Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

Gráfok információelméleti és színezési paraméterei

Tézisfüzet

Gujgiczer Anna

Témavezető:
Simonyi Gábor

Budapest, 2025.

1. Bevezetés

A gráfelméletben egy sokat vizsgált gráfparaméter a kromatikus szám, amelyet gyakorlati problémák, például frekvencia- vagy időbeosztás megoldására is használnak. Számos esetben a kromatikus szám viselkedése nehezen érthető. Ennek egyik példája az, hogy ez a paraméter hogyan viselkedik gráfok szorzása során. 1966-ban Stephen Hedetniemi megfogalmazta azt a sejtést, miszerint két gráf úgynevezett tenzorszorzatának kromatikus száma megegyezik a tényezők kromatikus számának minimumával. Az azonban könnyen látható, hogy a szorzat kromatikus száma legfeljebb a tényezők kromatikus száma lehet. Tehát a sejtés lényegében azt kérdezte, hogy a fordított egyenlőtlenség is fennáll-e. Ez a kérdés igen sokáig megválaszolatlan maradt, de 2019-ben megcáfolták [Shi19]. Az első talált ellenpélda nagyon nagy volt mind a tényezők csúcsszáma, mind a kromatikus számuk szempontjából. Később kisebb ellenpéldákat is találtak [Zhu21; Tar22; Wro20; Tar23], és ma már a sejtés teljesen tisztázott. Ez azt jelenti, hogy bármely c szám esetén, ha mindkét tényező kromatikus száma nagyobb, mint c, akkor tudjuk, hogy előfordulhat-e, hogy a szorzatuk c-színezhető, vagy ez lehetetlen.

Más érdekes, sokat tanulmányozott és szorosan kapcsolódó gráfparaméterek az úgynevezett frakcionális kromatikus szám és a multikromatikus számok. A Hedetniemi-sejtés korábbi ellenpéldáiban a frakcionális kromatikus szám fontos paraméternek bizonyult, míg a későbbi ellenpéldákban bizonyos speciális gráfosztályok multikromatikus számai is szerepet kaptak. Első téziscsoportom e témakör néhány kérdésével foglalkozik. Érdemes megemlíteni, hogy megfogalmaztak olyan Hedetniemi-típusú problémákat is, amelyekben a kromatikus szám helyett a gráfok más paramétereit vizsgálják. A frakcionális kromatikus szám esetében ismert, hogy a Hedetniemi-típusú sejtés igaz [Zhu11].

A multikromatikus számok szorosan kapcsolódnak a Kneser-gráfokhoz, mivel ezek a paraméterek megfelelő Kneser-gráfokba vezető homomorfizmusokkal kifejezhetők. A Kneser-gráfok egy híres gráfosztályt alkotnak, amelynek tagjainak kromatikus számát Lovász határozta meg híres cikkében [Lov78], amelyben bebizonyította, hogy a kromatikus számra vonatkozó viszonylag egyszerűen megkonstruálható felső korlát éles. Azonban ezek a gráfok általánosan nem csúcskritikusak e paraméterre nézve, vagyis egy csúcs eltávolítása nem feltétlenül csökkenti a kromatikus számot. Schrijver megfigyelte, hogy bizonyos speciális feszített részgráfok – amelyeket ma Schrijver-gráfoknak nevezünk – ugyanazzal a kromatikus számmal rendelkeznek, mint a megfelelő paraméterű Kneser-gráfok, ráadásul csúcskritikusak is erre a paraméterre. Később az is kiderült [Tal03; ST06], hogy a Kneser- és a Schrijver-gráfok (azonos paraméterek mellett) azonos frakcionális kromatikus számmal is rendelkeznek, de még a Schrijver-gráf sem csúcskritikus erre a paraméterre nézve (néhány speciális eset kivételével). Második téziscsoportomban lévő eredmények arra fókuszálnak, hogy találjunk a Schrijver-gráfoknak olyan feszített részgráfjait, amelyek ugyanazzal a frakcionális kromatikus számmal rendelkeznek, de csúcskritikusak is erre a paraméterre.

Az eddig említettektől eltérő kutatási irány olyan gráfcsaládok maximális méretének vizsgálata, ahol a család bármely két elemére (amelyekre kódszavakként tekintünk) valamilyen előírt feltétel teljesül. Ennek egyik példája Simonovits és Sós híres sejtése [SS76], amelyet Ellis, Filmus és Friedgut bizonyított be [EFF12]. A sejtés egy n címkézett csúcsú gráfokból álló család maximális méretére vonatkozott, melyben bármely két gráf metszete tartalmaz háromszöget. Az ilyen típusú problémák további variánsait kapjuk, ha a metszet szerepét más műveletekkel helyettesítjük, például a két gráf élhalmazának szimmetrikus differenciájával. Ezek azok a kérdések, amikhez a szokásos kódtávolság probléma általánosításával (hány bináris sorozat adható meg egy adott hosszon, hogy bármely kettő legalább egy adott számú koordinátában különbözzön) is el tudunk jutni, ha nem a szokásos minimális távolságot írjuk elő követelményként, hanem azt, hogy bizonyos konkrét struktúrában különbözzenek a kódszavak. Itt is előírhatjuk, hogy a szimmetrikus differencia tartalmazzon egy háromszöget, de más, globális tulajdonságok vizsgálata is érdekes lehet, például az összefüggőség vagy egy Hamilton-kör létezése.

