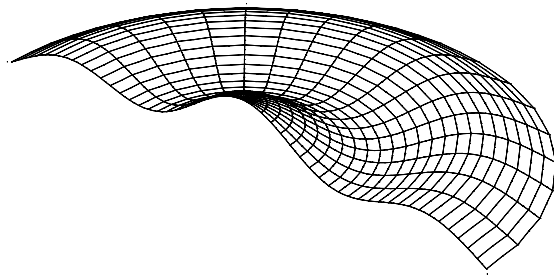


KONTINUUMMAL MODELLEZHETŐ SZERKEZETEK FREKVENCIAANALÍZISE

PhD értekezés tézisei

Huszár Zsolt Dr. univ.

*okl. építőmérnök, matematikus szakmérnök,
informatikai szakmérnök*



Budapest, 2009. június

BEVEZETÉS

A Zürichi ETH szakmérnök-képzése keretében a dinamika területén szerzett ismereteim indítottak arra, hogy különböző szerkezetek rezgésvizsgálatával foglalkozzam.

A kontinuum módszer alkalmazásával vizsgáltam a berepedt vasbetongerendák [1], [12] és feszített betongerendák [2], [16], változó merevségű konzolrúd [6], [11], megoszló normálerővel terhelt befogott oszlop [14], [18], lapos forgásparaboloid-héj [3], [4] rezgéseit, továbbá vékonyfalú U-szelvény hajlító- és csavaró lengéseit [10], [15].

Disszertációmiban a fentiek közül a dinamika két elméleti szempontból általam különösen érdekesnek talált részterületével foglalkozom:

1. Forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata
2. Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálata

Az egyes szerkezetek dinamikai jellemzőinek meghatározására kontinuum, illetve differenciámódszert alkalmaztam. A rezgés differenciálegyenletéből kiindulva meghatároztam a sajátfrekvenciákat és a rezgési alakokat. A számítások elvégzéséhez MATLAB programokat készítettem.

1. FORGÁSPARABOLOID-HÉJ REZGÉSVIZSGÁLATA

1.1. Előzmények

A múlt század második felében a héjelmélet önálló tudományággá fejlődött. A szakirodalom ismerteti a különféle héjszerkezetek statikai erőjátékát és a méretezéshez szükséges matematikai összefüggéseket, táblázatokat. A leggyakrabban idézett összefoglaló művek *Girkmann (1954)*, *Timoshenko (1966)*, *Flügge (1973)* nevéhez fűződnek. Minthogy a héjszerkezetek mechanikája bonyolult, az analitikus méretezés alapos matematikai ismereteket igényel. Korábban a tervező mérnök ez irányú munkája meglehetősen fáradtságos volt. Ma már rendelkezésre állnak - a héjszerkezetek számítására is alkalmas - az évtizedes fejlesztéssel elkészített komplex vége-selemes programok (Ansys, Cosmos, Lusas), melyek összetettebb nemlineáris problémák megoldásához is alkalmazhatók. Ezek használatával a tervezőnek nincs szüksége a statikai, vagy a dinamikai probléma matematikai háttérének ismeretére, hátránya viszont, hogy mechanikus alkalmazásuk az elemző készséget jelentősen csorbítja.

A héjelméleten belül a héjszerkezetek dinamikája újabb tudomány terület. A statikai héjelmélet egyensúlyi egyenleteit egészíti ki a D'Alembert-féle erővel, melynek figyelembevétele a matematikai megoldást még bonyolultabbá teszi, különösen nemlineáris rezgési problémák esetén. A tárgykörben, az utóbbi időben számos cikk jelent meg. Az egyes szerzők általában egy-egy szerkezetfajta tervezési problémáival foglalkoznak (*Godoy és De Sousa (1998), Touze és társai (2008)*). A forgáshéjak szakirodalmának nagyobb része, a gyakoribb alkalmazás miatt, a körhenger héjakkal kapcsolatos. Valamivel kisebb az érdeklődés az egyéb forgáshéjak, mint például a gömbsüveg, illetve a forgáshiperboloidok iránt. A laposhéjak, illetve gömbsüveghéjak irodalma elsősorban a héjak statikájával foglalkozik és ezen belül is stabilitásvesztés kérdését tárgyalja részletesebben. Viszonylag kevesebb publikáció foglalkozik a forgáshéjak dinamikai viselkedésével.

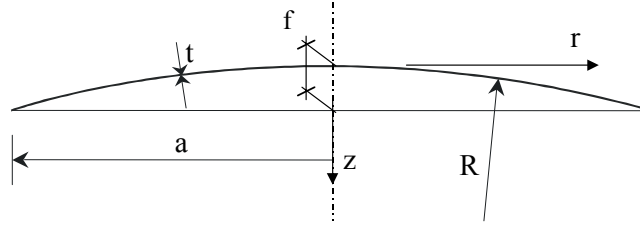
1.2. Célkitűzések

Értekezésem 1. fejezetében a lapos forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálatával foglalkozom. E területen az alábbi célkitűzéseket valósítottam meg:

- Új analitikus eljárás kidolgozása a lapos forgásparaboloid- ill. gömbsüveghéjak rezgéseit leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldására:
 - nyírási alakváltozások nélkül,
 - nyírási alakváltozások figyelembevételével.
- A frekvenciaegyenlet előállítás, a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok meghatározása.
- Számítási algoritmus és program kidolgozása (MATLAB).
- Az analitikus számítás eredményeinek ellenőrzése alternatív számítási eljárással, az ANSYS végelem programmal.
- Szabadon lebegő tányérantenna (űrszerkezet) sajátrezgéseinek számítása.
- A forgásparaboloid-héj, az ágyazatlan és a rugalmasan ágyazott körlemez rezgési jellemzőinek analitikus és numerikus összehasonlítása.

1.3. Dinamikai vizsgálat nyírási alakváltozások nélkül

A vizsgált vékony, lapos forgásparaboloid-héj az r , ϑ , z henger-koordináta-rendszerben $z = \frac{r^2}{2R}$ egyenletű felület, amelynek pereme az $r = a$ sugarú kör. A héj egy R sugarú gömb a sugarú köre mentén levágott lapos gömbsüveg helyettesítő forgásparaboloidjának is tekinthető (1.1. ábra).



