számú és típusú lehetséges folyamatok számából és azoknak a valószínűségéből ered, melyeket minden esetben a megmaradási tételeknek megfelelően kell felösszegezni.

A később tárgyalandó nehéziontranszport számítások során elsődlegesen a magasabb charmónium állapotok visszabomlásai nélküli, direkt J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetekre lesz szükség. Ennek érdekében el kell szeparálni a χ_{c1} , χ_{c2} , illetve $\Psi(3686)$ részecskékre vonatkozó kontribúciókat a teljes J/Ψ hatáskeresztmetszetből. Az előbbi részecskék hatáskeresztmetszetére igen korlátozott számú mérési eredmény létezik [144, 145, 146, 147, 148, 149], így az irodalommal összhangban a következő arányokat hatá-

roztam meg:

$$R_{\chi_{c1}+\chi_{c2}}^{AB} = \sum_{i=1}^2 \frac{\text{Br}(\chi_{ci} \rightarrow J/\Psi) \sigma_{AB \rightarrow \chi_{ci} X}}{\sigma_{AB \rightarrow J/\Psi X}}, \quad (87)$$

$$R_{\Psi(3686)}^{AB} = \frac{\text{Br}(\Psi(3686) \rightarrow J/\Psi) \sigma_{AB \rightarrow \Psi(3686) X}}{\sigma_{AB \rightarrow J/\Psi X}}, \quad (88)$$

ahol A és B az ütköző részecskéket reprezentálják, amely ebben az esetben p és π lehet, míg $\text{Br}()$ a különböző J/Ψ -ba való bomlás elágazási arányait jelöli. A modellszámítások és a mérési eredmények összehasonlítását az 10., illetve 11. táblázatok tartalmazzák, ahol a modellszámítások láthatóan igen jól egyeznek a mérési eredményekkel.

	$R_{\Psi(2S)}^{pN}$	$R_{\Psi(2S)}^{\pi N}$		
\sqrt{s} [GeV]	23.7	18.6	20.5	23.74
mérés [%]	5.5 ± 1.6	8	11 ± 5	7.6 ± 2.3
modell [%]	6.2 ± 2.4	8.5 ± 3.4	8 ± 3.2	7.2 ± 2.8

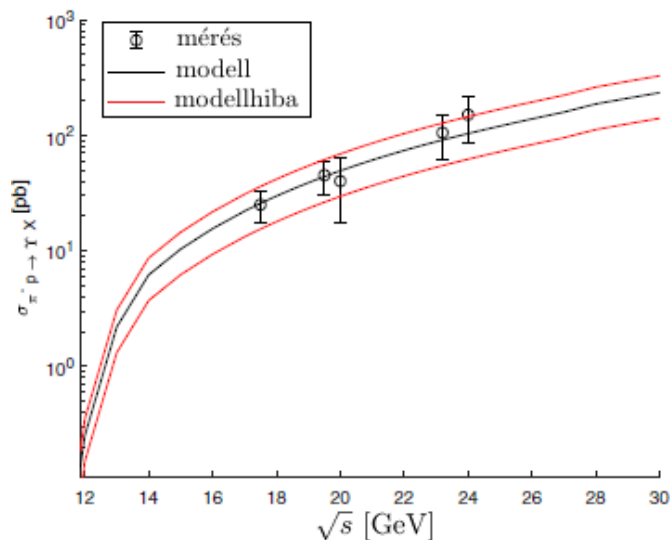
10. táblázat. Teljes J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetek aránya a direkt $\Psi(3686)$ részecske keltési hatáskeresztmetszetekhez képest. A mérési eredmények [144, 145, 146, 147, 148, 149]-ből származnak.

	$R_{\chi_{c1}+\chi_{c2}}^{\pi N}$		
\sqrt{s} [GeV]	18.6	18.9	23.74
mérés [%]	30.5 ± 6.5	31 ± 14	34 ± 4
modell [%]	35.7 ± 7.1	35.9 ± 7.1	36.4 ± 7.2

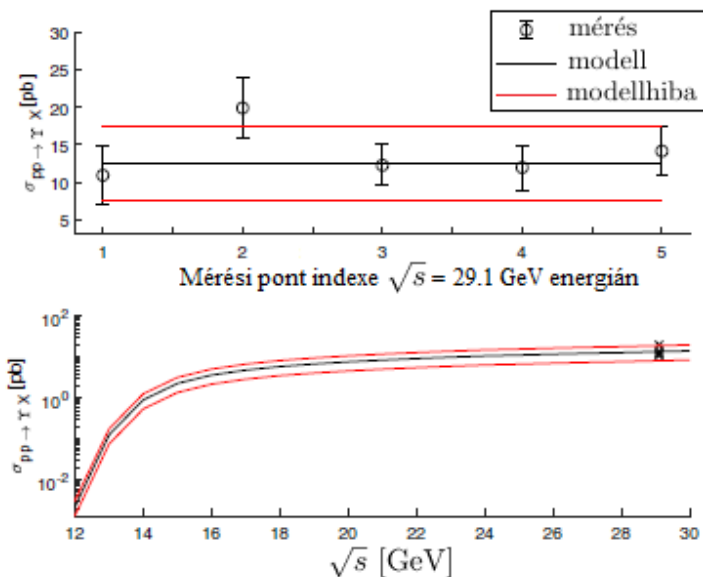
11. táblázat. Teljes J/Ψ keltési hatáskeresztmetszetek aránya a direkt χ_{c1} , χ_{c2} részecskék keltési hatáskeresztmetszeteihez képest. A mérési eredmények [144, 145, 146, 147, 148, 149]-ből származnak.

A charmónium állapotok után a b -kvarkokat tartalmazó részecskék hatáskeresztmetszeteit is megvizsgáltam, ahol elsőként a P_b b -kvark keletkezési valószínűség illesztéséhez felhasznált $\pi^- + p \rightarrow \Upsilon(1S) + X$ folyamatot mutatom be. Ehhez természetesen ismét figyelembe kell venni azon magasabb tömegű állapotokat is ($\Psi(2S)$, $\Psi(3S)$, $\chi_{b1}(1P)$, $\chi_{b2}(1P)$, $\chi_{b1}(2P)$, $\chi_{b2}(2P)$), amelyek visszabomolhatnak $\Psi(1S)$ részecskébe. Ezen részecskék paraméterei a 8. táblázatban kerültek felsorolásra, továbbá az eredmények a 40. ábrán követhetőek.

A következő b -kvarkokat tartalmazó folyamat, melyet megvizsgállok, a $p + p \rightarrow \Upsilon + X$ reakció, ahol $\Upsilon = \Upsilon(1S) + \Upsilon(2S) + \Upsilon(3S)$. A mért értékeket [150]-ből elérhetőek, ahol a kísérletek során proton nyalábokat ütköztettek Be, Al, Cu, Ag, illetve W céltárgyakkal $\sqrt{s} = 29.1$ GeV tömegközépponti energián. Az eredményeket a 41. ábrán láthatjuk, ahol az ábra felső részén a $\sqrt{s} = 29.1$ GeV-en mért összes hatáskeresztmetszetet, illetve a modell ugyanezen energián számított eredményeit, míg az ábra alsó felében a hatáskeresztmetszet energiafüggését szemléltetem.



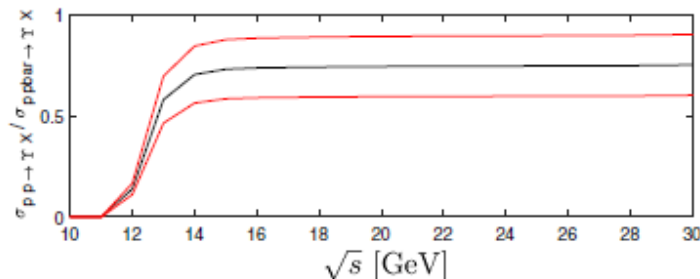
40. ábra. A $\pi^- + p \rightarrow \Upsilon(1S) + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszete a statisztikus modellből (fekete vonal), illetve mérésekből (körök hibahatárokkal) meghatározva, ahol a mérési eredményeket [140, 141]-ből vettük.



41. ábra. A $p + p \rightarrow \Upsilon + X$ inkluzív reakció hatáskeresztmetszete a statisztikus modellből (fekete vonal), ahol $\Upsilon = \Upsilon(1S) + \Upsilon(2S) + \Upsilon(3S)$. A felső ábrán a $\sqrt{s} = 29.1$ GeV-en végzett számítások és a Be, Al, Cu, Ag, illetve W céltárgyakkal készített mérési eredmények összehasonlítása, míg az alsó ábrán a hatáskeresztmetszet energiafüggése látható.

A charmónium állapotokhoz hasonlóan a $\Upsilon(1S)$ bottomónium esetében is meghatároztam a $p + \bar{p} \rightarrow \Upsilon(1S) + X$ inkluzív keltési hatáskeresztmetszetet, ahol a várakozás ismét az, hogy a proton-antiproton ütközések esetén a hatáskeresztmetszetek megnőnek a

proton-proton ütközésekben kapott értékekhez képest. A $\sigma_{pp \rightarrow \Upsilon(1S)X} / \sigma_{\bar{p}p \rightarrow \Upsilon(1S)X}$ arány meghatározása után kapott eredményeket az 42. ábra szemlélteti, ahol sajnos a proton-antiproton esetben nem léteznek mérési eredmények, így csak a modellszámítások kerültek bemutatásra.



42. ábra. A $\sigma_{pp \rightarrow \Upsilon(1S)X} / \sigma_{\bar{p}p \rightarrow \Upsilon(1S)X}$ inkluzív hatáskeresztmetszet arány energiáfüggésének becslése a statisztikus modellből.

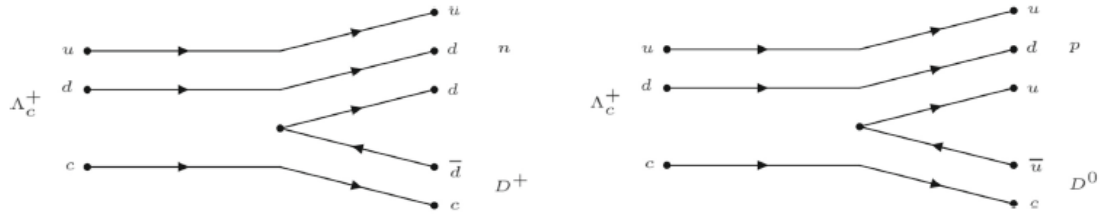
A fejezet befejezéseként az egy könnyű (u,d,s) és egy nehéz (c) kvark-antikvark párból álló mezonok, az ún. "nyílt-charm" (open-charm) állapotok (D^\pm , D^0 , illetve \bar{D}^0 mezonok) inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek leírását adom meg $\pi^- p$, illetve pp ütközésekben, melyek egy fokkal nehezebb problémának bizonyultak a sima charmonium állapotok leírásához képest. Ennek elsődleges oka, hogy a statisztikus modell nagyban épít az ismert rezonanciákra, illetve azok paramétereire (elágazási tényezők, tömegek, spinek, stb...) ismeretére, melyek közül, ha bármelyik is kevésbé ismert akkor azon rezonanciákat csak fenntartásokkal lehet kezelni a végeredmények számításánál. A korábban vizsgált charmonium állapotok esetén a számunkra érdekes esetekben a gerjesztett állapotok paramétereik igen jól ismertek, így azokat megfelelő biztonsággal alkalmazhattuk a számítások során. A most következő néhány esetben viszont az érdekes rezonanciák paramétereik csak kevés esetben ismertek megfelelő biztonsággal, aminek következtében a számítások bizonytalansága is megnő. Ettől a problémától eltekintve a következőkben nagyságrendi becslést teszek a $\pi^- + p \rightarrow D^+ / D^- + X$, $\pi^- + p \rightarrow D^0 / \bar{D}^0 + X$, illetve $p + p \rightarrow D^+ / D^- + X$, $p + p \rightarrow D^0 / \bar{D}^0 + X$ reakciók inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteire. Az említett folyamatoknál minden esetben figyelembe kell venni a $D^*(2007)^0$, $D^*(2010)^\pm$, $D^*(2300)^0$, $D^*(2300)^\pm$, $D_1(2420)^0$, $D_2^*(2460)^0$, $D_2^*(2460)^\pm$, $D_3^*(2750)$, $\Psi(3770)$, $\Lambda_c(2880)^+$, illetve $\Lambda_c(2940)^+$ részecskéket is, melyek feltehetőleg tovább bomolhatnak alapállapotú D -mezonokba és paramétereik (az elágazási tényezőktől eltekintve) a PDG szerint viszonylag jól ismertek. Sajnos sok esetben az elágazási tényezők egyáltalán nem ismertek, vagy ha ismertek, akkor is csak nagy bizonytalanságokkal, így azokra valamilyen feltételezést kell tenni. Az általánosság kedvéért bevezetek egy asszimmetria paraméter, amely azt mondja meg, hogy egy adott rezonancia milyen arányban bomlik töltött D^\pm mezonokba a töltetlen D^0 , \bar{D}^0 mezonokhoz képest:

$$r = \frac{Br(X \rightarrow D^+ / D^-)}{Br(X \rightarrow D^0 / \bar{D}^0)}, \quad (89)$$

ahol feltételezem, hogy a többi bomlás elhanyagolható, vagyis $Br(X \rightarrow D^+ / D^-) + Br(X \rightarrow D^0 / \bar{D}^0) \approx 1$. A számítások során, ahol az elágazási arányok nem ismertek,

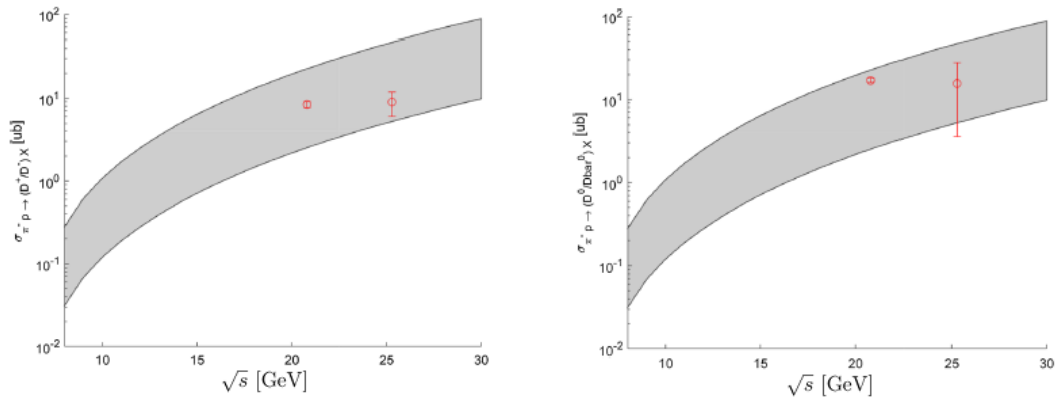
3 STATISZTIKUS MODELL ELEMI HADRON-HADRON ÜTKÖZÉSEK LEÍRÁSÁRA

felteszem, hogy azok értékei értékei 0.1 és 0.9 között mozoghatnak, azaz $Br_i \in [0.1, 0.9]$, mellyel a fentebb definiált arányossági tényező $r_i \in [0.11, 9]$ lesz. A $D^*(2010)^+$ részecske esetén, ahol $Br(D^*(2010)^+ \rightarrow D^+\pi^0) = 0.307$, $Br(D^*(2010)^+ \rightarrow D^+\gamma) = 0.016$, illetve $Br(D^*(2010)^+ \rightarrow D^0\pi^+) = 0.677$ elágazási arányok ismertek, a számított arányossági tényező $r \approx 0.46$ lesz. A Λ_c^+ barion rezonanciák esetén a 43. ábrának megfelelően felteszem, hogy azoknak létezik $\Lambda_c^+ \rightarrow pD^0$, illetve $\Lambda_c^+ \rightarrow nD^+$ bomlási módjuk, melyekhez ugyanazt az 'r' asszimmetria tartományt rendelem, mint a D -mezon rezonanciákhoz.

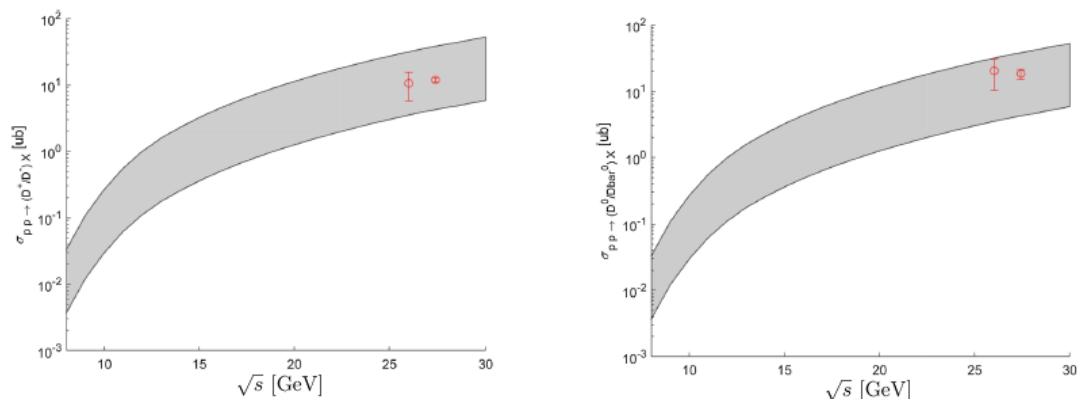


43. ábra. Kvarkfolyam diagrammok a $\Lambda_c^+ \rightarrow D^+n$, illetve $\Lambda_c^+ \rightarrow D^0p$ bomlási folyamatokhoz.

Effektív modell számítások során [151] a Λ_c^+ barionrezonanciára vonatkozó asszimmetriafaktort $r \approx 1$ -re becsülték, azonban igen valószínű, hogy az ismert mezon- és barionrezonanciáknak, még ha kis mértékben is, de különböznek az elágazási faktoraik, így ezen a ponton a legtöbb ami tehető, hogy egy adott asszimmetria tartományon belül nagyságrendi becsléseket teszek a hatáskeresztmetszetek értékeire. Az eredményeket pion-proton ütközésekre az 44. ábra, míg proton-proton ütközésekre az 45. ábra mutatja, ahol a becsült asszimmetria tartományok által meghatározható bizonytalanságon belül igen jó egyezést kaptunk a D -mezon keltési hatáskeresztmetszetekre.



44. ábra. Becsült hatáskeresztmetszetek a $\pi^- + p \rightarrow D^+/D^- + X$ (bal), illetve a $\pi^- + p \rightarrow D^0/\bar{D}^0 + X$ (jobb) inkluzív folyamatokra változó asszimmetria faktorial. A mérési eredmények [152, 153, 154]-ből származnak.



45. ábra. Becsült hatáskeresztmetszetek a $p + p \rightarrow D^+/D^- + X$ (bal), illetve a $p + p \rightarrow D^0/\bar{D}^0 + X$ (jobb) inkluzív folyamatokra változó asszimetriafaktorral. A mérési eredmények [152, 153, 154]-ből származnak.

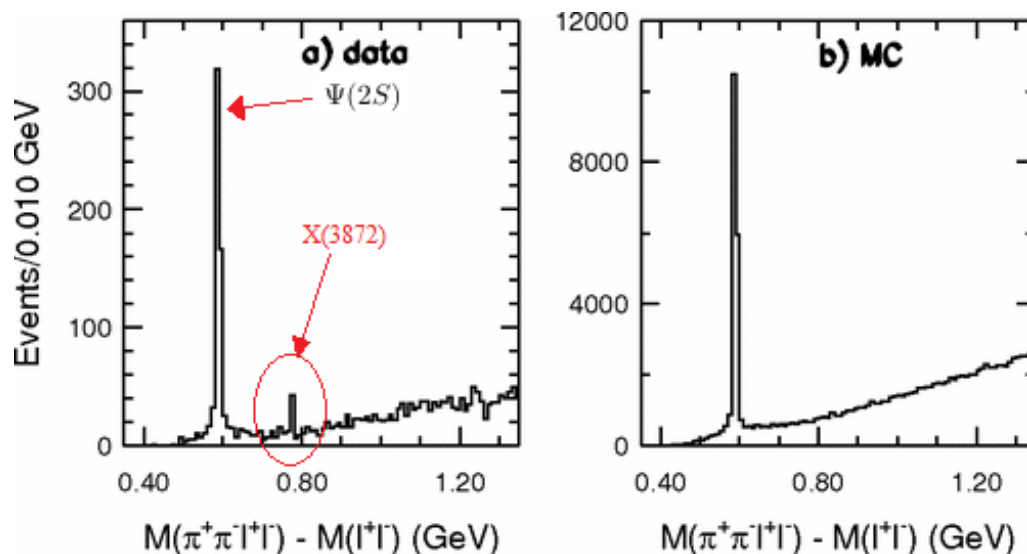
Ezzel lezárásra kerül a nehéz kvarkokat tartalmazó hadronok inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteit vizsgáló szakasz, mely után a következő fejezetben az egzotikusabb ún. tetrakvarkok kerülnek vizsgálat alá, ahol becslést teszek az $X(3872)$ lehetséges tetrakvark állapot inkluzív keltési hatáskeresztmetszetére pion-proton, proton-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben.

3.6. Tetrakvark hatáskeresztmetszetek dikvark közelítésben

Ebben a fejezetben egzotikus állapotokkal, illetve azoknak a statisztikus modellbe történő beillesztésével foglalkozom, melynek során néhány inkluzív hatáskeresztmetszetre is becslést teszek. A részecske- és magfizika mai besorolása szerint egzotikusnak nevezünk minden olyan állapotot, melyek nem illeszthetők be a szokásos mezonok, illetve barionok közé. Ilyen állapotok például a már említett 2 kvarkból és 2 antikvarkból álló tetrakvarkok, az 5 kvarkból és 1 antikvarkból álló pentakvarkok, vagy éppen a gluonok kötött állapotai, az ún. gluonlabdák, melyeknek létezése a kvantum-színdinamika alapelvei szerint elviekben lehetségesek, ám tényleges létezésük, illetve paramétereik a mai napig nem egyértelműen eldöntöttek [155, 156, 157, 158, 159, 160]. Annak érdekében, hogy el lehessen dönteni egy-egy egzotikus állapot tényleges szerkezetét, különböző modellekkel meg kell határozni bizonyos mérhető mennyiségeket, mint például tömegek, bomlási állandók, hatáskeresztmetszetek stb..majd a számítások eredményeit össze kell hasonlítani a szórási, illetve egyéb kísérletekből elérhető mérési eredményekkel. Egy ilyen lehetséges modell például az eredetileg mezonokra és barionokra kifejlesztett zsákmodell [161, 162], amely igen sikeresen képes leírni a konvencionális hadron tömegeket. A zsákmodell kiterjesztett változataiban több helyen is megvizsgálták a modell lehetőségeit tetrakvarkok, illetve gluonlabdák tulajdonságainak leírására is [163, 164, 165, 166]. Egy másik lehetséges modell, mely nehéz kvarkokat tartalmazó egzotikus állapotok esetén alkalmazható lehet, a charmónium, illetve bottomónium állapotok esetén igen jó eredményeket elérni képes, nemrelativisztikus kvantum-színdinamika (NRQCD), melynek segítségével bomlási állandók, illetve hatáskeresztmetszetek is számíthatóak [167]. Ugyanígy nehéz kvarkokat tartalmazó egzotikus állapotok, például tetrakvarkok tömegspektrumának meghatározására egy alkalmas módszer lehet a Schrödinger-egyenlet al-

kalmazása, melyet ebben az esetben 4 részecskére kell megoldani [168]. Az említett modelleken felül különböző effektív modellek, rács-QCD számítások, illetve QCD összegszabályok alkalmazása nyújthat információt az adott egzotikus állapotok tulajdonságairól [169, 170, 171]. Minél több modellszámítás létezik, annál valószínűbb, hogy a jövőben valós képet fogunk kapni a vizsgált egzotikus állapotok valós struktúrájáról, így manapság nagyon fontos feladat, minél többfajta modell figyelembevételével, minél több számítást elvégezni, majd a kísérleti eredményekkel összehasonlítva megtartani vagy elvetni az egyes modelleket. Ezen okból kifolyólag hasonlóan nagy szerep jut az új, illetve régi gyorsítóknak elvégezhető, ilyen irányú kísérleteknek is.

