

Magic and Complexity in Quantum Circuits
PhD téziszfüzet

SZOMBATHY DOMINIK
Témavezető: Dr. Z rand Gergely Attila

Budapesti Műszaki  s Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Fizika Tanszék

2025

Kutatási háttér

A kvantumszámítógépek a kvantumállapotok alapvető fizikai tulajdonságait kihasználva képesek olyan feladatokat végrehajtani, amelyek klasszikus számítógépeken reálisan nem megoldhatóak. A kvantum szuperpozíció és az interferencia lehetővé teszi, hogy a számítás során több lehetséges kimenetel „párhuzamosan” járjon hozzá a végeredményhez, miközben az N -qubites Hilbert-tér dimenziója 2^N -nel nő.

Ugyanakkor a számítási gyorsítás nem generikus: a kvantumoperációk önmagukban nem garantálnak kvantumelőnyt, hanem csak olyan algoritmusokban jelenik meg, amelyek speciális, klasszikus eszközökkel nem hozzáférhető számítási erőforrásokat használnak ki. A kvantumszámítási teljesítmény fizikai és matematikai forrásának azonosítása ezért a kvantuminformáció-tudomány egyik központi problémája.

A klasszikusan hatékonyan szimulálható és az univerzális kvantumszámítás közötti éles határra a Gottesman–Knill-tétel világít rá. A kizárólag Clifford-műveletekből álló kvantumáramkörök valódi kvantumjelenségeket – köztük nagyléptékű többelümü összefonódást – képesek generálni, mégis hatékonyan szimulálhatók klasszikus számítógépeken. Ez megmutatja, hogy az összefonódás önmagában nem írja le teljesen a kvantumáramkörök számítási potenciálját. Az univerzális kvantumszámításhoz a Clifford-kereten túlmutató, nem-Clifford műveletekre (például a T-kapura) is szükség van.

Erőforráselméleti szempontból ezt a különbséget a kvantum magic, vagy nem-stabilizátorosság fogalma ragadja meg, amely a kvantumállapot eltérését méri a stabilizátor állapotoktól. Legújabb eredményeink igazolták, hogy a varázslat és az összefonódás egymástól aszimptotikusan független erőforrások. Az összefonódás jelenléte azonban önmagában nem jelent számítási univerzalitást, mivel erősen összefonódott Clifford-áramkörök is hatékonyan szimulálhatók a Gottesman–Knill-tétel alapján. Az univerzális kvantumszámítás elérése tehát a nem-stabilizátor erőforrások kihasználásában rejlik. Ebből a nézőpontból a magic az a döntő erőforrás, amely lehetővé teszi a kvantumáramkörök számára, hogy túllépjenek a Clifford-dinamika korlátain, és univerzális számítási teljesítményt érjenek el.

A valós kvantumprocesszorok olyan nyílt rendszerek, amelyek környezeti zajnak és disszipációnak vannak kitéve. Míg az összefonódás dekoherencia alatti viselkedését széles körben vizsgálták, a magic viselkedése nyílt kvantumrendszerekben jóval kevésbé feltárt terület. Ennek oka, hogy a valódi magic-mértékek számítása néhány qubit felett már számításlag igen nehéz. Alapvető fontosságú tehát megérteni, hogy a disszipatív folyamatok miként befolyásolják a magic-et, illetve hogyan viselkednek a stabilizátor Rényi entrópia-szerű mennyiségek, hogy reális kvantum-

eszközök erőforrásait jellemezhesük.

Célkitűzések

Értekezésemben célul tűztem ki a kvantumáramkörök komplexitásának és a magicnek, mint számítási erőforrásnak, keletkezésének szisztematikus vizsgálatát.

Elsőként a Pauli-karakterláncok periódikus pályaszerkezetét elemeztem tiszta Clifford-áramkörökben, és megmutattam, hogy ez a szerkezet hogyan tükröződik a spektrális tulajdonságokban. Közvetlen kapcsolatot teremtve a pályaszerkezet és a spektrális degenerációk között, ami motiválta a komplexitás generálásának vizsgálatát kontrollált T-kapu adagolásával.

Második célom a magic keletkezésének kvantitatív vizsgálata volt Clifford+T áramkörökben, valamint annak feltárása, hogy a magic miként jön létre és hogyan skálázódik a T-kapuk sűrűségével. Megmutattam, hogy a magic eloszlások miként fejlődnek a ritka és sűrű T-kapu tartományokban, és hogyan konvergálnak a Haar-random viselkedéshez. Ennek részeként feltártam a ritka T-kapu tartományban a magic keletkezésének szerkezetét, és igazoltam, hogy bármely stabilizátorállapoton ható egyetlen T-kapu rögzített, kvantált mennyiségű varázslatot hoz létre, $M_H^2 = \log_2(4/3)$, ami bimodális varázslateloszláshoz vezet.

