A prenukleolusz karakterizációs halmazai

Tézisfüzet

Dornai Zsófia

Témavezető:

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar
2025

Absztrakt

Bevezetjük egy közös általánosítását a prenukleolusznak, a perkapita prenukleolusznak és a súlyozott vagy q-prenukleolusznak, az $\mathbf{u}$-prenukleoluszt, úgy, hogy hasznosságfüggvényeket illesztünk a többletekre. Ugyanezen gondolatmenet alapján szintén általánosítjuk a magot, a szűkmagot, a kiegyensúlyozott játékok fogalmát, a lényeges és duálisan lényeges koalíciókat, ami által megkapjuk az $\mathbf{u}$-magot, az $\mathbf{u}$-szűkmagot, az $\mathbf{u}$-kiegyensúlyozott játékok fogalmát, az $\mathbf{u}$-lényeges és duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciókat. Megmutatjuk, hogy különböző játékelméleti eredmények és tételek hogyan alkalmazhatók ebben az új felállásban, emellett különböző karakterizációs halmazait definiáljuk az $\mathbf{u}$-prenukleolusznak: az $\mathbf{u}$-lényeges és duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciókat $\mathbf{u}$-kiegyensúlyozott játékok esetén, és ezen két koalícióhalmaz metszetét olyan játékokban, ahol az $\mathbf{u}$-szűkmag valódi részhalmaza az $\mathbf{u}$-magnak.

Összefoglaló

Bevezetjük az **u**-prenukleolusz fogalmát (Dornai és Pintér, 2024), ami közös általánosítása a prenukleolusznak (Schmeidler, 1969), a perkapita prenukleolusznak (Grotte, 1970, 1972), a súlyozott vagy q-prenukleolusznak (Derks és Haller, 1999; Solymosi, 2019) és egy speciális esete az általános prenukleolusznak (Potters és Tijs, 1992; Maschler et al, 1992), oly módon, hogy úgy nevezett hasznosságfüggvényeket alkalmazunk a többletekre (excess-ekre).

Emellett korlátozott kooperációs TU-játékokat vizsgálunk, melyek esetén a prenukleolusz bizonyos tulajdonságai megváltoznak, például az egyértékűség elveszik. Katsev és Yanovskaya (Katsev és Yanovskaya, 2013) bizonyítottak szükséges és elégséges feltételeket a prenukleolusz nem ürességére és egyértékűségére ilyen játékok esetén is. Ezen eredményeket általánosítjuk az **u**-prenukleoluszra.

Hasznosságfüggvények segítségével további általánosított fogalmakat vezetünk be, úgy, mint az **u**-mag, az **u**-szűkmag, **u**-kiegyensúlyozott játékok és az **u**-lényeges koalíciók. Általánosítjuk a Bondareva–Shapley–tételt, mellyel megmutatjuk, hogy egy játék akkor és csak akkor **u**-kiegyensúlyozott, ha az **u**-magja nem üres. Emellett Huberman tételét (Huberman, 1980) is általánosítjuk, megmutatva, hogy az **u**-lényeges koalíciók egy karakterizációs halmazát adják az **u**-prenukleolusznak **u**-kiegyensúlyozott játékok esetén. Elégséges feltételeket definiálunk, amelyek mellett az **u**-prenukleolusz illetve az **u**-mag változatlan marad, továbbá mutatunk egy játékosztályt, ahol a játékosok számában csak kvadratikus sok **u**-lényeges koalíció található. Mindezek mellett megmutatjuk, hogy a szűken lényeges koalíciók (Dornai és Pintér, 2022), amik az **u**-lényeges koalícióknak egy részosztályát képezik, karakterizálják a prenukleoluszt nem kiegyensúlyozott játékok esetén is.

Az utolsó fejezetben hasznosságfüggvényekkel rendelkező TU-játékok duálisaival foglalkozunk, és definiáljuk az $\mathbf{u}^*$-anti-nukleoluszt, az $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleoluszt, az $\mathbf{u}^*$-anti-magot és az $\mathbf{u}^*$-anti-szűkmagot. Bevezetjük a duálisan **u**-lényeges koalíciók fogalmát (Dornai és Pintér, 2025), melyek egy a Solymosi és Sziklai (Solymosi és Sziklai, 2016) által bevezetett fogalom általánosításai hasznosságfüggvények esetére. Kimondjuk és bizonyítjuk Huberman tételének egy másik változatát, amely szerint a duálisan **u**-lényeges koalíciók karakterizálják az **u**-prenukleoluszt **u**-kiegyensúlyozott játékok esetén.

Végül, bizonyítjuk két általánosítását Granot et al (1998) egy tételének a prenukleolusz karakterizációs halmazairól, és ennek segítségével általánosítjuk Solymosi és Sziklai egy eredményét (Solymosi és Sziklai, 2016), megmutatva, hogy az **u**-lényeges és a duálisan **u**-lényeges koalíciók metszete szintén karakterizálja az **u**-prenukleoluszt, amennyiben az **u**-szűkmag valódi részhalmaza az **u**-magnak.

1. Alapvető fogalmak

1.1. TU-játékok és megoldások

Adott játékosok egy nemüres véges halmaza: N, és egy $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ függvény, amire $v(\emptyset) = 0$. Ekkor v-t egy TU-játéknak nevezzük (ezentúl röviden játék). Jelölje $\mathcal{G}^N$ az N játékoshalmazú játékok osztályát, továbbá jelölje a koalíciók halmazát $\mathcal{P}(N) := \{S \subseteq N\}$ és a nem triviális koalíciók halmazát $\mathcal{P}^*(N) := \{S \subseteq N\colon S \neq \emptyset,\ S \neq N\}$. Ezen túl jelölje $\mathcal{D}_S$ az $S \subseteq N$ koalíció partíciónak a halmazát az $\{S\}$ partíció kivételével.

Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ olyan, hogy $\emptyset, N \in \mathcal{A}$. Ekkor $\mathcal{A}$-t megengedett koalíciók halmazának nevezzük. Ebben az esetben $v\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $v(\emptyset) = 0$ egy korlátozott kooperációs játék. Jelölje $\mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ azon korlátozott kooperációs játékok osztályát, ahol $\mathcal{A}$ a megengedett koalíciók halmaza. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$, akkor $\mathcal{G}^{N,\mathcal{A}} = \mathcal{G}^N$, így a korlátozott kooperációs játékok a klasszikus játékok egy általánosítását adják.

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ egy kiegyensúlyozott koalíció rendszer, ha létezik egy $\lambda_S \in \mathbb{R}_+$, $S \in \mathcal{S}$ kiegyensúlyozó súlyrendszer, amire

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \lambda_S\, \chi_S = \chi_N,$$

ahol $\chi_E \in \mathbb{R}^N$ az E halmaz karakterisztikus vektora.

Jelölje $\mathcal{A}^* := \mathcal{A} \setminus \{N, \emptyset\}$ a nem triviális megengedett koalíciók halmazát, és $\mathcal{D}_S^{\mathcal{A}^*} := \{B \in \mathcal{D}_S\colon B \subseteq \mathcal{A}^*\}$ az $S \in \mathcal{A}^*$ koalíció nem triviális $\mathcal{A}^*$-beli partícióit.

Egy halmazértékű leképezést az N játékoshalmazú játékok osztályáról $\mathbb{R}^N$-re megoldásnak nevezünk. Ilyen például a mag (Shapley, 1955; Gillies, 1959), a kernel (Davis és Maschler, 1965) és az alkuhalmaz (Aumann és Maschler, 1964). Értéknek egy szingleton értékű megoldást nevezünk, például a Shapley-érték (Shapley, 1953) és a (pre)nukleolusz (Schmeidler, 1969).

Jelölje $I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N\colon \sum_{i\in N} x_i = v(N) \text{ and } x_i \geq v(\{i\})\ \forall \{i\} \in \mathcal{A}\}$ a $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék imputációi, és $I^*(v) := \{x \in \mathbb{R}^N\colon \sum_{i\in N} x_i = v(N)\}$ a $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék preimputációi halmazát.

Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ korlátozott kooperációs játék, egy $S \in \mathcal{A}$ koalíció és egy $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektor. Az S koalíció x kifizetés vektorhoz tartozó többlete a v játékban $e(S, x) := v(S) - x(S)$, ahol $x(S) := \sum_{i\in S} x_i$.

Egy korlátozott kooperációs v játék magja a preimputációk azon halmaza, amelyekre minden megengedett koalíció esetén a többlet nem pozitív:

$$\text{core}(v) := \left\{x \in \mathbb{R}^N\colon x(N) = v(N) \text{ és } e_v(S, x) \leq 0,\ \forall S \in \mathcal{A}^*\right\}.$$

Ha egy játék magja nem üres, akkor azt mondjuk, hogy a játék kiegyensúlyozott.

A játék ε-magja a preimputációk azon halmaza, amelyekre a többlet legfeljebb ε, azaz

$$\mathrm{core}_\varepsilon(v) := \{x \in I^*(v) \colon \max_{S \in \mathcal{A}^*} e_v(S,x) \leq \varepsilon\} .$$

Továbbá a játék szűkmagja a tartalmazásra nézve legkisebb ε-magja, amennyiben ilyen létezik. A szűkmag mindig jól definiált, ha minden koalíció megengedett. Korlátozott kooperációs játékok esetén azonban előfordulhat, hogy a legkisebb nem üres ε-mag nem létezik.

1. Tétel. *Legyen $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ egy játék. A játék szűkmagja akkor és csak akkor jól definiált, ha $\mathcal{A}^*$ tartalmaz egy kiegyensúlyozott koalícióhalmazt.*

Az $E_v(x) := [\ldots \geq e_v(S,x) \geq \ldots \colon S \in \mathcal{A}^*]$ vektort többlet vektornak nevezzük, ami az összes többletet tartalmazza nemnövekvő sorrendben. Két vektor $x, y \in \mathbb{R}^n$ közötti lexikografikus rendezésnek nevezzük a következőt: $x \leq_L y$, ha $x = y$ vagy ha létezik olyan k, hogy $x_k < y_k$ és minden $i < k$ esetén $x_i = y_i$. A nukleolusz az imputációk azon halmaza, ami lexikografikusan minimalizálja a többlet vektorokat az imputációk fölött, azaz

$$N(v) := \{x \in I(v) \colon E_v(x) \leq_L E_v(y),\ \forall y \in I(v)\} .$$

Továbbá a prenukleolusz a preimputációk azon halmaza, ami lexikografikusan minimalizálja a többlet vektorokat a preimputációk halmaza fölött, azaz

$$N^*(v) := \{x \in I^*(v) \colon E_v(x) \leq_L E_v(y),\ \forall y \in I^*(v)\} .$$

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$ a $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék prenukleoluszának egy karakterizációs halmaza, ha a $v' = v|_{\mathcal{S} \cup \{N\}}$ játékra $N^*(v) = N^*(v')$.

1.2. TU-játékok duálisa

Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék duálisa az a $v^* \colon 2^N \to \mathbb{R}$ játék, amire $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$ minden $S \in \mathcal{P}(N)$ esetén.

Jelölje $N \setminus \mathcal{A}$ az $\mathcal{A}$-beli koalíciók komplementerei halmazát, azaz $N \setminus \mathcal{A} := \{N \setminus S \colon S \in \mathcal{A}\}$. Egy korlátozott kooperációs $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék duálisa az a korlátozott kooperációs $v^* \colon 2^{N \setminus \mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ játék, amire $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$ minden $S \in N \setminus \mathcal{A}$ esetén. Jelölje továbbá anti-$I(v^*) := \{x \in I^*(v^*) \colon v^*(N \setminus \{i\}) \geq x(N \setminus \{i\}), \forall N \setminus \{i\} \in N \setminus \mathcal{A}\}$ a v^* duális játék anti-imputációinak halmazát. Vegyük észre, hogy $I(v) = $ anti-$I(v^*)$ minden $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ esetén.

Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ korlátozott kooperációs játék, egy $S \in N \setminus \mathcal{A}$ koalíció és egy $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektor. Az S koalíció x kifizetés vektorhoz tartozó hiánya a v^* játékban $f_{v^*}(S,x) := x(S) - v^*(S)$. Jelölje $F_{v^*}(x) := [\ldots \geq f_{v^*}(S,x) \geq \ldots : S \in N \setminus \mathcal{A}^*]$ a hiány vektort, ami az összes hiányt tartalmazza nemnövekvő sorrendben. A duális játék anti-nukleolusza az anti-imputációk azon halmaza, ami lexikografikusan minimalizálja a hiány vektorokat az anti-imputációk fölött, azaz

$$\text{anti-}N(v^*) := \{x \in \text{anti-}I(v^*) \colon F_{v^*}(x) \leq_L F_{v^*}(y),\ \forall y \in \text{anti-}I(v^*)\}\,.$$

Továbbá a duális játék anti-prenukleolusza a preimputációk azon halmaza, ami lexikografikusan minimalizálja a többlet vektorokat a preimputációk halmaza fölött, azaz

$$\text{anti-}N^*(v^*) := \{x \in I^*(v^*) \colon F_{v^*}(x) \leq_L F_{v^*}(y),\ \forall y \in I^*(v^*)\}\,.$$

A duális játék anti-magja a preimputációk azon halmaza, amire minden $N \setminus \mathcal{A}^*$-beli koalíció többlete nem pozitív, azaz

$$\text{anti-core}(v^*) := \{x \in I^*(v^*) \colon f_{v^*}(S,x) \leq 0,\ \forall S \in N \setminus \mathcal{A}^*\}\,.$$

Hasonlóan a duális játék anti-ε-magja a preimputációk azon halmaza, amire az $N \setminus \mathcal{A}^*$-beli koalíciók többlete legfeljebb ε, azaz

$$\text{anti-core}_\varepsilon(v^*) = \{x \in I^*(v^*) \colon \max_{S \in N \setminus \mathcal{A}^*} f_{v^*}(S,x) \leq \varepsilon\}.$$

Továbbá a duális játék szűk-anti-magja a legkisebb nemüres anti-ε-magja, ha létezik. Az 1. Tétel állítása itt is igaz lesz, azaz a duális játék szűk-anti-magja akkor és csak akkor jól definiált, ha $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt.

A primál és duális játékok megoldásainak a kapcsolatát a következő egyenlőségek mutatják:

$$\begin{aligned} N(v) &= \text{anti-}N(v^*)\,,\\ N^*(v) &= \text{anti-}N^*(v^*)\,,\\ \text{core}(v) &= \text{anti-}\,\text{core}(v^*)\,,\\ \text{least-core}(v) &= \text{least-anti-core}(v^*)\,. \end{aligned}$$

1.3. A lexikografikus közép algoritmus

A lexikografikus közép algoritmus Kopelowitz (1967); Maschler et al (1979) az egyik legismertebb algoritmus a (pre)nukleolusz kiszámítására. Ebben a szekcióban a lexikografikus közép algoritmus egy Huberman (1980) általi módosítását tárgyaljuk meg.