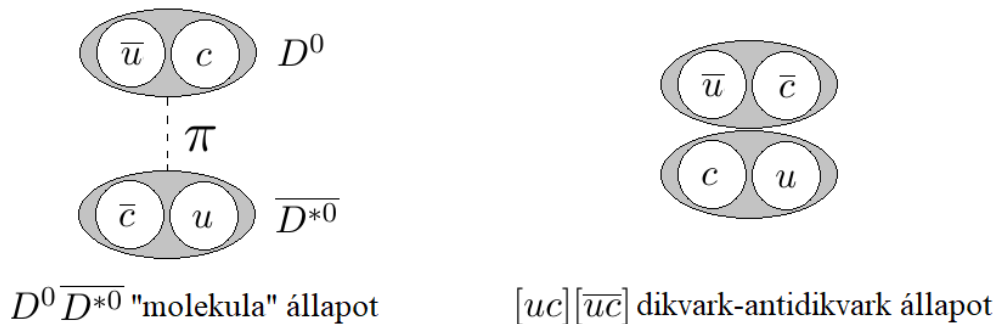
A következőkben megvizsgálom a 2 kvarkot, illetve 2 antikvarkot tartalmazó egzotikus, ún. tetrakvark állapotok inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteit proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben, melynek leírására az előző fejezetekben vizsgált statisztikus modellt alkalmazom. A lehetséges tetrakvark állapotok közül is elsődlegesen a rejtett-charm tartalmú $X(3872)$ állapottal foglalkozom, melyet elsőnek 2003-ban mért meg a Belle-kollaboráció a $B^+ \rightarrow X(3872)K^+ \rightarrow (J/\Psi\pi^+\pi^-)K^+$ bomlási folyamatban, ahol a charmónium állapotot, annak dileptonokra való bomlásából azonosították [172]. A mérési eredményeket, illetve az $X(3872)$ részecske nélkül kapott Monte-Carlo-eseménygenerátorral számolt eredményeket mutatja a 46. ábra. A mérésben egyértelműen kivehető egy kis rezonáns csúcs, melyet az $X(3872)$ részecskével azonosítottak.



46. ábra. Az $X(3872)$ részecske felfedezéséhez tartozó mérési eredmények [172]-ből. A bal oldalon a mérésekből meghatározott spektrum, míg a jobb oldalon a Monte-Carlo-szimulációkból meghatározott spektrum látható. Az ábrákon látható nagy csúcs a $\Psi(2S) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-$ bomlás járulékait, míg a bal oldali ábrán látható kis csúcs az $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\Psi$ járulékait mutatják.

További mérések során a részecskék szögeloszlásainak vizsgálatából az $X(3872)$ kvantumszámait $J^{PC} = 1^{++}$ -nak határozták meg [173]. Az $X(3872)$ egy lehetséges $[c\bar{c}u\bar{u}]$ tetrakvark állapot, melyre annak mérésekből meghatározott kvantumszámaiból, illetve a nemrelativisztikus Schrödinger-egyenlettel, a $c\bar{c}$ modelltől meghatározható tömegtől

való igen nagy, nagyjából 100 MeV-es eltérésből lehet következtetni. Az $X(3872)$ tényleges struktúrája azonban még nem ismert, hiszen a QCD szerint az lehet egy lazán kötött $D^0\overline{D}^{*0}$ molekula, egy $[uc][\overline{u}\overline{c}]$ dikvark-antikvark kötött állapot, egy kompakt 4-kvark állapot, egy $c\overline{c}g$ charmonium hibrid, vagy akár egy gluonlabda keveréke egy $[c\overline{c}]$ charmonium állapottal is [174]. A két legaktívabban vizsgált lehetőséget szemlélteti a 47. ábra, ahol a bal oldalon az 1-pioncserés $D^0\overline{D}^{*0}$ molekulaállapot, míg a jobb oldalon a szorosabban kötött dikvark-antikvark állapot látható.



47. ábra. Az $X(3872)$ részecske két lehetséges tetraquark konfigurációja. A bal oldalon a $D^0\overline{D}^{*0}$ molekulaállapot, míg a jobb oldalon az $[uc][\overline{u}\overline{c}]$ dikvark-antikvark állapot látható.

A $D^0\overline{D}^{*0}$ molekulaállapotban a kölcsönhatást tipikusan 1-pion cserével modellezik, melynek következtében az így leírt állapotok kiterjedése igen nagy, $r \sim 1 - 10$ fm [175], míg dikvark-antikvark esetén a kölcsönhatást a gluonok dominálják, így ez a távolság $\sim 0.1 - 1$ fm körül kell mozogjon. Az aktuális állapot tulajdonságai, mint például átlagos mérete, bomlási állandói, illetve keltési hatáskeresztmetszetei függeni fognak attól, hogy melyik struktúra valósul meg, melyek vizsgálata egy jó módszert adhat arra, hogy például nehézion-ütköztetési kísérletekből meghatározzuk a tényleges felépítésüket. Ennek egy alapötlete, hogy ha a vizsgált tetraquark például egy lazán kötött molekulaállapot, akkor a disszociációs hatáskeresztmetszete értelemszerűen nagyobb lesz, mint egy szorosan kötött dikvark-antikvark állapot esetén. Ekkor egy alacsonyenergiás nehézion ütközés során létrejövő sűrű közegben való propagálás végén leszámított tetraquark állapotokból esetleg következtetni lehet annak belső struktúrájára [176, 177, 178]. Természetesen ahhoz, hogy transzportszámításokba, vagy nehéziontranszport szimulációs kódokba be tudjuk illeszteni a tetraquark állapotokat, meg kell határozni azok keltés, illetve disszociációs hatáskeresztmetszeteit is, melyek sajnos kísérletileg nem igazán ismertek. Ezen hatáskeresztmetszeteik meghatározására az irodalomban több módszerrel is próbálkoztak. [179]-ben egy effektív modellel becsülték meg az $X(3872)$ részecske alacsonyenergiás hatáskeresztmetszeteit, míg [180]-ben dupla-parton-szórási (DPS) modellel adtak becslést az $X(3872)$ inkluzív keltésére proton-proton ütközésben TeV energiákon.

Ebben a fejezetben becslést teszek az $X(3872)$ lehetséges tetraquark állapot inkluzív keltési hatáskeresztmetszetére dikvark-antikvark közlésben, melyhez kiegészítésre kerül a korábban csakis mezonokra és barionokra alkalmazott statisztikus modell [181]. Dikvark közlésben feltesszük, hogy két kvark erős kölcsönhatása következtében kialakul egy dikvarknak nevezett "színes" állapot, amely állapotokat már a három kvarkot

tartalmazó barionok leírásánál is több helyen alkalmazták, ahol a harmadik kvark az első két kvark által létrehozott dikvarkhoz csatolódva alakította ki a három kvark konfigurációt [182]. Tekintve, hogy a kvarkok az $SU(3)_c$ fundamentális ábrázolásaiban élnek, ezért a kialakult dikvark $\bar{3}_c$ antitriplet, vagy 6_c szextett állapotban lehet a következő tenzorszorzatnak megfelelően:

$$3_c \otimes 3_c = \bar{3}_c \oplus 6_c \quad (90)$$

Antikvarkok esetén hasonló okokból kifolyólag egy triplet és egy antiszextett állapot jöhet létre, mivel $\bar{3}_c \otimes \bar{3}_c = 3_c \oplus \bar{6}_c$. Ezek után a dikvarkok és antidikvarkok triplet-antitriplet, illetve szextett-antiszextett kölcsönhatásai következtében, mindkét esetben kialakulhat egy-egy színsinglet állapot, hiszen:

$$3_c \otimes \bar{3}_c = 1_c \oplus 8_c \quad (91)$$

$$6_c \otimes \bar{6}_c = 1_c \oplus 8_c \oplus 27_c \quad (92)$$

Láthatóan ebben a közelítésben kétféleképpen jöhet létre a dikvark-antidikvark kötött állapot, melyek valószínűségeit nem egyértelmű meghatározni és többnyire feltételezik, hogy a triplet-antitriplet állapot kialakulása a dominánsabb [183].

A cél ebben a fejezetben a dikvarkok és antidikvarkok beillesztése a statisztikus modellbe, hogy később meg lehessen határozni a dikvarkok kötött állapotaként létrejövő tetraquarkok hatáskeresztmetszeteit. Tekintve, hogy a kvarktartalomra vonatkozó információ a modellben a kvark-kombinatorikai faktorokban bújik meg, ezért értelemszerűen az szorul elsődlegesen kiegészítésre. Az alapmodell szerint a kvarkkeletkezési valószínűségeknek megfelelően kialakul egy kvarkszámeloszlás, mely a multinomiális eloszlással írható le. Ennek az eloszlásnak a várhatóértékéhez tartozó kvarkszámok alkotják a megvalósuló kvark/antikvark konfigurációt, melyből kombinatorikai megfontolásokkal meghatározható, hogy hányféleképpen jöhet létre az adott mezon vagy barion. Ahhoz, hogy a modell képes legyen leírni a dikvarkokat is, szükség van annak a valószínűségére, hogy az adott dikvark létrejön, azaz meg kell határozni egy dikvarkkeletkezési valószínűséget. Első közelítésként tegyük fel, hogy az i és j ízű kvarkokból álló dikvarkok keletkezési valószínűsége $P_{ij} = P_i P_j$, mellyel a dikvarkokat is tartalmazó kvarkszámeloszlás a következő alakba írható:

$$F(N; n_i, n_{ij}) = \frac{\Gamma(N+1)}{\prod_i \Gamma(n_i+1) \prod_{ij} \Gamma(n_{ij}+1)} \prod_i P_i^{n_i} \prod_{ij} P_{ij}^{n_{ij}}, \quad (93)$$

ahol $N = N(x)$ az (52) kifejezésből meghatározható x energiafüggő összkvarkszám, n_i az i -ízű kvarkok száma, n_{ij} az i és j -ízű kvarkok által kiadott dikvarkok száma, P_i az i -ízű kvarkok keltési valószínűsége, míg $P_{ij} = P_i P_j$ az (ij) -ízkombinációjú dikvarkokhoz tartozó keltési valószínűség. Természetesen ebben az esetben is ki kell elégíteni az összes kvarkszámra vonatkozó megszorítást, vagyis, hogy a különböző ízű kvarkok számának összege ki kell adja N -et, mely összegbe már a dikvarkokban levő kvarkpárok is beleszámítanak. Tekintve, hogy n_{ij} számú dikvarkhoz n_{ij} darab i és ugyancsak n_{ij} darab j kvark tartozik, a dikvarkok maximális száma $N/2$, míg a dikvarkok várható száma $\langle n_{ij} \rangle = P_{ij} N/2 = P_i P_j N/2$ lesz. A színkonfigurációk száma a dikvark-antidikvark kötött állapotok esetén különbözik a korábban vizsgáltaktól, hiszen ebben az esetben a dikvarkok triplet, illetve szextett állapotban lehetnek, melyet a 12. táblázat szemléltet.

$3_c \otimes 3_c$		$\bar{3}_c \otimes \bar{3}_c$	
Antitriplet	szextett	Triplet	Antiszeptett
$\frac{1}{\sqrt{2}}(rg - gr)$	rr	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}\bar{g} - \bar{g}\bar{r})$	$\bar{r}\bar{r}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(rb - br)$	bb	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}\bar{b} - \bar{b}\bar{r})$	$\bar{b}\bar{b}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(gb - bg)$	gg	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{g}\bar{b} - \bar{b}\bar{g})$	$\bar{g}\bar{g}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(rg + gr)$		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}\bar{g} + \bar{g}\bar{r})$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(rb + br)$		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}\bar{b} + \bar{b}\bar{r})$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(gb + bg)$		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{g}\bar{b} + \bar{b}\bar{g})$

12. táblázat. A lehetséges triplet-antitriplet és szextett-antiszeptett színkonfigurációk összefoglalása.

Egy színszinglet dikvark-antidikvark kötött állapot színkonfigurációinak száma ezek alapján 3, illetve 6 lehet, triplet-antitriplet, illetve szextett-antiszeptett állapotokra. A dikvarkok ezen felül adott spin állapotban is lehetnek, azaz minden dikvarkhoz tartozik még egy extra $(2s_{dikvark} + 1)$ spinfaktor is. A dikvarkokkal kiegészített modellet az $X(3872)$ lehetséges tetraquark állapot inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek meghatározására alkalmazom, mely validációjához a CMS kollaboráció által $\sqrt{s} = 7$ TeV-es proton-proton ütközésekben mért eredmények kerülnek felhasználásra, ahol az $X(3872) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^- \rightarrow (\mu^+\mu^-)\pi^+\pi^-$ és a $\Psi(2S) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^- \rightarrow (\mu^+\mu^-)\pi^+\pi^-$ bomlásokból meghatározható a két csatorna aránya a $p_T \in [10, 50]$ GeV-es transzverz impulzusú és $|y| < 1.2$ rapiditású kinematikai tartományon, melynek eredménye [184]:

$$\frac{\sigma_{X(3872)} \cdot \text{Br}(J/\Psi\pi^+\pi^-)}{\sigma_{\Psi(2S)} \cdot \text{Br}(J/\Psi\pi^+\pi^-)} = 0.0656 \pm 0.0094, \quad (94)$$

ahol a hibák tartalmazzák a szisztematikus, illetve statisztikus kontribúciókat is. A $\Psi(2S) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-$ folyamat elágazási tényezője jól ismert, $\text{Br}(\Psi(2S) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-) = 0.34$, azonban az $X(3872)$ részecskére vonatkozó elágazási arányra jelenleg csupán egy alsó és felső korlát adható meg [185], melynek értékei $\text{Br}(X(3872) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-) = [0.042, 0.093]$. Az egyszerűség kedvéért elhanyagolva a mérési hibákat, viszont figyelembe véve az elágazási tényezők bizonytalanságát megadható egy tartomány a hatáskeresztmetszetek arányára:

$$\frac{\sigma_{\Psi(2S)}}{\sigma_{X(3872)}} \approx [1.88, 4.16]. \quad (95)$$

Tekintve, hogy az $X(3872)$ inkluzív keltésére vonatkozólag jelenleg több mérés nem ismert, ez az arány egyfajta validációként fog szolgálni a dikvarkokkal kiegészített statisztikus modellhez. A statisztikus modell azonban eddig csak jóval kisebb energián lett alkalmazva, illetve a kvarkkeletkezési valószínűségek is csak párszor 10 GeV-ig lettek illesztve, amely problémát áthidalandó becslést kell tenni azok értékére nagyobb energiákon is. Az illesztések ilyen nagy energiákon problémásak, a numerikus nehézségek, illetve a kevés összehasonlítható mérési eredmény miatt. Ezen okokból kifolyólag azok értékére elméleti megfontolásokat kell tenni $\sqrt{s} = 7$ TeV-en. A 3.1. fejezetben leírtakból, illetve a nehéz kvarkokra vonatkozó kvarkkeletkezési valószínűségek funkcionális formájából feltehető, hogy a kvarkkeletkezési valószínűségek az energia növelésével tartanak egy közös értékhez. Mivel az elnyomások erősen függenek a kvarkok tömegétől, azaz minél nagyobb a kvarktömeg, annál nagyobb az elnyomás, ezért az az energia, ahol az egyes kvarkok

eléri a könnyű kvarkokra vonatkozó valószínűségeket más és más lesz. Az s -kvarkok esetében, mint az korábban említésre került a konstans érték helyett választhattunk volna egy az energiával monoton növekvő funkcionális formát is, azonban a mérési és modell hibák miatt $\sqrt{s} \leq 15$ GeV-es energiákon, a konstans érték is megfelelőnek bizonyult az s -kvarkot tartalmazó inkluzív reakciók leírásánál. Természetesen ebben az esetben is feltehető, hogy az elnyomás az energia növelésével csökken, melyet a következőkben ki is használok.

Az előbbiekből kiindulva a könnyű kvarkok esetében (u,d,s) biztonsággal feltehető, hogy a kvarkkeletkezési valószínűségek $\sqrt{s} = 7$ TeV-en megegyeznek, azaz $P_u = P_d = P_s$. A nehezebb c -, b és t -kvarkokra ez nem annyira egyértelmű, így azokra további megfontolásokat kell tenni. t kvarkok esetén azok igen nagy, $m_t = 172$ GeV tömege miatt felteszem, hogy a keletkezési valószínűségük még 7 TeV-en is elhanyagolható a többi kvarkéhoz képest, azaz $P_t \ll P_{u,d,s}$, mely feltevést nemsokára kicsit jobban is alátámasztok. Első közelítésként felteszem tehát, hogy nagy energiákon $P_u = P_d = P_s$, továbbá $P_t \ll 1$, és a c - és b -kvarkok keletkezési valószínűségeire illesztett $P_{c,b} = a_{c,b}E$ lineáris formából kiszámítom, hogy mekkora energián érik el a $P_{u,d,s}$ értékeket, miközben teljesítik a $P_u + P_d + P_s + P_c + P_b + P_t = 1$ kényszerfeltételt is. Természetesen amint az egyik nehéz kvark keletkezési valószínűsége eléri a könnyű kvarkokra vonatkozó keletkezési valószínűségeket, onnantól azok értékei nem nőnek tovább. Azokat az energiákat, ahol a lineáris forma letörik, és a c - és b -kvarkok keletkezési valószínűségei nem nőnek tovább E_c -vel és E_b -vel jelöljük. Mivel a c -kvarkok keletkezési valószínűségei nagyobbak, mint a b -kvarkoké, ezért az előbb fogja teljesíteni a megadott feltételeket, vagyis értelemszerűen $E_c < E_b$ lesz. c -kvarkok esetében E_c meghatározásához meg kell oldani a következő egyenletet:

$$3P_{uds} = 1 - P_c - P_b, \quad (96)$$

ahol $P_{uds} = P_u = P_d = P_s$, míg $P_c = a_c E$, és $P_b = a_b E$ az illesztett $a_c = 8.5 \cdot 10^{-4}$ GeV $^{-1}$ és $a_b = 1.05 \cdot 10^{-5}$ GeV $^{-1}$ paraméterekkel. Az energia, ahol P_c eléri a P_{uds} értékeket meghatározható, ha P_{uds} -be behelyettesítjük P_c -t, amivel:

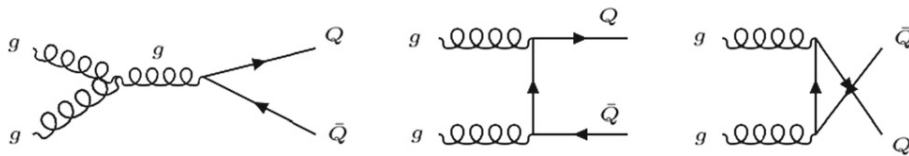
$$E_c = \frac{1}{4a_c + a_b} \approx 300 \text{ GeV}, \quad (97)$$

érték adódik. Hasonló módszerrel kifejezhető a b kvarkokra vonatkozó E_b energia is, azaz:

$$E_b = \frac{1}{5a_b} \approx 20 \text{ TeV}. \quad (98)$$

Az eredmények azt sugallják, hogy $\sqrt{s} = 7$ TeV-en a c -kvarkok keletkezési valószínűsége közel lesz az u -, d -, s -kvarkok keletkezési valószínűségeihez, viszont a b -kvarkok még mindig el lesznek nyomva, még ha nem is nagy mértékben. Már ebből az egyszerű számításból is látszik, hogy ha a b -kvarkok el vannak nyomva 7 TeV-en, akkor a t -kvarkok is egészen biztosan el lesznek nyomva, mégpedig jóval erősebben, hiszen a $m_b/m_t \approx 0.029$ tömegelnyomás egy igen erős kvarkkeletkezési valószínűségelnyomást is indukál.

Következő lépésként a b -kvarkok elnyomására tesztek becslést $\sqrt{s} = 7$ TeV-en, melyhez felteszem, hogy a nehéz kvark-antikvark párok a hadron-hadron ütközés során létrejövő gluonmezőkből keletkeznek, amely folyamatok a kvarkok nagy tömegei miatt kezelhetőek perturbatíván [186]. Ebben a modellben az egyszerűség kedvéért felteszem továbbá, hogy a kvark-antikvark párok az 48. ábrán felvázolt elsőrendű perturbatív folyamatokból jöhetnek létre.



48. ábra. A számítások során figyelembe vett elsőrendű Feynman-diagrammok, gluonmezőkből történő nehéz kvark-antikvark párok keltésére.