2. Áttekintés a tézisekről

Az első két tézscsoportban közös, hogy mindkettő speciális gráfosztályokhoz kapcsolódik. Ezek a gráfok bizonyos színezési paraméterek univerzális gráfjaiként szolgálnak, vagyis ha egy G gráf rendelkezik a szükséges színezési paraméterrel, akkor létezik G-ből homomorfizmus a megfelelő speciális gráfba. Azt mondjuk, hogy létezik egy G gráfból homomorfizmus egy másik H gráfba, ha létezik egy éltartó leképezés G csúcshalmazából H csúcshalmazába. A homomorfizmus létezését $G \to H$ jelöli. Könnyen belátható például, hogy a kromatikus szám is kifejezhető ilyen módon: egy G gráf kromatikus száma akkor és csak akkor legfeljebb c, ha $G \to K_c$, ahol K_c a c csúcsú teljes gráfot jelöli. Az első és a második tézíscsoportban az úgynevezett s-széles színezés és a multiszínezés univerzális gráfjait vagy azok részgráfjait vizsgáljuk.

A harmadik téziscsoport közvetlenebbül kapcsolódik az információelmélethez, itt gráfokon értelmezett kódszavakat vizsgálunk.

A következő alfejezetben található a téziseim felsorolása, a további alfejezetekben pedig ezek kifejtése szerepel. Az egyértelműség kedvéért a következő összefoglaló fejezetekben szereplő tételek számozása megegyezik a disszertációban használt számozással. Mivel azonban az összefoglaló nem tartalmazza az összes tételt, egyes állítások összevonásra kerültek, illetve a tételek sorrendje helyenként eltér az eredetitől, a számozás néhol megszakítottnak vagy szokatlannak tűnhet.

2.1. Tézisek felsorolása

1. Téziscsoport: Szélesen színezhető gráfok színezési paramétereinek megállapítása.
   1.1. Tézis: Bebizonyítottam, hogy a t színnel s-szélesen színezhető gráfok k-multikromatikus száma legfeljebb $t+2(k-1)$ minden $k \leq s$ értékre.
   1.2. Tézis: Becslést adtam a t színnel s-szélesen színezhető gráfok frakcionális kromatikus számára.
   1.3. Tézis: Felső becslést adtam azon csatornák Shannon kapacitására, melyek modellezhetőek egy t színnel s-szélesen színezhető gráffal.
2. Téziscsoport: Schrijver gráfok kritikus részgráfjainak és azok kritikus éleinek vizsgálata különböző színezési paraméterek szempontjából.
   2.1. Tézis: Beazonosítottam egy frakcionális kromatikus számra nézve csúcskritikus feszített részgráfját a Schrijver gráfoknak és megmutattam, hogy ez izomorf az azonos paraméterű cirkuláris teljes gráffal.
   2.2. Tézis: A cirkuláris teljes gráf frakcionális- és cirkuláris kromatikus számra vonatkozó kritikus éleit meghatároztam.
3. Téziscsoport: Kódtávolság fogalmának általánosítása olyan bináris kódokra, melyek gráfok élhalmazának karakterisztikus vektorainak tekinthetőek (hosszuk $\binom{n}{2}$ valamely n-re).
   3.1. Tézis: Megállapítottam, hogy $t = \binom{n}{2}$ hosszon legfeljebb mennyi egymástól megkülönböztethető kódszó adható számos olyan esetben, amikor a távolság a két gráf szimmetrikus differenciájának valamely globális tulajdonságával van definiálva.
   3.2. Tézis: Megállapítottam, hogy $t = \binom{n}{2}$ hosszon legfeljebb mennyi egymástól megkülönböztethető kódszó adható számos olyan esetben, amikor a távolság a két gráf szimmetrikus differenciájának valamely lokális tulajdonságával van definiálva.

2.2. Szélesen színezhető gráfok multikromatikus számai

Amint azt a Bevezetésben említettük, a Hedetniemi-sejtéshez kapcsolódóan egy speciális gráfosztály egy bizonyos multikromatikus száma érdekessé vált. Ez a gráfosztály fontos szerepet játszik a széles színezéseknél. Egy gráf csúcsszínezését s-szélesnek nevezzük, ha bármely $2s-1$ hosszúságú séta két végpontja különböző színt kap. Könnyen belátható, hogy ez a gráfszínezés egyik lehetséges általánosítása, hiszen az 1-széles színezés pontosan a hagyományos gráfszínezésnek felel meg. Megmutatható, hogy egy gráf akkor és csak akkor s-szélesen színezhető t színnel, ha létezik egy homomorfizmusa a következő univerzális gráfba [ST06], amelyet $W(s,t)$ jelöl, és amelynek néhány speciális esete megjelent a kapcsolódó kérdésben:

$$V(W(s,t)) = \{(x_1 \dots x_t) : \ \forall i \; x_i \in \{0,1,\dots,s\}, \exists! i \; x_i = 0, \ \exists j \; x_j = 1\},$$

$$E(W(s,t)) = \{\{(x_1 \dots x_t),(y_1 \dots y_t)\} : \forall i \; |x_i - y_i| = 1 \; \textit{vagy} \; x_i = y_i = s\}.$$

Az $s = 1$ esetben a definíció alapján $W(1,t) = K_t$ adódik, ami összhangban van korábbi megfigyelésünkkel, miszerint a teljes gráfok univerzális gráfok a hagyományos színezéshez.

A multiszínezés során egy G gráf csúcsait n színnel színezzük úgy, hogy minden csúcs pontosan k különböző színt kap, és ha két csúcs, u és v, szomszédos, akkor a rájuk kiosztott színek halmazai diszjunktak. Formálisan, a multiszínezés egy függvény $f : v \mapsto \{c_1, \dots, c_k\}$, ahol $\forall i \in [k]$ esetén $c_i \in [n]$, és ha $u, v \in E(G)$, akkor $f(u) \cap f(v) = \emptyset$ (ahol $[k] = \{1,2,\dots,k\}$ és hasonlóan $[n] = \{1,2,\dots,n\}$). Az ilyen típusú színezéseket először Geller és Stahl vizsgálták, lásd [GS75; Sta76]. Stahl [Sta76] bevezette az ehhez tartozó multikromatikus számot, $\chi_k(G)$-t, amely az ilyen, k-szoros színezéshez szükséges minimális színek számát adja meg. (Ez a gráfparaméter szintén kifejezhető egy megfelelő univerzális gráfba való homomorfizmus létezésével, ahogyan azt a következő fejezetben tárgyaljuk majd.)