Tekintsük a $v \in \mathcal{G}^N$ játékot és a következő problémát:

$$\begin{aligned} & t \to \min \\ \text{s.t.} \quad & e(S,x) \le t, \quad S \in \mathcal{P}^*(N) \\ & x \in I^*(v) \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy (1)-nek van optimális megoldása. Jelölje t_1 (1) optimumát.

$$X_1 = \{x \in I^*(v) \colon e(S,x) \le t_1, \ \forall S \in \mathcal{P}^*(N)\}.$$

Jelölje W_1 (1) fix halmazát, azaz

$$W_1 = \{S \in \mathcal{P}^*(N) \colon \exists c_S \in \mathbb{R}, \text{ hogy } e(S,x) = c_S, \ \forall x \in X_1\}.$$

Legyen $k \ge 2$, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} & t \to \min \\ \text{s.t.} \quad & e(S,x) \le t, \quad S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r) \\ & x \in X_{k-1} \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

Könnyen látható, hogy a (2) feladatnak van optimális megoldása, és jelölje t_k a (2) feladat optimumát. Legyen továbbá

$$X_k = \{x \in X_{k-1} \colon e(S,x) \le t_k, \ \forall S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Jelölje W_k a (2) feladatban a fix halmazt, azaz legyen

$$W_k = \{S \in \mathcal{P}^*(N) \colon \exists c_S \in \mathbb{R}, \text{ hogy } e(S,x) = c_S, \ \forall x \in X_k\}.$$

Könnyen látható, hogy $t_k \ge t_{k+1}$, $X_k \supseteq X_{k+1}$ minden k-ra, és létezik k^*, hogy minden $l \ge k^*$-ra $X_l = X_{k^*}$.

Kopelowitz (1967); Maschler et al (1979) bizonyították, hogy a fenti eljárás, azaz a lexikografikus közép eljárás – pontosabban a fenti eljárás a lexikografikus közép eljárás egy Huberman (1980) általi módosítása, ami lényegi eltérést az eredeti eljáráshoz képest nem jelent – a prenukleoluszt adja eredményül, azaz Kopelowitz Kopelowitz (1967) és Maschler et al Maschler et al (1979) bizonyították a következő állítást:

2. Tétel. *$N^*(v) = X_{k^*}$ minden $v \in \mathcal{G}^N$ esetén.*

1.4. Huberman tétele

Huberman (1980) megmutatta, hogy az úgy nevezett lényeges koalíciók a nukleolusz egy karakterizációs halmazát adják kiegyensúlyozott játékok esetén. Mivel a nukleolusz és a prenukleolusz egybeesnek, ha a játék kiegyensúlyozott, a lényeges koalíciók a prenukleoluszt is karakterizálják. A következő definíció a lényeges koalíciók Huberman (1980) által használt definíciója.

3. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék. Az $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíció* lényeges*, ha vagy $|S| = 1$ vagy*

$$v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T).$$

Jelölje $\mathcal{E}_v$ a v játék lényeges koalíciói osztályát.

Huberman (1980) tétele a következő:

4. Tétel (Huberman (1980))**.** *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ kiegyensúlyozott játék. $\mathcal{E}_v$ a nukleolusz egy karakterizációs halmazát adja.*

Huberman tétele segítségével megmutatható, hogy bizonyos játékosztályok esetében a prenukleolusz a játékosok számában polynom időben számolható, mivel csak polynom sok lényeges koalícióval rendelkeznek.

Például a párosítási játékok esetén (lásd 5. Példa) megmutatható, hogy csak a szingletonok és a két elemű koalíciók lényegesek. Így, ha a mag nemüres, a prenukleolusz polinom időben számolható.

Hasonlóan a hozzárendelési játékoknál is csak a szingletonok és a vegyes párosok lényegesek. Ezen felül, hozzárendelési játékok esetén a mag sosem üres, így a prenukleolusz polynom időben számolható.

5. *Példa.* Párosítási játékok esetén a szingletonok értéke 0 és a párok értéke $v(\{i,j\}) = a_{i,j}$ minden $i \neq j \in N$ esetén. $v(S) = \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} a_{i,j}$ minden más $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalícióra.

Így minden $S \in \mathcal{P}^*$, $|S| > 2$ koalícióhoz létezik egy olyan $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{D}_S$ koalícióhalmaz, ami csak szingletonokból és párokból áll, hogy

$$v(S) = \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} a_{i,j} = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}^*} v(\{i,j\}) + \sum_{\{k\} \in \mathcal{B}^*} v(\{k\}),$$

tehát S nem lényeges.

Huberman tételét alkalmazva, ha v kiegyensúlyozott, akkor a szingletonok és a párok meghatározzák a prenukleoluszt.

Ebben a disszertációban különböző általánosításait és változatait bizonyítjuk Huberman tételének: 4. Tézis, 5. Tézis és 6. Tézis.

2. TU-játékok hasznosságfüggvényekkel

A prenukleolusz egy ismert változata a perkapita prenukleolusz (Grotte, 1970, 1972). A perkapita prenukleolusz abban különbözik a prenukleolusztól, hogy a többletek helyett úgy nevezett perkapita többletekkel számolunk. A $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék egy $S \in \mathcal{A}^*$ koalíciójának perkapita többlete az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektor mellett $\frac{e_v(S,x)}{|S|}$. Hasonlóan a perkapita többlet vektor $E_v^{pc}(x) := (\frac{e_v(S,x)}{|S|})_{S \in \mathcal{A}^*} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}^*|}$, ahol $E_v^{pc}(x)_i \geq E_v^{pc}(x)_j$, ha $i \leq j$. Ennek megfelelően a perkapita prenukleolusz definíciója a következő: $N_{pc}^*(v) = \{x \in I^*(v) \colon E_v^{pc}(x) \leq_L E_v^{pc}(y),\ \forall y \in I^*(v)\}$.

Solymosi (2019) a perkapita prenukleolusz egy további általánosítását vizsgálja, ahol az S halmaz számossága helyett a többlet $q(S)$-sel van leosztva, ahol q egy pozitív valós értékű függvény a megengedett koalíciók fölött. Az így bevezetett q-prenukleolusz fogalma a következő: $N_q^*(v) = \{x \in I^*(v) \colon E_v^q(x) \leq_L E_v^q(y),\ \forall y \in I^*(v)\}$, ahol a q-többlet vektor $E_v^q(x) := (\frac{e_v(S,x)}{q(S)})_{S \in \mathcal{A}^*}$, amiben $E_v^q(x)_i \geq E_v^q(x)_j$, ha $i \leq j$.

Részben ezen általánosítások által inspirálva tovább általánosítjuk a prenukleoluszt, úgy nevezett hasznosság függvények bevezetésével, amiket a többletekre alkalmazunk (Dornai és Pintér, 2024, 2005). Tekintsük a következő deiníciót:

6. Definíció. *Az* $\mathbf{u} \colon \mathcal{A}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *hasznosságfüggvény az* $(u_S)_{S \in \mathcal{A}^*}$ *függvények egy olyan családja, ahol* $u_S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton növő, folytonos és az értelmezési tartománya* $\mathbb{R}$*. Továbbá minden* $S, T \in \mathcal{A}^*$ *esetén* u_S *és* u_T *értékkészlete egybeesik. Jelölje* $R_{\mathbf{u}}$ *ezt a közös értékkészletet.*

A v játékban az $S \in \mathcal{A}^*$ koalíció $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektor melletti $\mathbf{u}$-többlete $u_S \circ e_v(S,x) = u_S(v(S) - x(S))$. Továbbá az $\mathbf{u}$-többlet vektor $E_v(x) := (u_S(e_v(S,x)))_{S \in \mathcal{A}^*} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}^*|}$, ahol $E_v(x)_i \geq E_v(x)_j$, ha $i \leq j$.

Most már definiálhatjuk az $\mathbf{u}$-prenukleoluszt, hasonlóan a perkapita prenukleoluszhoz.

7. Definíció. *Az* $\mathbf{u}$*-prenukleolusz a preimputációk azon halmaza, amik lexikografikusan minimalizálják az* $\mathbf{u}$*-többlet vektorokat a preimputációk halmaza felett, azaz*

$$N_{\mathbf{u}}^*(v) := \{x \in I^*(v) \colon E_v^{\mathbf{u}}(x) \leq_L E_v^{\mathbf{u}}(y)\ \forall y \in I^*(v)\}.$$

8. *Példa.* Néhány példa hasznosságfüggvényekre:

- Ha $\mathbf{u}$ az identitás függvény, akkor az $\mathbf{u}$-prenukleolusz megegyezik a prenukleolusszal.
- Ha minden $S \in \mathcal{A}^*$ esetén $u_S(t) = \frac{t}{|S|}$, akkor az $\mathbf{u}$-prenukleolusz megegyezik a perkapita prenukleolusszal.