A c/b elnyomást hadron-hadron ütközésekben az adott folyamatok hatáskeresztmetszetarányainak energiafüggéséből határozom meg, ahol a $pp \rightarrow Q\bar{Q}$ folyamathoz tartozó hadronikus hatáskeresztmetszetek a faktorizációs-tétel alkalmazásával a következő alakban fejezhetőek ki [187]:

$$\sigma(\sqrt{s})^{pp \rightarrow Q\bar{Q}} = \int dx_1 dx_2 f_{1,p}(x_1, \mu_F) f_{2,p}(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}^{gg \rightarrow Q\bar{Q}}(\hat{s}, \mu_R), \quad (99)$$

ahol μ_F a faktorizációs skála, μ_R a renormalizációs skála, x_1 és x_2 az impulzusarányok, $f_{i,p}$ a proton struktúraeloszlás függvénye és $\hat{s} = x_1 x_2 s$. Hasonló számításoknál általában felteszik, hogy a faktorizációs skála és a renormalizációs skála megegyezik a nehéz kvarkok tömegével, azaz $\mu_F = \mu_R = m_Q$. A $\hat{\sigma}^{gg \rightarrow Q\bar{Q}}$ kifejezés az 48. ábrán felvázolt Feynman-diagrammokról meghatározható elemi partonikus hatáskeresztmetszetek, melyek alakja:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{gg \rightarrow Q\bar{Q}} = & \frac{\alpha_s^2}{m_Q^2} \frac{\pi \beta \rho}{24N(N^2 - 1)} [3\eta(\beta)(\rho^2 + \\ & + 2(N^2 - 1)(\rho + 1)) + 2(N^2 - 3)(1 + \rho) + \\ & + \rho(6\rho - N^2)], \end{aligned} \quad (100)$$

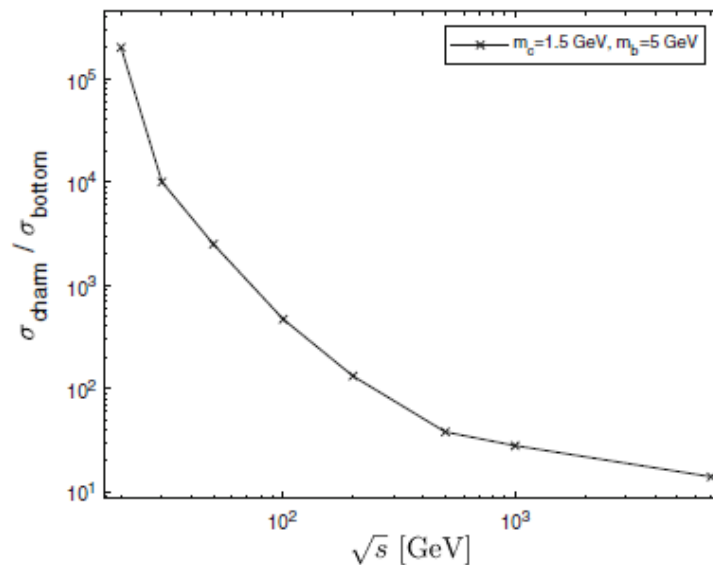
ahol az $\eta(\beta)$ függvény, illetve a β és ρ paraméterek a következő alakba írhatóak:

$$\begin{aligned} \eta(\beta) &= \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right), \\ \beta &= \sqrt{1 - \rho}, \\ \rho &= \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}, \end{aligned} \quad (101)$$

ahol m_Q a nehéz kvark tömege, $\hat{s} = x_1 x_2 s$ a partonikus tömegközépponti energia, míg α_s az erős kölcsönhatás futó csatolási állandója:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}, \quad (102)$$

ahol n_f a kvarkizék száma, Q a folyamat skálája, melyet a 48. ábrán látható t-csatornás folyamat minimális virtualitása, azaz a nehéz kvark tömege állít be $Q = m_Q$ értékre, továbbá $\Lambda_{QCD} = 0.2$ GeV. A partonikus eloszlásfüggvényeket [188, 189]-ből véve, továbbá a nehéz kvarkok tömegét $m_c = 1.5$ GeV-re és $m_b = 5$ GeV-re beállítva a (99). kifejezésben definiált hadronikus hatáskeresztmetszetek arányát mutatja a 49. ábra, ahol a $\sigma^{pp \rightarrow c\bar{c}} / \sigma^{pp \rightarrow b\bar{b}}$ energiafüggését $\sqrt{s} = 7$ TeV-ig ábrázoltam.



49. ábra. $c\bar{c}$ és $b\bar{b}$ kvark-antikvark párok keletkezési valószínűségeinek aránya a tömegközépponti energia függvényében, proton-proton ütközésekben. A c -kvarkok tömegét $m_c = 1.5$ GeV-nek, míg a b -kvarkok tömegét $m_b = 5$ GeV-nek véve.

Látható, hogy a b -kvark keletkezési hatáskeresztmetszete, és ebből kiindulva a keletkezési rátája is, lassan közelít a c -kvarkéhoz, ám $\sqrt{s} = 7$ TeV-en az elnyomás még mindig nagyjából egy nagyságrend a kettő között. Ezt az eredményt alátámasztva a PYTHIA eseménygenerátort alkalmazva megvizsgáltam, hogy hány darab $c\bar{c}$ és $b\bar{b}$ kvark-antikvark pár keletkezik a hadronizációs lépés előtt akkor, ha csak a 48. ábrán látható folyamatokat engedem meg. A PYTHIA eseménygenerátor általi vizsgálatok alapján azt kaptam, hogy $\sqrt{s} = 7$ TeV-en az u -, d -, s -, c -kvarkok száma megegyezik, míg a b -kvarkok száma nagyjából 1/10-e azoknak. Ezen vizsgálatok fő következménye, hogy $\sqrt{s} = 7$ TeV energián az u -, d -, s -, és c -kvarkok keletkezési valószínűségei valószínűsíthetően megegyeznek, míg a b -kvarkok esetén a keletkezési valószínűség nagyjából 1/10-e lesz a többieknek. Ezzel párhuzamosan az is feltételezhető, hogy t -kvarkok keletkezési valószínűsége annyira kicsi, hogy az nem befolyásolja a többi kvarkra vonatkozó eredményeket. Ezen feltételezésekből kiindulva a kvarkkeletkezési valószínűségeket $\sqrt{s} = 7$ TeV-en a következő értékekre állítottam be:

$$P_u^{7\text{TeV}} = P_d^{7\text{TeV}} = P_s^{7\text{TeV}} = P_c^{7\text{TeV}} \approx 0.2439, \quad (103)$$

$$P_b^{7\text{TeV}} \approx 0.0244. \quad (104)$$

A validáció során ezeket az értékek alkalmazom, míg az alacsonyenergiás számításoknál a korábban illesztett kvarkkeletkezési valószínűségeket használom. Mivel a mérési eredmények a $\Psi(2S)/X(3872)$ hatáskeresztmetszetek arányaira vonatkoznak, én is ezt határozom meg a statisztikus modellel. Feltéve, hogy az $X(3872)$ tetraquark egy $J^{PC} = 1^{++}$ kvantumszámokkal jellemzett $(u\bar{u}c\bar{c})$ kvarktartalmú állapot. Tegyük fel, hogy a diquarkok s-állapotban vannak. Ekkor a két lehetséges spinállapot, amely ki tudja adni a megfelelő paritást, spint, C-paritást és kielégíti a Pauli-kizárási elvet is [190, 191], az:

$$(s_{\text{diquark},1}, s_{\text{diquark},2}) = (1, 0), \quad (105)$$

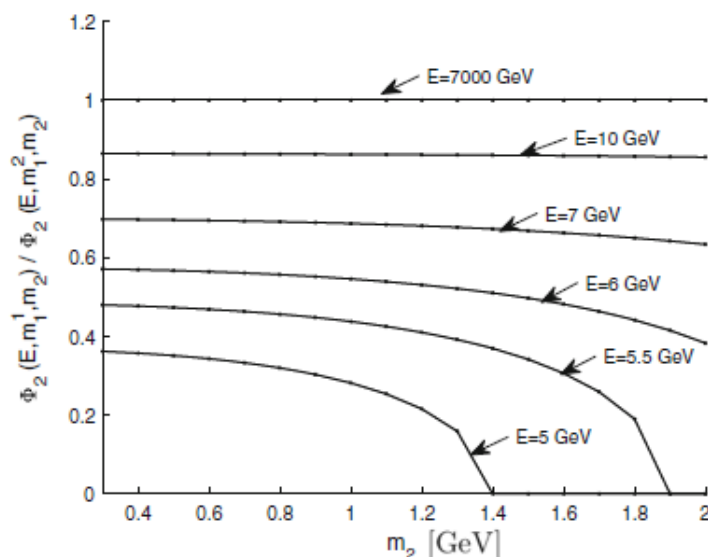
$$(s_{dikvark,1}, s_{dikvark,2}) = (0, 1), \quad (106)$$

vagyis ha az egyik dikvark spinje nulla, akkor a másik dikvark spinje 1 kell legyen. A statisztikus modellből meghatározva a két részecskére vonatkozó arányokat több közös faktor is ki fog esni. Amely faktorok megmaradnak azok a kvark-kombinatorikai faktorok, a spinmultiplicitások, illetve fázistérfaktorok. Ezek közül a fázistérfaktorokra felteszem, hogy az $X(3872)$, illetve a $\Psi(2S)$ hasonló tömegei miatt a fázistérintegrálok $\sqrt{s} = 7$ TeV-en közelítőleg megegyeznek, azaz:

$$\Phi_2(x, m_{X(3872)}, m_i) \approx \Phi_2(x, m_{\Psi(2S)}, m_i), \quad (107)$$

$$\Phi_3(x, m_{X(3872)}, m_i, m_j) \approx \Phi_3(x, m_{\Psi(2S)}, m_i, m_j), \quad (108)$$

ahol $x = 7$ TeV. A következő számítás során bemutatom, hogy ez a feltételezés értelmes. Ehhez meg kell határozni a $\Phi_2(E, m_1^i, m_2)$ fázistérintegrálokat két különböző esetben, ahol az első részecske tömegei $m_1^{i=1} = 3.6$ GeV, illetve $m_1^{i=2} = 1$ GeV. A két fix tömeg mellett a második részecske tömegeit $m_2 \in [0.3, 2]$ GeV, illetve a teljes energiát $E \in [5, 7000]$ GeV között variálva megvizsgáltam a fázistérintegrálok arányainak energiáfüggését. Ebben az esetben az első részecske m_1^i jelöli a számunkra érdekes részecskéket pl. $X(3872)$, míg a második tömeg m_2 egy olyan változó, amellyel vizsgálható az a különbség, amelyet az inkluzív összegben szereplő második részecskék tömegei hozhatnak be a $\Phi_2(E, m_1^{i=1}, m_2)/\Phi_2(E, m_1^{i=2}, m_2)$ arányba. Az eredményeket az 50. ábra szemlélteti, ahol látható, hogy alacsony energiákon a fázistérintegrálok között lényeges eltérések is lehetnek, különösen akkor amikor a második részecskék tömegei nagyok. Az energia növelésével azonban ezek a különbségek eltűnnek és értelmes részecsketömegek mellett $\sqrt{s} = 7$ TeV-en a fázisterek praktikusán megegyeznek, azaz alkalmazható a (107) kifejezésben bemutatott közelítés. Három részecskére, hasonló megfontolásokkal, ugyanerre a következtetésre jutni, így a (108) kifejezésben leírt közelítés is alkalmazható a nagyenergiás számítások során.

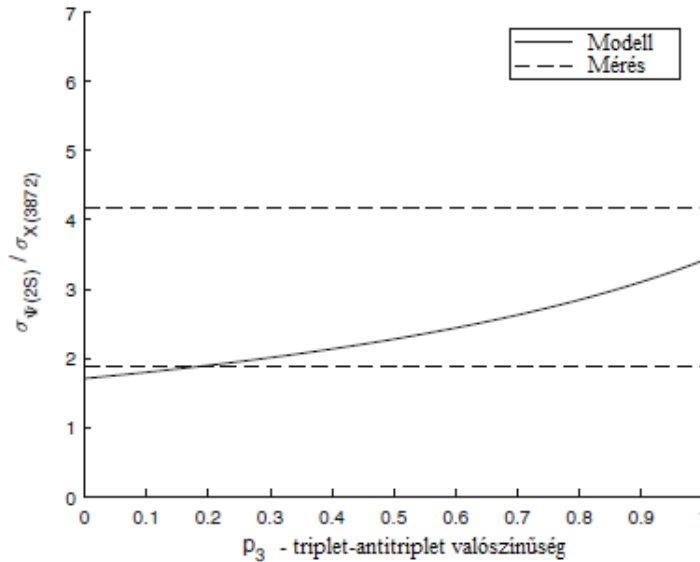


50. ábra. Kérrészecskés fázisterek aránya a második részecske m_2 tömegeinek, illetve az energia függvényében, ahol az első részecskék tömegei $m_1^1 = 3.6$ GeV és $m_1^2 = 1$ GeV fixek.

Felhasználva a fázisterekre vonatkozó nagyenergiás közelítést, a statisztikus modellből meghatározható 1-tűzlabdás inkluzív hatáskeresztmetszetek arányának $r_X^{\Psi(2S)} = \sigma^{\Psi(2S)} / \sigma^{X(3872)}$ kifejezése az alábbi alakba hozható:

$$r_X^{\Psi(2S)} \approx \frac{(\langle n_c \rangle^0 - \sum_{i=u,d,s,b} \langle n_{ic} \rangle - 2\langle n_{cc} \rangle)^2}{3p_3 \langle n_{uc} \rangle^2 + 6(1-p_3) \langle n_{uc} \rangle^2} = \frac{(P_c - \sum_i \frac{P_i P_c}{2} - P_c^2)^2}{P_u^2 P_c^2 (\frac{3}{4}p_3 + \frac{6}{4}(1-p_3))}, \quad (109)$$

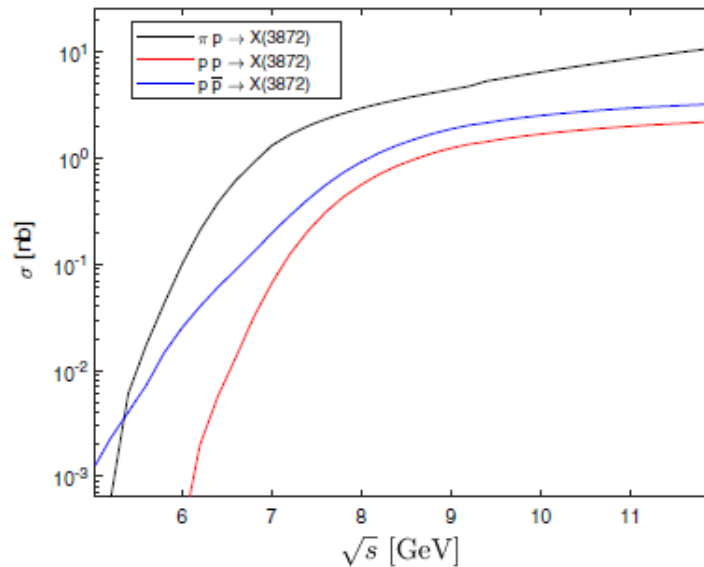
ahol $\langle n_i \rangle^0 = P_i N$ és $\langle n_{ij} \rangle = P_i P_j N / 2$ az i -ízű kvarkok és ij -ízű dikvarkok várható száma, ahol $i = u, d, s, c, b$, míg p_3 a triplet-antitriplet dikvark-antikvark konfiguráció valószínűsége. A $\Psi(2S)$ charmónium esetében figyelembe kell venni, hogy a keletkezett dikvarkok miatt a c -kvarkok száma nem $\langle n_i \rangle^0$, hanem $\langle n_c \rangle^0 - \sum_{i=u,d,s,b} \langle n_{ic} \rangle - 2\langle n_{cc} \rangle$ lesz, ahol a c -kvarkok számából levonásra kerültek azon c -kvarkok, melyeket a dikvarkok tartalmazhatnak. Mivel ezen a ponton nem tudni, hogy a dikvarkok triplet-antitriplet, vagy szextett-antiszextett állapotban vannak, ezért a validáció során az eredményeket megvizsgálom a teljes $p_3 \in [0, 1]$ tartományon, melynek eredményeit az 51. ábra szemlélteti.



51. ábra. A $\Psi(2S)$ és $X(3872)$ részecskék inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek aránya $\sqrt{s} = 7$ TeV-es proton-proton ütközésekben. A szaggatott vonallal jelölt tartomány a mérésekből meghatározott felső, illetve alsó határokat, míg a folytonos vonal a p_3 triplet-antitriplet konfigurációk valószínűség variálásával kapott, a statisztikus modellből meghatározott eredményeket jelöli.

A kapott eredmények láthatóan szinte minden p_3 értékre beleesnek a mérések által megadható tartományba, amely azt sugallja, hogy p_3 konkrét értéke (legalábbis a modell és a jelenlegi mérési bizonytalanságok szempontjából) nem annyira fontos. A következőkben feltételezem, hogy a triplet-antitriplet állapot valósul meg, azaz $p_3 = 1$. Ezt az értéket felhasználva 2-tűzlabdás összegek segítségével meghatároztam az $X(3872)$ inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteket proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben, melyek eredményét az 52. ábra szemlélteti, ahol a görbék jobb

láthatósága érdekében a modellhibákat nem ábrázoltam. Ezeknél a számításoknál már nem alkalmazhatóak a (107), illetve (108) kifejezésekben leírt nagyenergiás közelítések, így a fázistérfaktorok minden esetben meg lettek határozva. Ezen felül a kvark-kombinatorikai faktorok számítása során a korábban illesztett 3. táblázatban felsorolt kvark-keletkezési valószínűségeket alkalmaztam.



52. ábra. Inkluzív $X(3872)$ tetraquark keltési hatáskeresztmetszetek alacsonyenergiás becslése a statisztikus modellből, proton-proton, pion-proton és proton-antiproton ütközésekben.

Az eredményekből látható, hogy a pár GeV-es tömegközépponti energiatartományon az $X(3872)$ tetraquark keltési hatáskeresztmetszetek diquark közelítésben a charmonium állapotokhoz hasonlóan igen kicsik maradnak, továbbá követik azt a tendenciát, hogy a küszöbtől távol, de még alacsony energiákon a pion-proton ütközések során a legnagyobb a hatáskeresztmetszet a háromfajta ütközési rendszer közül. Ezen hatáskeresztmetszetek hasznosíthatóak lesznek néhány jövőbeli transzportszámítás során, ahol az $X(3872)$ állapot lehetséges struktúráját akarjuk majd részletesebben vizsgálni. Erre az a korábban is említett tény ad lehetőséget, hogy a keltési és disszociációs hatáskeresztmetszetek függeni fognak attól, hogy az adott állapot diquark-antidiquark, vagy egy lazán kötött molekulaállapot-e, melyre esetleg következtetni lehet nehézion-ütközések során. Hasonló számításokat végeztek már [192, 193, 179]-ben, ahol többfajta modellel is vizsgálták a tetraquark állapotok viselkedését a nehézion-ütközések során létrejött sűrű közegben. Érdekes lehet majd a későbbiek folyamán összehasonlítani a saját BUU-transzportkóddal kapott eredményeket a többi megoldással, amely számítások akár egy új rálátást adhatnak erre az érdekes problémára. A következő fejezetben bemutatom a nehézion-ütközések nemegyensúlyi szimulációjára alkalmazott "off-shell" Boltzman-Uehling-Uhlenbeck transzportkódot, melyet charmonium állapotok sűrűközegbeli tömegmódosulásainak vizsgálatára alkalmazok.

4. Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) transzport

4.1. A BUU-transzportkód általános leírása

Nehézion-ütközések során tipikusan mag-mag ütközéseket vizsgálunk, ám előfordulnak olyan esetek is, ahol hadron-mag ütközésekben tisztább képet kaphatunk az egyes vizsgálandó folyamatokról. Jelen fejezetben egy olyan mag-mag, illetve hadron-mag ütközésekre kifejlesztett Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck típusú transzportkódot mutatok be, mellyel a különböző óniumállapotok közegbeli tömegmódosulását vizsgálom az ütközés során kialakuló sűrű közegben, elsősorban antiproton-mag ütközésekben. Ebben a disszertációban olyan pár GeV/nukleon bombázó energiás nehézion-ütközésekről lesz szó, melyek során a rendszer szabadsági fokai a hadronok, vagyis nem kell foglalkozni a nagyobb energián figyelembe veendő partonikus szabadsági fokokkal. Az ilyen ütközések nemegyensúlyi dinamikájának vizsgálatát tipikusan transzportmodellek alkalmazásával végzik, melynek egyik első megvalósítása nehézion-ütközésekre a Cugnon-féle ún. kaskád modell volt [194], ahol a hadronikus szabadsági fokok, a mezonok és barionok csakis pillanatszerű ütközésekben vettek részt, míg az ütközések között egyenes vonalon, egyenletesen haladtak tovább. A transzportmodellek egy következő lépcsőfoka a BUU típusú modellek voltak [195], ahol már egy, a részecskék kölcsönhatásából eredő önkonzisztens átlagtér-potenciál is figyelembe lett véve a szimulációk során. Ez az átlagtér lehet időfüggő, vagy akár időfüggetlen is attól függően, hogy melyik modellt tekintjük. Jelen modellben a részecskék kölcsönhatását egy időfüggő, önkonzisztens átlagtérrel modellezzük, melyről később több szó is esik majd. Ezen transzport módszerek igen széles körben felhasználhatóak az elméleti vizsgálatoktól kezdve, egészen a detektorszimulációs célokig, ahol a transzportszimulációk eredményeit, mint eseménygenerátort alkalmazták a detektorszimulációs programok (GEANT) bemeneteiként. A világon jelenleg alkalmazásban levő nehéziontranszport-szimulációs eszközök közül néhány például a Dubna-kaskád modell [196], az ultrarelativisztikus kvantum molekuláris dinamikai modell (UrQMD) [197], a parton-hadron-húr dinamikai modell (PHSD) [198], vagy éppen a saját fejlesztésű BUU-modell, melyről a következőkben lesz szó.

A modell alapjairól, illetve korábbi alkalmazási területeiről a [199, 200, 201] munkák adnak részletes képet. Ebben a fejezetben a modell leglényegesebb pontjait mutatom be, melyek nélkülözhetetlenek a szimulációk megértéséhez. Az alap BUU-modell kezdeti feltételezése, hogy minden egyes figyelembe vett részecskét (barionokat, és mezonokat) egy egyrészecskés fázistérbeli eloszlásfüggvénnyel $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ és a rájuk vonatkozó mozgásegyenletekkel írhatunk le. Barionok esetén feltesszük, hogy az időfejlődésében az ütközéseken kívül, a nukleonok által generált impulzusfüggő átlagtér [202], továbbá a töltött részecskék által generált Coulomb-erő játszik szerepet, míg mezonoknál az ütközéseken kívül csakis a Coulomb-erő hat, és a nukleonok által generált átlagtér nem játszik szerepet azok propagálása során.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk most el a Coulomb-kölcsönhatástól és vegyük a barionok esetét. Ekkor a barionokra vonatkozó egyrészecske-fázisterek teljes deriváltjának meghatározása után a következő egyenletet kapjuk az $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ eloszlás időfüggésére:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \left[\frac{\vec{p}_i}{E_i} + \frac{m_i^*(\vec{r}, \vec{p})}{E_i} \vec{\nabla}_p U(\vec{r}, \vec{p}) \right] \vec{\nabla}_r f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) - \\ - \left[\frac{m_i^*(\vec{r}, \vec{p})}{E_i} \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, \vec{p}) \right] \vec{\nabla}_p f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = I_c[f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)], \end{aligned} \quad (110)$$

ahol \vec{r} a részecskék koordinátái, \vec{p} azok impulzusai, $m^* = m + U(\vec{r}, \vec{p})$ az effektív tömeg, továbbá $E = \sqrt{m^*(\vec{r}, \vec{p})^2 + \vec{p}^2}$ a kvázirészecske energiája. Az $U(\vec{r}, \vec{p})$ impulzusfüggő átlagteret a (111)-ben definiált nemrelativisztikus $U^{nr}(\vec{r}, \vec{p})$ átlagtérből származtatjuk a lokális nyugalmi rendszerben felírt $\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + U^{nr}(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + (m + U(\vec{r}, \vec{p}))^2}$ egyenleten keresztül, ahol:

$$U^{nr}(\vec{r}, \vec{p}) = A \frac{\rho}{\rho_0} + B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\tau + 2 \frac{C}{\rho_0} \sum_{i=n,p} \int g \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{f(\vec{r}, \vec{p}')}{1 + \left[\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\Lambda} \right]^2} \quad (111)$$

az izospinre átlagolt nemrelativisztikus nukleon potenciál, ahol $\rho_0 = 0.168 \text{ fm}^{-3}$ a maganyag alapállapotú sűrűsége, ρ az aktuális barionsűrűség, g a spinmultiplicitás, továbbá A, B, C, Λ, τ szabad paraméterek, melyeket a maganyag alapállapotú tulajdonságaihoz, illetve az egyrészecske-potenciál impulzusfüggéséhez illesztnek [203, 204]. Jelen disszertációban az $A = -26.09 \text{ MeV}$, $B = 56.59 \text{ MeV}$, $C = -64.65 \text{ MeV}$, $\tau = 1.764$ és $\Lambda = 2.168 \text{ fm}^{-1}$ paramétereket alkalmazzuk, melyek egy közepes keménységű $K = 290 \text{ MeV}$ kompresszibilitású maganyag állapotegyenletéhez tartoznak. Az átlagteret természetesen az ütközésben résztvevő nukleonok (protonok, neutronok) alakítják ki, és a modellben az $U(\vec{r}, \vec{p})$ átlagtér csakis a nukleonok mozgását fogja befolyásolni. Ebből következik, hogy a mezonok trajektóriáját az ütközéseken, illetve a Coulomb-kölcsönhatáson kívül más nem befolyásolja, míg a barionok mozgásánál az ütközéseket, az átlagteret és a Coulomb-kölcsönhatást is figyelembe kell venni. A Coulomb-kölcsönhatáshoz meg kell határozni egy adott $\rho_c(\vec{r})$ töltéeloszláshoz tartozó Coulomb-potenciált, melyhez meg kell oldani a Poisson-egyenletet:

$$-\nabla^2 V_c(\vec{r}) = 4\pi \rho_c(\vec{r}). \quad (112)$$

A potenciál meghatározása után ki kell fejezni az $\vec{F}_c(\vec{r}) = -q \vec{\nabla}_r V_c(\vec{r})$ Coulomb-erőt. Ez természetesen egy extra tagot fog eredményezni az $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ -re felírt egyenletekben is, hiszen a Coulomb-erő mind a barionokra, mind a mezonokra hatással van. A transzportkódban a Poisson-egyenletet a kiszámított töltéssűrűségek alapján oldjuk meg.