1.1. ábra: A forgásparaboloid-héj meridián metszete

A héj szabad rezgésének differenciálegyenlet-rendszerét (1.1) a lapos héjak hajlításának Marguerre-féle differenciálegyenlet-rendszeréből állítottam elő, a D'Alembert erővel kiegészítve:

$$K\Delta\Delta w - \frac{1}{R}\Delta F = -\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{1}{Et}\Delta\Delta F + \frac{1}{R}\Delta w = 0, \quad (1.1b)$$

ahol: K a felület hajlítási merevsége, F a membránérők feszültségfüggvénye, w a normális irányú eltolódás függvénye, E a héj rugalmassági modulusa, ν a Poisson-tényező, t a héjvastagság, R a forgásparaboloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara, ρ a héj anyagának sűrűsége, τ az időváltozó.

A vékony, lapos, szabad peremű forgásparaboloid-héj, illetve a gömbsüveghéj rezgéseit leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására egy új analitikus módszert, a képzőfüggvényes eljárást alkalmaztam. Ezt az eljárást *Hegedűs (1986)* szendvicsgerenda-feladat megoldásán mutatta be. Az operátormátrix determinánsának és adjungáltjának értelmezésén alapuló képzőfüggvényes eljárás alkalmazásával a koordináta-változókat szétválasztva, a sugárirányú változóban egy nyolcadrendű közönséges differenciálegyenletre jutottam.

A nyolcadrendű differenciálegyenlet megoldását hatvány- és Bessel- függvények alkotják. A gyűrűirányú viselkedést trigonometrikus függvények írják le. A csúcsponti szingularitás miatt a nyolc megoldásból négyet ki kell zárni. A w és F függvényekre kapott megoldás:

$$w = \frac{1}{Rl_k^2} [4C_2(k+1)\xi_k^k - C_5J_k(\xi_k) + C_6I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta, \quad (1.2)$$

$$F = -K \left[\frac{1}{l_\omega^4} (C_1\xi_k^k + C_2\xi_k^{k+2}) + \frac{1}{l_{stat}^4} (C_5J_k(\xi_k) - C_6I_k(\xi_k)) \right] \cos k\vartheta, \quad (1.3)$$

ahol: $\xi_k = r/l_k$ a dimenziótlantított sugárirányú koordináta, l_k , a lengési karakterisztikus hossz, l_ω és l_{stat} szintén karakterisztikus hossz jellegű mennyiségek, C_i a peremfeltételek kielégítésére szolgáló integrálási állandók.

A következő lépés a differenciálegyenlet-rendszer peremfeltételeinek érvényesítése. Értekezésemben szabad peremű szerkezetet vizsgáltam, mely az űrben szabadon lebegő tányérantenna modellje (1.1 ábra). A szabad peremű forgásparaboloid-héjra négy peremfeltételt írhatunk elő. A differenciálegyenlet és a négy peremfeltétel együttesen egy sajátérték-feladatot tűz ki. Ennek megoldásával előállítottam a frekvenciaegyenletet a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok meghatározásához.

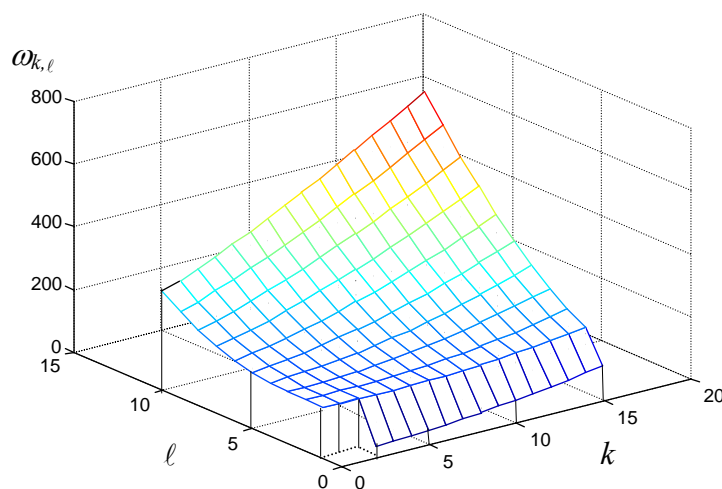
A forgásparaboloid-héj $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái az alábbi képlettel számíthatók:

$$\omega_{k,\ell} = \sqrt{\frac{\alpha_{k,\ell}^4 c^2 t^2}{a^4 12(1-\nu^2)} + \frac{c^2}{R^2}}, \quad (1.4)$$

ahol: c transzverzális hullámterjedés sebessége a héj anyagában, a , t , R a geometriai jellemzők az 1.1 ábra szerintiek és az $\alpha_{k,\ell}$ tényezők a sajátérték-feladat megoldásai. Az (1.4) formálisan azonos alakúra hozható a rugalmas ágyazású lemezek sajátkörfrekvenciáival (*Soedel (1986)*), azonban az $\alpha_{k,\ell}$ sajátértékek különböznek.

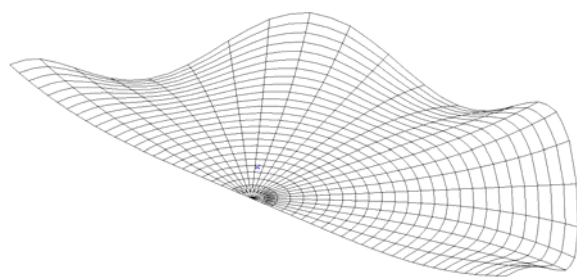
A sajátértékek és a hozzájuk rendelhető móduszok kétszeresen megszámlálható (k, ℓ) sereget alkotnak. A forgásparaboloid-héj rezgési alakjai gyűrű- és sugárirányú csomóvonalakat tartalmaznak. Az $\alpha_{k,\ell}$ indexében szereplő k a rezgési alakok gyűrűirányú hullámszámát, ℓ pedig a gyűrűirányú csomóvonal-számát jelenti.

Megmutattam, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó alacsonyabb k móduszaihoz tartozó $\alpha_{k,\ell}$ tényezők és az l_k lengési karakterisztikus hosszak komplexek. Az $\alpha_{k,\ell}$ és l_k értékei akkor válnak komplexről valósra, ha az $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvencia értéke meghaladja $\omega_0 = c/R$ körfrekvencia értékét.