- Definiálhatjuk az $\mathbf{u}$ függvényt úgy, mint egy c konstanssal való eltolást. Ekkor $u_S(t) = t + c$, és minden $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játékra az $\mathbf{u}$-prenukleolusz a játék egy v' eltoltjának a prenukleolusza, ahol $v'(S) = v(S) + c$ minden $S \in \mathcal{A}^*$ esetén és $v'(N) = v(N)$. Mivel a prenukleolusz invariáns az eltolásra az $\mathbf{u}$-prenukleolusz és a prenukleolusz egybeesnek.

- Fontos megjegyezni, hogy $\mathbf{u}$ nem feltétlenül lineáris függvények egy családja. Például $u_S(t) = \arctan(t)$ minden $S \in \mathcal{A}^*$ esetén, szintén lehet egy hasznosságfüggvény.

A következő definícióban általánosítjuk a magot(Shapley, 1955; Gillies, 1959):

9. Definíció. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény. A* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék* $\mathbf{u}$*-magja*

$$\mathbf{u}\text{-core}(v) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon x(N) = v(N) \text{ és } u_S \circ e_v(S,x) \leq 0, \forall S \in \mathcal{A}^*\right\}.$$

Vegyük észre, hogy ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$ és $\mathbf{u}$ az identitás függvény, akkor az $\mathbf{u}$-mag megegyezik a maggal.

A játék $\mathbf{u}$-ε-magja a preimputációk azon halmaza, amikre a maximális $\mathbf{u}$-többlet nem több, mint ε, azaz

$$\text{core}_\varepsilon^{\mathbf{u}}(v) := \{x \in I^*(v) \colon \max_{S \in \mathcal{A}^*} u_S \circ e_v(S,x) \leq \varepsilon\}.$$

Továbbá a játék $\mathbf{u}$-szűkmagja a legkisebb nemüres $\mathbf{u}$-ε-magja, ha ilyen létezik.

10. Tétel. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény. A játék* $\mathbf{u}$*-szűkmagja akkor és csak akkor jól definiált, ha* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert.*

3. Tézis pontok

A disszertáció fő eredményei, mint Tézisek (1-től 9-ig) vannak kiemelve.

3.1. A Bondareva–Shapley–tétel általánosítása TU-játékokra hasznosságfüggvényekkel

Jelölje $\mathfrak{B}$ az $\mathcal{A}$ halmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszereinek családját.

11. Definíció. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény. Azt mondjuk, hogy* v $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott, ha vagy* $R_{\mathbf{u}} \subseteq \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ *vagy* $0 \in R_{\mathbf{u}}$ *és*

$$\max_{\mathcal{B}\in\mathfrak{B}} \left(\lambda_N v(N) + \sum_{S\in\mathcal{B}\setminus\{N\}} \lambda_S \left(v(S) - \mathbf{u}_S^{-1}(0)\right) \right) \leq v(N), \tag{3}$$

ahol $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{B}}$ *a* $\mathcal{B}$ *kiegyensúlyozott koalíció rendszer kiegyensúlyozó súlyrendszere.*

Vegyük észre, hogy, ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$ és $\mathbf{u}$ az identitás függvény, akkor az $\mathbf{u}$-kiegyensúlyozottság megegyezik a kiegyensúlyozottsággal.

A következő tétel a Bondareva–Shapley–tétel (Bondareva, 1963; Shapley, 1967; Faigle, 1989) általánosítása játékokra hasznosságfüggvényekkel.

1. Tézis. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény.* $\mathbf{u}\text{-core}(v) \neq \emptyset$ *akkor és csak akkor ha* v $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott.*

Az 1. Tézis bizonyítása az erős dualitás tételen alapul. A bizonyítás részletei megtalálhatók a Dornai és Pintér (2024) cikkben.

3.2. Katsev és Yanovskaya tételei általánosítás az u-prenukleoluszra a prenukleolusz nemürességéről és számosságáról

Korlátozott kooperációs játékok esetén a prenukleolusz nem feltétlenül egy értékű. Ez igaz az $\mathbf{u}$-prenukleoluszra is. Megmutatjuk, hogy Katsev és Yanovskaya (2013) tételei a prenukleolusz nemürességéről és számosságáról általánosíthatóak az $\mathbf{u}$-prenukleoluszra.

A következő lemma a 2. Tézis bizonyításának egyik alapja.

12. Lemma. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és* $\mathbf{u^1}$, $\mathbf{u^2}$ *hasznosságfüggvények. Legyen* $X \subseteq I^*(v)$*, ekkor*

$$\min_{x\in X} \max_{S\in\mathcal{A}^*} u_S^1 \circ (v(S) - x(S))$$

akkor és csak akkor létezik, ha

$$\min_{x\in X} \max_{S\in\mathcal{A}^*} u_S^2 \circ (v(S) - x(S))$$

létezik.

2. Tézis. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény.* $\mathcal{A}^*$ *akkor és csak akkor kiegyensúlyozott koalícióhalmaz, ha a játék* $\mathbf{u}$*-prenukleolusza nemüres.*

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2024) cikkben találhatók.

Egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ koalíció családra jelölje $X(\mathcal{A})$ azt az $|\mathcal{A}|\times|N|$ dimenziós mátrixot, aminek a sorvektorai az $\mathcal{A}$-beli koalíciók karakterisztikus vektorai.

3. Tézis. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ kiegyensúlyozott koalícióhalmaz, és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. A játék $\mathbf{u}$-prenukleolusza akkor és csak akkor szingleton értékű, ha rank$(X(\mathcal{A})) = |N|$.*

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2024) cikkben találhatók.

3.3. Az u-lényeges koalíciók az u-prenukleolusz egy karakterizációs halmazát adják u-kiegyensúlyozott játékok esetén

Huberman tételének általánosításához "újra kell definiálnunk" a lényeges koalíciók fogalmát (3. Definíció).

13. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. Egy $S \in \mathcal{A}^*$ koalíció* $\mathbf{u}$-lényeges, *ha vagy $\mathcal{D}_S^{\mathcal{A}^*} = \emptyset$ vagy $\exists x \in \mathbf{u}$-least-core(v), hogy*

$$u_S \circ e_v(S,x) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S^{\mathcal{A}^*}} \sum_{T \in \mathcal{B}} u_T \circ e_v(T,x).$$

Jelölje $\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}$ a v játék $\mathbf{u}$-lényeges koalíciói osztályát.

Legyen $X_0 = I^*(v)$ és $W_0 = \emptyset$. $k \geq 1$ esetén tekintsük a következő problémát:

$$\begin{aligned} & t \to \min \\ \text{s.t.} \quad & u_S \circ e_v(S,x) \leq t, \quad S \in \mathcal{A}^* \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r) \\ & x \in X_{k-1} \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4}$$

Ha (4)-nek van optimális megoldása, akkor jelölje t_k (4) optimumát.
Legyen X_k a következő:

$$X_k = \{x \in X_{k-1} \colon u_S \circ e_v(S,x) \leq t_k,\ \forall S \in \mathcal{A}^* \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Továbbá legyen

$$W_k = \{S \in \mathcal{A}^* \colon \exists c_S \in \mathbb{R},\ \text{hogy } u_S \circ e_v(S,x) = c_S,\ \forall x \in X_k\}.$$

Tekintsük a következő optimalizálási problémát:

$$\begin{aligned} & t \to \min \\ \text{s.t.} \quad & u_S \circ e_v(S,x) \leq t, \quad S \in \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \\ & x \in I^*(v) \\ & t \in R_{\mathbf{u}} \end{aligned} \tag{5}$$

Jelölje t_1' (5) optimumát, és X_1' az optimális megoldások halmazát t kivételével, azaz $X_1' = \{x \in I^*(v)\colon u_S \circ e_v(S,x) \le t_1' \; \forall S \in \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}\}$.