A potenciáltreken túl az egyes részecskék mozgását, illetve állapotát a (110) kifejezésben levő egyenlőség jobb oldalán található $I_c[f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)]$ tag az ún. ütközési integrál befolyásolhatja, amely magában foglalja a rendszerben található összes részecske ütközésével kapcsolatos információt. Általános esetben egy $n \rightarrow m$ reakciót nézve az ütközési integrál az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\begin{aligned} I_c[f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)] &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3(n+m-1)}} \int \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{2E_j} \prod_{k=1}^m \frac{d^3 p_k}{2E_k} [W_{nm}] \delta^{(4)} \left(p_i^\mu + \sum_{j=2}^n p_j^\mu - \sum_{k=1}^m p_k^\mu \right) \\ &\times \left[\bar{f}_i(\vec{r}, \vec{p}_i, t) \prod_{k=1}^m f_k(\vec{r}, \vec{p}_k, t) \prod_{j=2}^n \bar{f}_j(\vec{r}, \vec{p}_j, t) - f_i(\vec{r}, \vec{p}_i, t) \prod_{k=1}^m \bar{f}_k(\vec{r}, \vec{p}_k, t) \prod_{j=2}^n f_j(\vec{r}, \vec{p}_j, t) \right], \end{aligned} \quad (113)$$

ahol $[W_{nm}]$ az $n \rightarrow m$ folyamat átmeneti valószínűsége, $\bar{f} = 1 + \eta f$ a Pauli-kizárási faktorok ($\eta = -1$ fermion, és $\eta = +1$ bozon esetén). Csakis rugalmas $2 \rightarrow 2$ reakciókat tekintve ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \leftrightarrow \vec{p}_3 + \vec{p}_4$) az $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$ egyrészecske-állapotsűrűségre vonatkozó ütközési

integrál kifejezhető az ütközések hatáskeresztmetszeteivel a következő módon:

$$\begin{aligned}
 I_c[f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)] &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p_2 \int d^3p_3 \int d\Omega_4 v_{12} \frac{d\sigma_{12 \rightarrow 34}}{d\Omega} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
 &\times \left[f_3(\vec{r}, \vec{p}_3, t) f_4(\vec{r}, \vec{p}_4, t) (1 - f_1(\vec{r}, \vec{p}_1, t) (1 - f_2(\vec{r}, \vec{p}_2, t))) \right. \\
 &\left. f_1(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f_2(\vec{r}, \vec{p}_2, t) (1 - f_3(\vec{r}, \vec{p}_3, t) (1 - f_4(\vec{r}, \vec{p}_4, t))) \right], \quad (114)
 \end{aligned}$$

ahol v_{12} a két ütköző részecske közti relatív sebesség, illetve $d\sigma_{12 \rightarrow 34}/d\Omega$ az $12 \rightarrow 34$ folyamat differenciális hatáskeresztmetszete. A transzportszimulációkban rugalmas és rugalmatlan ütközéseket is figyelembe véve az egyes részecskékre felírt dinamikai egyenletek az ütközési integrálon és az átlagtereken keresztül csatolódnak egymással, így végezetül egy igen bonyolult csatolt integro-differenciál egyenletrendszert kell megoldani, amely megoldása nem triviális. A BUU-transzportkódban jelenleg a 13. táblázatban felsorolt részecskék szerepelnek, azok összes izospinű állapotaikkal együtt.

Barionok	$p, n, N(1440), N(1520), N(1535), N(1650), N(1675), N(1680),$ $N(1700), N(1710), N(1720), N(2000), N(2080), N(2190), N(2220),$ $N(2250), \Delta(1232), \Delta(1600), \Delta(1620), \Delta(1700), \Delta(1900),$ $\Delta(1905), \Delta(1910), \Delta(1920), \Delta(1930), \Delta(1950), \Lambda, \Sigma$
Mezonok	$\pi, \rho, \eta, \sigma, \omega, K, J/\Psi, \Psi(3686), \Psi(3770), D^\pm$

13. táblázat. A BUU-transzportkódban szereplő mezonok és barionok összefoglaló táblázata.

Ütközések szempontjából a BUU-kódba jelenleg a 14. táblázatban felsorolt reakciók vannak beépítve, ahol az alap $2 \leftrightarrow 2$ -es ütközéseken kívül szerepelnek bizonyos $2 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 2$, illetve $2 \rightarrow X$ inkluzív reakciók is.

Ütközés típusa	Reakció
Rugalmas barion-barion	$NN \leftrightarrow NN, NR \leftrightarrow NR$
Rugalmatlan barion-mezon	$R \leftrightarrow BM, R \leftrightarrow N\pi\pi, NN \leftrightarrow NN\pi$
Mezon-mezon	$\rho \leftrightarrow \pi\pi, \sigma \leftrightarrow \pi\pi, \omega \leftrightarrow \rho\pi$
Rugalmatlan barion-barion	$NN \leftrightarrow NR, NR \leftrightarrow NR', NN \leftrightarrow \Delta(1232)\Delta(1232),$
Rugalmatlan barion-antibarion	$N\bar{N} \rightarrow D^+D^-$
Inkluzív barion-barion	$NN \rightarrow J/\Psi X, NN \rightarrow \Psi(3686)X, NN \rightarrow \Psi(3770)X$
Inkluzív barion-antibarion	$N\bar{N} \rightarrow J/\Psi X, N\bar{N} \rightarrow \Psi(3686)X, N\bar{N} \rightarrow \Psi(3770)X$
Inkluzív mezon-barion	$N\pi \rightarrow J/\Psi X, N\pi \rightarrow \Psi(3686)X, N\pi \rightarrow \Psi(3770)X$

14. táblázat. A BUU-transzportkódban szereplő reakciók összefoglaló táblázata, ahol N a nukleonokat, R , és R' a rezonanciákat, míg B a barionokat, és M a mezonokat jelöli.

A (110) kifejezésben felvázolt általános transzportegyenletek megoldása igen bonyolult és analitikusan csak néhány speciális esetben lehetséges. Ebből kifolyólag a csatolt transzport egyenletek megoldására tipikusan numerikus módszereket alkalmaznak, melyek közül itt az ún. párhuzamos sokaság algoritmust [205] mutatjuk be. Első lépésben az $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ folytonos eloszlásfüggvényt kell kicserélni véges számú ún. tesztrészecskére,

melyek matematikailag megfogalmazva természetesen koordináta-, és impulzustérbeli Dirac-delta-disztribúciók lesznek, azaz:

$$f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{N} \sum_i^{N \times M} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_i(t)), \quad (115)$$

ahol N a párhuzamos események számát, míg M az ütközési rendszerben résztvevő i -típusú részecskék számát jelölik. A párhuzamos sokaság algoritmus azt jelenti, hogy egy adott sokasággal párhuzamosan végzünk N darab szimulációt, ahol a sűrűség jellegű mennyiségek számítását (potenciálok, Pauli-kizárás) a párhuzamos futásokra átlagolva végezzük, míg az ütközéseket csakis az egyes sokaságokon belül vesszük figyelembe, amely azt is jelenti, hogy a sokaságok egyedül az átlagtereken és a Pauli-kizáráson keresztül csatolódnak egymáshoz. Továbbhaladva a következő lépés a (115) kifejezés beillesztése az $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ időfüggését leíró integro-differenciálegyenletekbe, mellyel végül kifejezhetőek lesznek a klasszikus mozgásegyenletek, melyek segítségével diszkrét időlépésekben elvégezhető a teljes rendszer időfejlődésének szimulációja. Példának kedvéért elhagyva az ütközési tagot és behelyettesítve (115)-öt a (110) kifejezésbe, az alábbi Hamiltoni mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\vec{p}_i}{E_i} + \frac{m_i^*}{E_i} \vec{\nabla}_{\vec{p}_i} U(\vec{r}_i, \vec{p}_i(t)), \quad (116)$$

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{m_i^*}{E_i} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} U(\vec{r}_i, \vec{p}_i(t)), \quad (117)$$

ahol $H = \sqrt{\vec{p}_i^2 + (m_i + U(\vec{r}_i, \vec{p}_i))^2}$ az egyrészecske Hamilton-függvény. A részecskék propagációja során első lépésben a részecskék következő időlépésbeni koordinátájának a becslése történik meg a következő módon:

$$\vec{p}_i^{(1)} = \vec{p}_i - \Delta t \frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{r}_i}, \quad (118)$$

$$\vec{r}_i^{(1)} = \vec{r}_i - \Delta t \frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{p}_i}. \quad (119)$$

Ezek után $\vec{r}_i^{(1)}$ és $\vec{p}_i^{(1)}$ helyzet- és impulzusértékekkel meghatározzuk az új $H'(\vec{r}_i^{(1)}, \vec{p}_i^{(1)})$ Hamilton-függvényt, melynek segítségével kiszámíthatjuk a végleges koordinátákat és impulzusokat:

$$\vec{p}_i^{(2)} = \vec{p}_i - \frac{1}{2} \Delta t \left[\frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial H(\vec{r}_i^{(1)}, \vec{p}_i^{(1)})}{\partial \vec{r}_i^{(1)}} \right], \quad (120)$$

$$\vec{r}_i^{(2)} = \vec{r}_i + \frac{1}{2} \Delta t \left[\frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial H(\vec{r}_i^{(1)}, \vec{p}_i^{(1)})}{\partial \vec{p}_i^{(1)}} \right]. \quad (121)$$

A fenti módszert prediktor-korrektor technikának nevezik [206], ahol az (1)-es indexekkel jelölt lépések a predikciós, míg a (2)-es indexel jelöltek a korrekciós lépések.

Természetesen a potenciáltérben történő propagálás mellett, minden időlépésben meg kell vizsgálni az ütközési tagot is, amely relativisztikus esetben nem teljesen egyértelmű feladat [207]. A modellben egy kétrészecske ütközést pillanatszerű kölcsönhatásként kezelünk a két részecske között, melyeket egy-egy téridőpont jellemez. A legegyszerűbb

ütközési feltétel szerint két részecske (A, B) akkor ütközik, ha az impaktparaméterük kisebb, mint a teljes hatáskeresztmetszetből meghatározható $\sqrt{\sigma_{Tot}^{AB}/\pi}$ mennyiség, azaz:

$$b \leq \sqrt{\frac{\sigma_{Tot}^{AB}}{\pi}}, \quad (122)$$

ahol b a két részecske minimális távolsága a közös tömegközépponti rendszerükben, melynek kovariáns formája [208]:

$$b = \sqrt{R_{AB}^2 - \frac{h_{AB}^2}{v_{AB}^2}}, \quad (123)$$

$$R_{AB}^2 = -(x_A - x_B)^2 - \left(\frac{p_A(x_A - x_B)}{m_A}\right)^2, \quad (124)$$

$$h_{AB} = \frac{p_A(x_A - x_B)}{m_A} - \frac{p_B(x_A - x_B)m_A}{p_A p_B}, \quad (125)$$

$$v_{AB}^2 = 1 - \left(\frac{m_A m_B}{p_A p_B}\right)^2. \quad (126)$$

Relativisztikus ütközések esetén azonban az ütközések időbeliségének vizsgálata során problémákba ütközünk, melyeket sajnos nem lehet teljes mértékben feloldani. A probléma onnan ered, hogy egy tetszőleges (nem tömegközépponti) rendszerben, két különböző idő tartozik az előbbi, geometriai megfontolásokkal leírt ütközési feltételhez. Ez természetesen ellehetetleníti, hogy egyértelmű sorrendet állítsunk fel az egyes ütközések között. Erre a problémára egy részleges megoldás, ha bevezetjük az ütközéshez tartozó időket (τ_A, τ_B) a két részecske sajátrendszerében, a következő kovariáns módon:

$$\tau_A = -\frac{p_A(x_A - x_B)}{m_A} + \frac{h_{AB}}{v_{AB}^2}, \quad (127)$$

$$\tau_B = -\frac{p_B(x_A - x_B)}{m_B} + \frac{h_{BA}}{v_{AB}^2}, \quad (128)$$

ahol τ_A , illetve τ_B az ütközéshez tartozó idő az A , és B részecske sajátrendszerében. Ezek után az előbbi két kovariánsan megfogalmazott sajátidővel definiáljuk a leíró rendszerbeli ütközés idejét a következő módon:

$$dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e_A}{m_A} \tau_A + \frac{e_B}{m_B} \tau_B \right], \quad (129)$$

ahol e_A és e_B az A , illetve B részecskék energiája. Ahhoz, hogy az adott ütközés megtörténjen az imént definiált dt -nek az adott időlépésbe kell esnie, amely feltétellel tulajdonképpen "minimalizáljuk az invariancia sértését" [208]. Az ütközési idők elvi bizonytalanságát (kétrészecske ütközések esetén) a transzportmodellben, teszteléssel tudjuk ellenőrizni úgy, hogy összehasonlítjuk az ütközési számokat labor, illetve cm rendszerekben. Ez a vizsgálat a BUU-kód esetén 200 MeV/nukleon, illetve 2.1 GeV/nukleon bombázó energiás Ca+Ca ütközésekben történt meg, ahol az ütközési számok a két rendszerben 1%-nál kisebb eltérést mutattak.

Az alap BUU-kód bemutatásánál még említést érdemel a rendszer inicializációja, melynek során a koordinátatérben egy Wood-Saxon-eloszlásnak megfelelően osztjuk szét a kezdeti nukleonokat a két ütköző magban, melynek alakja:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-r_0}{\alpha}}}, \quad (130)$$

ahol $\rho(0)$ a mag középpontjában levő sűrűség, $\alpha \approx 0.46$ egy Hartree-Fock-számításból vett paraméter, míg $r_0 \approx 2-7$ fm, az adott magra jellemző sugárparaméter, mely szintén Hartree-Fock-módszerrel került meghatározásra [209]. A térkoordinátákon felül a nukleonok impulzusát is véletlenszerűen osztjuk ki a Thomas-Fermi-közelítés alapján, azaz $p_i \in [0, p_F(\rho)]$, ahol $p_F(\rho)$ a lokális Fermi-impulzus. A fenti inicializációs lépések után a két magot egy megfelelő távolságról megindítva egymás felé elkezdődik a nehézion-ütközés szimulációja, melynek végén megkapjuk a különböző részecskék számát, impulzus- és energiaeloszlásait, illetve egyéb paramétereit. Természetesen rengeteg egyéb a szimulációval kapcsolatos dolog nem került részletezésre, melyeket kellő részletességgel megtalálhatunk [209]-ban.

A jelen disszertációban alkalmazott modell az előbbieken bemutatott "alap" BUU-transzportkód kiterjesztése nagyobb energiákra (10 GeV/nukleon), illetve véges, nem elhanyagolható szélességű részecskék propagálására sűrű közegben [210, 211, 212]. Tekintve, hogy az egyes részecskék az ütközések következtében ún. ütközési kiszélesedést szenvednek, ezért azok véges élettartammal rendelkeznek, és a Dirac-delta-disztribúció nem lesz jó reprezentációja ezen részecskéknek. Lokális-sűrűség közelítésben a spektrálfüggvény $\rho(x)$ -nek, vagyis a nukleáris közegbeli sűrűségnek a függvénye, melynek során a vákuumba visszatérve a részecskék tömegének vissza kell kapniuk a vákuumtömegüket (pólushelyüket). Az ütközési kiszélesedésen túl persze más effektusok is közrejátszhatnak a részecskék paramétereinek (tömeg, szélesség) sűrű közegbeli viselkedésében, melyekről részletesen lesz szó a következő fejezetben. Az ilyen típusú módszert "off-shell" módszernek nevezzük, amely azt hivatott reprezentálni, hogy a rendszer dinamikai fejlődése során nem egy meghatározott tömeggel rendelkező pont részecske, hanem egy $\mathcal{A}(\vec{r}, p)$ spektrális sűrűséggel jellemzett állapot propagál, ahol:

$$\mathcal{A}(\vec{r}, p) = \frac{-2\Im\Sigma^{ret}(\vec{r}, p)}{(E^2 - \vec{p}^2 - m_0^2 - \Re\Sigma^{ret}(\vec{r}, p))^2 - \frac{1}{2}\Im\Sigma^{ret}(\vec{r}, p)^2}, \quad (131)$$

ahol $p = (E, \vec{p})$ a négyesimpulzus, $x = (t, \vec{r})$ a négyeskoordináta, míg $\Sigma(\vec{r}, p)^{ret}$ a részecske közegben definiált retardált sajátenergiája. A retardált sajátenergiát képzetes részét közelíthetjük a rezonanciaszélességgel a $\Im\Sigma^{ret} \approx -m_0\Gamma_{közeg}$ módon, ahol m_0 a rezonancia pólushelye, míg $\Gamma_{közeg}$ annak közegbeli szélessége. Egy adott i részecske teljes, közegbeli szélessége felírható bomlási szélességeinek, illetve az ütközési kiszélesedésének az összegeként, azaz:

$$\Gamma_{közeg}^i(\vec{r}, p) = \Gamma_{bomlás}^i(\vec{r}, p) + \Gamma_{ütközés}^i(\vec{r}, p), \quad (132)$$

ahol

$$\Gamma_{ütközés}^i(\vec{r}, p) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2}} \sum_j \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} f_j(\vec{r}, \vec{p}') \sigma_{ij} v_{rel}^{ij}. \quad (133)$$

Itt v_i az i részecske sebessége annak lokális rendszerében, v_{rel}^{ij} a két ütköző részecske relatív sebessége, valamint σ_{ij} az $i + j$ reakció teljes hatáskeresztmetszete. Az ilyen esetekben, amikor a részecskéknek megjelenik egy véges, nem elhanyagolható szélességük,

természetesen a mozgásegyenletek is módosításra szorulnak. A levezetés során [213] az időrendezett Green-függvényekre felírt Dyson-Schwinger és Kadanoff-Baym-egyenletekből kiindulva, elsőrendű gradiens kifejtés és Wigner-transzformációt követően meghatározhatóak az új "off-shell" transzportegyenletek [214]. A Kadanoff-Baym-egyenletek megoldásához ismét a teszt részecske módszert alkalmazzuk, melynél most figyelembe kell venni, hogy a részecskéket a spektrálfüggvényükkel és nem egy Dirac-delta-disztribúcióval jellemezzük. A korrelátorok Wigner-transzformációja után kapott $F(\vec{r}, p)$ Wigner-függvény ebben az esetben a következő alakban fejezhető ki:

$$F(\vec{r}, p) \propto \mathcal{A}(\vec{r}, p) f(\vec{r}, p) \approx \mathcal{A}(\vec{r}, p) \sum_{i=1}^N \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_i) \delta(E - E_i), \quad (134)$$

ahol $p = (E, \vec{p})$ a négyesimpulzus, \mathcal{A} a (131) kifejezésben definiált spektrálfüggvény, míg $f(\vec{r}, p)$ a klasszikus fázistérsűrűség. A fenti közelítések transzportegyenletekbe való visszahelyettesítésével levezethetőek a következő "off-shell" mozgásegyenletek, ahol egy extra, a részecske energiájára vonatkozó egyenlet is megjelenik, amely praktikusán a részecske invariáns tömegének közegbeli változását írja le:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{1-C} \frac{1}{2E} \left[2\vec{p} + \vec{\nabla}_p \Re\Sigma^{ret} + \frac{m^2 - m_0^2 - \Re\Sigma^{ret}}{\hat{\Gamma}} \vec{\nabla}_p \hat{\Gamma} \right], \quad (135)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{1-C} \frac{1}{2E} \left[\vec{\nabla}_x \Re\Sigma^{ret} + \frac{m^2 - m_0^2 - \Re\Sigma^{ret}}{\hat{\Gamma}} \vec{\nabla}_x \hat{\Gamma} \right], \quad (136)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1-C} \frac{1}{2E} \left[\partial_t \Re\Sigma^{ret} + \frac{m^2 - m_0^2 - \Re\Sigma^{ret}}{\hat{\Gamma}} \partial_t \hat{\Gamma} \right], \quad (137)$$

ahol

$$C = \frac{1}{2E} \left[\partial_E \Re\Sigma^{ret} + \frac{m^2 - m_0^2 - \Re\Sigma^{ret}}{\hat{\Gamma}} \partial_E \hat{\Gamma} \right]. \quad (138)$$

A mozgásegyenletekhez természetesen csatolódik egy ütközési tag is, amely beláthatóan ugyanolyan alakú marad, mint az az alap BUU-egyenleteknél szerepel [215]. A számítások során elsődlegesen a bájos vektormezonok (charmónium állapotok) közegbeli módosulását vizsgálom, melyek esetében a sajátenergia valós és képzetes részei a következő alakban írhatóak fel:

$$\Re\Sigma^{ret} = 2m\Delta m_0 \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (139)$$

$$\Im\Sigma^{ret} = -m(\Gamma_{\text{bomlás}} + \Gamma_{\text{ütközés}}), \quad (140)$$

ahol a $\Gamma_{\text{bomlás}}$ a vektormezon vákuumbeli bomlási szélességét jelöli, m a vektormezon vákuumbeli tömege, Δm_0 a normál magsűrűségeen történő tömegeltolódást megadó paraméter, ρ a nukleáris sűrűség, míg $\rho_0 = 0.168 \text{ fm}^{-3}$ normál magsűrűség. A sajátenergia valós része a vektormezon vákuumbeli tömegéhez egy $\Delta m = \sqrt{m^2 + \Re\Sigma^{ret}} - m \approx \Delta m_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ járulékot ad hozzá, mely mértékére charmónium állapotok esetén a következő fejezetben adok becslést. Hasonló vizsgálatokat végeztek korábban ρ , illetve ω mezonok közegbeli viselkedésének vizsgálatára [216], ahol az itt felvázolt off-shell módszer lett alkalmazva az ütközés dinamikai fejlődésének leírására 1–2 GeV/nukleon energiákon.