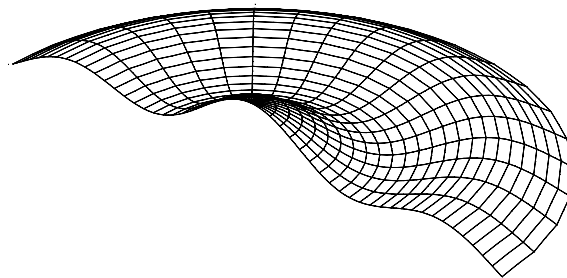


1.2. ábra: A vizsgált forgásparaboloid sajátkörfrekvenciái.

Jellegzetes rezgési elmozdulási alakokat mutatok be a 1.3. ábrán.



a) $\ell = 0$ és $k = 6$ paraméterre



b) $\ell = 3$ és $k = 0$ paraméterre

1.3. ábra: A forgásparaboloid-héj két jellegzetes rezgési elmozdulási alakja.

A sajátértékek és a sajátfrekvenciák számítására MATLAB programot dolgoztam ki. Az analitikus megoldás verifikációjához az ANSYS végelem programot használtam.

Az analitikus úton és numerikusan az alábbi szerkezetek sajátrezgéseit vizsgáltam összehasonlítás céljából:

- szabadon lebegő forgásparaboloid-héj,
- szabad peremű körlemez, $R = \infty$ felvétellel származtatva,
- rugalmasan ágyazott körlemez, ahol az ágyazás a membrán merevségeket helyettesíti.

Az összehasonlításból megállapítható, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó rezgéseinek (1.3a ábra) sajátfrekvenciái az ágyazatlan körlemezével, míg az egy vagy több gyűrűirányú csomóvonalat tartalmazó rezgések (1.3b ábra) sajátfrekvenciái a rugalmas ágyazású körlemezével közelíthetők. Ez megfelel annak, miszerint *Rayleigh (1945)* két csoportba sorolta a gömbsüveg jellegű héjak móduszait. A k és ℓ paraméter növekvő értékeire a három szerkezetfajta sajátfrekvenciái konvergálnak egymáshoz.

A továbbiakban azt vizsgáltam, hogy az egyes geometriai jellemzők hogyan befolyásolják a forgásparaboloid-héj sajátrezgéseit.

A kidolgozott eljárás kiterjeszhető két peremmel rendelkező, belső köre mentén rögzített héjszerkezetre is.

A bemutatott analitikus számítási eljárás és a hozzá készített számítógépi program alkalmazható egy úrszerkezetként kialakított tányérantenna sajátfrekvenciáinak és rezgési alakjainak számítására.

1.4. Dinamikai vizsgálat nyírási alakváltozások figyelembevételével

A nyírási alakváltozások figyelembevételéhez a w lehajlás függvény pl. a Thimoshenko-rudak tárgyalásánál megszokott módon bontható fel:

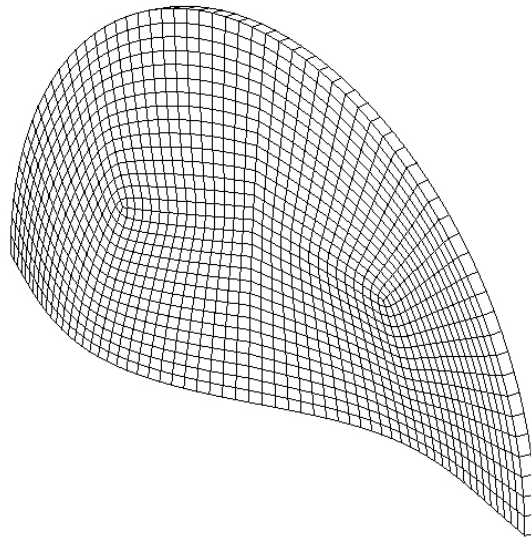
$$w = w_B + w_S \quad (1.5)$$

ahol: w_B a hajlítási deformációból, w_S a nyírási deformációból keletkező lehajlás. A héj szabad rezgéseit leíró (1.1) differenciálegyenlet-rendszer, kiegészítve a w_B és w_S közötti kapcsolattal (Hegedűs, I. (1979)) a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} K\Delta\Delta - \rho t \omega^2 & -\rho t \omega^2 & -\frac{1}{R}\Delta \\ \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{Et}\Delta\Delta \\ K\Delta\Delta & S\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_B \\ w_S \\ F \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (1.6)$$

ahol: S a nyírási merevség.

A (1.6) egyenletrendszert ugyancsak a képzőfüggvényes módszerrel megoldva az 1.3. fejezet szerintihez hasonló megoldásrendszert kaptam, mely szintén hatvány- és Bessel-függvényeket tartalmaz.



1.4. ábra: Térfogatelemekből összeállított ANSYS modell rezgési alakja

$\ell = 1$ és $k = 1$ esetén

Az analitikus megoldás ellenőrzését itt is az ANSYS program segítségével végeztem el, először felület, majd térfogatelemeket használva. Különböző vastagságú héjak esetén vizsgáltam a nyírási alakváltozás hatását. A várakozásnak megfelelően, a nyírási alakváltozásnak csak az igen magas frekvenciáknál van szerepe.

Hivatkozások az 1. fejezetben

- Flügge, W. (1973): "Stresses in Shells". Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- Girkmann, K. (1954): "Flächentragwerke". Springer-Verlag, Wien.
- Godoy, L. A. and De Souza, V. C. M. (1998): „Vibrations of Shallow Shells due to Removal of Formwork”. Journal of Sound and Vibration, (215)3, pp. 425-437
- Hegedűs, I. (1979): „Buckling of Axially Compressed Cylindrical Sandwich Shells”. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 89 (3-4) pp. 377-387.
- Hegedűs, I. (1986): „Mérnöki kontinuum feladatok differenciálegyenleteinek származtatása variációs elven”. Építési kutatás, fejlesztés 1986/2.
- Rayleigh, J. W. S. (1945): „The Theory of Sound. New York, Dover Publications”.
- Soedel, W. (1986) „Vibration of shells and plates”. New York, Marcel Dekker Inc.
- Timoshenko, S. és Woinowsky–Krieger, S. (1966): “Lemezek és héjak elmélete”. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Touze, C., Camier, C., Favraud, G., and Thomas, O. (2008): „Effect of Imperfections and Damping on the Type of Nonlinearity of Circular Plates and Shallow Spherical Shells”. Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2008, pp. 19, Hindawi Publishing Corporation.