A 14. Lemma sok más lemma és tétel alapja. Megmutatja, hogy tudunk egy felső becslést adni egy nem **u**-lényeges koalíció **u**-többletére csupán **u**-lényeges koalíciók **u**-többleteinek összegével.

14. Lemma. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és egy $S \in \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}$ nem* **u***-lényeges koalíció. Ekkor minden $x \in$* **u**-least-core(v) *vektorhoz létezik $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S^{\mathcal{A}^*}$ koalícióhalmaz, amire $u_S \circ e_v(S,x) \le \sum_{T \in \mathcal{B}^*} u_T \circ e_v(T,x)$ és $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}$.*

Vezessük be a következő jelölést: egy $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$ koalícióhalmazra és $t \in \mathbb{R}$ konstansra legyen $X(\mathcal{S},t) := \{x \in I^*(v)\colon u_S \circ e_v(S,x) \le t, \forall S \in \mathcal{S}\}$.

A 15. és 16. Lemma rávilágít arra, hogy az $X(\mathcal{A}^*,t)$ és $X(\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}},t)$ halmazok néhány jelentős geometriai tulajdonsága megmarad az identitás hasznosságfüggvényhez viszonyítva.

15. Lemma. *Adott egy* **u** *hasznosságfüggvény és egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$* **u***-kiegyensúlyozott játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert. Ekkor minden $t_1 \le t$ esetén az $X(\mathcal{A}^*,t)$ és $X(\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}},t)$ halmazok nemüresek, konvexek és zártak.*

16. Lemma. *Adott egy* **u** *hasznosságfüggvény, egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektorok és egy $S \in \mathcal{A}$ koalíció. Ha $u_S \circ e_v(S,x_1) < u_S \circ e_v(S,x_2)$, akkor minden $\lambda \in (0,1)$ esetén*

$$u_S \circ e_v(S,x_1) < u_S \circ e_v(S,\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < u_S \circ e_v(S,x_2).$$

A következő állítás kimondja, hogy az **u**-lényeges koalíciók karakterizálják az **u**-szűkmagot **u**-kiegyensúlyozott játékok esetén.

17. Állítás. *Adott egy* **u** *hasznosságfüggvény és egy* **u***-kiegyensúlyozott $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt. Ekkor $t_1 = t_1'$ és $X_1 = X_1'$.*

A következő tétel Huberman (1980) tételének (Huberman (1980), 420. oldal, 7. tétel) az általánosítása.

4. Tézis. *Tekintsünk egy* **u***-kiegyensúlyozott $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játékot, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert.*

$$Y_1 = \{x \in I^*(v)\colon u_S \circ e_v(S,x) \le t_1, \; \forall S \in \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}\},$$

és minden $k \ge 2$ esetén jelölje Y_k a következőt:

$$Y_k = \{x \in X_{k-1} \colon u_S \circ e_v(S,x) \le t_k,\ \forall S \in \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\},$$

ahol t_k (4) optimuma, amennyiben létezik és $-\infty$ különben. Ekkor $X_k = Y_k$ minden $k \ge 1$ esetén.

Más szavakkal a 4. Tézis kimondja, hogy az **u**-lényeges koalíciók az **u**-prenukleolusz egy karakterizációs halmazát adják **u**-kiegyensúlyozott játékok esetén.

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2024) és Dornai és Pintér (2005) cikkekben találhatóak.

A szűken kényeges koalíciók az **u**-lényeges koalíciók egy részosztályát képezik, ahol a hasznosságfüggvény egy $(-t_1)$-gyel való eltolást alkalmaz minden nem triviális koalícióra. A Dornai és Pintér (2022) cikkben megmutatjuk, hogy a szűken lényeges koalíciók karakterizálják a prenukleoluszt nem kiegyensúlyozott játékok esetén is. Ez az eredmény lehetővé teszi, hogy a lényeges koalíciók egy változatát alkalmazni tudjuk nem kiegyensúlyozott játékokra is.

3.4. A duálisan u-lényeges koalíciók karakterizálják az u-prenukleoluszt u-kiegyensúlyozott játékok esetén

A hasznosságfüggvények alkalmazásának ötlete kiterjeszthető a játék duálisára is. Mivel a duális játék megengedett koalícióinak halmaza a primál játék megengedett koalícióinak komplementereiből áll, a duális játék **u**-hiányait a koalíciók komplementereihez tartozó u_S függvények segítségével definiáljuk.

18. Definíció. *Az* **u** *hasznosságfüggvénnyel rendelkező $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék diálisa az a $v^* \in \mathcal{G}^{N,N\setminus\mathcal{A}}$ játék, aminek a hasznosságfüggvénye $\mathbf{u}^* := [u_{N\setminus S}]_{S\in N\setminus\mathcal{A}^*}$.*

Vegyük észre, hogy a hasznosságfüggvénnyel rendelkező játék duálisának duálisa az eredeti primál játék ugyanazzal a hasznosságfüggvénnyel. Ez a következő azonosságokból látható: $v^{**} = v$ és $\mathbf{u}^{**} = ([u_{N\setminus S}]_{S\in N\setminus\mathcal{A}^*})^* = [u_{N\setminus(N\setminus S)}]_{S\in N\setminus(N\setminus\mathcal{A}^*)} = [u_S]_{S\in\mathcal{A}^*}$. Így a duál operáció kétszeri alkalmazásával nem csak az eredeti játékot, hanem az eredeti hasznosságfüggvényt is visszakapjuk.

19. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék és egy* **u** *hasznosságfüggvény. Ekkor a v^* duális játékban az $S \in N \setminus \mathcal{A}$ koalíció $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés vektor melletti $\mathbf{u}^*$-hiánya $u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x)$, és az $\mathbf{u}^*$-hiány vektor $F_{v^*}^{\mathbf{u}^*}(x) := [\ldots \ge u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) \ge \ldots : S \in N \setminus \mathcal{A}^*]$.*

Az $\mathbf{u}^*$-anti-nukleolusz és az $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleolusz az $\mathbf{u}^*$-hiány vektorok segítségével van definiálva.

20. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. Ekkor a v^* játék $\mathbf{u}^*$-anti-nukleolusza az $\mathbf{u}^*$-anti-imputációk azon halmaza, amik lexikografikusan minimalizálják az $\mathbf{u}^*$-hiány vektorokat az $\mathbf{u}^*$-anti-imputációk halmaza fölött, azaz*

$$\text{anti-}N_{\mathbf{u}^*}(v^*) = \left\{x \in \mathbf{u}^*\text{-anti-}I(v^*) \colon F_{v^*}^{\mathbf{u}^*}(x) \leq_L F_{v^*}^{\mathbf{u}^*}(y),\ \forall y \in \mathbf{u}^*\text{-anti-}I(v^*)\right\},$$

ahol $\mathbf{u}^*\text{-anti-}I(v^*) := \{x \in I^*(v^*) \colon u_{\{i\}} \circ f_{v^*}(N \setminus \{i\}, x) \leq 0,\ \forall N \setminus \{i\} \in N \setminus \mathcal{A}^*\}$.

Továbbá a v^* játék $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleolusza a preimputációk azon halmaza, amik lecikografikusan minimalizálják az $\mathbf{u}^*$-hiány vektorokat a preimputációk halmaza fölött, azaz

$$\text{anti-}N^*_{\mathbf{u}^*}(v^*) = \left\{x \in I^*(v^*) \colon F_{v^*}^{\mathbf{u}^*}(x) \leq_L F_{v^*}^{\mathbf{u}^*}(y),\ \forall y \in I^*(v^*)\right\}.$$

Hasonlóan a duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-magja is az $\mathbf{u}^*$-hiányok segítségével van definiálva:

21. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. Ekkor a v^* duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-magja a preimputációk azon halmaza, amikre az $\mathbf{u}^*$-hiányok nem pozitívak:*

$$\mathbf{u}^*\text{-anti-core}(v^*) = \left\{x \in I^*(v^*) \colon u_{N \setminus S} \circ f_{v^*}(S, x) \leq 0,\ \forall S \in N \setminus \mathcal{A}^*\right\}.$$

Ha egy játék $\mathbf{u}^*$-anti-magja nem üres, akkor azt mondjuk, hogy a játék $\mathbf{u}^*$-anti-kiegyensúlyozott.