4.2. Charmónium állapotok közegbeni módosulása

4.2.1. Bementi paraméterek a BUU-transzportszimulációkhoz

Ebben a fejezetben bemutatom a BUU off-shell transzportmódszer egy konkrét alkalmazását, ahol egyes charmónium állapotok közegbeni viselkedését vizsgálom meg az előző fejezetben részletezett off-shell transzportkóddal. Az erős kölcsönhatás nemperturbatív régiójának igen fontos mennyiségei a QCD összesszabályokban is megjelenő kondenzátumok, mint a $m_q \langle \bar{q}q \rangle_0$ kvark-, vagy a $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle_0$ gluonkondenzátum, melyek vákuumbeli várhatóértékei manapság már igen jól ismertek és fontos szerepet játszanak a hadron fenomenológiában. Sűrű közeg esetén, amely például neutroncsillagokban fordulhat elő, ezen mennyiségek közegbeni, véges sűrűségű $\langle \dots \rangle_\rho$ várhatóértékei a relevánsak, melyek eltekintve néhány, az összesszabályokban megjelenő sorfejtés együtthatóitól, nem ismertek. Ezen mennyiségek szempontjából is különösen érdekesek a gluonkondenzátum közegbeni várhatóértékei, amelyek a nehéz kvarkokra játszott hatásukból akár mérhetőek is lehetnek nehézion-ütközések során. Ebben a fejezetben arra adok egy módszert, hogy a nehéz c -kvarkokat tartalmazó charmónium állapotok közegbeni tömegeltolásából lehetséges-e bármilyen következtetést tenni a gluonkondenzátum várhatóértékére, adott sűrűségen. Ehhez első körben meg kell vizsgálni, hogy milyen hatással van a gluonkondenzátum megváltozása a charmónium állapotok egyes paramétereire, mint például azok tömege. Ennek vizsgálatához először érdemes felbontani a gluonkondenzátumot, az elektrodinamikai analógia alapján egy "színelektromos-", illetve "színmágneses" kontribúcióra, amely vákuumban egy $T = 0$ K hőmérsékletű gluonkondenzátum esetén a következőképpen tehető meg:

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle_0 = 2 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} B^2 \right\rangle_0 = -2 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} E^2 \right\rangle_0, \quad (141)$$

ahol E a színelektromos teret, míg B a színmágneses teret jelenti, továbbá $G_{\mu\nu}^a$ a gluontérerősség tenzor, melynek az \mathcal{A}_μ^a gluon mezőkkel kifejezett alakja:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - g_s f_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (142)$$

ahol g_s az erős csatolási állandót, továbbá $a, b, c = 1..8$ szín-indexeket jelöli. A gluontérerősség tenzorból az elektromos térerősség tenzor analógiájára a színmágneses teret $B^2 = G_{ij}^2$, ahol $(i, j = 1, 2, 3)$, míg a színelektromos teret $E^2 = \frac{1}{2} G_{0\mu}^2$ módon fejezhetjük ki. A gluonkondenzátum értéke normál magsűrűségen egyes becslések szerint [217, 218, 219] nagyjából 5 – 7%-ot csökken, amely befolyásolni fogja az egyes részecskék közegbeni tömegét is. Tekintve, hogy a charmóniumok egy c -kvark és egy \bar{c} -antikvark kötött állapotai, így az erős kölcsönhatás által generált "szín" térben, félklasszikus közelítésben, mint kis kiterjedésű "szín-dipólusok" kezelhetőek, melyek tömegei a színelektromos tér $\langle E^2 \rangle$ nem nulla volta miatt megjelenő másodrendű Stark-effektus következtében eltolódnak a vákuumbeli tömegeikhez képest ⁵ [220, 221]. Ezen tömegeltolásokra QCD összesszabályokból, illetve perturbatív megfontolásokból lehet következtetni, melynek során $m_c \rightarrow \infty$ határátmenetben operátorszorzat kifejtéssel meg kell határozni a nukleonmezón előreszórás átmeneti amplitúját [222], azaz:

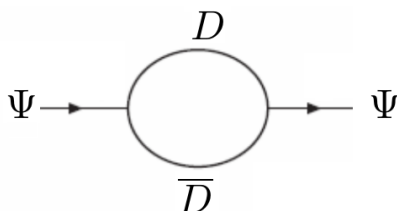
$$\mathcal{M}^{NM \rightarrow NM}(q^2) = \sum_i c_k(q^2) \langle \mathcal{O}_k \rangle_N, \quad (143)$$

⁵Az operátorszorzat kifejtésben megjelenő "színmágneses" tér négyzetének $\langle B^2 \rangle$ Wilson-együtthatói nemrelativisztikus határátmenetben elhanyagolhatóak, így charmónium állapotokra ebben a közelítésben csakis a "színelektromos" tér ad járulékot.

ahol N a nukleonokat, míg M az adott charmónium állapotot jelöli, továbbá $\langle \mathcal{O}_k \rangle_N$ a k -dimenziós lokális operátorok közegbeli várhatóértéke, míg $c_k(q^2)$ jelölik a perturbatív Wilson-együtthatókat, melyeket a charmónium állapotok tömegével beállított $q^2 = m_M^2$ skálán értékelünk ki és az alapállapot charmónium-hullámfüggvényekkel fejezünk ki. Az előreszórás mátrixeleme arányos lesz az óniumállapot tömegeltolásával, amely a nukleonokkal való kölcsönhatásnak a következménye. Hosszas számítások után levezethető egy egyszerű kifejezés a charmónium állapotok tömegének közegbeli módosulására, amely a következő alakot ölti [223, 218]:

$$\Delta m_i = \frac{1}{9} \int dk^2 \left| \frac{\partial \Psi_i(k)}{\partial k} \right|^2 \frac{k}{k^2/m_c + \epsilon} \times \left[\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} E^2 \right\rangle_N \frac{\rho_N}{2m_N} \right] \quad (144)$$

ahol m_i az i -mezon tömege, $\Psi_i(k)$ az i -mezon hullámfüggvénye k -térben, m_c a c -kvark tömege, m_N a nukleon tömeg, míg ρ_N a maganyag (közeg) sűrűsége. A négyzetes zárójelben található tag írja le a gluonkondenzátum megváltozásának hatását nemrelativisztikus határátmenetben, illetve a sűrűség lineáris rendjében (Linear density approximation, LDA), ahol a "színelektromos" tér közegbeli várhatóértéke $\langle (\alpha_s/\pi) E^2 \rangle_N \sim 0.5 \text{ GeV}^2$ -el közelíthető [218]. A Stark-effektus során létrejött tömegeltoláson túl, a charmónium állapotok tömegmódosulásában még további szerepet játszhatnak az 53. ábrán felvázolt D -mezon hurokjárulékok is [220], melyek csak igen kicsit módosítják az előbbieken meghatározható eredményeket.



53. ábra. D -mezon hurokjárulék Feynman-gráfja egy tetszőleges charmónium (Ψ) állapot esetében.

A szimulációk során alkalmazott Δm_0 tömegeltolás paramétereit foglalja össze az 15. táblázat, mely értékek a normál magsűrűségeen történt számításokhoz tartoznak. Látható, hogy míg a D -mezon járulékok lehetnek pozitívak és negatívak, addig a másodrendű Stark-effektus mindig negatív eltolást ad a vákumbeli tömeghez képest. A transzportvizsgálatok során a tömegeltolás sűrűségfüggését a normál magsűrűségeen vett Δm_0 értékekből a $\Delta m \approx \Delta m_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ közelítéssel kaphatjuk meg.

Részecske	Δm_0 [MeV]	
	Stark-effektus	D -mezon hurokjárulék
J/Ψ	-8	3
$\Psi(3686)$	-100	-30
$\Psi(3770)$	-140	15

15. táblázat. Charmónium állapotok közegbeli tömegeltolása normál magsűrűségeen a másodrendű Stark-effektusból, illetve a D -mezon hurokjárulékokból számítva.

A tömegeltolások értékeit tekintve a két magasabban fekvő $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ állapotok adhatnak egy jó lehetőséget a tömegeltolás mérésére, ám ránézésre egyáltalán nem egyértelmű, hogy a mérések végén mennyire fognak beleszólni egymás eredményeibe. Többek között ezért is érdemes nehézion-szimulációkat végezni, hogy láthatóak legyenek az egyes mérések befolyásoló tényezői, melyek ismeretében javaslatot tehetünk egyes reakciók mérésének lehetőségére.

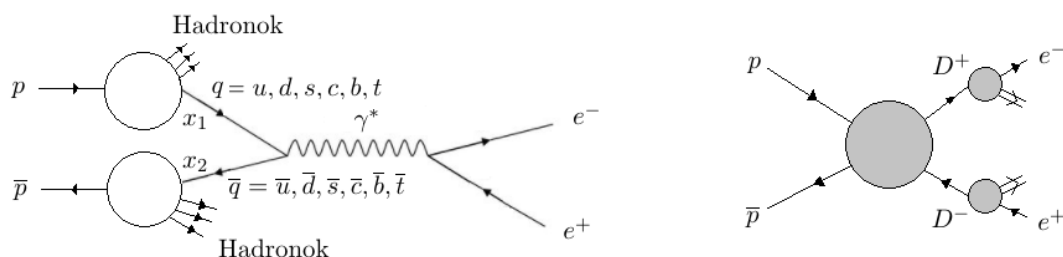
Az előzőekben összefoglalt vektormezonok igen jó lehetőséget adhatnak a tömegeltolás mérésére, hiszen azok minden esetben dileptonokra, azaz például elektron-pozitron párokra bomolhatnak, melyeket jó felbontással lehet mérni az alkalmas detektorokban. A dileptonok invariáns tömegének mérésével visszakövetkeztethetünk a forrásmezón éppen aktuális közegbeli tömegére, melyre az ad lehetőséget, hogy a közegben megkeltett vektormezon a propagálása során folyamatosan valamilyen véges valószínűséggel bomolhat el dilepton párokra. Tekintve, hogy a mezonok közegbeli tömege módosul az éppen aktuális lokális sűrűségnek megfelelően, ezért a mért tömegspektrum is tükrözni fogja ezeket a változásokat. A spektrum tényleges alakja függeni fog az ütközési rendszertől, illetve a különböző háttérfolyamatoktól, melyek torzíthatják az eredményeket. Mindezekhez transzportszimulációkat érdemes végezni, hiszen azok a rendszer teljes dinamikai fejlődését figyelembe veszik, így részletes képet kaphatunk olyan kérdésekről, mint például adott nehézion-reakció során hol keletkezik a charmóniumok többsége, illetve milyen sűrű közegen propagálnak keresztül életük során.

Ebben a fejezetben antiproton-arany ($\bar{p}+\text{Au}$) ütközésekben vizsgálom meg a charmónium állapotok tömegeltolásának következményeit $E_k = 6 - 9$ GeV/nukleon bombázó kinetikus energiákon, melyhez a $\bar{p} + p \rightarrow J/\Psi + X$, a $\bar{p} + p \rightarrow \Psi(3686) + X$, illetve a $\bar{p} + p \rightarrow \Psi(3770) + X$ inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteket a 3. fejezetben ismertetett statisztikus modellből határoztam meg. Természetesen propagálás közben a charmónium állapotok a nukleonokkal való ütközések következtében disszocializálódhatnak, melynek hatáskeresztmetszeteire különböző módokon, például operátorszorzat kifejtéssel [224], vagy effektív térelméleti modellekkel [225] lehet becsléseket tenni, melyek során a tipikus értékek $\sigma^{\Psi N} \sim [\text{mb}]$ nagyságrendre adódnak. A modellben ehhez az 16. táblázatban felsorolt energiafüggetlen hatáskeresztmetszeteket állítottam be [226], ahol az egyes állapotok elektron-pozitron párra való elágazási tényezőit ($\Gamma_{e^+e^-}/\Gamma_{tot}$) is feltüntettem. A táblázatban feltüntetett értékeknél a vákuumbeli Γ_{tot} szélességeket vettem figyelembe. A szimulációk során a közegbeli dilepton bomlási szélességeket a vákuumbeli értékükkel helyettesítem, azaz $\Gamma_{e^+e^-} = \Gamma_{e^+e^-}^0$, míg a teljes szélességek az ütközési kiszélesedés következtében a sűrűség függvényében változni fognak. Természetesen a közegbeli dilepton bomlási szélességek is nőhetnek a sűrű közegben, azonban ez a növekmény az elágazási arányt csak növelni tudja, így a vákuumbeli értékeknél maradva, a spektrumot gyakorlatilag alulról becsüljük. A táblázatban felsorolt értékekből jól látható, hogy a kiterjedtebb $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ állapotoknak nagyobb lesz a nukleonokon való disszociációs hatáskeresztmetszete, mint a kisebb kiterjedésű J/Ψ részecskének.

Részecske	$\sigma_{abs}^{\Psi N}$ [mb]	$\Gamma_{e^-e^+}/\Gamma_{tot}^{vac}$
J/Ψ	4.18	$5.971 \cdot 10^{-2}$
$\Psi(3686)$	7.6	$7.93 \cdot 10^{-3}$
$\Psi(3770)$	7.6	$9.6 \cdot 10^{-6}$

16. táblázat. Charmónium állapotok nukleonokon való abszorpciós hatáskeresztmetszei és az elektron-pozitron párra való bomlásiainak elágazási tényezői. A feltüntetett Γ bomlási szélességek a vákuumbeli szélességeket jelölik.

A szimulációk során a charmónium állapotokból keltkezett dileptonok (elektron-pozitron párok) invariáns tömegspektrumának meghatározása a cél, ahol természetesen figyelembe kell venni azon lehetséges háttér folyamatokat is, melyek a rendszer időfejlődése során elektron-pozitron párokat adhatnak. A transzportkódban két ilyen folyamatot vettem figyelembe, melyek közül az egyik az 54. ábra bal oldali részén felvázolt Drell-Yan folyamat, míg a másik, az ugyanezen az ábrának a jobb oldalán bemutatott $p + \bar{p} \rightarrow D\bar{D}$ reakció, melynek során a két D -mezon, egyéb részecskék, mint például kaonok mellett, kiadhat magából egy nem korrelált elektron-pozitron párt is.



54. ábra. A mért dileptonspektrumhoz adódó lehetséges háttér folyamatok. Az ábra bal oldalán a $p + \bar{p} \rightarrow e^+e^-$ Drell-Yan folyamat, míg a jobb oldalon a $p + \bar{p} \rightarrow D\bar{D}$ folyamat sematikus ábrája látható, ahol a D -mezonok elektronra/pozitronra és egyéb részecskékbe bomolhatnak, végeredményben kiadva egy nem korrelált elektron-pozitron párt.

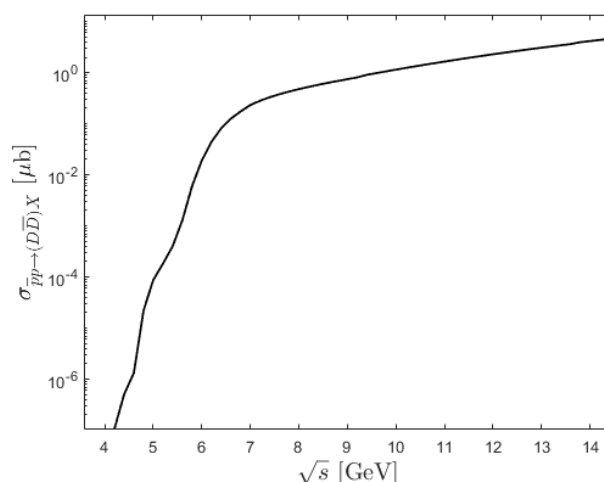
A Drell-Yan folyamat hatáskeresztmetszetét alacsony, pár GeV tömegközépponti energián kell meghatározni, melyhez a szokásos partonikus faktorizációs formulát alkalmaztam:

$$\frac{d^2\sigma}{dM^2 dx_F} = \frac{4\alpha_s(Q^2)\pi}{9M^2 s} \frac{1}{x_1 + x_2} \sum e_q^2 \left[f_p^q(x_1, Q^2) f_{\bar{p}}^{\bar{q}}(x_2, Q^2) + f_{\bar{p}}^{\bar{q}}(x_1, Q^2) f_p^q(x_2, Q^2) \right], \quad (145)$$

ahol Q^2 a partonikus folyamat skálája, e_q az adott $q = u, d, s, c, b, t$ -kvark elektromos töltése, s az ütközés tömegközépponti energiája (Mandelstam-változó), M^2 a dilepton pár invariáns tömegének négyzete, x_1 , illetve x_2 az adott kvark/antikvark által szállított impulzusarány, ahol $M^2 = x_1 x_2 s$, továbbá $x_F = x_1 - x_2$ az ún. Feynman-paraméter, míg $\alpha_s(Q^2)$ az erős csatolási állandó. A négyzetes zárójelben szereplő $f_{p,\bar{p}}^q(\dots)$ függvény a proton/antiproton adott $q = u, d, s, c, b, t$ -kvarkra vonatkozó partonikus eloszlásfüggvénye, míg $f_{p,\bar{p}}^{\bar{q}}(\dots)$ a protonban/antiprotonban levő antikvarkok partonikus eloszlásfüggvényeit jelképezik. Az eloszlásfüggvényeket ismét a CTEQ5 parton eloszlásfüggvény gyűjte-

ményből véve és kiintegrálva az x_F paraméterre megkaphatóak a $\frac{d\sigma}{dM^2}$ differenciális hatáskeresztmetszetek, melyeket a transzportszámítások során alkalmaztam.

A Drell-Yan kontribúción túl meghatároztam még a $p + \bar{p} \rightarrow D^+ D^-$, illetve $p + \bar{p} \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ nyílt-charm keltési hatáskeresztmetszeteket is, melyeket a statisztikus modell segítségével tettem meg a 3.5. fejezetben leírtaknak megfelelően. Ehhez először, a későbbi összehasonlítás céljából, a 3.5. fejezetnek megfelelően becslést tettem a $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D} + X$ inkluzív hatáskeresztmetszetre, ahol felöszegeztem az összes lehetséges D -mezon párra. Az eredmények az 55. ábrán követhetőek.



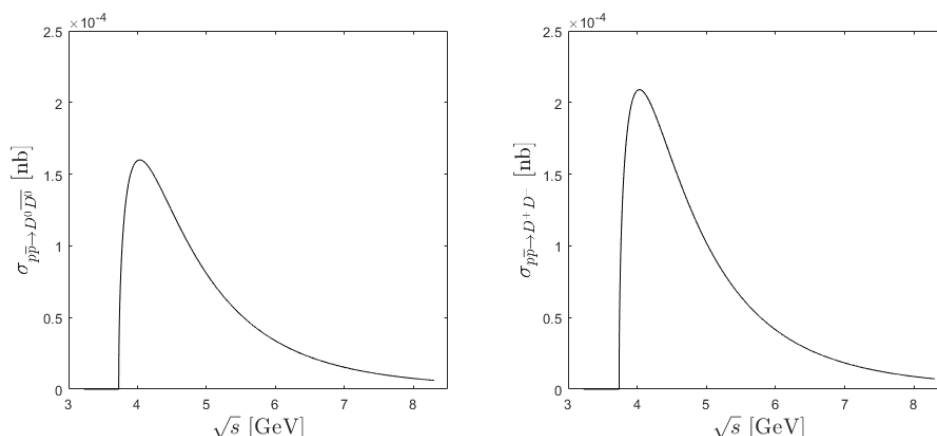
55. ábra. A $p\bar{p} \rightarrow D\bar{D} + X$ inkluzív folyamat hatáskeresztmetszete a statisztikus modellből meghatározva.

Összehasonlítva az itt kapott eredményeket az [142]-ben NN , illetve πN ütközésekre alkalmazott illesztések értékeivel a számítások konzisztensek maradnak, melyet az 17. táblázatban foglaltam össze. Itt az látható, hogy míg [142]-ben $\sqrt{s} \approx 5 - 6$ GeV-en πN ütközések esetén $\sigma^{\pi N} \approx 10^0 - 10^1$ nb, illetve NN ütközések esetén $\sigma^{NN} \approx 10^{-2} - 10^{-1}$ nb, addig az itt számolt eredmények ugyanezek az energiákon $\sigma^{\bar{p}p} \approx 10^{-1} - 10^0$ nb értékeket adnak. Ez természetesen konzisztens az 3.5. fejezetben tett megállapításokkal, ahol láttuk, hogy alacsonyenergiás c kvarkot tartalmazó folyamatoknál a nagyságrendi sorrend a hatáskeresztmetszetek között $\sigma^{pp} < \sigma^{\bar{p}p} < \sigma^{\pi p}$, amely egyértelműen teljesül itt is.

$\frac{\sigma_{\text{mérés}}^{NN \rightarrow D\bar{D}X}}{10^0 - 10^1 \text{ [nb]}}$	$\frac{\sigma_{\text{mérés}}^{\pi N \rightarrow D\bar{D}X}}{10^{-2} - 10^{-1} \text{ [nb]}}$	$\frac{\sigma_{\text{modell}}^{\bar{p}p \rightarrow D\bar{D}X}}{10^{-1} - 10^0 \text{ [nb]}}$
---	--	---

17. táblázat. $D\bar{D}$ mezonpár keltési hatáskeresztmetszetek összehasonlító táblázata $\sqrt{s} \approx 5 - 6$ GeV-en.

Az exkluzív $D^+ D^-$, illetve $D^0 \bar{D}^0$ hatáskeresztmetszeteket szintén a statisztikus modellből számolva az 63. ábrán felvázolt energiafüggést kapjuk, ahol látni, hogy az exkluzív hatáskeresztmetszetek igen kicsik lesznek.



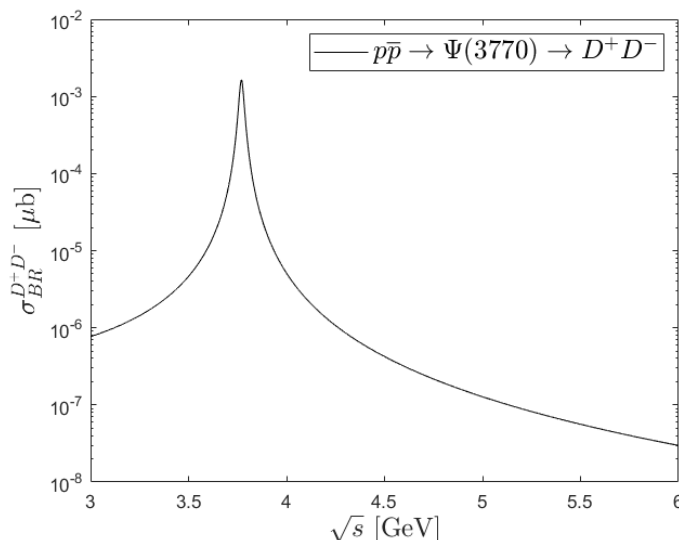
56. ábra. A $p\bar{p} \rightarrow D^+D^-$, illetve $p\bar{p} \rightarrow D^0\bar{D}^0$ exkluzív folyamatok hatáskeresztmetszei a statisztikus modellből meghatározva.