A frakcionális kromatikus számot az alábbi módon lehet definiálni:

$$\chi_f(G) = \inf_k \left\{ \frac{\chi_k(G)}{k} \right\}.$$

Témavezetőmmel közösen a [j1] munkában pontosan meghatároztuk a fent említett $W(s,t)$ univerzális gráfok k-adik multikromatikus számának értékeit azokban az esetekben, amikor $k \leq s$.

Ez a munka Tardif egyik kérdése nyomán született, melyet abban a cikkében [Tar22] tett fel, ahol a Hedetniemi-sejtésre egy (G, H) ellenpélda gráfpárt konstruált. Ezen gráfok kromatikus száma 14-nél nagyobb, de a szorzatuk 14 színnel színezhető. Ebben az ellenpéldában G a $W(3,9)[K_4]$ gráf volt, amelyet úgy lehet megkapni meg, hogy a $W(3,9)$ gráf minden egyes csúcsát egy 4 csúcsú klikké "felfújjuk", és a kezdetben szomszédos csúcsoknak megfelelő klikkeket teljesen összekötjük. Könnyen belátható, hogy ennek a gráfnak a kromatikus száma pontosan a $W(3,9)$ 4-szeres színezéshez tartozó multikromatikus szám. Hasonló módon konstruálható kisebb ellenpéldák előállítása céljából Tardif feltette a kérdést, hogy $\chi(W(3,t)[K_3]) = \chi_3(W(3,t))$ nagy-e, különösen, hogy $t = 8$ esetén nagyobb-e mint 12, és $t = 7$ esetén nagyobb-e mint 11. Megfigyelte azt is, hogy általánosan

$$\chi_k(W(s,t)) \geq t + 2(k-1)$$

teljesül. Más szóval azt kérdezte, hogy a szigorú egyenlőtlenség fennáll-e az adott speciális esetekben, amikor $s = k = 3$ és $t = 7$ vagy $t = 8$. Mi negatívan válaszoltunk a kérdésére, és az eredményt minden t-re és $k \leq s$ esetre általánosítottuk.

Tétel 2.2. és Következmény 2.4. Ha $k \leq s$, akkor

$$\chi_k(W(s,t)) = t + 2(k-1).$$

Azt is megmutattuk, hogy ez az eredmény nem általánosítható tetszőlegesen nagy k értékekre (az s-hez viszonyítva).

Állítás 2.6. Minden $t \geq 3$ és $s \geq 1$ pozitív egész számokra létezik egy $k_0 = k_0(s,t) > s$ küszöbérték, amelyre teljesül, hogy

$$\chi_k(W(s,t)) > t + 2(k-1)$$

amennyiben $k \geq k_0$.

A következő tételeket is sikerült bebizonyítanunk a $W(s,t)$ gráfok frakcionális kromatikus számával kapcsolatban. Ehhez felhasználtunk korábbi eredményeket a Mycielski-gráfok s-széles színezhetőségéről [BS05; SST24; GJS04; ST06]. Egy G gráfból készített $M(G)$ Mycielski-gráf egy Mycielski által [Myc55] bevezetett gráfművelet eredménye, amely művelet nem növeli a gráf klikkszámát, de növeli annak kromatikus számát. A konstrukció általánosítható (lásd a disszertáció 2. fejezetét) h-emeletes $M_h(G)$ Mycielski-gráfokká, ahol az eredeti konstrukció $M(G) = M_2(G)$. Az eredeti, $M_2(G)$ konstrukciónak a frakcionális kromatikus számra gyakorolt hatását a [LPU95] cikkben vizsgálták, ahol egy egyszerű függvényt adtak meg erre:

$$\chi_f(M(G)) = \chi_f(G) + \frac{1}{\chi_f(G)}.$$

Általános h esetén a $\chi_f(M_h(G))$ frakcionális kromatikus számot Tardif vizsgálta [Tar01]-ben. Belátta, hogy $\chi_f(M_h(G))$-t is meghatározza $\chi_f(G)$ értéke.

$$\chi_f(M_h(G)) = \chi_f(G) + \frac{1}{\sum_{i=0}^{h-1}(\chi_f(G)-1)^i}.$$

Ezt az eredményt felhasználva sikerült bebizonyítanunk a következő két tételt azáltal, hogy mutattunk homomorfizmust $M_{3s-2}(W(s,t))$-ből $W(s,t+1)$-be, valamint $W(s,t+1)$-ből $M_s(W(s,t))$-be.