2. BEREPEDT VASBETON- ÉS FESZÍTETT BETONGERENDÁK REZGÉSEINEK NUMERIKUS ÉS KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA

2.1. Előzmények

Fontosabb mérnöki létesítmények így a hidak tervezett élettartama általában 50-75 év. Ez alatt az idő alatt a szerkezeteket bizonyos valószínűséggel a rendeltetészerű használatból származó igénybevételeket meghaladó hatások is érhetik, melyek a tartószerkezeti elemek kisebb-nagyobb mértékű károsodásaihoz vezethetnek.

Ebből következően világszerte nagy az érdeklődés a különböző szerkezeti károsodásokat detektáló és lokalizáló módszerek iránt és nem csak az építőiparban, hanem a gépiparban, és a repüléstechnikában is. A károsodások felderítésében számos roncsolásmentes technikát alkalmaznak. Ezek egyik csoportja a szerkezetek dinamikai vizsgálatait és az ezekre alapított identifikációs módszereket.

A vasbetonszerkezetek repedezettségének dinamikai alapú főbb vizsgálati módszerei, a teljesség igénye nélkül, az alábbiak:

- sajátfrekvenciák megváltozásán alapuló módszerek, (*Salawu és Wiliams (1993)*)
- csillapítás megváltozásán alapuló módszerek,
- rezgési alakok megváltozásán alapuló módszerek, (*Rizos (1990)*)
- modális görbület megváltozásán alapuló módszerek, (*Pandey (1991)*)
- mérésekkel meghatározott hajlékonysági mátrix megváltozása.

Az utóbbi két évtizedben számos publikáció jelent meg, melyek a szerkezetek károsodásának mértékét, esetleg helyét a dinamikai viselkedésük alapján igyekeznek meghatározni. E munkák nagyobb része a rezgés lineáris jellegére épül, kisebb része figyelembe veszi a nemlineáris viselkedést is.

2.2. Célkitűzések

A disszertáció 2. fejezetében a kéttámaszú vasbeton- és feszített betongerendák rezgésének a repedezettségből származó nemlineáris jellegének vizsgálatával foglalkozom. Ennek részletei az alábbiak:

- Számítási modell kidolgozása a berepedt vasbetongerendák lineáris és nemlineáris vizsgálatára.
- A számítási modellhez számítógépi algoritmus készítése.
- Lineáris és nemlineáris vizsgálatok végzése berepedt vasbetongerendákon.
- Berepedt vasbetongerendák korábbi modellkísérleteiben a spektrumban az első sajátfrekvencia helyén kettős csúcs, azaz két közeli sajátfrekvencia adódott. A kidolgozott számítási modellel magyarázat keresése a fenti jelenségre.
- A berepedt gerenda nemlineáris rezgése során a frekvenciaváltozás vizsgálata.
- Kísérletek és a különböző numerikus vizsgálatok eredményeinek összehasonlítása.
- Új közelítő lineáris számítási modellek kidolgozása a látszólagos sajátfrekvenciák számítására.
- Lineáris és nemlineáris számítási modell kidolgozása berepedt feszített tartóra.
- A feszítőerő és a sajátfrekvencia kapcsolatának vizsgálata.

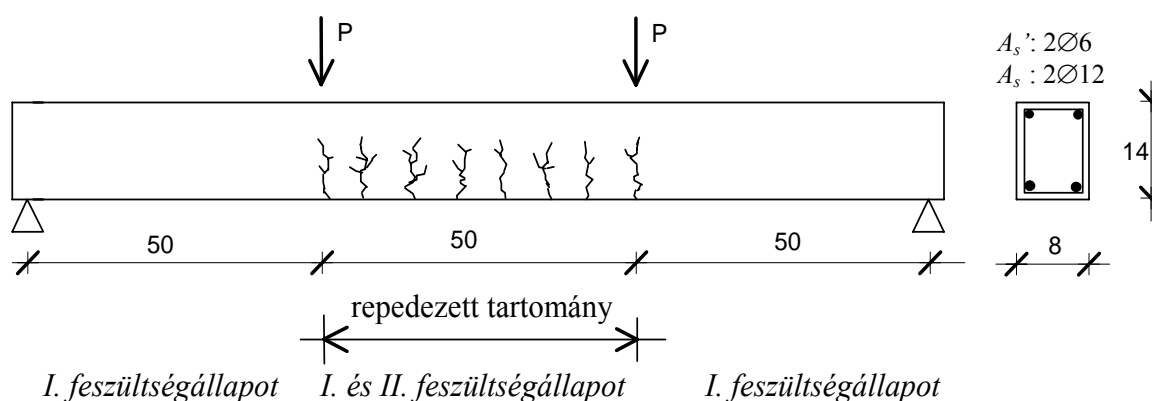
2.3. Berepedt vasbetongerendák rezgésvizsgálata

A berepedt vasbetongerendák dinamikai viselkedését jelentős mértékben befolyásolják a korábbi terhekből származott repedések. Kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy a repedések jelenléte miatt a rezgés jellemzői eltérhetnek a jól ismert lineáris számítási modell által szolgáltatott eredményektől. Ennek oka a repedések periodikus jellegű megnyílása, záródása miatti merevségingadozás a rezgés folyamán.

Ez a hatás még akkor is nemlineáris viselkedést okoz, ha a rezgés a rugalmas tartományban valósul meg. A nemlineáris rezgés esetén csak úgynevezett látszólagos sajátfrekvencia értelmezhető.

Az értekezésemben főként azt vizsgálom, hogy a repedezettség, pontosabban a repedések periodikus jellegű záródása hogyan befolyásolja a kéttámaszú vasbeton anyagú gerendák rezgési jellemzőit. Ennek keretében felhasználtam korábbi laboratóriumi kísérletek eredményeit, valamint MATLAB programokat dolgoztam ki a kísérletek numerikus modellezésére.

A kísérlet és a numerikus modellezés során az alábbi négypontos terhelésű gerendát vizsgáltam (2.1 ábra).



Rugalmassági modulus: $E_b = 35300\text{N/mm}^2$

2.1. ábra: A kísérletben használt gerendamodell. (A méretek [cm]-ben értendők).