Összehasonlítva az exkluzív és az inkluzív hatáskeresztmetszeteket $\sqrt{s} \approx 4.5$ GeV környékén azt kapjuk, hogy míg az exkluzív hatáskeresztmetszetek $\sigma^{D\bar{D}} \approx 10^{-4}$ nb környékén vannak, addig az inkluzív hatáskeresztmetszetek $\sigma^{D\bar{D}X} \approx 10^{-3}$ nb környékén mozognak, azaz a két exkluzív csatorna nagyjából 1/10-e az alacsonyenergiás inkluzív hatáskeresztmetszetnek. Ez egy értelmes eredménynek tűnik tekintve, hogy az inkluzív összegben ezeken az energiákon leginkább csak a különböző $D\bar{D}$ párok, illetve az azokhoz csatlakozó pionok dominálnak. Természetesen, mivel nem léteznek se alacsonyenergiás (pár GeV) $D\bar{D}$ hatáskeresztmetszetek, se $p\bar{p}$ ütközésekben mért $D\bar{D}$ mérések, így figyelembe véve, hogy az inkluzív D-mezon keltési hatáskeresztmetszetek konzisztensek a nagyenergiás mérési eredményekkel, első közelítésként feltehető, hogy a szimulációkban felhasznált két exkluzív csatorna is legalább nagyságrendben a jó helyen lehet. proton-antiproton ütközésekben természetesen figyelembe kell még venni a $p\bar{p} \rightarrow \Psi(3770) \rightarrow D^+D^-$, illetve $p\bar{p} \rightarrow \Psi(3770) \rightarrow D^0\bar{D}^0$ kontribúciókat is, melyek hatáskeresztmetszeteinek meghatározásához a szokásos Breit-Wigner-formula alkalmazható. Ez tipikusan a küszöb környékén ad lényeges járulékot, melynek alakja vákuumban D^+D^- végállapotba való bomlásra az 57. ábrán látható. A $D^0\bar{D}^0$ végállapothoz tartozó hatáskeresztmetszet csupán kis mértékben tér el a felvázolt D^+D^- folyamathoz képest, hiszen a $\Psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ elágazási tényezők, $\text{Br}(D^+D^-) = 0.41\%$, illetve $\text{Br}(D^0\bar{D}^0) = 0.52\%$ csak kis mértékben különböznek egymástól. Sűrű közegben természetesen figyelembe kell venni az ütközési kiszélesedést, amely kis mértékben megnöveli a küszöbtől távoli hatáskeresztmetszeteket. Miután az adott proton-antiproton ütközésekben megkeltettünk egy $D\bar{D}$ mezonpárt, meg kell vizsgálni, hogy milyen arányban bomolhatnak tovább elektronba, illetve pozitronba, amely valószínűségeket az adott D-mezonokra vonatkozó teljes szélességből és az elektron bomlási arányból lehet meghatározni. A D-mezonokra vonatkozó inkluzív elektron/pozitron bomlási arányok eltérőek a töltött, illetve semleges esetekben:

$$\text{Br}(D^\pm \rightarrow e^\pm) = 16.07\%, \quad (146)$$

$$\text{Br}(D^0/\bar{D}^0 \rightarrow e^\pm) = 6.49\%. \quad (147)$$

Természetesen az általunk meghatározott Drell-Yan-, illetve nyílt-charm háttér csak egy nagyságrendi közelítés lesz, hiszen a tényleges, zavaró dilepton járulékokat a detektorszi-



57. ábra. A $p\bar{p} \rightarrow \Psi(3770) \rightarrow D^+D^-$ rezonáns folyamat, relativisztikus Breit-Wigner-formulából számított hatáskeresztmetszete vákuumbeli paramétereket alkalmazva.

mulációs lépésnél fogjuk tudni figyelembe venni. Mindenesetre az így kiszámolt dilepton háttér egy kezdeti becslést fog tudni adni, arra vonatkozólag, hogy nehézion-ütközések során lehetséges lesz-e detektálni a charmónium állapotok tömegeltolását, vagy a háttér teljesen elnyomja a vektormezonok által adott és mérni kívánt dileptonokat.

4.2.2. Charmónium tömegeltolások $\bar{p} + Au$ ütközésekben, $E_k = 6-9$ GeV labor kinetikus energiákon.

A következőkben egy konkrét példán keresztül mutatom be az antiproton-mag ütközések során létrejött dileptonspektrumok jellemzőit. Az itt közölt, illetve egyéb kapcsolódó számításokat [210, 211, 212, 227]-ben foglaltuk össze, ahol antiproton nyaláb mellett proton nyalábokkal is végeztünk számításokat. A vizsgálatokat viszonylag alacsony, $E_k = 6 - 9$ GeV/nukleon bombázó, labor kinetikus energiás ütközésekre korlátozom, amely tartomány az alacsony háttér miatt különösen alkalmas lehet a tömegeltolások mérésére. Ilyen ütközésekben (hadron+mag) a hőmérsékletet praktikusán 0-nak vehetjük⁶, azaz nem kell törődni a hőmérséklet tömegeltolásra vett hatásával. Természetesen nehézion (mag+mag) ütközésekben a hőmérséklet könnyen felvehet véges értékeket is, amely a gluonkondenzátum hőmérsékletfüggésén keresztül a charmónium állapotok tömegeltolásaira is hatással lenne. A korábban meghatározott tömegeltolások nulla hőmérsékletre és véges sűrűségre vonatkoztak, így azok alkalmazhatóak az itt bemutatandó reakciókban.

A részecskekeltésre felhasználható tömegközépponti energiát a bombázó antiprotonok kinetikus energiájából a következőképpen lehet meghatározni:

$$\sqrt{s} = m_1 + m_2 + 2m_2 E_{LAB}, \quad (148)$$

ahol m_1 a célnukleon tömege, m_2 a gyorsított antiproton tömege, míg E_{LAB} a labor rendszerben mért energiája a gyorsított antiprotonoknak, amely azok kinetikus ener-

⁶A charmónium lényegében előre szóródik az alapállapotú magon keresztül, így a 0 hőmérséklet egy jó közelítés

giájából $E_{LAB} = E_k + m_p$ módon számítható. Egy Ψ_i charmónium állapot keltésére proton-antiproton ütközések során talán a legalkalmasabbak energiák a küszöb környékén vannak, ahol a $p + \bar{p} \rightarrow \Psi_i$ folyamathoz tartozó Breit-Wigner hatáskeresztmetszetek dominálnak, melyek szokásos alakja:

$$\sigma_{p\bar{p} \rightarrow \Psi_i} = \frac{2J_i + 1}{(2s_p + 1)(2s_{\bar{p}} + 1)} \frac{4\pi}{k_{cm}^2} \frac{s B_{\Psi_i \rightarrow p\bar{p}} \Gamma_{tot}^2}{(s - m_i^2)^2 + s \Gamma_{tot}^2}, \quad (149)$$

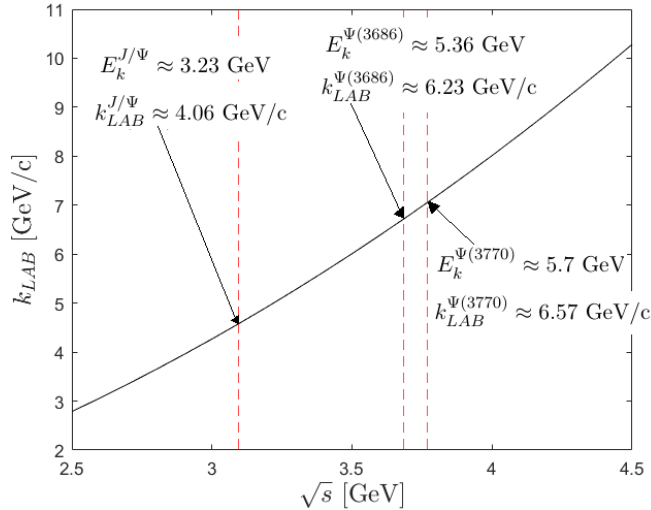
ahol J_i a Ψ_i charmónium állapot impulzumomentuma, $B_{\Psi_i \rightarrow p\bar{p}}$ a charmónium állapot proton-antiprotonba való bomlásának elágazási tényezője, Γ_{Tot} a charmónium állapot teljes szélessége, míg k_{cm} a tömegközéppontbeli impulzus, melyet a tömegközépponti energiával a következő formában lehet kifejezni:

$$k_{cm} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{[s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_1 + m_2)^2]}. \quad (150)$$

A labor rendszerbeli impulzus szintén kifejezhető a tömegközépponti energiával, melynek meghatározása után kifejezhetőek az adott részecskék keltéséhez szükséges kinetikus energiák is, amely a transzportkód egyik bemenete.

$$k_{LAB} = \frac{1}{2m_p} \left(|s - (m_p - m_p)^2| |s - (m_p + m_p)^2| \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{s(s - 4m_p^2)}}{2m_p}. \quad (151)$$

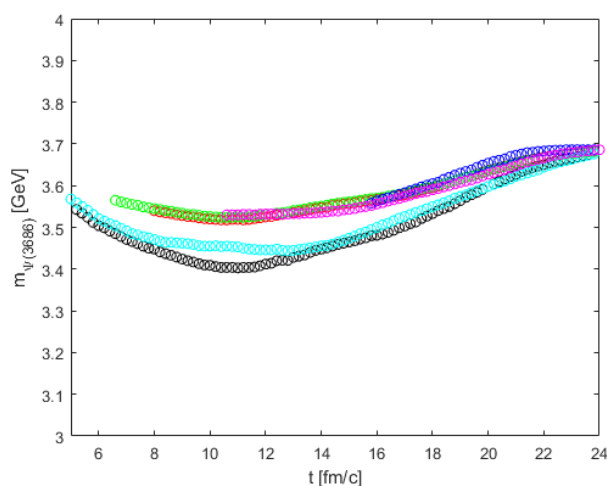
A laborrendszerbeli impulzus tömegközépponti energiafüggését ábrázoltam az 58. ábrán, ahol a J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ részecskék keltéséhez tartozó k_{LAB} impulzusok, és az E_k kinetikus energiák értékei is bejelölésre kerültek. Ilyen kis energiákon a háttérből származó dilepton járulékok is igen kicsik maradnak, amely szintén egy nyomós érv a kis energiák alkalmazására.



58. ábra. A bombázó antiprotonok laborimpulzusának, a $p + \bar{p}$ ütközésben felszabaduló tömegközépponti energiától való függése. A piros szaggatott vonalak jelzik a J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ részecskék küszöbenergiájához tartozó antiproton kinetikus energiákat, illetve laborimpulzusokat.

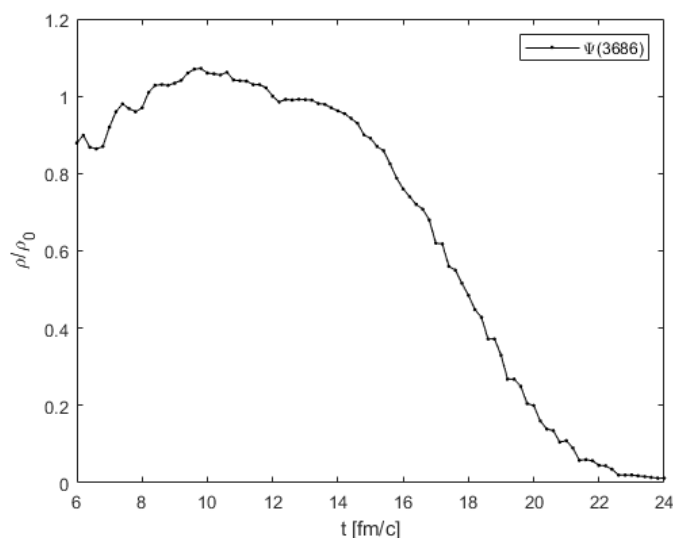
A fenti küszöbhez tartozó energiák természetesen vákuumban értendők, ahol az m_i tömegeket a charmónium állapotok vákuumtömegeivel helyettesíttem be. Sűrű közegben az m_i tömegek a korábbiaknak megfelelően eltolódhatnak, amely lehetőséget teremt küszöb alatti charmóniumkeltésre is. Küszöb feletti energiák esetén érdemes továbbá figyelembe venni, hogy az első nyitott csatorna a $p + \bar{p} \rightarrow \Psi_i \pi^0$ egy pionos folyamat, amely a küszöb felett nagyjából 140 MeV-el nyílik meg. Ebből következik, hogy ha nem a rezonancia környékén akarunk mérni, akkor a küszöbnél egy pár száz MeV-el nagyobb tömegközépponti energia alkalmazása előnyösebb, hiszen a Breit-Wigner-folyamat nélküli inkluzív hatáskeresztmetszetek ebben az esetben jóval nagyobbak lesznek, mint a küszöb környékén vett értékeik. Természetesen ebben az esetben a háttér folyamatok is nagyobbak lesznek. Azt is érdemes megjegyezni, hogy a célmagban lévő nukleonoknak csak az energiaeloszlása ismert, amely a véletlenszerűen kisorsolt impulzusuk és a fix nukleontömegek függvénye, amely miatt még a precízen beállított bombázó energián is csak az ütközések során felszabaduló invariáns tömegek eloszlását lehet meghatározni, és csak nagyjából tudjuk beállítani az energiákat a küszöbértékekre, amely küszöbértékek el is tolódnak akkor, ha sűrű közegben akarjuk megkelteni az adott részecskéket. Innen is látható, hogy a probléma közel sem egyértelmű és szükséges transzportszimulációkkal megvizsgálni, hogy adott bombázó energiákon mi történik az ütközési zónán belül.

A következőkben részletesen bemutatom egy $E_k = 6$ GeV labor kinetikus energiás $\bar{p} + Au$ ütközés transzport szimulációjának eredményeit, melynek során J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ charmónium állapotok viselkedését vizsgáltam meg az ütközés során kialakuló sűrű közegben. Mielőtt azonban a tényleges dileptonspektrumra térnék, érdemes megvizsgálni az ütközés során kialakult közeg tulajdonságait, melyre az egyes teszt-részecskék vizsgálatával lehet következtetni. Az 59. ábrán néhány $\Psi(3686)$ típusú teszt-részecske tömegének időbeli alakulása látható, ahol egyértelműen észrevehető a tömegmódosulás a rendszer dinamikai fejlődése során. Itt minden különálló trajektória egy adott teszt-részecskét jelöl, melynek kezdeti tömege az adott állapotnak és sűrűségnek megfelelő spektrálfüggvény szerinti eloszlással lett generálva.



59. ábra. $\bar{p} + Au$ ütközések során keltett, néhány $\Psi(3686)$ charmónium állapot időbeli fejlődése $E_{lab} = 6$ GeV/nukleon bombázó energián. A részecskék tömegeinek időfejlődése a mozgásegyenletek numerikus megoldásának következménye.

Az ábrából következtetve, az ütközés számunkra fontos része nagyjából $t = 22$ fm/c-ig tart, ahol észrevehető, hogy a tesztreszecskek tömegei visszatérnek a vákuumbeli értékekhez. Az ábrán az is látható, hogy a közegbeli tömegek egy huzamosabb ideig, nagyjából 6 és 14 fm/c között alig változnak, amely azt jelzi, hogy a közegbeli sűrűség nagyjából konstans az említett tartományon. Ezt az állítást az 60. ábrán részletesebben is megvizsgálhatjuk, ahol egy $\Psi(3686)$ tesztreszecske által érzett, a normál magsűrűséghez viszonyított, lokális sűrűséget ábrázoltam az idő függvényében.

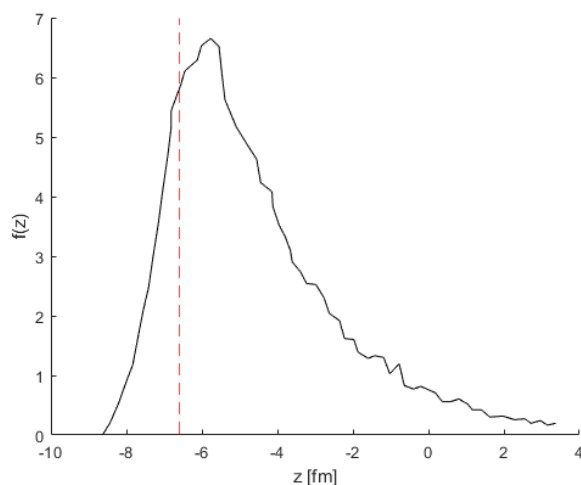


60. ábra. $\bar{p}+Au$ ütközés során generált $\Psi(3686)$ tesztreszecske által érzett lokális sűrűség időfejlődése $E_{lab} = 6$ GeV/nukleon bombázó energián.

Az ábrán ismét az látható, hogy a fentebb említett $\sim 6 - 14$ fm/c tartományon a sűrűség a maximum körül mozog, amely ebben az esetben körülbelül a normál magsűrűségnek $\rho_0 = 0.168$ fm $^{-3}$ felel meg. A fenti állítás természetesen azt is jelenti, hogy az ütközési zónában propagáló, megkeltett charmónium állapotok az ütközés szempontjából egy hosszabb időt töltenek a nagysűrűségű tartományokon, amely közben folyamatosan dilepton párokat adhatnak, amelyek invariáns tömegei a végső spektrumban visszaadják a közegben módosult tömegeket. Ha az átmenet viszonylag "tisza", amely alatt azt értjük, hogy a sűrűség időbeli fejlődése során jól el tudjuk különíteni a nagyobb, illetve kisebb sűrűségű részeket, akkor lehetőségünk lehet a végső dileptonspektrumból következtetni a tömegeltolás mértékére. A most vizsgált esetben ez a feltétel teljesülni látszik, hiszen mint azt korábban láthattuk a sűrűség egy viszonylag hosszú tartományon keresztül konstans, majd viszonylag gyorsan közelít a vákuum értékéhez.

Következő lépésként megvizsgáltam a charmónium állapotok keletkezési helyét, ahonnan indulva a maganyagban tovább propagálva adott valószínűséggel dileptonokra bomolhatnak, vagy a nukleonokkal való kölcsönhatások következtében disszociálódhatnak. A 61. ábra mutatja az antiprotonok "behatolását" az arany magba, ahol az $f(z)$ normalizált eloszlás jelzi, hogy milyen arányban nyelődnek el az antiprotonok z távolságon. A $z = 0$ helyzet arany mag közepét, míg a piros szaggatott vonal a mag határát jelzi, amely arany magra nagyjából $r \approx 6.6$ fm. Az antiproton a negatív oldalról közelíti meg az arany magot, és láthatóan már a mag határa előtt történhet annihiláció, amely az

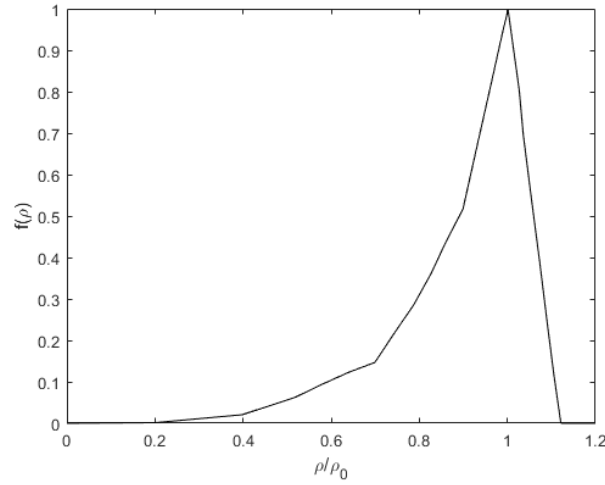
antiproton nyaláb véges kiterjedése és a mag felületi vastagsága miatt lehetséges.



61. ábra. Az antiprotonok elnyelődési valószínűségének távolságfüggése Au magban. A $z = 0$ pont az Au mag közepét, míg a piros szaggatott vonal a mag határát jelzi. Az antiprotonok balról jobbra haladnak az ütközés során.

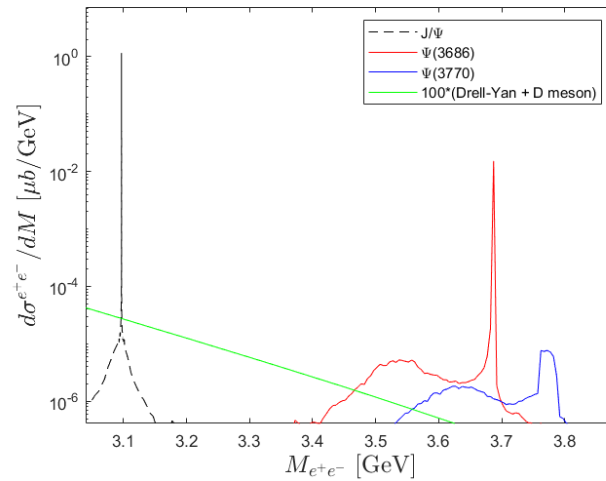
A legfontosabb észrevétel az antiproton annihiláció helyfüggésének vizsgálata során, hogy a legtöbb reakció a mag felületénél/határánál történik, azaz a legtöbb charmónium állapot is itt fog keletkezni. Ez különösen jó hír, hiszen mint azt az előbbiekből láttuk a rendszerben elérhető legnagyobb sűrűség az ütközés kezdeti szakaszában alakul ki és viszonylag hosszú ideig tart. Ennek további vizsgálatára meghatároztam az antiproton annihiláció során létrejövő charmóniumoknak a közegbeli sűrűségfüggését is, melyet a 62. ábra szemléltet.

A charmóniumkeltés sűrűségfüggésének vizsgálatával igen jól látható a korábban említett tény is, miszerint a charmóniumok többsége még az ütközés elején, a nagy sűrűségű zónában keletkezik és onnan propagál tovább a kisebb sűrűségű tartományokra. A közegbeli sűrűség 14 fm/c után hirtelen elkezd lecsökkenni, majd 24 fm/c körül eléri a vákuum értékét. A charmónium állapotok időfejlődésük során, nukleonokkal való kölcsönhatások következtében disszociálódhatnak, vagy dilepton párokra bomolhatnak, mely a sűrű közegről ad információkat. Ha a közegben haladva a charmóniumok nem disszociálódtak, illetve nem is bomlottak elektron-positron párokra, akkor az ütközés végén a vákuumot elérve mindenképpen tovább fognak bomlani a megfelelő dileptonokra, melyek invariáns tömegeit a charmónium állapotok vákuumtömegei határozzák meg.



62. ábra. Antiproton-nukleon reakciók során keltett charmónium állapotok sűrűségfüggése. Az eloszlás nagyjából a normál magsűrűségeen éri el a maximumát, azaz a legtöbb charmónium a sűrű közegben fog keltődni.

A fentiekből kiindulva most már értelmezhető a mérés szempontjából is érdekes dileptonspektrum is, melyet $E_{lab} = 6$ GeV bombázó energiás $\bar{p} + Au$ ütközések transzport-szimulációival határoztam meg. Az eredményeket 63. ábra mutatja.

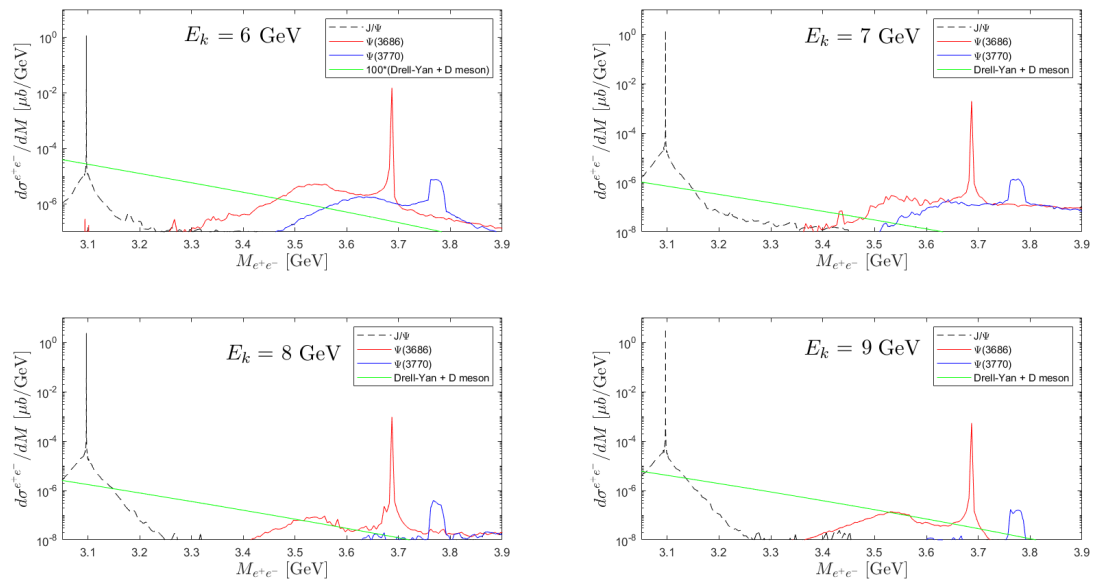


63. ábra. $E_k = 6$ GeV kinetikus energiás $\bar{p} + Au$ ütközésekben létrejött dileptonspektrum, amely tartalmazza a J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ charmonium állapotok járulékait, illetve a Drell-Yan- és nyílt-charm háttér folyamatokból származó dileptonokat is. Az háttér folyamatokból származó dileptonspektrumot az átláthatóság érdekében 100-al fel-szoroztuk.