Állítás 2.11. következménye

$$\begin{aligned}\chi_f(W(s,t)) + \frac{\chi_f(W(s,t))-2}{(\chi_f(W(s,t))-1)^{3s-2}-1} \\ \leq \chi_f(W(s,t+1)) \\ \leq \chi_f(W(s,t)) + \frac{\chi_f(W(s,t))-2}{(\chi_f(W(s,t))-1)^{s}-1}\end{aligned}$$

Tétel 2.7. Bármely rögzített pozitív egész s esetén teljesül, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \chi_f(W(s,t)) = \infty.$$

2.3. Schrijver-gráfok frakcionális kromatikus számra csúcs-kritikus részgráfjai

Ahogyan a $W(s,t)$ gráfok univerzális gráfok voltak a széles színezésekhez, a Kneser-gráfok univerzális gráfok a multiszínezésekhez. Ez azt jelenti, hogy egy G gráf k-adik multikromatikus száma akkor és csak akkor legfeljebb n, ha létezik G-ből homomorfizmus a $KG(n,k)$ Kneser-gráfba. Pozitív $n \geq 2k$ egészekre a $KG(n,k)$ Kneser-gráf egy olyan gráf, amelynek csúcsait az $[n]$ halmaz $\binom{n}{k}$ darab k elemű részhalmaza alkotja. Két ilyen részhalmaz pedig pontosan akkor alkot élt, ha diszjunktak:

$$V(KG(n,k)) = \binom{[n]}{k}$$

$$E(KG(n,k)) = \{\{A,B\} : A \cap B = \emptyset\}.$$

Kneser [Kne55] megfigyelte, hogy $KG(n,k)$ kromatikus száma legfeljebb $n-2k+2$, és azt sejtette, hogy ez a felső korlát éles. Ezt sok évvel később Lovász bizonyította be híres cikkében [Lov78], a Borsuk–Ulam-tétel felhasználásával. Röviddel ezután Schrijver [Sch78] felfedezte, hogy $KG(n,k)$ egy speciális feszített részgráfja, $SG(n,k)$ – amelyet ma Schrijver-gráfnak nevezünk – továbbra is $n-2k+2$ kromatikus, és ezen túlmenően csúcskritikus is erre a paraméterre nézve, azaz bármely csúcsának törlésével a kromatikus száma csökken.

A $KG(n,k)$ Kneser-gráf frakcionális kromatikus száma $\frac{n}{k}$ (mely az Erdős-Ko-Rado tétel [EKR61] egy egyszerű következménye). Az azonos paraméterű $SG(n,k)$ Schrijver-gráfnak szintén ugyanez a frakcionális kromatikus száma [Tal03; ST06], azonban erre a paraméterre nézve a legtöbb Schrijver-gráf nem csúcskritikus (kivéve néhány triviális esetet). Ez felvetette azt a problémát, hogy a Schrijver-gráfoknak keressük olyan frakcionális kromatikus számra nézve kritikus részgráfjait, amelyek ezen paramétere megegyezik az eredeti gráféval.

Egy közös cikkünkben a témavezetőmmel [j3] erre a problémára adtunk megoldást. Meghatároztunk egy természetes tulajdonságot a csúcsokat reprezentáló halmazokra vonatkozóan, és az ezt kielégítő csúcsok által alkotott részgráfot $Q(n,k)$-nak neveztük el (a $Q(n,k)$ formális definíciója a disszertáció 3. fejezetében található). Ezeknek a gráfoknak egy alapvető tulajdonsága a következő:

Állítás 3.6. Legyen $n \geq 2k$ és $\ell \geq 2$ egy pozitív egész szám. Ekkor a $Q(n,k)$ és a $Q(\ell n, \ell k)$ gráfok izomorfak.

A fenti tétel alapján a $Q(n,k)$ gráfok vizsgálata során mindig feltehetjük, hogy $lnko(n,k) = 1$.

Tétel 3.7. Tegyük fel, hogy $n \geq 2k$, $lnko(n,k) = 1$, és legyenek a és b a legkisebb pozitív egész számok, amelyekre $ak = bn - 1$ teljesül. Ekkor a $Q(n,k) \subseteq SG(n,k)$ gráf a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\chi_f(Q(n,k)) = \frac{n}{k} = \chi_f(SG(n,k))$.
- $\forall U \in V(Q(n,k))$ $\chi_f(Q(n,k) \setminus U) = \frac{a}{b} < \frac{n}{k}$, azaz $Q(n,k)$ csúcskritikus a frakcionális kromatikus számra nézve.
- $Q(n,k)$-nak van egy $Q(a,b)$-vel izomorf feszített részgráfja.

A fenti eredmény bizonyítása közben rájöttünk, hogy a tétel igazsága abból adódik, hogy a talált speciális részgráf izomorf egy másik ismert gráffal, a cirkuláris teljes gráffal, $K_{n/k}$-val. Ez a gráf egy másik színezési paraméter, a cirkuláris kromatikus szám univerzális gráfja. A cirkuláris teljes gráf $K_{n/k}$, $n \geq 2k$ esetén, valamint a hozzá kapcsolódó cirkuláris kromatikus szám χ_c definíciói a következők:

$$V(K_{n/k}) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$E(K_{n/k}) = \{\{i,j\} : k \leq |i-j| \leq n-k\},$$

$$\chi_c(G) = \min\left\{\frac{p}{q} : p \leq |V(G)|, G \to K_{p/q}\right\}.$$

Állítás 3.8. Ha $lnko(n,k) = 1$, akkor $Q(n,k)$ izomorf a $K_{n/k}$ cirkuláris teljes gráffal.

Az eddig is ismert volt a cirkuláris teljes gráfokról, hogy csúcskritikusak a frakcionális kromatikus számra nézve, de élkritikusságukat korábban nem vizsgálták (sem a frakcionális, sem a cirkuláris kromatikus szám szempontjából). Mi ezt a kérdést is megvizsgáltuk. Nevezzünk egy $\{i,j\} \in E(K_{n/k})$ élt *legrövidebb élnek*, ha $|i-j| = k$ vagy $|i-j| = n-k$. (Mivel ezek a legrövidebb élek, ha a csúcsokat egy kör mentén rendezzük el sorrendben.)