A kísérletekben modell-gerendákat egy kezdeti impulzussal hozták rezgésbe és elektronikus úton rögzítették a jellemző keresztmetszetekben mért gyorsulásokat. A kísérletben felvett idő-gyorsulás diagram spektrálfelbontása (Fourier-transzformációja) szerint a berepedt gerenda első sajátfrekvenciája mellett egy mellékcsúcs is jelentkezett. Az így kapott mindkét frekvencia a repedésmentes tartón végzett számítás eredményénél kisebbre adódott. Az irodalomban nem találtam meg a kettős csúcs magyarázatát.

A berepedt gerendán lineáris és nemlineáris számításokat végeztem a gerenda hajlítórengéseinek differenciálegyenletére (*Clough és Penzien (1975)*) épülő számítási modellekkel. Lineáris számításokkal a rezgés látszólagos sajátfrekvenciáinak alsó és felső korlátját adtam meg. A nemlineáris rezgési feladat megoldása térbeli és időbeli finitizálást igényel. A tartótengely irányú finitizálást a differenciámódszer felhasználásával végeztem. A tartó vizsgált keresztmetszeteiben a repedések

megnyílása és záródása miatt a hajlítómerevség időbeli változása (az önsúly okozta repedés-megnyílást elhanyagolása mellett):

$$EI_i = \begin{cases} E_b I_{i,I} & \text{ha } M_{din,i} < 0 \\ E_b I_{i,II} & \text{ha } M_{din,i} \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

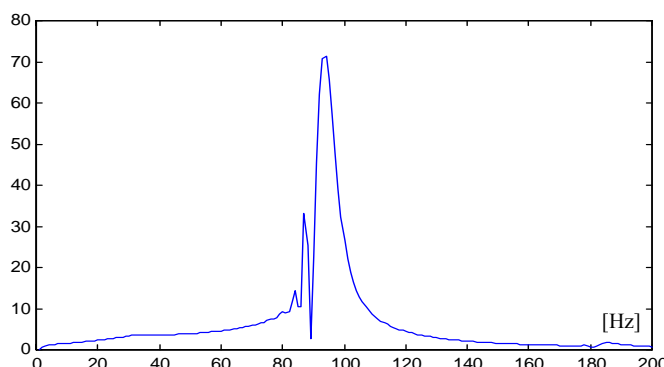
A (2.1) összefüggés szerinti nemlineáris tulajdonság figyelembevétele időlépéses algoritmus alkalmazását teszi szükségessé, mely a kísérletekhez hasonlóan idősorokat, azaz eltolódásokat és gyorsulásokat szolgáltat az egyes keresztmetszetekben az idő függvényében. A megoldáshoz a Wilson-módszeren (*Bathe és Wilson (1976)*) alapuló MATLAB programot dolgoztam ki. A spektrumot az ily módon előállított idősor Fourier-transzformációjával kaptam.

Az önsúly okozta repédésmegnyílás elhanyagolásával végzett numerikus szimulációval a spektrumban talált kettős csúcs nem volt kimutatható.

Az önsúly okozta repédésmegnyílás figyelembevétele esetén azonban a helyzet megváltozik. Az önsúlynyomaték hatására a repedések a középső tartományban már a nyugalmi helyzetben megnyílnak, így a hajlítómerevség lépcsős változását leíró függvény a következőképpen módosul:

$$EI_i = \begin{cases} E_b I_{i,I} & \text{ha } M_{din,i} + M_{stat,i} < 0 \\ E_b I_{i,II} & \text{ha } M_{din,i} + M_{stat,i} \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

A merevség változásának (2.2) szerinti figyelembevételével végrehajtott időlépéses algoritmussal előállított időorból készített spektrum – az önsúly a csillapítás és az indító impulzus megfelelő viszonya esetén – már mutatja a kísérletek során tapasztalt kettős csúcsot (2.2 ábra).



Csillapítások: $\zeta_1 = 1.5 \%$, $\zeta_3 = 8 \%$

$[C] = 8.5[K] + 2.55 \cdot 10^{-5}[M]$

Impulzus: $\mathfrak{I} = 7.0 \text{ kgm/s}$

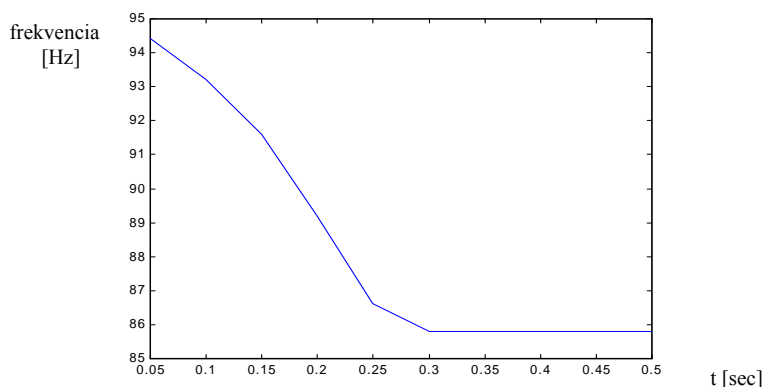
$w_{din}/w_{stat} = 9.1$

$f_1 = 93.5 \text{ Hz}$ $f_1^* = 87.1 \text{ Hz}$

2.2. ábra: Kettős csúcs a gerendamodell spektrumában

A berepedt gerenda látszólagos sajátfrekvenciáját számos tényező befolyásolja. Parametrikus vizsgálatokkal megmutattam és ábrásorozaton tüntettem fel, hogy a modellgerenda spektruma hogyan függ az indító impulzus és a csillapítás mértékétől.

A modellgerenda látszólagos sajátfrekvenciájának az alsó és felső korlát közötti időbeli változásának meghatározásához (az elektrotechnikában is alkalmazott) ún. „mozgó-ablakkal” kombinált diszkrét Fourier-transzformációt használtam.



2.3. ábra: A vizsgált gerenda látszólagos sajátfrekvenciájának időbeli változása.

A nemlineáris rezgés első két látszólagos sajátfrekvenciájának közelítő meghatározására alkalmas új lineáris modelleket dolgoztam ki.

2.1 táblázat: A mért és számított sajátfrekvenciák összehasonlítása.