Hasonló azonosságok igazak hasznosságfüggvénnyel rendelkező játékokra, mint a klasszikus játékokra:

22. Tétel. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. Ekkor a következő egyenlőségek igazak:*

1. $N_{\mathbf{u}}(v) = \text{anti-}N_{\mathbf{u}^*}(v^*)$,
2. $N^*_{\mathbf{u}}(v) = \text{anti-}N^*_{\mathbf{u}^*}(v^*)$,
3. $\mathbf{u}\text{-core}(v) = \mathbf{u}^*\text{-anti-core}(v^*)$,
4. $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) = \mathbf{u}^*\text{-least-anti-core}(v^*)$.

Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvénnyel. A módosított lexikografikus közép algoritmus a v^* duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleoluszának kiszámítására a következő optimalizálási feladatok iteratív megoldásából áll:

$$
\begin{aligned}
&t \to \min \\
\text{s.t.}\quad &u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) \le t, \quad S \in (N \setminus \mathcal{A}^*) \setminus (\cup_{r=0}^{k-1} W_r^d) \\
&x \in X_{k-1}^d \\
&t \in R_{\mathbf{u}},
\end{aligned} \tag{6}
$$

ahol $X_0^d := I^*(v^*)$ és $W_0^d := \emptyset$, továbbá $k \ge 1$ t_k^d jelöli (6) optimumát, ha létezik, és

$$
\begin{aligned}
X_k^d &:= \{x \in X_{k-1}^d \colon u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) \le t_k^d,\ \forall S \in (N \setminus \mathcal{A}^*) \setminus (\cup_{r=0}^{k-1} W_r^d)\}\,, \\
W_k^d &:= \{S \in N \setminus \mathcal{A}^* \colon \exists c_S \in \mathbb{R},\ \text{hogy}\ u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) = c_S,\ \forall x \in X_k^d\}\,.
\end{aligned}
$$

Könnyen látható, hogy $t_k^d \ge t_{k+1}^d$ és $X_k^d \supseteq X_{k+1}^d$ minden $k \in \mathbb{N}_+$ esetén, és, hogy létezik olyan k^*, hogy minden $l \ge k^*$ esetén $X_{k^*}^d = X_l^d$.Mivel minden $x \in I^*(v), S \in \mathcal{A}^*$ esetén $u_S \circ e_v(S,x) = u_S \circ f_{v^*}(N \setminus S, x)$, $t_i^d = t_i$ és $X_i^d = X_i$ minden $i \in \mathbb{N}_+$ esetén. Továbbá a 22. Tétel alapján tudjuk, hogy a primál játék $\mathbf{u}$-prenukleolusza megegyezik a duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleoluszával. Így alkalmazhatjuk Maschler et al (1992) eredményét, azaz kimondhatjuk, hogy $X_{k^*}^d =$ anti- $N_{\mathbf{u}^*}^*(v^*)$.

23. Definíció. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert és egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény. Egy $S \in N \setminus \mathcal{A}^*$ koalíció $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges, ha $\mathcal{D}_S^{N\setminus\mathcal{A}^*} = \emptyset$ vagy, ha létezik $x \in \mathbf{u}^*$*-least-anti-core(v^*), *amire*

$$
u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S^{N\setminus\mathcal{A}^*}} \sum_{T \in \mathcal{B}} u_{N\setminus T} \circ f_{v^*}(T,x)\,.
$$

Az $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges koalíciók komplementeriből álló halmazt a v játék duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciói osztályának nevezzük. Jelölje $\mathcal{E}_{v^*}^{a-\mathbf{u}^*}$ az $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges koalíciók osztályát, és $\mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}$ a v játék duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciói osztályát.

Más szavakkal, a primál játék duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciói a duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges koalícióinak a komplementereiből áll.

A következő lemma az 5. és a 6. Tézis bizonyításának egyik alapja.

24. Lemma. *Adott egy $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ játék, ahol $\mathcal{A}^*$ tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert, egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény és egy $S \in N \setminus \mathcal{A}^*$ nem $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges koalíció. Ekkor minden $x \in \mathbf{u}^*$*-least-anti-core(v^*) *kifizetés vektorhoz létezik egy $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S^{N\setminus\mathcal{A}^*}$ koalícióhalmaz, hogy $u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S,x) \le \sum_{T \in \mathcal{B}^*} u_{N\setminus T} \circ f_{v^*}(T,x)$ és $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_{v^*}^{a-\mathbf{u}^*}$.*

A következő állítás kimondja, hogy az $\mathbf{u}$-anti-lényeges koalíciók karakterizálják a duális játék $\mathbf{u}$-anti-szűkmagját.

25. Állítás. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény és egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert. Legyen* $t_1^{d'} := \min\{t\colon X^d(\mathcal{E}_{v^*}^{a-\mathbf{u}^*}, t) \neq \emptyset\}$ *és* $X_1^{d'} := X^d(N \setminus \mathcal{A}^*, t_1^{d'})$. *Ekkor* $t_1^d = t_1^{d'}$ *és* $X_1^d = X_1^{d'}$.

A következő tétel kimondja, hogy az $\mathbf{u}^*$-anti-lényeges koalíciók karakterizálják a v^* duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleoluszát, ha v $\mathbf{u}$-kiegyensúlyozott.

5. Tézis. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény és egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert. Továbbá minden* $k \geq 1$ *esetén legyen*

$$Y_k^d := \{x \in X_{k-1}^d \colon u_{N\setminus S} \circ f_{v^*}(S, x) \leq t_k^d \ \forall S \in \mathcal{E}_{v^*}^{a-\mathbf{u}^*}\}\,.$$

Ekkor $X_k^d = Y_k^d$ *minden* $k \geq 1$ *esetén.*
Más szavakkal v^* $\mathbf{u}^*$*-anti-lényeges koalíciói karakterizálják* v^* $\mathbf{u}^*$*-anti-prenukleoluszát.*

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2025) cikkben találhatók.

A következő tétel a primál játék $\mathbf{u}$-prenukleolusza és a duális játék $\mathbf{u}^*$-anti-prenukleolusza karakterizációs halmazai közötti kapcsolatra világít rá.

26. Tétel. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény. Egy koalíció halmaz akkor és csak akkor karakterizálja a* v *játék* $\mathbf{u}$*-prenukleoluszát, ha a halmazbeli koalíciók komplementereiből álló halmaz karakterizálja a* v^* *játék* $\mathbf{u}^*$*-anti-prenukleoluszát.*

A következő Tézis az 5. Tézis és a 26. Tétel direkt következménye.

6. Tézis. *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalíció rendszert és egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, úgy, hogy* v $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott. Ekkor a duálisan* $\mathbf{u}$*-lényeges koalíciók karakterizálják a* v *játék* $\mathbf{u}$*-prenukleoluszát.*

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2025) cikkben találhatóak.

3.5. Granot et al (1998) egy tételének általánosítása a prenukleolusz karakterizációs halmazairól áll az u-prenukleoluszra korlátozott kooperációs játékok esetén is

Először megadunk egy általánosítását a Granot et al (1998) 362. oldalán található 2.3 Tételnek. Korlátozott kooperációs játékok esetén az eredeti feltételek nem garantálják a vizsgált prenukleoluszok egyenlőségét, csak a következőt:

7. Tézis. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék és egy* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *koalícióhalmaz. Legyen a* $v' \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{F}\cup\{N,\emptyset\}}$ *játék* $v' = v|_{\mathcal{F}\cup\{N,\emptyset\}}$. *Ha* $x \in N^*_{\mathbf{u}}(v')$ *és minden* $S \in \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{F}$ *esetén létezik* $\mathcal{F}_{S,x} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{S,x} \neq \emptyset$, *hogy*

1. $u_S \circ e_v(S,x) \leq u_T \circ e_v(T,x)$ *minden* $T \in \mathcal{F}_{S,x}$ *esetén,*

2. $\chi_S \in \mathrm{Lin}\{\chi_T \colon T \in \mathcal{F}_{S,x} \cup \{N\}\}$,

akkor $x \in N^*_{\mathbf{u}}(v)$.