Tétel 3.18. Ha $lnko(n,k) = 1$, $e \in E(K_{n/k})$, és a, b az $ak = bn - 1$ egyenletet kielégítő legkisebb pozitív egészek, akkor

$$\chi_f(K_{n/k} \setminus \{e\}) = \chi_c(K_{n/k} \setminus \{e\}) = \begin{cases} \frac{a}{b} & \text{ha } e \text{ egy legrövidebb él} \\ \frac{n}{k} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végül bebizonyítottuk, hogy $SG(n,k)$ csak néhány triviális esetben csúcskritikus a frakcionális kromatikus számra nézve.

Következmény 3.16. $\forall U \in V(SG(n,k))$ $\chi_f(SG(n,k) \setminus \{U\}) < \chi_f(SG(n,k))$ akkor és csak akkor, ha $k = 1, n = 2k$, vagy $n = 2k+1$ egyike teljesül.

2.4. Gráfkódok

A [*j*2] Noga Alonnal, Körner Jánossal, Aleksa Milojevićcsel és Simonyi Gáborral közös cikkben azt vizsgáltuk, hogy legfeljebb mekkora lehet egy gráfcsalád mérete egy n elemű csúcshalmazon, ha a család bármely két elemének élhalmazainak szimmetrikus differenciája eleget tesz egy előírt feltételnek. Megjegyezzük, hogy ha az előírt feltétel csupán annyi, hogy legalább d élt tartalmazzon ez a szimmetrikus differencia, akkor visszakapjuk a szokásos kódtávolság problémát: Hány olyan kódszó adható meg $\binom{n}{2}$ hosszon, hogy bármely kettő legalább d koordinában különbözzön?

Ebben az alfejezetben felsorolok néhányat a vizsgált feltételek közül (továbbiak a disszertáció 4. fejezetében találhatók). Ezek között vannak globális tulajdonságok, mint például az összefüggőség vagy egy Hamilton-kör létezése, valamint lokális tulajdonságok is, például egy háromszög tartalmazása. Formálisan mindezek úgy írhatók le, hogy a gráfcsaládunk bármely két tagjának élhalmazai közötti szimmetrikus differencia által meghatározott gráf egy előírt gráfosztályhoz tartozik (nevezetesen ahhoz, amelyek elemei összefüggőek, tartalmaznak Hamilton-kört, tartalmaznak egy háromszöget stb.).

Legyen $\mathcal{F}$ egy rögzített gráfosztály. Egy n címkézett csúcson definiált $\mathcal{G}$ gráfcsalád akkor nevezhető $\mathcal{F}$-jónak, ha bármely két $G, G' \in \mathcal{G}$ gráfra a $G \oplus G'$ gráf, amelyet az alábbiak szerint definiálunk:

$$V(G \oplus G') = V(G) = V(G') = [n],$$

$$E(G \oplus G') = \{e : e \in (E(G) \setminus E(G')) \cup (E(G') \setminus E(G))\}$$

$\mathcal{F}$-be tartozik.

Jelölje $M_{\mathcal{F}}(n)$ egy n csúcsú $\mathcal{F}$-jó család lehetséges maximális méretét. Munkánk során a $M_{\mathcal{F}}(n)$ értékét vizsgáltuk különböző $\mathcal{F}$ osztályok esetén. Az alábbi tételek ezen értékekről szólnak néhány általunk vizsgált esetben.

Tétel 4.2. és 4.3. Legyen $\mathcal{F}_c$ az összefüggő gráfok osztálya, és $\mathcal{F}_{2c}$ a 2-összefüggő gráfok osztálya. Ekkor

$$M_{\mathcal{F}_c}(n) = 2^{n-1},\ M_{\mathcal{F}_{2c}}(n) = 2^{n-2}.$$

Tétel 4.5. és 4.6. Legyen $\mathcal{F}_{Hp}$ a Hamilton-utat tartalmazó gráfok osztálya, és $\mathcal{F}_{Hc}$ a Hamilton-kört tartalmazó gráfok osztálya. Ekkor végtelen sok n értékre teljesül, hogy

$$M_{\mathcal{F}_{Hp}}(n) = 2^{n-1},\ M_{\mathcal{F}_{Hc}}(n) = 2^{n-2}.$$

A fent felsorolt tételekben szereplő $\mathcal{F}$ osztályok esetén az $M_{\mathcal{F}}(n)$ maximalitásának bizonyításához a következő lemmát használtuk.

Lemma 4.1. Bármely $\mathcal{F}$ gráfosztályra

$$M_{\mathcal{F}}(n) \cdot D_{\mathcal{F}}(n) \le 2^{\binom{n}{2}},$$

Itt $D_{\mathcal{F}}(n)$ az $M_{\mathcal{F}}(n)$ "duálisát" jelöli, azaz a legnagyobb olyan gráfcsalád méretét n címkézett csúcson, amelynek semelyik két tagjának szimmetrikus differenciája sem tartozik $\mathcal{F}$-be. Megjegyezzük, hogy ha $\overline{\mathcal{F}}$ jelöli azt az osztályt, amely pontosan azokat a gráfokat tartalmazza, amelyek nem tartoznak $\mathcal{F}$-be, akkor teljesül, hogy $D_{\mathcal{F}}(n) = M_{\overline{\mathcal{F}}}(n)$. A fent említett tételek bizonyításaiban minden esetben konstruáltunk egy $\mathcal{F}$-jó és egy $\overline{\mathcal{F}}$-jó gráfcsaládot, A-t és B-t, amelyek "illeszkedő méretűek" voltak, vagyis teljesült, hogy $|A| \cdot |B| = 2^{\binom{n}{2}}$, amivel igazoltuk, hogy mindkettő maximális. Ez a technika azonban nem működik minden gráfosztály esetén.