Az eredményekből jól látszik, hogy a legkönnyebb J/Ψ részecske esetén a tömegel-tolás nem látható, hiszen annak értéke normál magsűrűségeen csupán pár MeV lenne, amely a véges detektorfelbontás miatt egészen biztosan nem lesz megfigyelhető. A na-gyobb tömegű $\Psi(3686)$, és $\Psi(3770)$ részecskék esetén az elméleti számolásokból követke-

zik, hogy normál magsűrűségen a tömegeltolás értéke akár 100 MeV-et is elérheti, amely a szimulációk szerint is látható eredményeket produkálhat. A $\Psi(3770)$ esetében a nagy sűrűségű tartományhoz tartozó második csúcs nagy részét sajnos elfedi a $\Psi(3686)$ dilepton járuléka, így valószínűleg a $\Psi(3770)$ állapot se lesz ideális a tömegeltolás mérésére. A $\Psi(3686)$ részecske azonban egy igen jól megfigyelhető csúcs mellett egy domináns második csúcsot is mutat, melyet se a háttér, se a többi charmónium dileptonjáruléka nem fed el, így az egy igen jó lehetőséget adhat a tömegeltolás kísérleti megfigyelésére. A korábbi elemzéseink alapján a spektrum könnyen értelmezhető. A keskeny csúcsok azon részecskékhez tartoznak, melyek az ütközési zónát elhagyva nem a sűrű közegben, hanem a vákuumban bomlottak el dileptonokra, míg a kisebb invariáns tömegű, szélesebb csúcsok azon dileptonokhoz tartoznak, melyek a sűrű közegben keltődtek. Ezen csúcsok jóval szélesebbek, mint az azonos részecskékhez tartozó vákuumbeli csúcsok, melynek két oka is van. Egyik oldalról a sűrű közegben a nagyobb számú ütközések miatt az ütközési kiszélesedés jóval nagyobb mértékben növeli a részecskék teljes szélességét, amely egy szélesebb dileptonspektrumot is eredményez. A másik oldalról pedig mivel a közegbeli sűrűség nem konstans, hanem az 62. ábrán felvázolt változó profilt követ, a sűrűség változásával részecskék tömegeltolása is változni fog, amely magával vonja a keltett dileptonok változó invariáns tömegét is. Felintegrálva a különböző sűrűségű járulékokat, végül egy szélesebb dileptonspektrumot kapunk, amely szerencsés esetben egy jól elkülöníthető "közegbeli" csúcsot ad. Mint láttuk az antiproton indukált reakciókban egy igen tiszta "két csúcsú" dileptonspektrumot kapunk, amely azt jelzi, hogy a bájos vektormezonok tömegeltolása akár mérhető is lehet ezen reakciók során.

Nagyobb bombázó energiákon természetesen a háttérfolyamatok akár olyan szinten is megnőhetnek, hogy a másodlagos csúcsokat elnyomva csakis a vákuumcsúcsok lesznek kivehetőek. Ezt a 64. ábrán szemléltetem, ahol összehasonlítottam az $E_k = 6, 7, 8, 9$ GeV kinetikus energiás antiproton-mag ütközések során keletkezett dileptonspektrumokat. Az ábrán követhető az a tendencia, hogy az energia növelésével a háttérfolyamatokból származó dileptonjárulékok egyre nagyobbak, míg a charmónium állapotok távolodva a küszöbenergiától egyre kisebbek lesznek. Az utóbbi tény annak köszönhető, hogy a küszöbenergiáktól kicsit eltávolodva az inkluzív folyamatok hatáskeresztmetszetei még nem érik el azt a szintet, hogy dominálják a közegbeli Breit-Wigner-hatáskeresztmetszeteket, viszont azok már elég kicsik lesznek ahhoz, hogy a háttérfolyamatokból származó dileptonok akár el is nyomhatják a kisebb csúcsot. Azt is érdemes megemlíteni, hogy $E_k > 10$ GeV energiák esetén az inkluzív hatáskeresztmetszetei gyorsan megnőnek, és a charmónium járulékok ismét dominálni fognak. Jelen vizsgálatok azonban a küszöb környéki energiákra összpontosultak, így a nagyobb energiás ütközéseket egyelőre nem vettem figyelembe.



64. ábra. $E_k = 6, 7, 8, 9$ GeV kinetikus energiás $\bar{p} + Au$ ütközésekben létrejött dilepton-spektrumok összehasonlítása. Az $E_k = 6$ GeV-es (bal felső) ábrán a zöld görbével jelölt háttér 100x-os szorzóval szerepel a jobb láthatóság érdekében.

5. Összefoglalás

Relativisztikus nehézion-ütközések elméleti és kísérleti vizsgálata egy igen fontos területe a mai modern fizikai kutatásoknak, hiszen többek között segít belelátni olyan, az erős kölcsönhatással kapcsolatos problémákba, melyek más eszközökkel igen nehezen, vagy egyáltalán nem lennének hozzáférhetőek. A disszertáció során charmonium állapotok sűrű közegbeli tömegmódosulását vizsgáltam, mely információt adhat a gluonkondenzátum véges sűrűségű várhatóértékéről, amely az erősen kölcsönható anyag egy igen fontos jellemzője. Ezen vizsgálatok jelenleg igen fontosak, hiszen a kondenzátumok értékét csak is vákuumban ismerjük nagy biztonsággal, illetve végtelen kémiai potenciálon feltételezhetjük, hogy értékük nulla. Véges kémiai potenciálon, amely véges sűrűségnek felel meg nem tudunk megbízható becslést tenni azok értékére, így mérési módszerekkel kell azokat meghatározni. A disszertációban pontosan erre adok egy megoldási lehetőséget, melyben az alacsony energiás antiproton-mag ütközésekben létrejövő dileptonspektrumból lehet következtetni a charmoniumok tömegeltolódásának mértékére, amely mérést el lehet majd végezni pár év múlva a FAIR/PANDA kísérletben.

Vizsgálataim során egy Boltzman-Uehling-Uhlenbeck alapú relativisztikus transzportkódot alkalmaztam, amely képes leírni a véges szélességgel rendelkező részecskék sűrű közegbeli nemegyensúlyi viselkedését relativisztikus, nagyjából 10 GeV/nukleon bombázó energiáig. Ezen energiák felett a partonikus szabadsági fokok figyelembe vételével a modell kiegészíthető, amely egy bővítési lehetősége a disszertációban alkalmazott modellnek. A charmonium állapotok vizsgálatának elengedhetetlen hozzávalói a rájuk vonatkozó keltési hatáskeresztmetszetek proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben, melyek meghatározásához egy saját fejlesztésű statisztikus modellt alkalmaztam (3. fejezet). A statisztikus modell a hatáskeresztmetsze-

tek számításánál a hadronokra vonatkozó, a rezonanciák paramétereit is figyelembe vevő fázisterek, spin multiplicításokat, tűzlabda bomlási valószínűségeket, a statisztikus Bootstrap-modellből meghatározott állapotsűrűségeket, továbbá az úgynevezett kvark-kombinatorikai faktorokkal a hadronok kvarktartalmát is figyelembe veszi. A modell egyes szabad paramétereinek értékeit nagyjából lefixálják a statisztikus Bootstrap-modellből ismert szabad paraméterek, mint például a T_0 kritikus hőmérséklet, V kölcsönhatási térfogat, melyeket a teljesség kedvéért a saját modellben is illesztettem, a statisztikus Bootstrap-al konzisztens eredményekre jutva. A modell leglényegesebb szabad paraméterei a kvark-kombinatorikai faktorokban szereplő kvarkkeletkezési valószínűségek, melyeket a modellszámítások és kísérleti eredmények összehasonlításából illesztettem. A c - és b -nehéz kvarkok esetén a kvarkkeletkezési valószínűségekre az energiától lineárisan függő funkcionális formát alkalmazva proton-proton, illetve pion-proton inkluzív charmónium, illetve bottomónium keltési hatáskeresztmetszetek segítségével meghatároztam a c - és b -kvarkkeletkezési valószínűségeket. Ezen értékekkel becsléseket tettem a charmónium inkluzív keltési hatáskeresztmetszetekre proton-antiproton ütközésekben, továbbá megvizsgáltam az egyes magasabban fekvő χ_c , illetve $\Psi(3686)$ részecskék arányait a direkt J/Ψ keltéshez képest, ahol minden esetben igen jó eredményeket kaptam. A módszerrel további vizsgálatokat végeztem az egyes könnyű kvarkokat tartalmazó inkluzív keltési hatáskeresztmetszetek meghatározására, illetve nyugalmi proton-antiproton annihiláció esetén létrejövő többpionos végállapotok valószínűségének leírására. Az utóbbi esetre egy numerikus Monte-Carlo-kódot készítettem, melynek segítségével vizsgálhatóak a bonyolultabb, sokrészecskés folyamatok is ahol nem létezik analitikus megoldása a modellnek. A statisztikus modell épít a korai statisztikus modellek alapfeltevéseire, ám azokhoz képest jelentős eltéréseket és bővítéseket is tartalmaz, így a ma alkalmazott modellek között egy újszerű és egyedi módszert nyújt, igen sokféle folyamat hatáskeresztmetszetének a becslésére.

A statisztikus modellt ezen felül kiegészítettem dikvarkok beiktatásával is, amely lehetőséget teremtett tetrakvark állapotok vizsgálatára dikvark-antidikvark közelítésben. Az 3.6. fejezetben a kibővített modell segítségével megvizsgáltam az $X(3872)$ lehetséges tetrakvark állapot alacsonyenergiás keltési hatáskeresztmetszetét proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben. Validációs lépésként a modell eredményeit összehasonlítottam egy létező mérési eredménnyel proton-proton ütközésekben $\sqrt{s} = 7$ TeV tömegközépponti energián, melyhez becsléseket tettem a kvarkkeletkezési valószínűségek nagyenergiás értékére. Ennek érdekében az illesztett c - és b -kvarkkeletkezési valószínűségekből meghatároztam azon energiákat, melyeken azok nagyjából elérik a könnyű kvarkokra vonatkozó értékeket. Az extrapolációk szerint a c -kvarkok $\sqrt{s} = 7$ TeV-en valószínűleg már elérik a könnyű kvarkokra vonatkozó keletkezési valószínűségeket, viszont a nehezebb b -kvarkok még nagyjából 1/10 részben el lesznek nyomva. Az utóbbi elnyomásra kapott becsléshez feltettem, hogy a nehéz kvark-antikvark párok a gluonmezőkből néhány elsőrendű folyamat segítségével jönnek létre, melyek perturbációszámítás segítségével számíthatóak. Felhasználva a faktorizációs formulát, illetve a partonikus eloszlásfüggvényeket kiszámítottam a $b\bar{b}$ és $c\bar{c}$ kvark-antikvark párok keltésének valószínűségeinek arányát proton-proton ütközésekben, melyre az előbb említett 1/10-es érték adódott. A hatáskeresztmetszetek számításánál figyelembe kellett még venni, hogy a dikvarkok triplet, illetve szextett állapotokban is lehetnek, melyek triplet-antitriplet, és szextett-antiszextett módon is kiadhatnak egy színsinglet tetrakvarkot. A validációs lépésben a triplet és szextett konfigurációk valószínűségét szabad paraméterként hagy-

tam és a teljes $p_3 \in [0, 1]$ tartományra megvizsgáltam az eredményeket, míg az alacsony-energiás számításoknál feltettem, hogy a triplet-antitriplet konfiguráció valósul meg. Az említett megfontolásokkal kiszámítottam az $X(3872)$ keltési hatáskeresztmetszeteket proton-proton ütközésekben $\sqrt{s} = 7$ TeV energián, ahol hibahatáron belüli eredmények születtek.

A hatáskeresztmetszetek meghatározása után a disszertáció 4. fejezetében bemutatam a nehézion-ütközések nemegyensúlyi vizsgálatára alkalmazott BUU-transzportmodell, illetve annak alkalmazási lehetőségei. A fejezet során $E_k = 6-9$ GeV-es bombázó kinetikus energiás centrális $\bar{p}+Au$ ütközések során keletkező J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ részecskék közegbeli tömegmódosulását vizsgáltam, melyhez a szükséges hatáskeresztmetszeteket a statisztikus modellből határoztam meg. A tömegeltolást a charmónium állapotok dileptonokra, azon belül is elektron-positron párokra való bomlásainak segítségével vizsgáltam, ahol figyelembe vettem a Drell-Yan, illetve a $D\bar{D}$ mezonpárokból keletkező "háttér" dileptonjárulékokat is. A szimulációk során arra a következtetésre jutottam, hogy az antiprotonok nagy része az ütközés elején, egy nagy sűrűségű részen abszorbálódik és kelt charmónium állapotokat, melyek innen propagálnak tovább a sűrű közegben. A charmóniumok a sűrű közegben dileptonokra bomolhatnak, vagy nukleonokkal való szóródás következtében disszociálódhatnak, ám ha ezek közül egyik sem történik meg, akkor az ütközés végén elérve a vákuumot dileptonokra bomlanak a vákuumtömegüknek megfelelő invariáns tömeggel. A keltett charmóniumok az életük jelentős részét egy konstans, nagy sűrűségű részen töltik el, amely miatt a keltett dileptonok invariáns tömegspektrumában a vákuumcsúcs mellett megjelenik egy kisebb intenzitású, de jól kivehető második csúcs is. Ez a csúcs természetesen az ütközési kiszélesedésnek következtében szélesebb, mint a vákuumcsúcs. A vizsgált ütközésekben a sűrűség maximuma nagyjából a normál magsűrűségnek felel meg, így a tömegeltolások közül egyedül a $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ állapotoknál lehet egyértelmű második csúcsot elkülöníteni, hiszen a J/Ψ részecske pár MeV-es tömegeltolása nem lesz megfigyelhető. Az előbbieket közül is a $\Psi(3686)$ állapot adhat egy igen jó lehetőséget a tömegeltolás megfigyelésére, mivel a $\Psi(3770)$ részecske második csúcsát valószínűleg el fogja takarni a $\Psi(3686)$ dileptonjáruléka, illetve nagyobb energiákon akár a Drell-Yan-kontribúció is. A charmónium állapotok tömegeltolásának vizsgálata nehéziontranszport-módszerrel újdonságnak minősülnek, hiszen a fenti folyamatra jelenleg csakis az itt bemutatott transzportszimulációk léteznek.

A fenti vizsgálatokat természetesen meg lehet tenni proton-mag, pion-mag, illetve mag-mag ütközésekre is, különböző kisebb, vagy nagyobb tömegszámú magokra is, amely egy igen érdekes további lehetősége a fenti kutatási témának. Az itt kiszámolt eredményekre a jövőben mérési lehetőség is ígérkezik a PANDA kísérletben a készülő FAIR gyorsítónál Darmstadtban, Németországban, illetve a JPARC-nál (Tokai, Japán).

A disszertációban szereplő eredményeket az alábbi öt tézispontban foglaltam össze.

1.

Elemi hadron-hadron ütközések alacsony energiás (pár GeV tömegközépponti energiás) hatáskeresztmetszeteinek meghatározásához kidolgoztam egy statisztikus alapokon nyugvó modellt, amely az alkalmazott elvekből kiindulva több szempontból is eltér az irodalomban jelenleg ismert módszerektől. Míg a szokásos statisztikus modellek az egyszerű n -részecskés fázistérintegrálokból kiindulva adnak becslést az egyes folyamatok

arányaira, tipikusan nagyobb energiákon, addig a saját modell, tűzlabda folyamatok kaszkádja segítségével, a rezonanciák bomlási paramétereit, az állapotsűrűségeket, illetve a hadronok kvarktartalmát ún. kvark-kombinatorikai faktorokon keresztül figyelembe véve képes becslést adni exkluzív, illetve inkluzív folyamatok hatáskeresztmetszeteire, akár alacsony energiákon is.

A modellel meghatároztam számos olyan exkluzív hatáskeresztmetszetet, melyre sok esetben csak korlátozott számú mérési adat létezik. Alacsony végállapotú részecske multiplicitások esetén módszert adtam analitikus számítások elvégzésére, továbbá elkészítettem egy numerikus Monte-Carlo-kódot, amellyel lényegesen bonyolultabb, sokrészecskés végállapotok valószínűségének leírása is lehetővé vált. A numerikus módszert sikerrel alkalmaztam nyugalmi proton-antiproton annihiláció során létrejövő több pions végállapotok valószínűségeinek leírására, illetve a végállapotú pion multiplicitás eloszlásának meghatározására. A modellszámítások eredményei a mérési eredményekkel összevetve hibahatáron belül vannak. A statisztikus modell alapjainak leírását az említett számításokkal [107] publikáció tartalmazza.

2.

A modell és a mérési eredmények összehasonlításának segítségével megbecsültem az elemi hadronikus ütközések hatáskeresztmetszeteinek leírására megfogalmazott statisztikus modell relatív hibaeloszlását, amelynek segítségével meghatároztam a modell bizonytalanságát exkluzív, illetve inkluzív hatáskeresztmetszetek esetében is. Az inkluzív hatáskeresztmetszetek számításához módszert adtam azok egyszerűbb meghatározásához, amelynek segítségével elkerülhető az összes lehetséges folyamat felösszegzése és numerikusan kezelhető formában kiszámíthatóak az adott inkluzív összegek. Az inkluzív hatáskeresztmetszetek számítására kidolgozott módszerrel meghatároztam a $p\pi^- \rightarrow \rho^0 X$, $pp \rightarrow \rho^0 X$, $p\bar{p} \rightarrow \rho^0 X$, $p\pi^- \rightarrow K^0 X$, $p\pi^- \rightarrow K^*(892)^+ X$, illetve $p\pi^- \rightarrow K^*(892)^- X$ inkluzív folyamatok hatáskeresztmetszeteinek \sqrt{s} függését viszonylag széles energiaskálákon, ahol csak néhány mérési pont létezik. A statisztikus modell bővített változatát az inkluzív hatáskeresztmetszetekkel, illetve a hibabecsléssel [108] publikációban foglaltam össze.

3.

A statisztikus modell legfontosabb szabad paramétereit, a c - és b -kvark keletkezési valószínűségeket, az elérhető inkluzív charmónium, illetve bottomónium keltési hatáskeresztmetszetek néhány mérési pontjához illesztve, becslést tettem az inkluzív charmónium ($c\bar{c}$), illetve bottomónium ($b\bar{b}$) részecskék keltési hatáskeresztmetszeteire proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben pár GeV tömegközépponti energiától egészen több tíz GeV tömegközépponti energiáig. A $c\bar{c}$ charmónium állapotokra meghatároztam a direkt J/Ψ keltés inkluzív hatáskeresztmetszetének, illetve a magasabban fekvő χ_{c1} , χ_{c2} , illetve $\Psi(3686)$ keltési hatáskeresztmetszeteinek arányait is, amely egy további validációját is jelenti a modellnek. Az illesztett paraméterek felhasználásával további becsléseket tettem az inkluzív D -mezon keltési valószínűségekre is proton-proton, illetve pion-proton ütközések esetén. A statisztikus modell teljes, már c - és b -kvarkokat is tartalmazó bővített változatát, a charmónium és bottomónium hatáskeresztmetszetekkel [109] publikációban foglaltam össze.

4.

A statisztikus modell felhasználásával becsléseket tettem az $X(3872)$ lehetséges tetraquark állapot inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteire proton-proton, pion-proton, illetve proton-antiproton ütközésekben $\sqrt{s} \approx 1 - 10$ GeV energiákon, azzal a feltevessel, hogy az $X(3872)$ egy $[uc]$ diquark és egy $[\bar{u}\bar{c}]$ antidiquark kötött állapota triplet-antitriplet színkonfigurációban. Validációs lépésként a modellszámításokat összehasonlítottam egy elérhető mérési ponttal $\sqrt{s} = 7$ TeV energián proton-proton ütközésekben, melyhez a triplet-antitriplet és szextett-antiszextett színkonfigurációs valószínűségeket variálva meghatároztam az $X(3872)$ és $\Psi(3686)$ részecskék inkluzív keltési hatáskeresztmetszeteinek nagyenergiás arányait. A nevezett számításokat részletesen a [110] publikáció tartalmazza.

5.

Az általunk fejlesztett Boltzman-Uehling-Uhlenbeck alapú transzportkóddal megvizsgáltuk a J/Ψ , $\Psi(3686)$, illetve $\Psi(3770)$ vektormezonok közegbeli tömegmódosulását $E_k = 6 - 9$ GeV labor kinetikus energiás $\bar{p} + Au$ ütközésekben, melynek során javaslatot tettünk annak mérési lehetőségére a készülő FAIR komplexumban tervezett PANDA kísérletben. A számítások során arra a következtetésre jutottunk, hogy pár GeV-es antiproton indukált reakciókban a $\Psi(3686)$ részecske tömegeltolása detektálható lehet a végállapotú dileptonspektrum (e^-e^+) vizsgálatával. A javasolt kísérlet közvetlen hasznosítási lehetőségként meghatározható lesz a gluonkondenzátum várhatóértéke, antiproton indukált reakciókban létrejövő sűrűségeken, amely közelítőleg a normál magsűrűségnek felel meg. A transzportszámítások eredményeit a [210, 211, 212] publikációk foglalják össze.