Harmadrészt tisztázni akartam a varázslat és az összefonódás kapcsolatát nagy N -es Haar-véletlen kvantumáramkörökben. Különösen azt mutattam meg, hogy bár mindkettő extenzív erőforrás, fluktuációik a termodinamikai határban statisztikailag függetlenné válnak.

Végül, célul tűztem ki a stabilizátor Rényi entrópia dinamikájának vizsgálatát Lindblad-evolúció alatt, fizikailag releváns disszipatív csatornák esetében. Ez az irány a korábbi eredményekből természetesen következett, motiválva annak kérdésével, hogy a magic-alapú mennyiségek miként viselkednek nyílt kvantumrendszerekben, valódi kvantumeszközökhöz kapcsolódva. A cél az volt, hogy feltárjam, hogyan viselkedik a stabilizátor Rényi entrópia disszipatív Lindblad-dinamikában, és hogy mennyiben használható indikátorként a vegyes állapotú stacionárius tartományokban a magic-alapú szerkezetekre. Az elemzés során kimutattam, hogy léteznek véges stabilizátor Rényi entrópia stacionárius állapotok, ugyanakkor a stabilizátor Rényi entrópia mint helyes magic-mérőszám nem értelmezhető vegyes állapotok esetén.

Módszerek

Az értekezésemben bemutatott eredményeket analitikus és numerikus módszerek kombinációjával értem el. A Clifford- és Clifford+T-áramkörök spektrális tulajdonságait és varázslateloszlásait egzakt diagonalizálással és Monte Carlo mintavételezéssel vizsgáltam. Az eredeti Clifford-tabló eljárást használtam és adaptáltam a Pauli-karakterlánc pályaszerkezetek és enyhén szennyezett T-kapus áramkörök hatékony követésére. A nyílt rendszer dinamikát saját fejlesztésű MATLAB-könyvtárral szimuláltam, amely többek között vegyes állapotok Lindblad-evolúciójára készült. A mátrixszorzat állapot (MPS) módszerek lehetővé tették nagyobb egy-dimenziós rendszerek vizsgálatát korlátozott összefonódás mellett, bár ezt a módszert a jelen munkában nem használtam ki teljes mértékben. Ahol lehetett, az implementációkat saját fejlesztésben készítettem, hogy teljes kontrollt tudhassak az algoritmusok, tesztek és adaptációk felett.

Új tudományos eredmények

Tézis I: A T-kapukkal szennyezett Clifford-áramkörökben exponenciálisan gyors átmenet figyelhető meg a véletlen mátrixelmélet által leírt kaotikus spektrális viselkedéshez. A spektrális degenerációk érzékeny indikátorai a komplexitásnak.

A tiszta Clifford-áramkörök egyedi periódikus pályaszerkezetet mutatnak a Pauli-karakterláncok terében. Ez a szerkezet masszív spektrális degenerációkat eredményez, amelyek a Clifford-áramkörök klasszikus szimulálhatóságát tükrözik. A T-kapuk adagolása fokozatosan szünteti meg ezeket a pályákat. Már $N_T = O(1)$ T-kapu is átmenetet idéz elő a circular unitary ensemble (CUE) jellemző spektrális korrelációkhoz. A degenerációk száma exponenciálisan csökken (e^{-cN_T}), ahol N_T a T-kapuk száma. Ez azt mutatja, hogy már néhány T-kapu is radikálisan átalakítja az áramkör spektrális tulajdonságait a kaotikus viselkedés irányába. [T1]

Tézis II: A T-kapu szennyezés során a magic eloszlása a ritka tartományban bimodális viselkedést mutat ($N_T = 1$), majd diszkrét magic szintek jelennek meg, végül kvázi-folytonos eloszlásba mennek át N_T növekedésével.

A T-kapu egyszerűsített, szerkezetfüggő kölcsönhatásokat mutat: ha stabilizátorállapoton hat, a keletkező magic érték pontosan meghatározza az adott qubit lokális szerkezetét. $N_T = 1$ esetén az eredmény bimodális: vagy nulla

varázslat (ha a T-kapu megőrzi a stabilizátort), vagy egy rögzített varázslat-
kvantum $M_H^2 = \log_2(4/3)$. A híg tartományban ($N_T \ll N$) az átlagos varázslat
lineárisan nő: $\langle M_2 \rangle \approx 0.415 \cdot N_T$. Az eloszlás szerkezete a bimodálistól
diszkrétén át kvázi-folytonosig fejlődik N_T növekedésével. [T1]

Tézis III: Analitikusan bizonyítottam, hogy bármely stabilizátorállapoton ható T-kapu rögzített magic-kvantumot generál.