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2025) cikkben találhatók.

A fenti tétel bizonyításához szükségünk van Kohlberg tételének (Kohlberg, 1971) az általánosítására.

A Maschler et al (1992) cikk 102-104. oldalán található 7.2 Tételben Maschler et al (1992) bizonyították egy általánosítását Kohlberg tételének az általános prenukleoluszra. Mivel az $\mathbf{u}$-prenukleolusz egy speciális eseta az általános prenukleolusznak Kohlberg tételének a következő általánosítása Maschler et al (1992) eredményének a következménye.

27. Tétel (Kohlberg tételének általánosítása)**.** *Adott egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény és egy* $x \in I^*(v)$ *kifizetés vektor.* x *akkor és csak akkor eleme az* $\mathbf{u}$*-prenukleolusznak* ($x \in N^*_{\mathbf{u}}(v)$)*, ha minden olyan* $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}(\alpha, x)$ *esetén, ahol* $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}(\alpha, x) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}(\alpha, x)$ *kiegyensúlyozott koalícióhalmaz, ahol* $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}(\alpha, x^*) := \{S \in \mathcal{A}^* \colon u_S \circ e_v(S, x^*) \geq \alpha\}$.

Vegyük észre, hogy a 7. Tézis azt mondja, hogy a megfelelő feltételek teljesülése esetén $N^*_{\mathbf{u}}(v') \subseteq N^*_{\mathbf{u}}(v)$. Így, ha $N^*_{\mathbf{u}}(v)$ szingleton, és $N^*_{\mathbf{u}}(v')$ tartalmaz legalább egy kifizetés vektort, akkor a fentiekből az is következik, hogy a két prenukleolusz egyenlő. Korlátozott kooperációs játékok esetén azonban az $\mathbf{u}$-prenukleolusz nem feltétlenül szingleton értékű. Emiatt korlátozott kooperációs játékoknál szükségünk van egy extra feltételre $N^*_{\mathbf{u}}(v') = N^*_{\mathbf{u}}(v)$ teljesüléséhez.

8. Tézis. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott játék és egy* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *koalícióhalmaz. Legyen a* $v' \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{F}\cup\{N,\emptyset\}}$ *játék a következő:* $v' = v|_{\mathcal{F}\cup\{N,\emptyset\}}$. *Legyen* $X \subseteq I^*(v)$ *olyan, hogy* $N^*_{\mathbf{u}}(v), N^*_{\mathbf{u}}(v') \subseteq X$. *Ha minden* $x \in X$, $S \in \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{F}$ *esetén létezik* $\mathcal{F}_{S,x} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{S,x} \neq \emptyset$, *hogy*

1. $u_S \circ e_v(S,x) \leq u_T \circ e_v(T,x)$ *minden* $T \in \mathcal{F}_{S,x}$ *esetén,*

2. $\chi_S \in \mathrm{Lin}\{\chi_T \colon T \in \mathcal{F}_{S,x} \cup \{N\}\}$,

3. *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén, ha* $\mathcal{D}^{\mathcal{A}^*}_{\mathbf{u}}(x, \alpha)$ *kiegyensúlyozott, akkor* $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_{\mathbf{u}}(x, \alpha)$ *is kiegyensúlyozott,*

akkor $\mathcal{F}$ $N^*_{\mathbf{u}}(v)$ egy karakterizációs halmaza.

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2025) cikkben találhatók.

3.6. Az u-lényeges és a duálisan u-lényeges koalíciók halmazainak metszete karakterizálja az u-prenukleoluszt, ha az u-szűkmag valódi részhalmaza az u-magnak

Adott egy $\mathbf{u}$ hasznosságfüggvény és egy $\mathbf{u}$-kiegyensúlyozott v játék. Ekkor minden $S \in \mathcal{A}^* \setminus (\mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}})$ koalícióra S vagy nem $\mathbf{u}$-lényeges vagy nem duálisan $\mathbf{u}$-lényeges.

1. eset: Ha S nem $\mathbf{u}$-lényeges, akkor a 14. Lemma alapján minden $x \in \mathbf{u}$-least-core(v) kifizetés vektohoz létezik egy $\mathcal{B}_S \in \mathcal{D}_S^{\mathcal{A}^*}$, $\mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}$ koalícióhalmaz, hogy

$$u_S \circ e_v(S,x) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}_S} u_T \circ e_v(T,x)\,.$$

2. eset: Ha S $\mathbf{u}$-lényeges, akkor nem duálisan $\mathbf{u}$-lényeges, tehát minden $x \in \mathbf{u}$-least-core(v) kifizetés vektorra

$$\begin{aligned} u_S \circ e_v(S,x) &= u_S \circ (v(S) - x(S)) \\ = u_S \circ (v(N) - v^*(N \setminus S) &- (x(N) - x(N \setminus S))) \\ = u_S \circ (x(N \setminus S) - v^*(N \setminus S)) &= u_S \circ f_{v^*}(N \setminus S, x)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

és a 24. Lemma alapján létezik olyan $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_{N\setminus S}^{N\setminus\mathcal{A}^*}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}_v^{a-\mathbf{u}^*}$ koalícióhalmaz, hogy $u_S \circ f_{v^*}(N \setminus S, x) \leq \sum_{T\in\mathcal{B}} u_{N\setminus T} \circ f_{v^*}(T,x)$. Tehát

$$\begin{aligned} u_S \circ f_{v^*}(N \setminus S, x) &\leq \sum_{T\in\mathcal{B}} u_{N\setminus T} \circ f_{v^*}(T,x) \\ = \sum_{T\in\mathcal{B}} u_{N\setminus T} \circ e_v(N \setminus T, x) &= \sum_{T \in N\setminus\mathcal{B}} u_T \circ e_v(T,x). \end{aligned} \tag{8}$$

Legyen $\mathcal{B}_S := N \setminus \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}$. Ekkor (7) és (8) alapján

$$u_S \circ e_v(S,x) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}_S} u_T \circ e_v(T,x)\,.$$

Egy adott $x \in \mathbf{u}$-least-core(v) esetén minden $S \in \mathcal{A}^* \setminus (\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}})$ koalícióhoz rögzítsünk le egy $\mathcal{B}_S$ partíciót (1. eset) vagy anti-partíciót (2. eset). Legyen a $\Gamma_{v,\mathbf{u}}(x)$ irányított gráf a következő: a gráf csúcsai legyenek a $\mathcal{A}^* \setminus (\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}})$ koalícióhalmazbeli koalíciók, és $S, S' \in \mathcal{A}^* \setminus (\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}})$ esetén akkor megy egy irányított él S-ből S'-be, ha $S' \in \mathcal{B}_S \setminus (\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}})$.

28. *Megjegyzés.* Érdemes megjegyeznünk, hogy mivel a gráf definíciójához használt partíciók és anti-partíciók többféleképpen is kiválaszthatók, a $\Gamma_{v,\mathbf{u}}(x)$ gráf többféleképpen is definiálható. Ez azonban a további analízisünk szempontjából lényegtelen, mivel nekünk elegendő egyetlen ilyen gráf létezése, nincs szükségünk az összes vizsgálatára.

A következő lemma kimondja, hogy a fent definiált gráf aciklikus, ha $\mathbf{u}\text{-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-least-core}(v)$. A gráf aciklikussága előfeltétele a további lemmák, állítások és tételek bizonyításának.