Tétel 4.7. és 4.8. Legyen $\mathcal{F}_S$ azon gráfok osztálya, amelyek tartalmaznak egy feszítő csillagot, azaz egy olyan csúcsot, amely az összes többi csúccsal össze van kötve a gráfban. Ekkor teljesül, hogy

$$M_{\mathcal{F}_S}(n) = \begin{cases} n+1 & \text{ha } n \textit{ páratlan} \\ n & \text{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

Viszont a dualis család nem "illeszkedő méretű", mivel

$$2^{\binom{n}{2}-\lceil\frac{n}{2}\rceil} \le D_{\mathcal{F}_S}(n) \le 2^{\binom{n}{2}-\frac{n}{2}}.$$

A lokális feltételekhez is használható a Lemma 4.1.

Állítás 4.14.–4.16. Jelölje $\mathcal{F}_{K_3}$ a háromszöget tartalmazó gráfok alkotta gráfosztályt. Ekkor

$$M_{\mathcal{F}_{K_3}}(n) \le 2^{\binom{n}{2}-\lceil\frac{n}{2}\rceil\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.$$

Ez a felső korlát éles, amikor $n \le 6$.

A fenti tétel egy általánosabb tétel speciális esete, amely az extremális gráfelméletet is képbe hozza. Jelölje $ex(n, G)$ egy olyan n csúcsú gráf maximális élszámát, amely nem tartalmaz G-vel izomorf részgráfot, és jelölje $\mathcal{F}_G$ azon gráfok osztályát, amelyek részgráfként tartalmazzák G-t.

Állítás 4.9.
$$M_{\mathcal{F}_G}(n) \le 2^{\binom{n}{2}-ex(n,G)}.$$

Kiderült, hogy aszimptotikusan ez a felső korlát éles. Ennek formális megfogalmazásához bevezettünk egy kapacitás típusú aszimptotikus invariánst, és megmutattuk, hogy ez az invaráns a kromatikus szám egy egyszerű függvényével felülről becsülhető. Legyen

$$R_{\mathcal{F}_G}(n) := \frac{2}{n(n-1)} \log_2 M_{\mathcal{F}_G}(n)$$

és nevezzük távolságkapacitásnak az alábbi, mindig létező határértéket:

$$DC(\mathcal{F}_G) := \lim_{n\to\infty} R_{\mathcal{F}_G}(n).$$

Az Erdős-Stone-Simonovits tétel [ES46; ES66] segítségével, mely azt állítja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,G)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(G)-1},$$

azt kapjuk, hogy $DC(\mathcal{F}_G) \leq \frac{1}{\chi(G)-1}$. Sőt, az egyenlőség is bebizonyítható.

Tétel 4.12. Ha $\chi(G) \geq 2$ akkor $DC(\mathcal{F}_G) = \frac{1}{\chi(G)-1}$.

3. Az új eredmények gyakorlati felhasználása

Ez a disszertáció főként olyan elméleti eredményekkel foglalkozik, amelyek önmagukban is érdekesek és a gráfelmélet különböző területeihez kapcsolódnak. Mindazonáltal a következő alfejezetben bemutatjuk a frakcionális kromatikus szám és a multikromatikus számok információelméleti vonatkozásait, ezzel az első két téziscsoport eredményeit egy alkalmazásorientáltabb szemszögből is megvilágítva. A harmadik téziscsoport esetében, mivel már említettük, hogy a kódszavak gráfként való értelmezése a klasszikus kódtávolság problémának egy általánosítása, nincs szükség további magyarázatra annak információelméleti relevanciáját illetően.

3.1. Shannon kapacitás

Az információelmélet számos problémája speciális gráfparaméterek bevezetéséhez vezet, amelyek közül a legismertebb példa a gráfok Shannon kapacitása [Sha56]. Ez az az elméleti felső korlát, amely meghatározza, milyen átviteli sebességgel lehet információt hibamentesen továbbítani egy diszkrét, memóriamentes kommunikációs csatornán.

A kommunikációs csatorna (zéró hibavalószínűség megkövetelése esetén) modellezhető egy gráffal: a továbbítható jelek a gráf csúcsai, és két csúcs között akkor húzunk élt, ha azok a vevő számára megkülönböztethetőek. Két t hosszúságú kódszó akkor tekinthető megkülönböztethetőnek, ha legalább egy indexben megkülönböztethetőek. Általánosan azt a maximális számot keressük, amennyi páronként megkülönböztethető t hosszúságú kódszó továbbítható a csatornán.

Definíció 3.1.1. *Két gráf, G és H, $VAGY$-szorzatán, melyet $G \cdot H$-val jelölünk, a következő gráfot értjük:*

$$V(G\cdot H) = V(G) \times V(H),$$
$$E(G\cdot H) = \{\{(g_1,h_1)(g_2,h_2)\} : g_1, g_2 \in V(G), h_1, h_2 \in V(H),$$
$$\{g_1, g_2\} \in E(G) \textit{ vagy } \{h_1,h_2\} \in E(H)\}.$$

Legyen G^t a gráf önmagával vett t-szeres $VAGY$-szorzata. Definíció szerint egy adott G gráffal modellezett csatorna esetén a páronként megkülönböztethető t hosszúságú üzenetek egy klikket alkotnak G^t-ben, tehát a feladat $\omega(G^t)$, azaz G^t klikkszámának a meghatározása.

Könnyen látható, hogy ez az érték mindig legfeljebb $|V(G)|^t$ lehet, továbbá a klikkszám szuper-multiplikatív a $VAGY$-szorzásra nézve, vagyis minden G és H gráfpárra teljesül, hogy $\omega(G \cdot H) \geq \omega(G) \cdot \omega(H)$. Ezért érdemes ezt az értéket normálni a t-edik gyökével. Valójában ennek az értéknek az aszimptotikáját vizsgáljuk. A Shannon kapacitás formális definícióját az alábbiakban adjuk meg. (Az irodalomban sokszor a komplementer gráffal definiálják.)