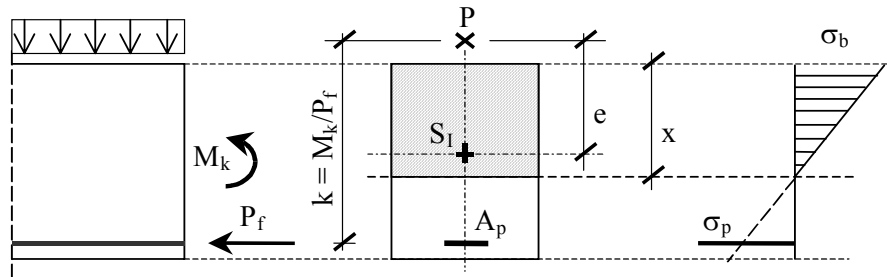
Kísérlet és számítási módszerek	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]
Kísérlet, berepedt gerenda	89, 98	
Lineáris számítás, repedésmentes gerenda	109	436
Lineáris számítás, gyengített gerenda	86	397
Nemlineáris számítás, önsúly okozta repedésmegnyílás nélkül	96	414
Nemlineáris számítás, önsúly okozta repedésmegnyílással	87, 93	
Új közelítő lineáris modellek	96.1	417.5

2.4. Berepedt feszített vasbetongerendák rezgésvizsgálata

A hajlításra igénybevett, feszített vasbeton tartók dinamikai jellemzőit jelentősen befolyásolja a repedezettségi állapoton kívül a hatásos feszítőerő is, mert a repedezett szakasz keresztmetszeteiben a tényleges görbület a statikus és dinamikus nyomatóki igénybevétel mellett függ a feszítésből származó normálerő nagyságától is (2.4. ábra).

Értekezésemben meghatároztam a berepedt szakasz görbületei alapján előállított hajlítómerevségekkel a vizsgált feszített tartó látszólagos sajátfrekvenciáját lineáris és nemlineáris számítással.

A berepedt feszített gerenda hajlítómerevsége időben változik és a nem feszített gerendához hasonlóan nem-lineáris rezgést eredményez. A nem feszített gerenda esetén a berepedt szakaszon a nyomaték-hajlítómerevség kapcsolatot egy lépcsős függvény (2.2) írja le, míg a feszített gerendánál ez a függvénykapcsolat folytonos, mely a görbületi inercianyomaték (2.3-2.4) fogalmára épül (Dulácska, E. (1978)).



2.4. ábra: Hajlításnak kitett, berepedt feszített keresztmetszet

Az M nyomatékkal terhelt feszített tartó görbülete:

$$M = M_k - M_f = M_{k,din} + M_{k,stat} - M_f = P_f k - P_f (k - e) = P_f e \quad (2.3a)$$

$$g = \frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\sigma_b}{E_b x} = \frac{M}{E_b I} \quad , \quad (2.3b)$$

ahol: σ_b ill. ε_b a nyomott szélő szálaban lévő betonfeszültség ill. beton összenyomódás. A nevezőben lévő $E_b I$ hajlítómerevségben az I a görbületi inercianyomaték. A keresett keresztmetszeti jellemző:

$$I = I_g = S_d e \quad . \quad (2.4)$$

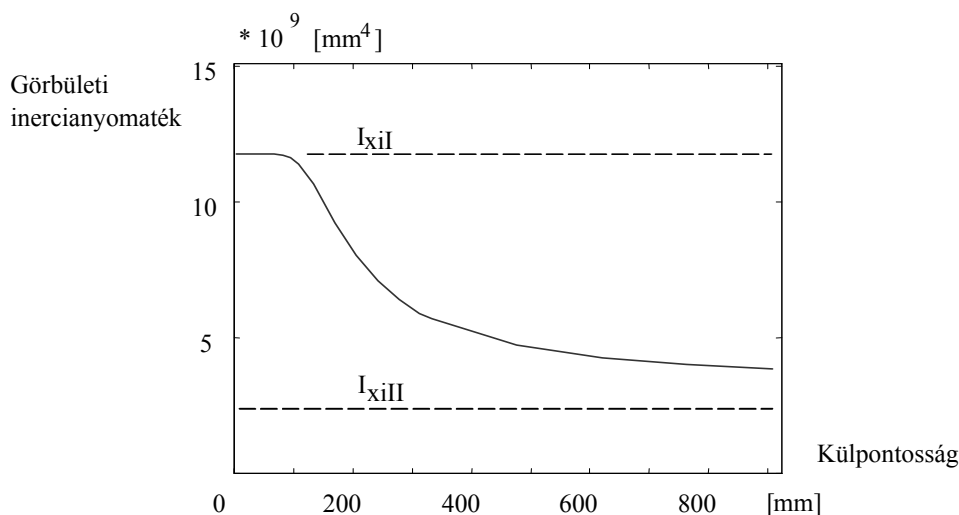
ahol: S_d a keresztmetszet dolgozó részének statikai nyomatéka a semleges tengelyre; e a keresztmetszetben működő eredő P normálerő külpontossága a repedésmentes keresztmetszet súlyponti tengelyéhez képest ($|P| = |P_f|$).

Egy 10.0 m támaszközű „I” keresztmetszetű berepedt feszített tartón csillapítatlan rezgés feltételezésével háromféle számítást végeztem a sajátkörfrekvencia meghatározására:

- lineáris számítás repedésmentes tartón a statikus teher, mint együttmozgó tömeg figyelembevételével,
- lineáris számítás a berepedt tartón a statikus nyomatékból számított, időben állandó hajlítómerevséggel,
- nemlineáris számítás a berepedt tartón a statikus és dinamikus nyomatékból együttesen, időben változó hajlítómerevséggel.