29. Lemma. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és egy* $x \in \mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ *kifizetés vektor. Ha* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-core}(v)$*, akkor* $\Gamma_{v,\mathbf{u}}(x)$ *aciklikus.*

A következő lemma megmutatja, hogy a 8. Tézis *3.* pontjában található feltétel teljesül az $\mathbf{u}$-lényeges és a duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciók metszetére, ha $\mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ valódi részhalmaza $\mathbf{u}\text{-core}(v)$-nek.

30. Lemma. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és egy* $x \in \mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ *kifizetés vektor. Ha* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-core}(v)$*, akkor* $\mathcal{A}^*$ *kiegyensúlyozottsága esetén* $\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}$ *is kiegyensúlyozott, továbbá minden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén, ha* $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{A}^*}(\alpha, x)$ *kiegyensúlyozott, akkor* $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}}(\alpha, x)$ *is kiegyensúlyozott.*

A következő lemma megmutatja, hogy a 8. Tézis *1.* és *2.* pontjai teljesülnek az $\mathbf{u}$-lényeges és a duálisan $\mathbf{u}$-lényeges koalíciók metszetére, ha $\mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ valódi részhalmaza $\mathbf{u}\text{-core}(v)$-nek.

31. Lemma. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és egy* $S \in \mathcal{A}^* \setminus (\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}})$ *koalíció. Ha* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-core}(v)$*, akkor minden* $x \in \mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ *kifizetés vektorhoz létezik egy olyan* $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}$ *koalícióhalmaz, hogy* $u_S \circ e_v(S, x) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}^*} u_T \circ e_v(T, x)$ *és* $\chi_S \in \mathrm{Lin}\{\chi_T \colon \mathcal{B}^* \cup \{N\}\}$*.*

Hogy alkalmazni tudjuk a 8. Tézist annak a bizonyításához, hogy $\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}$ karakterizálja az $\mathbf{u}$-prenukleoluszt, találnunk kell egy olyan $X \subseteq I^*(v)$ kifizetés vektor halmazt, amire $N_{\mathbf{u}}^*(v), N_{\mathbf{u}}^*(v') \subseteq X$, ahol $v' \in \mathcal{G}^{N, \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}}$ a következő játék: $v' = v|_{\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}}$.

Tudjuk, hogy $N_{\mathbf{u}}^*(v) \subseteq \mathbf{u}\text{-least-core}(v)$ és $N_{\mathbf{u}}^*(v') \subseteq \mathbf{u}\text{-least-core}(v')$. A következő állítás kimondja, hogy $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) = \mathbf{u}\text{-least-core}(v')$. Így alkalmazni tudjuk a 8. Tézist $X = \mathbf{u}\text{-least-core}(v) = \mathbf{u}\text{-least-core}(v')$ használatával.

32. Állítás. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény, egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt és a* $v' = v|_{\mathcal{E}_v^{\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}}}$ *játék. Ha* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-core}(v)$, *akkor* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) = \mathbf{u}\text{-least-core}(v')$.

9. Tézis. *Adott egy* $\mathbf{u}$ *hasznosságfüggvény és egy* $\mathbf{u}$*-kiegyensúlyozott* $v \in \mathcal{G}^{N,\mathcal{A}}$ *játék, ahol* $\mathcal{A}^*$ *tartalmaz kiegyensúlyozott koalícióhalmazt. Ha* $\mathbf{u}\text{-least-core}(v) \neq \mathbf{u}\text{-core}(v)$, *akkor* $\mathcal{E}_v^{d-\mathbf{u}} \cap \mathcal{E}_v^{\mathbf{u}}$ *az* $\mathbf{u}$*-prenukleolusz egy karakterizációs halmaza.*

A bizonyítás részletei a Dornai és Pintér (2025) cikkben találhatók.

4. Publikációs lista

1. Dornai Zs, Pintér M (2005) Corrigendum to “TU-games with utilities: the prenucleolus and its characterization set”. International Journal of Game Theory 54(29), 10.1007/s00182-025-00943-5

2. Dornai Zs, Pintér M (2025) Characterizations of the u-prenucleolus by dually-u-essential coalitions. Annals of Operations Research 349:1575-1607

3. Dornai Zs., Pintér M (2024) TU-games with utilities: the prenucleolus and its characterization set. International Journal of Game Theory 53:1005–1032

4. Dornai Zs, Pintér M (2022) Lényeges koalíciók nem kiegyensúlyozott játékok esetén. Alkalmazott Matematikai Lapok 39:59–75

Hivatkozások

Aumann RJ, Maschler M (1964) Advances in Game Theory, Princeton University Press, chap The Bargaining Set for Cooperative Games, pp 443–476. No. 52 in Annals of Mathematical Studies

Bondareva ON (1963) Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games (in Russian). Problemy Kybernetiki 10:119–139

Davis M, Maschler M (1965) The kernel of a cooperative game. Naval Research Logistics Quarterly 12(3):223–259

Derks JJM, Haller HH (1999) The nucleolus of a matrix game and other nucleoli. International Journal of Game Theory 28(2):173–187

Dornai Z, Pintér M (2022) Lényeges koalíciók nem kiegyensúlyozott játékok esetén. Alkalmazott Matematikai Lapok 39:59–75

Dornai Z, Pintér M (2024) TU-games with utilities: the prenucleolus and its characterization set. International Journal of Game Theory 53:1005–1032

Dornai Z, Pintér M (2025) Characterizations of the u-prenucleolus by dually-u-essential coalitions. Annals of Operations Research 349:1575–1607

Dornai Z, Pintér M (2005) Corrigendum to "TU-games with utilities: the prenucleolus and its characterization set". International Journal of Game Theory 54(29), DOI 10.1007/s00182-025-00943-5

Faigle U (1989) Cores of games with restricted cooperation. Zeitschrift für Operations Research 33(6):405–422

Gillies DB (1959) Solutions to general non-zero-sum games, Contributions to the Theory of Games, vol IV. Princeton University Press

Granot D, Granot F, Zhu WR (1998) Characterization sets for the nucleolus. International Journal of Game Theory 27(27):359–374

Grotte JH (1970) Computation of and observations on the nucleolus, the normalized nucleolus and the central games. Master's thesis, Cornell University, Ithaca

Grotte JH (1972) Observations on the nucleolus and the central game. International Journal of Game Theory 1(1):173–177

Huberman G (1980) The nucleolus and the essential coalitions. In: Bensoussan A, Lions J (eds) Analysis and Optimization of Systems, Proceedings of the Fourth International Conference, Versailles, Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol 28, pp 416–422

Katsev I, Yanovskaya E (2013) The prenucleolus for games with restricted cooperation. Mathematical Social Sciences 66:56–65

Kohlberg E (1971) On the nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics 20:62–66

Kopelowitz A (1967) Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games, rM-31, Mathematics Department, The Hebrew University of Jerusalem

Maschler M, Peleg B, Shapley LS (1979) Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. Mathematics of Operations Research 4(4):303–338

Maschler M, Potters JAM, Tijs SH (1992) The general nucleolus and the reduced game property. International Journal of Game Theory 21:85–106

Potters JAM, Tijs SH (1992) The nucleolus of a matrix game and other nucleoli. Mathematics of Operations Research 17(1):164–174

Schmeidler D (1969) The Nucleolus of a Characteristic Function Game. SIAM Journal on Applied Mathematics 17:1163–1170

Shapley LS (1953) A value for n-person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds) Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, vol 28, Princeton University Press, Princeton, pp 307–317

Shapley LS (1955) Markets as Cooperative Games. Tech. rep., Rand Corporation

Shapley LS (1967) On Balanced Sets and Cores. Naval Research Logistics Quarterly 14:453–460

Solymosi T (2019) Weighted nucleoli and dually essential coalitions. International Journal of Game Theory 48:1087–1109

Solymosi T, Sziklai B (2016) Characterization sets for the nucleolus in balanced games. Operation Research Letters 44(4):520–524