Analitikus bizonyítást adok arra, hogy egy stabilizátorállapoton ható T-kapu
legfeljebb egy pontosan meghatározott mennyiségű magic értéket eredményez.
Ezt a mennyiséget "magic-kvantumnak" nevezzük: $M_2^H = \log_2(4/3) \approx 0.415$.
Ez az eredmény általánosítható tetszőleges, hasonló kvantálási szerkezetet mu-
tató nem-Clifford műveletekre is. [T1]

Tézis IV: A magic érzékenyebb indikátora az áramkör komplexitásának, mint a spektrális tulajdonságok: a Haar-random magic szint eléréséhez nagyobb T-kapu sűrűség szükséges, mint a spektrális átmenethez.

Míg a spektrális korrelációk és szintköz-statisztikák exponenciálisan gyorsan
közelítik a Haar-random értékeket (e^{-cN_T}), a magic eloszlás csak lineárisan
($0.415 \cdot N_T$ átlagban). Ezért a teljes számítási komplexitás eléréséhez a magic
szempontjából nagyobb T-kapu sűrűség szükséges. Ez arra utal, hogy a magic
és a spektrális káosz a komplexitás különböző aspektusait méri. [T1]

Tézis V: Megmutattam, hogy N -qubites Haar-véletlen kvantumállapotokban a magic és az összefonódás együttes eloszlása exponenciálisan lokalizálódik $N \rightarrow \infty$ határban, $N/2$ és $N/2 \cdot \log_2(e/2)$ körül koncentrálva.

Az eloszlások exponenciálisan élesednek N növekedésével. A magic $M_2 \approx N/2$
körül, míg az összefonódási entrópia $S \approx N/2 \cdot \log_2(e/2)$ körül koncentrálódik.
Ez az éles lokalizáció azt mutatja, hogy tipikus Haar-véletlen állapotok nagyon
hasonló erőforrástartalommal rendelkeznek a $N \rightarrow \infty$ határban. [T2]

Tézis VI: Bizonyítottam, hogy bár tipikus állapotokban mind magic, mind összefonódás jelen van, fluktuációik exponenciálisan függetlenné válnak N növekedésével, vagyis nagy kvantumrendszerekben önálló erőforrásként működnek.

Kumuláns-számítások kimutatják, hogy bár az átlagos értékek pozitívan kor-
reláltak, kovarianciájuk sokkal gyorsabban, exponenciálisan tűnik el, mint az
egyedi varianciák szorzata: $\text{cov}(M_2, S) \sim e^{-\alpha N}$. Az exponenciálisan eltűnő
kölsönös információ azt jelzi, hogy a fluktuációk aszimptotikusan függetlenek
 $N \rightarrow \infty$ határban. [T2]

A tézisekhez kapcsolódó publikációk

- T1 Szombathy, D., Valli, A., Moca, C. P., Asbóth, J., Farkas, L., Rakovszky, T., Záránd, G. (2024). *Spectral Properties Versus Magic Generation in T-doped Random Clifford Circuits*. Physical Review Research 7, 043080. DOI:10.1103/557f-6tpb.
(Theses I–IV)
- T2 Szombathy, D., Valli, A., Moca, C. P., Farkas, L., Záránd, G. (2025). *Asymptotically independent fluctuations of stabilizer Rényi entropy and entanglement in random unitary circuits*. Physical Review Research 7, 043072. DOI:10.1103/jplh-zl35
(Theses V–VI)

További publikációk

1. Sticlet, D., Dóra, B., Szombathy, D., Záránd, G., and Moca, C. P. (2025). *Nonstabilizerness in open XXZ spin chains: Universal scaling and dynamics*. Physical Review Research 7, 043130. DOI: 10.1103/96bk-xf8p.
2. Szombathy, D., Werner, M. A., Moca, C. P., Legeza, Ö., Hamo, A., Ilani, S., and Záránd, G. (2024). *Collective tunneling of a Wigner necklace in carbon nanotubes*. Physical Review B 109, 245139. DOI: 10.1103/PhysRevB.109.245139.
3. Moca, C. P., Sticlet, D., Dóra, B., Valli, A., Szombathy, D., and Záránd, G. (2025). *Non-stabilizerness generation in a multi-particle quantum walk*. arXiv:2504.19750. DOI: 10.48550/arXiv.2504.19750.
4. Kormos, M., Grabarits, A., Szombathy, D., and Záránd, G. (2024). *Method for performing Quantum Annealing*. Filed patent (2024).
5. Szombathy, D. (2024). Dissipative-Lindbladian-Evolution. GitHub repository: <https://github.com/thydominik/Dissipative-Lindbladian-Evolution>.