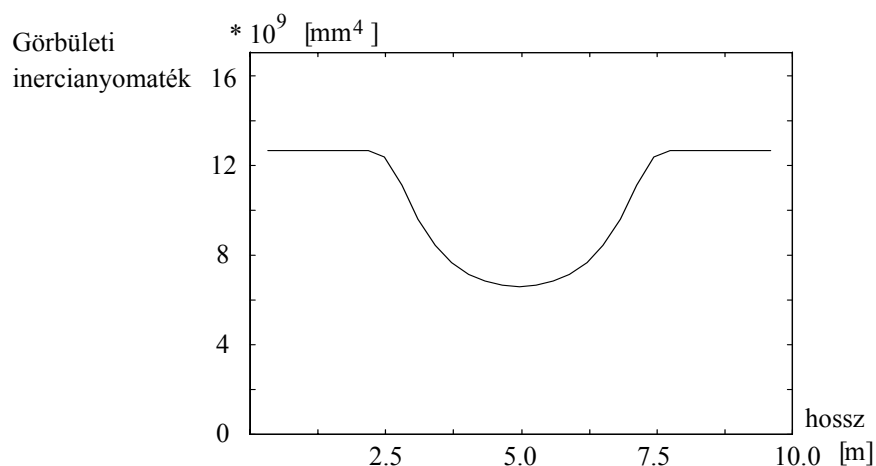
Az a) esetben elemi úton számítottam a hossza mentén állandó $E_b I_{il}$ hajlítómerevségű repedésmentes tartó sajátfrekvenciáit.

A b) számítást repedezett tartón végeztem el. A tartó keresztmetszeteiben a hajlítómerevséget a (2.4) alapján határoztam meg. Ehhez először előállítottam a tartó keresztmetszetére vonatkozó külponthossz–görbületi inercianyomaték diagrammot (2.5. ábra).



2.5. ábra: A görbületi inercianyomaték a P normálerő külponthosszának függvényében

A statikus nyomatékból és a hatásos feszítőerőből a hosszirányú felosztás osztópontjaiban rendre számítottam a külponthosszot, majd az 2.5. ábra szerinti függvényből interpolációval kaptam az osztópontokban érvényes I_g görbületi inercianyomatékokat (2.6. ábra).



2.6. ábra: A görbületi inercianyomaték változása a hossz mentén (“b” számítás)

Az így adódó hosszanti $E_b I_g$ folytonos görbe szerinti hajlítómerevségekkel kiszámítottam az adott feszítőerőhöz tartozó sajátkörfrekvenciák közelítő értékeit. A közelítés abból adódik, hogy a lineáris számítás elhanyagolja a dinamikus igénybevételek hatására bekövetkező merevség-ingadozásokat.

A "c" számítás esetében a rezgés idősorát a Wilson-féle időlépéses algoritmussal számítottam a merevségingadozások figyelembevételével.

Az eredményekből megállapítható volt, hogy berepedt feszített tartó esetén, amennyiben a rezgés amplitúdója kicsi a statikus lehajláshoz képest, akkor a feszítőerőtől függő látszólagos sajátfrekvencia lineáris számítással is elegendő pontossággal határozható meg a statikus nyomatékokból, a berepedt tartón meghatározható hajlítómerevségek figyelembevételével. Gyakorlati számítás céljára ez a közelítés alkalmazható nagyméretű feszített tartók, feszített vasbeton hidak esetében, ahol az önsúly lényegesen nagyobb, mint a dinamikus hatást okozó hasznos teher.

A kidolgozott számítási módszer alkalmazásával elkészíthető a feszített vasbeton tartó sajátfrekvencia diagramja a károsodások következtében csökkenő feszítőerő függvényében. Az így előállított diagramm más vizsgálatok eredményeivel együtt felhasználható feszített hidak időközi vizsgálatainál a híd általános állapotának jellemzéséhez.

Hivatkozások a 2. fejezetben

- Bathe, K. J. és Wilson, E. L. (1976): „Numerical Methods in Finite Element Analysis”. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.,
- Clough, R. W. and Penzien, J. (1975): „Dinamics of Structures”. Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- Dulácska, E. (1978): „A rugalmas vasbetonrúd kihajlása”. Építés- és Építészettudomány, X. 1-2 pp. 45-65.
- Pandey, A.K., Biswas M., and Samman, M.M. (1991): “Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes,” Journal of Sound and Vibration, 145(2), 321–332.
- Rizos, P.F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A.D. (1990): “Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes,” Journal of Sound and Vibration, 138(3), 381–388.
- Salawu, O. S. and Williams, C. (1993): “Structural damage detection using experimental modal analysis”. Proc. Of the 11th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, pp 254-260.

3. AZ EREDMÉNYEK TÉZISSZERŰ ÖSSZEFOGLALÁSA

I. TÉZISCSOPORT: Forgáspároloid-héj rezgésvizsgálata

A forgáspároloid-héj rezgésvizgálatával kapcsolatos kutatási eredményeimet az alábbi tézispontokban foglalom össze:

- I.1. A lapos héjak elmélete alapján, új analitikus módszerrel – az egyéb célra már alkalmazott képzőfüggvényes eljárással – megoldottam a nyírási alakváltásoktól mentes vékony, lapos, szabad peremű forgáspároloid-héj ill. gömbsüveghéj rezgésének differenciálegyenlet-rendszerét. E módszer lényege, hogy a héj rezgéseit leíró parciális differenciálegyenlet-rendszert, az operátormátrix determinánsának és adjungáltjának értelmezésén alapuló képzőfüggvényes eljárás alkalmazásával, redukáltam egy közöséges nyolcadrendű differenciálegyenletre [4].
- I.2. A kidolgozott képzőfüggvényes eljárással előállított frekvenciaegyenlet alkalmas a vékony, lapos, szabadperemű forgáspároloid-héj valamennyi saját-frekvenciájának és rezgési alakjának analitikus meghatározására [4].
- I.3. Analitikus úton és numerikusan is megmutattam, hogy a forgáspároloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó ($\ell = 0$) móduszai esetén az alacsonyabb k gyűrűirányú hullámszámú móduszokhoz tartozó $\alpha_{k,0}$ sajátértékek és l_k lengési karakterisztikus hosszak komplexek [3], melyek akkor válnak valósra, ha a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvencia értéke meghaladja az $\omega_o = c/R$ körfrekvencia értéket (ahol: c a transzverzális hullámterjedés sebessége a héj anyagában, R a forgáspároloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara).
- I.4. A képzőfüggvényes eljárással levezettem a nyírási alakváltások figyelembevételével mellett is, a lapos szabadperemű forgáspároloid-héj, illetve a gömbsüveg-héj frekvenciaegyenletét.