Definíció 3.1.2. *Egy G gráf Shannon kapacitása a következő:*

$$C(G) := \limsup_{t \to \infty} \sqrt[t]{\omega(G^t)}.$$

Lemma 3.1.1. *A Shannon kapacitás egy homomorfizmus monoton gráfparaméter, azaz minden G és H gráfra teljesül, hogy amennyiben $G \to H$ homomorfizmus létezik, $C(G) \leq C(H)$.*

Bizonyítás. Bármely klikk G^t-ben egy legalább ugyanakkora méretű klikkbe képződik H^t-ben. □

A Shannon-kapacitás értéke még nagyon egyszerű szerkezetű gráfok esetén sem ismert. Például az ötnél hosszabb páratlan köröknél a pontos érték ismeretlen (az öt hosszú kör esete Lovász László híres eredménye [Lov79]). Bohman és Holzman munkájából [BH03] tudjuk, hogy a páratlan körök Shannon kapacitása (vagy a probléma másik értelmezésében a komplementerüké) szigorúan nagyobb, mint a triviális alsó korlát, amely 2. Az általuk adott alsó korlátot nemrégiben tovább javították [Zhu25].

Mivel ennek a paraméternek a meghatározása még kis, egyszerű gráfok esetében is jelentős nehézséget jelent, már az is érdekes eredménynek számít, ha sikerül valamilyen korlátot adni rá. A Shannon kapacitás definíciójából következik, hogy $\omega(G)$, azaz G klikkszáma, mindig alsó korlátot ad. Ugyanakkor bizonyos gráfszínezési paraméterek felső korlátként szolgálhatnak.

Lemma 3.1.2. *Legyen $\varphi(G)$ egy gráfparaméter. Amennyiben a következő két feltétel teljesül rá, akkor $C(G) \leq \varphi(G)$.*

1. $\omega(G) \leq \varphi(G)$,
2. $\varphi(G \cdot H) \leq \varphi(G) \cdot \varphi(H)$ *igaz minden G és H gráfpárra.*

A frakcionális kromatikus szám kielégíti ezt a két feltételt, így ez a paraméter, valamint $\chi_k(G)/k$ minden k esetén mind felső korlátot adnak a nehezen meghatározható Shannon kapacitásra.

Következmény 3.1.3. *Ha egy G gráf s-szélesen színezhető t színnel, akkor $C(G) \leq \frac{t+2(k-1)}{k}$ minden $k \leq s$-re.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerű következménye a $W(s,t)$ gráfok multikromatikus számáról szóló eredményeknek (Tétel 2.2. és Következmény 2.4.), valamint a Shannon kapacitás homomorfizmus monoton jellegének (Lemma 3.1.1). □

Megjegyzés. Érdekes tény, hogy a kromatikus szám (mint $\chi_k(G)/k$ egy speciális esete, ahol $k = 1$) szintén kielégíti ezeket a feltételeket. Ezért azoknál a gráfoknál, ahol $\omega(G) = \chi(G) = c$, a Shannon-kapacitás ismert, azaz $C(G) = c$. Ez volt Claude Berge eredeti motivációja a perfekt gráfok bevezetésére (vö. [Ber97]).

Érdemes megjegyezni, hogy a frakcionális kromatikus szám szintén értelmezhető információelméleti paraméterként. Abban az esetben, ha visszacsatolás is engedélyezett a csatornán, akkor csupán egy gráffal nem lehet teljesen modellezni azt. Azonban egy adott gráffal modellezhető emlékezet nélküli csatornák közül a legrosszabbra igaz lesz az, hogy a frakcionális kromatikus szám adja meg azon a hibamentes információátvitel elméleti felső korlátját [Sha56]. Ezenkívül abban is hasonlít a Shannon kapacitásra ez a paraméter, hogy egy megfelelő hatványgráf kromatikus számának normalizált értékeként is előállítható [BS74; MP71].

Megjegyzés. Amint azt a Bevezetésben említettük, Hedetniemi-típusú sejtések más gráfparaméterekre is megfogalmazhatók. A kérdés minden olyan paraméterre érdekes, aminek az értéke a szorzatgráfra legfeljebb akkora, mint a tényezőkre. A Shannon kapacitás kielégíti ezt a feltételt. Azonban nem tudjuk, hogy az analóg sejtés igaz-e a Shannon kapacitásra. A [Sim21] cikkben alsó korlátot adott a szerző egy szorzatgráf Shannon kapacitására, és megmutatta, hogy az esetleges ellenpéldát mely gráfok között lehet érdemes keresni.

4. Publikációs lista

Publikációk száma:	5
Angol nyelvű lektorált folyóiratcikkek száma:	3
WoS vagy Scopus által indexelt folyóiratcikkek száma:	3
Angol nyelvű publikációk a szerző legalább 50%-os hozzájárulásával:	2
Lektorált publikációk száma:	3
Hivatkozások száma:	13
Független hivatkozások száma:	10

Folyóiratcikkek

[*j*1] Anna Gujgiczer és Gábor Simonyi. On multichromatic numbers of widely colorable graphs. *Journal of Graph Theory* 100(2), 2022, 346–361. old. DOI: 10.1002/jgt.22785.

[*j*2] Noga Alon, Anna Gujgiczer, János Körner, Aleksa Milojević és Gábor Simonyi. Structured codes of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 37(1), 2023, 379–403. old. DOI: 10.1137/22M1487989.

[*j*3] Anna Gujgiczer és Gábor Simonyi. Critical subgraphs of Schrijver graphs for the fractional chromatic number. *Graphs and Combinatorics* 40, 2024. DOI: 10.1007/s00373-024-02782-9.