Hivatkozások

- [1] W. Busza et al. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **68**, 339–376 (2018).
- [2] G. Odyniec et al. (STAR collaboration). *PoS CORFU 2018*, 151 (2019).
- [3] A. Merzlaya et al. (NA61/SHINE collaboration). *Universe* **5**, 14 (2019).
- [4] R. Bruce et al. *J. Phys. G* **47**, 060501 (2020).
- [5] P. Senger. *Particles* **4**, 214–226 (2021).
- [6] T. Hachiya. *Int. J. Mod. Phys. E* **29**, 2040005 (2020).
- [7] P. Spiller et al. *JINST* **15**, T12013 (2020).
- [8] M. Li, J. I. Kapusta. *Phys. Rev. C* **99**, 014906 (2019).
- [9] Y.-D. Song, R. Wang, Y.-G. Ma, X.-G. Deng, H.-L. Liu. *Phys. Lett. B* **814**, 136084 (2021).
- [10] H. Zheng, G. Bonasera, J. Mabilia, P. Marini, A. Bonasera. *Eur. Phys. J. A* **50**, 167 (2014).
- [11] V.M. Emelyanov, Y.P. Nikitin, A.V. Vanyashin. *Fortsch. Phys.* **38**, 1–34 (1990).
- [12] J. Rafelski. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **243-244**, 155–162 (2013).
- [13] S. Hamieh, J. Letessier, J. Rafelski. *Phys. Rev. C* **62**, 064901 (2000).
- [14] N. Nakanishi, I. Ojima. *Prog. Theor. Phys.* **71**, 1359-1365 (1984).
- [15] F. Becattini. *J. Phys.: Conf. Ser.* **527**, 012012 (2014).
- [16] G. Baym et al. *Rep. Prog. Phys.* **81**, 056902 (2018).
- [17] T. Song, K. C. Han, C. M. Ko. *Phys. Rev. C* **84**, 034907 (2011).
- [18] F. S. Navarra. *EPJ Web of Conferences* **235**, 02005 (2020).
- [19] H. Yukawa. *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **17**, 48–57 (1935).
- [20] E. Epelbaum et al. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1773 (2009).
- [21] C. W. Wong, T. Sawada. *Ann. Phys.* **72**, 107–138 (1972).
- [22] F. Gross and A. Stadler. *Phys. Rev. C* **78**, 014005 (2008).
- [23] M. Naghdi. *Phys. Part. Nucl.* **45**, 924–971 (2014).
- [24] E. Epelbaum, H.-W. Hammer, and Ulf-G. Meissner. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1773–1825 (2009).
- [25] M. Gell-Mann. *Phys. Rev.* **125**, 1067–1084 (1962).
- [26] W. Marciano, H. Pagels. *Nature* **279**, 479–483 (1979).

- [27] SQ. Luo, K. Chen, X. Liu et al. *Eur. Phys. J. C* **77**, 709 (2017).
- [28] T. D. Cohen, P. M. Hohler, R.F. Lebed. *Phys. Rev. D* **72**, 074010 (2005).
- [29] V.Mathieu, N. Kochelev, V. Vento. *Int. J. Mod. Phys. E* **18**, 1–49 (2009).
- [30] C. Farina, H. G. Tecocoatzi, A. Giachino, E. Santopinto, E. S. Swanson. *Phys. Rev. D* **102**, 014023 (2020).
- [31] D.J. Gross, F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973).
- [32] X.G. Wu et al. *Prog.Part.Nucl.Phys.* **108**, 103706 (2019).
- [33] S. Bethke. *Prog.Part.Nucl.Phys.* **58**, 351 (2007).
- [34] G. Ecker. *Prog.Part.Nucl.Phys.* **35**, 1–80 (1995).
- [35] H. Georgi. *Phys. Lett. B* **240**, 447–450 (1990).
- [36] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [37] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961).
- [38] T.D. Cohen et al. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **35**, 221–298 (1995).
- [39] Y. Koike, A.Hayashigaki. *Prog. Theor. Phys.* **98**, 631–652 (1997).
- [40] T. Hatsuda, S. H. Lee. *Phys. Rev. C* **46**, 34–38 (1992).
- [41] B. L. Ioffe. *Nucl. Phys. B* **188**, 317–341 (1981).
- [42] K. J. Araki, K. Ohtani, P. Gubler, M. Oka. *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2014**, 073B03 (2014).
- [43] P. Colangelo, A. Khodjamirian. *At the frontier of particle physics* **3**, 1495–1576 (2001). (hep-ph/0010175)
- [44] B.L. Ioffe. *em Phys.Atom.Nucl.* **66**, 30–43 (2003).
- [45] P.Chen et al. *Phys. Rev. D* **64**, 014503 (2001).
- [46] P.Gerber, H.Leutwyler. *Nucl. Phys. B* **321**, 387 (1989).
- [47] G.J.H. Burgers(, R. Hagedorn, V. Kuvshinov. *Phys. Lett. B* **195**, 507 (1987).
- [48] P. Hasenfratz, J. Kuti. *Phys. Reports* **40**, 75–179 (1977).
- [49] A. Hosaka, H. Toki. *Phys. Reports* **277**, 65–188 (1996).
- [50] P.D.B. Collins. *Phys. Reports* **1**, 103–234 (1971).
- [51] T. Schäfer, E. V. Shuryak. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 323–426 (1998).
- [52] K. G. Wilson. *Phys. Rev. D* **10**, 2445–2459 (1974).
- [53] J. Danzer, C. Gatttringer, L.Liptak, M. Marinkovic. *Phys. Lett. B* **682**, 240–245 (2009).

- [54] S. Durr et al. *Science* **322**, 1224–1227 (2008).
- [55] L. Giusti et al. *Nucl. Phys. B* **538**, 249–277 (1999).
- [56] C. Ratti. *Rep. Prog. Phys.* **81**, 084301 (2018).
- [57] H. Zheng et al. *Eur. Phys. J. A* **50**, 167 (2014).
- [58] S. H. Lee, C. M. Ko. *Phys. Rev. C* **67**, 038202 (2003).
- [59] Z.J.Jiang, Y.Zhang, H.L.Zhang, H.P.Deng. *Nucl. Phys. A* **941**, 188-200 (2015).
- [60] J. D. Bjorken. *Phys. Rev. D* **27**, 140 (1983).
- [61] R. Venugopalan. *J. Phys. G* **35**, 104003 (2008).
- [62] L. Del Zanna et al. *Eur. Phys. J. C* **73**, 2524 (2013).
- [63] A. Jaiswal, V. Roy. *Adv. High Energy Phys.* **2016**, 9623034 (2016).
- [64] S. Thakur et al. *Nucl. Phys. A* **1014**, 122263 (2021).
- [65] H. Stoecker, W. Greiner. *Phys. Reports* **137**, 277-392 (1986).
- [66] U. Heinz, R. Snellings. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 123 (2013).
- [67] Z. Tan, Y. Mo. *Res. Phys.* **15**, 102627 (2019).
- [68] U. W. Heinz, G. Kestin. *Eur. Phys. J. ST* **155**, 75–87 (2008).
- [69] V. D. Kekelidze. *Phys. Part. Nucl.* **49**, 457–472 (2018).
- [70] A.B. Larionov, U. Mosel. *Phys. Rev. C* **66**, 034902 (2002).
- [71] W. Cassing, S. Juchem. *Nucl. Phys. A* **672**, 417–445 (2000).
- [72] S.A. Bass, et al. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41**, 255–369 (1998).
- [73] M. Bleicher, et al. *J. Phys.* **G25**, 1859–1896 (1999).
- [74] S. Agostinelli, et al. *NIMA* **506**, 250–303 (2003).
- [75] A. Gavron. *Phys. Rev. C* **21**, 230–236 (1980).
- [76] K.M. Shen, T. S. Biro, E. K. Wang. *Physica A* **492**, 2353–2360 (2018).
- [77] S.K. Tiwari, C.P. Singh. *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 805413 (2013).
- [78] A.S. Kapoyannis, C.N. Ktorides, A.D. Panagiotou. *Eur. Phys. J. C* **14**, 299–312 (2000).
- [79] J. N. Hostler, C. Greiner, I. Shovkovy. *J. Phys. G* **37**, 094017 (2010).
- [80] R. Hagedorn. *Nuovo Cimento, Suppl.* **3**, 147–186 (1965).
- [81] J. C. Winter, F. Krauss. *Eur. Phys. J. C* **36**, 381–395 (2004).

- [82] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman, T. Sjöstrand. *Phys. Reports* **97**, 31–145 (1983).
- [83] T. Sjöstrand. *Comp. Phys. Comm.* **246**, 106910 (2020).
- [84] W. Cassing. *Nucl. Phys. A* **700**, 618-646 (2002).
- [85] G. Batko, J. Randrup, T. Vetter. *Nucl. Phys. A* **536**, 786-822 (1992).
- [86] A.B. Larionov, O. Buss, K. Gallmeister, U. Mosel. *Phys. Rev. C* **76**, 044909 (2007).
- [87] T. Sato, T.S.H. Lee, F. Myhrer, K. Kubodera. *Phys. Rev. C* **56**, 1246–1255 (1997).
- [88] J. Van de Wiele, S. Ong. *Eur. Phys. J. A* **46**, 291 (2010).
- [89] G. Batko, J. Randrup, T. Vetter *Nucl. Phys. A* **546**, 761–772 (1992).
- [90] M. Krämer. *Nucl. Phys. B Proc.Suppl.*, **51** 195–200 (1996).
- [91] Y. Q. Ma, R. Vogt. *Phys. Rev. D* **94**, 114029 (2016).
- [92] N. Yamazaki, N. Nakamaru. *Prog. Theor. Phys.* **59**, 159–174 (1978).
- [93] N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto, A. Vairo. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1423 (2005).
- [94] G.T. Bodwin, E. Braaten, J. Lee. *Phys. Rev. D* **72**, 014004 (2005).
- [95] K. Haglin, C. Gale. *J. Phys. G* **30**, S375–S380 (2004).
- [96] W. Liu, C.M. Ko, Z.W. Lin. *Phys. Rev. C* **65**, 015203 (2001).
- [97] D. Kharzeev, H. Satz. *Phys. Lett. B* **334**, 155-162 (1994).
- [98] E. Fermi. *Prog. Theor. Phys.* **5**, 570–583 (1950).
- [99] A. N. Tawfik. *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1430021 (2014).
- [100] R. Hagedorn. *Nuovo Cim. Suppl.* **3**, 147–186 (1965).
- [101] R. Hagedorn. *Nuovo Cim.* **A56**, 1027–1057 (1968).
- [102] C. J. Hamer. *Nuovo Cim.* **A12**, 162–184 (1972).
- [103] S. Frautschi. *Phys. Rev. D* **3**, 2821–2834 (1971).
- [104] W. Broniowski, W. Florkowski. *Phys. Rev. D* **70**, 117503 (2004).
- [105] R. Hagedorn. *NATO Sci. Ser. B* **346**, 13–46 (1995).
- [106] R. Hagedorn and J. Ranft. *Nucl. Phys. B* **48**, 157–190 (1972).
- [107] G. Balassa, P. Kovács, Gy. Wolf. *Eur. Phys. J. A* **54**, 25 (2018).
- [108] G. Balassa, Gy. Wolf. *Eur. Phys. J. A* **56**, 174 (2020).
- [109] G. Balassa, Gy. Wolf. *Eur. Phys. J. A* **56**, 237 (2020).
- [110] G. Balassa, Gy. Wolf. *Eur. Phys. J. A* **57**, 246 (2021).

- [111] A. Keranen, F. Becattini. *J. Phys. G* **28**, 2041–2046 (2002).
- [112] H. Xu, Y. Zhou et al. *Phys. Lett. B* **812**, 136022 (2021).
- [113] M.V. Kosov. *Eur. Phys. J. A* **14**, 265—269 (2002).
- [114] P.V. Degtyarenko¹, M.V. Kossov, H.P. Wellisch. *Eur. Phys. J. A* **9**, 411–420 (2000).
- [115] G. Altarelli, G. Parisi. *Nucl. Phys. B* **126**, 298–318 (1977).
- [116] S. Glazov. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **193**, 254–258 (2012).
- [117] E. Cuautle, A. Ayala. *J. Phys. Conf. Ser.* **509**, 01209 (2014).
- [118] C. Patrignani et al. (Particle Data Group). *Chin. Phys. C* **40**, 100001, 2016.
- [119] A. Baldin et al. *Landolt-Börnstein. New series 1/12A*. Springer, Berlin (1988).
- [120] A. Baldini et al. *Landolt-Börnstein. New series 1/12B*. Springer, Berlin (1988).
- [121] W. H. Barkas et al. *Phys. Rev.* **105**, 1037 (1957).
- [122] Y. Lu, R.D. Amado. *Phys. Lett. B* **357**, 446 (1995).
- [123] W. Blumel, U.W. Heinz. *Z. Phys. C* **67**, 281 (1995).
- [124] C.B. Dover, T. Gutsche, M. Maruyama, A. Faessler. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **29**, 87 (1992).
- [125] A.I. Ahmadov, K.H. Abasova, M.Sh. Orucova. *Adv. High Energy Phys.* **2021**, 1861946 (2021).
- [126] M. Abu-Shady, T.A. Abdel-Karim, E.M. Khokha. *J. Theor. Phys.* **45**, 567–587 (2018).
- [127] A. I. Ahmadov et al. *J. Phys.: Conf. Ser.* **1194**, 012001 (2019).
- [128] S. L. Olsen, T. Skwarnicki, D. Zieminska. *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015003 (2018).
- [129] J.J. Aubert et al. *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404—1406 (1974).
- [130] F.G. Binon et al. *Sov. J. Nucl. Phys.* **39**, 405 (1984).
- [131] M.J. Corden et al. *Phys. Lett. B* **96**, 411 (1980).
- [132] J. Badier et al. *Z. Phys. C* **20**, 101 (1983).
- [133] J. LeBritton et al. *Phys. Lett. B* **81**, 401—404 (1979).
- [134] Y.B. Bushnin et al. *Yad. Fiz.* **26**, 1216—1221 (1977).
- [135] Y.M. Antipov et al. *Phys. Lett. B* **72**, 278—280 (1977).
- [136] M. David et al. *'14th Rencontres de Moriond: Session 1—High-Energy Hadronic Interactions'*, 473—485 (1979).

- [137] Y. Lemoigne et al., *Phys. Lett. B* **113**, 509 (1982).
- [138] A. Bamberger et al. *Nucl. Phys. B* **134**, 1–13 (1978).
- [139] Y.M. Antipov et al. *Sov. J. Nucl. Phys.* **23**, 169 (1976).
- [140] M. Grossmann-Handschin et al. *Phys. Lett. B* **179**, 170 (1986). [Addendum: *Phys. Lett. B* **181**, 414 (1986)]
- [141] J. Badier et al. *Phys. Lett. B* **86**, 98–102 (1979).
- [142] O. Linnyk, E.L. Bratkovskaya, W. Cassing, H. Stöcker. *Nucl. Phys. A* **786**, 183–200 (2007).
- [143] C. Morel et al. *Phys. Lett. B* **252**, 505–510 (1990).
- [144] S.R. Hahn et al. *Phys. Rev. D* **30**, 671–673 (1984).
- [145] D.A. Bauer et al. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 753–756 (1985).
- [146] T.B.W. Kirk et al. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 619–622 (1979).
- [147] L. Antoniazzi et al. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 383–386 (1993).
- [148] A.G. Clark et al. *Nucl. Phys. B* **142**, 29 (1978).
- [149] C. Kourkoumelis et al. *Phys. Lett. B* **81**, 405–409 (1979).
- [150] B. Alessandro et al. *Phys. Lett. B* **635**, 260–269 (2006).
- [151] Q.-F. Lü, L.-Y. Xiao, Z.-Y. Wang, X.-H. Zhong. *Eur. Phys. J. C* **78**, 599 (2018).
- [152] M. Aguilar-Benitez et al. *Phys. Lett. B* **135**, 237–242 (1984).
- [153] S. Barlag et al. *In: 24th International Conference on High-Energy Physics* 8 (1988).
- [154] M. Aguilar-Benitez et al. *Phys. Lett. B* **146**, 266–272 (1984).
- [155] D. Janc, M. Rosina. *Few Body Syst.* **35**, 175–196 (2004).
- [156] J. Vijande, A. Valcarce. *Symmetry* **1**, 155–179 (2009).
- [157] 3. A.L. Guerrieri, F. Piccinini, A. Pilloni, A.D. Polosa. *Phys. Rev. D* **90**, 034003 (2014).
- [158] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa, V. Riquer. *Phys. Rev. D* **89**, 114010 (2014).
- [159] C. Deng, J. Ping, F. Wang. *Phys. Rev. D* **90**, 054009 (2014).
- [160] X. Chen, J. Ping. *Phys. Rev. D* **98**, 054022 (2018).
- [161] C.E. DeTar, J.F. Donoghue. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **33**, 235–264 (1983).
- [162] P. Hasenfratz, J. Kuti. *Phys. Reports* **40**, 75–179 (1978).
- [163] M. Jezabek, J. Szwed. *Acta Phys. Polon. B* **14**, 599 (1983).

- [164] M. Iwasaki, F. Takagi. *Phys. Rev. D* **59**, 094024 (1999).
- [165] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **82**, 664—679 (1951).
- [166] M. Iwasaki, T. Fukutome. *Phys. Rev. D* **72**, 094016 (2005).
- [167] P. Mohanta, S. Basak. *Phys. Rev. D* **102**, 094516 (2020).
- [168] V.R. Debastiani, F.S. Navarra. *Chin. Phys. C* **43**, 013105 (2019).
- [169] J. Soto, J. Castellà. *Phys. Rev. D* **102**, 014012 (2020).
- [170] P. Junnarkar, N. Mathur, M. Padmanath. *Phys. Rev. D* **99**, 034507 (2019).
- [171] W. Chen, H.-X. Chen, X. Liu, T.G. Steele, S.-L. Zhu. *Phys. Lett. B* **773**, 247—251 (2017).
- [172] S.-K. Choi et al. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 262001 (2003).
- [173] R. Aaij et al. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 222001 (2013).
- [174] Y.-R. Liu, H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, S.-L. Zhu. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **107**, 237—320 (2019).
- [175] E. Braaten, J. Stapleton. *Phys. Rev. D* **81**, 014019 (2010).
- [176] K. Azizi, N. Er. *Nucl. Phys. B* **936**, 151—168 (2018).
- [177] L.M. Abreu, K.P. Khemchandani, A.Mart Torres, F.S. Navarra, M. Nielsen. *J. Phys. Conf. Ser.* **736**, 012026 (2016).
- [178] W. Biaogang, D. Xiaojian, M. Sibila, R. Rapp. *Eur. Phys. J. A* **57**, 122 (2021).
- [179] S. Cho, S.H. Lee. *Phys. Rev. C* **88**, 054901 (2013).
- [180] F. Carvalho, E.R. Cazaroto, V.P. Gonçalves, F.S. Navarra. *Phys. Rev. D* **93**, 034004 (2016).
- [181] G. Balassa, Gy. Wolf. *Eur. Phys. J. A* **57**, 24 (2021).
- [182] B. Chakrabarti et al. *Acta Phys. Polon. B* **41**, 95-101, (2010).
- [183] A. Ali. '14th Regional Conference on Mathematical Physics', 127—152 (2017).
- [184] S. Chatrchyan et al. *JHEP* **04**, 154 (2013).
- [185] P. Artoisenet, E. Braaten. *Phys. Rev. D* **81**, 114018 (2010).
- [186] L. Michelangelo, Mangano. *Proc. Int. Sch. Phys.* **137**, 95—137 (1998).
- [187] J.C. Collins, D.E. Soper, G.F. Sterman. *Adv. Ser. Dir. High Energy Phys.* **5**, 1—91 (1989).
- [188] D.B. Clark, E. Godat, F.I. Olness. *Comp. Phys. Comm.* **216**, 126—137 (2017).
- [189] P.M. Nadolsky, et al. *Phys. Rev. D* **78**, 013004 (2008).

- [190] M. Cleven, F.-K. Guo, C. Hanhart, Q. Wang, Q. Zhao. *Phys. Rev. D* **92**, 014005 (2015).
- [191] H. Kim, M.-K. Cheoun, K.S. Kim. *Eur. Phys. J. C* **77**, 173 (2017).
- [192] A. Esposito, E.G. Ferreira, A. Pilloni, A.D. Polosa, C.A. Salgado. *Eur. Phys. J. C* **81**, 669 (2021).
- [193] A. Martinez Torres et al. *Phys. Rev. D* **90**, 114023 (2014). [Erratum: *Phys. Rev. D* **93**, 059902 (2016).]
- [194] J. Cugnon. *Nucl. Phys. A* **387**, 191–203 (1982).
- [195] B.Blättel, V. Koch, W. Cassing, U. Mosel. *Phys. Rev. C* **38**, 1767 (1988).
- [196] M. Baznat et al. *Phys. Part. Nucl. Lett.* **17**, 303–324 (2020).
- [197] M. Bleicher et al. *J. Phys. G* **25**, 1859–1896 (1999).
- [198] W. Cassing, E.L. Bratkovskaya. *Nucl. Phys. A* **831**, 215–242 (2009).
- [199] S. Teis, W. Cassing, M. Effenberger, A. Hombach, U. Mosel, Gy. Wolf. *Z. Phys. A* **356**, 421 (1997).
- [200] Gy. Wolf, H.W. Barz, B. Kampfer. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **42**, 157 (1999).
- [201] Gy. Wolf. *Heavy Ion Physics* **5**, 281–297 (1997).
- [202] L. G. Arnold, B. C. Clark. *Phys. Rev. C* **19**, 917 (1979).
- [203] G. Welke et al. *Phys. Rev. C* **38**, 2101 (1988).
- [204] G. Welke et al. *Phys. Rev. C* **41**, 1545 (1990).
- [205] G. F. Bertsch, S. Das Gupta. *Phys. Reports* **160**, 189 (1988).
- [206] W. H. Press et al. *'Numerical recipes'*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [207] S. A. Bass et al. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41**, 255–369 (1998).
- [208] T. Kodama et al. *Phys. Rev. C* **29**, 2146–2152 (1984).
- [209] Gy. Wolf. *'Részecskekeltés Nehézion Reakciókban'*, MTA doktori értekezés (1997).
- [210] Gy. Wolf, G. Balassa, P. Kovács, M. Zétényi, Su Houng Lee. *Phys. Lett. B* **780**, 25–28 (2018).
- [211] Gy. Wolf, G. Balassa, P. Kovács, M. Zétényi, Su Houng Lee. *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **11**, 531 (2018).
- [212] Gy. Wolf, G. Balassa, P. Kovács, M. Zétényi, Su Houng Lee. *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **10**, 1177 (2017).
- [213] L. P. Kadanoff, G. Baym. *'Quantum statistical mechanics'*, Benjamin, New York (1962).

- [214] W. Cassing, S. Juchem. *Nucl. Phys. A* **665**, 377–400 (2000).
- [215] S. Leupold. *Nucl. Phys. A* **672**, 475 (2000).
- [216] H.W. Barz, B. Kampfer, G. Wolf, M. Zetenyi. *Open Nucl. Part. Phys. J.* **3** (2010).
- [217] B. Borasoy, U.G. Meißner. *Phys. Lett. B* **365**, 285 (1995).
- [218] S.H. Lee. *AIP Conf. Proc.* **717**, 780 (2004).
- [219] K. Morita, S.H. Lee. *Phys. Rev. C* **85**, 044917 (2012).
- [220] S.H. Lee, C.M. Ko. *Phys. Rev. C* **67**, 038202 (2003).
- [221] B. Friman, S.H. Lee, T. Song. *Phys. Lett. B* **548**, 153 (2002).
- [222] T. Hatsuda, S. H. Lee. *Phys. Rev. C* **46**, R34 (1992).
- [223] M. E. Peskin. *Nucl. Phys. B* **156**, 365–390 (1979).
- [224] D. Kharzeev, H. Satz. *Phys. Lett. B* **334**, 155–162 (1994).
- [225] F.-R. Liu, S.-T. Ji, X.-M. Xu. *J. Korean Phys. Soc.* **69**, 472–487 (2016).
- [226] O. Linnyk, E.L. Bratkovskaya, W. Cassing, H. Stoecker. *Nucl. Phys. A* **786**, 183 (2007).
- [227] Gy. Wolf, G. Balassa, P. Kovács, M. Zétényi, Su Houng Lee. *JPS Conf.Proc.* **26**, 024003 (2019).