II. TÉZISCSOPORT: Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálata

A berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálatával kapcsolatos kutatási eredményeimet az alábbi tézispontokban foglalom össze:

- II.1. Szimmetrikusan berepedt vasbetongerendák rezgéseinek numerikus szimulációjával (időlépéses algoritmus és Fourier-transzformáció) megmutattam, hogy a repedések periodikus jellegű záródásának következménye a spektrumban megjelenő kettős csúcs az első sajátfrekvencia helyénél az önsúly, a csillapítás és az indító impulzus megfelelő viszonya esetén [1].
- II.2. Mozgó ablakfüggvényes Fourier-transzformációval megmutattam, hogy amennyiben kettős csúcs van az első sajátfrekvencia helyénél a berepedt vasbetongerenda rezgési spektrumában, akkor a gerenda rugalmas rezgéseinek látszólagos sajátfrekvenciája időben csökken.
- II.3. Numerikus szimulációval megmutattam, hogy berepedt vasbetongerenda periodikus jellegű repedéscsúcs esetén a rezgés látszólagos sajátfrekvenciája függ az indító impulzustól.
- II.4. A mezőközépre szimmetrikusan berepedt vasbetongerendáknál új lineáris modell bevezetésével egyszerű képletet adtam, a repedések periodikus jellegű záródása miatti nemlineáris rezgés első látszólagos sajátfrekvenciájának felső korlátjára. Modellt dolgoztam ki a második látszólagos sajátfrekvencia egymáshoz közeli alsó és felső korlátjának meghatározására is [1].
- II.5. Felhasználva a feszített vasbetongerendák görbületi inercianyomatékának kifejezését megmutattam, hogy a berepedt feszített tartók rezgésekor, a repedések periodikus jellegű záródása alatt, a hajlítómerevség csak kisebb mértékben ingadozik, mint a nemfeszített gerendák esetén. A nemlineáris rezgés emiatt megbízhatóan közelíthető egy helyettesítő lineáris vizsgálattal, a statikus nyomatékokból a berepedt tartón meghatározható merevségi paraméterek felhasználásával, ha a rezgés amplitúdói kicsik a statikus lehajláshoz képest. Egy modell segítségével megadtam a sajátfrekvenciáknak a feszítőerőtől való függését [2].

A TÉZISPONTOKHOZ KAPCSOLÓDÓ TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

- [1] Huszár, Zs.: “Investigation of Vibrations of Cracked Reinforced Concrete Beams”. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Civil Engineering Vol. 108, No. 3-4, 1997-1999. pp. 357-367.
- [2] Huszár, Zs.: „Vibrations of Cracked Reinforced and Prestressed Concrete Beams”. IABSE SYMPOSIUM, Budapest 2006. szept. 13-15. Az előadás teljes szövege megjelent: IABSE REPORT Vol.92 CD-ROM, file: A-0337. pdf. pp. 1-8.
- [3] Huszár Zs.: „Kontinuummal modellezhető szerkezetek rezgésvizsgálata”. MTA-BME Műszaki Mechanika Kutatóközösség konferenciájának kiadványa 2002. pp. 31-36.
- [4] Huszár, Zs. - Hegedűs, I.: “Free Vibrations of a Paraboloid Shell”. Periodica Polytechnica Civil Engineering Vol. 49, No.1, 2005. pp. 13-26.

A DINAMIKA TÉMAKÖRBEN MEGJELENT TOVÁBBI PUBLIKÁCIÓIM

Külföldön megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk

- [5] Huszár, Zs.: “Vibrations of Cracked Reinforced and Prestressed Concrete Beams”. Facta Universitatis Series: Architecture and Civil Engineering Vol. 6, No 2, 2008, pp. 155 – 164 DOI:10.2298/FUACE0802155H

Magyarországon megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk

- [6] Huszár, Zs.: “Vibrations of Non-uniform Tower Constructions. Concrete Structures”. Annual Technical Journal. Hungarian Group of fib. Vol. 4, 2003. pp. 54-58.

Nemzetközi konferencia-kiadványban megjelent idegen nyelvű előadások

- [7] Huszár, Zs.: “Dynamic Analysis of Constructions Modelled by Non-uniform Cantilever”. 11th European Conference on Earthquake Engineering, Párizs 1998. szept. 6-11. Balkema Rotterdam 1998. CD-ROM ISBN 90 5410 9823.
- [8] Huszár, Zs.: “Linear and Non-linear Modelling of Dynamic Behaviour of Cracked Reinforced Concrete Beams”. 1th Albert Caquot International Conference, Párizs 2001. okt. 3-5. Presses Ponts et chaussées,

Magyar nyelvű folyóiratcikkek

- [9] Huszár Zs.: „A repedezettség hatása a vasbetongerendák rezgéseire” I-II. Beton 1997. 5 sz. pp. 13-16; 1997. 6 sz. pp. 19-21.

- [10] Huszár Zs.: "Vékonyfalú, nyitott, egyszeresen szimmetrikus szelvényű rúd hajlító és csavaró lengései". *Építés - Építészettudomány* 2000. XXVII. kötet 3-4. sz. pp. 209-224.
- [11] Huszár Zs.: "Változó inerciájú konzoltartók csillapítatlan szabadrezgéseinek vizsgálata". *Építés - Építészettudomány* 2001. XXIX. kötet 1-2. sz. pp. 155-168.

BME közlemények

- [12] Huszár Zs.: „Berepedt vasbeton gerendák dinamikai modellezése”. BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 1997. pp. 75-80.
- [13] Huszár Zs.: „Változó inerciájú konzoltartó csillapítatlan szabadrezgéseinek vizsgálata a Rayleigh hányadosra épülő eljárás segítségével”. MTA-BME Mechanikai Kutatóközösség VI. Tudományos Ülésszaka 1998. pp. 69-74
- [14] Huszár Zs.: „Megoszló normálerővel terhelt oszlop rezgésvizsgálata”. BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 1998. pp. 67-72.
- [15] Huszár Zs.: "U szelvényű rudak rezgésvizsgálata". BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 2000. pp. 119-130.
- [16] Huszár Zs.: "Berepedt, feszített vasbeton gerendák rezgéseinek vizsgálata". BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 2001. pp. 55-62.

Kivonatban megjelent konferencia-előadások

- [17] Huszár Zs.: „Berepedt vasbetongerenda rezgéseinek vizsgálata”. VII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc 1995. pp. 45.
- [18] Huszár Zs.: „Megoszló normálerővel terhelt oszlop rezgésvizsgálata”. VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc 1999. pp. 58.