4.1. Tézisekhez nem kapcsolt publikációk

Nemzetközi konferenciacikkek

[*c*4] Anna Gujgiczer, Gábor Simonyi és Gábor Tardos. On the generalized Mycielskian of complements of odd cycles. In: *Proceedings of the 12th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 485–488. old. 2023.

[*c*5] Anna Gujgiczer, Márton Elekes, Oszkár Semeráth és András Vörös. Towards model-based support for regression testing. In: *24th PhD Mini-Symposium (Minisy@ DMIS 2017)*, 26–29. old. 2017.

Hivatkozások

[Ber97] Claude Berge. Motivations and history of some of my conjectures. In: *Proceedings of an International Symposium on Graphs and Combinatorics*, 61–70. old. 1997.

[BH03] Tom Bohman és Ron Holzman. A nontrivial lower bound on the Shannon capacities of the complements of odd cycles. *IEEE Transactions on Information Theory* 49(3), 2003, 721–722. old.

[BS05] Stephan Baum és Michael Stiebitz. Coloring of graphs without short odd paths between vertices of the same color class. unpublished manuscript, 2005.

[BS74] Claude Berge és Miklós Simonovits. The coloring numbers of the direct product of two hypergraphs. In: *Hypergraph Seminar, Lecture Notes in Math. 411*, 21–33. old. 1974.

[EFF12] David Ellis, Yuval Filmus és Ehud Friedgut. Triangle-intersecting families of graphs. *Journal of the European Mathematical Society* 14(3), 2012, 841–885. old.

[EKR61] Paul Erdős, Chao Ko és Richard Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series* 12, 1961, 313–318. old.

[ES46] Paul Erdős és Arthur H. Stone. On the structure of linear graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 52, 1946, 1087–1091. old.

[ES66] Paul Erdős és Miklós Simonovits. A limit theorem in graph theory. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 1, 1966, 51–57. old.

[GJS04] András Gyárfás, Tommy Jensen és Michael Stiebitz. On graphs with strongly independent color-classes. *Journal of Graph Theory* 46(1), 2004, 1–14. old.

[GS75] Dennis Geller és Saul Stahl. The chromatic number and other functions of the lexicographic product. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 19(1), 1975, 87–95. old.

[Kne55] Martin Kneser. Aufgabe 300. *Jahresber. Deutsch., Math. Verein.* 58, 1955, 27. old.

[Lov78] László Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 25(3), 1978, 319–324. old.

[Lov79] László Lovász. On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Transactions on Information Theory* 25(1), 1979, 1–7. old.

[LPU95] Michael Larsen, James Propp és Daniel Ullman. The fractional chromatic number of Mycielski's graphs. *Journal of Graph Theory* 19(3), 1995, 411–416. old.

[MP71] Robert J McEliece és Edward C Posner. Hide and seek, data storage, and entropy. *The Annals of Mathematical Statistics* 42(5), 1971, 1706–1716. old.

[Myc55] Jan Mycielski. Sur le coloriage des graphs. *Colloquium Mathematicum* 3, 1955, 161–162. old.

[Sch78] Alexander Schrijver. Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs. *Nieuw Arch. Wisk. (3)* 26(3), 1978, 454–461. old.

[Sha56] Claude Shannon. The zero-error capacity of a noisy channel. *IRE Transactions on Information Theory* 2(3), 1956, 8–19. old.

[Shi19] Yaroslav Shitov. Counterexamples to Hedetniemi's conjecture. *Annals of Mathematics* 190(2), 2019, 663–667. old.

[Sim21] Gábor Simonyi. Shannon capacity and the categorical product. *The Electronic Journal of Combinatorics* 28, 2021, P1.51.

[SS76] Miklós Simonovits és Vera T. Sós. Graph intersection theorems. In: *Proc. Colloq. Combinatorics and Graph Theory, Orsay, Paris*, 389–391. old. 1976.

[SST24] Michael Stiebitz, Thomas Schweser és Bjarne Toft. *Brooks' Theorem: Graph Coloring and Critical Graphs.* Springer, 2024.

[ST06] Gábor Simonyi és Gábor Tardos. Local chromatic number, Ky Fan's theorem, and circular colorings. *Combinatorica* 26, 2006, 587–626. old.

[Sta76] Saul Stahl. n-tuple colorings and associated graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 20(2), 1976, 185–203. old.

[Tal03] John Talbot. Intersecting families of separated sets. *Journal of the London Mathematical Society (2)* 68(1), 2003, 37–51. old.

[Tar01] Claude Tardif. Fractional chromatic numbers of cones over graphs. *Journal of Graph Theory* 38(2), 2001, 87–94. old.

[Tar22] Claude Tardif. The chromatic number of the product of 14-chromatic graphs can be 13. *Combinatorica* 42, 2022, 301–308. old.

[Tar23] Claude Tardif. The chromatic number of the product of 5-chromatic graphs can be 4. *Combinatorica* 43(6), 2023, 1067–1073. old.

[Wro20] Marcin Wrochna. Smaller counterexamples to Hedetniemi's conjecture. *arXiv:2012.13558*, 2020.

[Zhu11] Xuding Zhu. The fractional version of Hedetniemi's conjecture is true. *European Journal of Combinatorics* 32(7), 2011, 1168–1175. old.

[Zhu21] Xuding Zhu. Relatively small counterexamples to Hedetniemi's conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 146, 2021, 141–150. old.

[Zhu25] Daniel Zhu. An improved lower bound on the Shannon capacities of complements of odd cycles. *Proceedings of the American Mathematical Society* 153, 2025, 1751–1759. old.