A MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET KIADVÁNYAI

G. 96. SZÁM.

MEZEY MIKLÓS

VILLAMOS BEREZGÉSI FOLYAMATOK SZÁMÍTÁSA

A MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET
1947. ÉVI TANFOLYAMAINAK ANYAGA

1949

EGYETEMI NYOMDA N. V., BUDAPEST

321.

MEZEY MIKLÓS

VILLAMOS BEREZGÉSI FOLYAMATOK SZÁMÍTÁSA

A MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET
1947. ÉVI TANFOLYAMAINAK ANYAGA

BUDAPEST, 1949.

A MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET KIADÁSA

TARTALOM

Oldal

1. Alapfeladat 5
2. Periodikus és aperiodikus függvények színképe. Fourier-sor, Fourier-integrál 6
3. Feszültségugrás hatása lineáris rendszerre. *Haeviside* kifejtési képlete 11
4. Tetszőleges feszültségfüggvény. *Duhamel* tétele 15
5. A Laplace-féle függvénytranszformáció 18
6. Számolási szabályok Laplace-integrállal 20
7. Gyakori Laplace integrálok. Képlettár 23
   Példák L-transzformáció alkalmazására 27
8. *RC*-csatolású erősítők berezgése 27
9. Feladatok a vezetékek elméletéből 31
   Függelék. Komplex változós függvények 43

ELŐSZÓ.

Ennek a kis könyvnek a megírásával az volt a célom, hogy rövid bepillantást nyújtsak az elektrotechnikának egy terjedelmes fejezetébe, amely a berezgési folyamatokkal (tranziens jelenségekkel) foglalkozik. Ez a jelenségcsoport azért alkot külön fejezetet, mert a nem sztacionárius folyamatok leírásának számítási segédeszközei általában hiányoznak gyakorlati képzettségű mérnök szellemi szerszámtárából. A tárgykör különleges matematikája okozza, hogy az elektrotechnikának, pl. az elektroncsöves erősítőkről szóló fejezetéből általában hiányzik a bekapcsolási folyamatok tárgyalása és az csak sokak számára újszerű mennyiségtani módszereket tárgyaló kézikönyvben lelhető fel.

Az idevonatkozó irodalom tárgyalási módszerei eléggé szerteágazók és sokszor nehezen hámozható ki a lényeg és az, ami a kérdés áttekintéséhez a mennyiségtanból okvetlenül szükséges és elegendő. Szolgálatot vélek tenni kartársaimnak azzal, ha a villamos berezgési folyamatok újabban kialakult számítási módszereiről rövid beszámolót adok, amely talán támpontul szolgálhat a tárgykör további behatóbb tanulmányozásához.

Mennyiségtanból csak a differenciál- és integrálszámítás legelemibb szabályainak ismeretét tételezem fel és a komplex számok ismeretéből annyit, amennyi a váltakozó áramú elektrotechnikában a mindennapi gyakorlatban legelterjedtebb. A függelékben a komplex változós függvények elméletéből közlöm azt, ami a szövegben előforduló levezetések megértéséhez szükséges. A tranziens folyamatok fontosabb számolási szabályainak levezetését azért közlöm, hogy az olvasó szélesebb áttekintést nyerjen és ne maradjon hiányérzete, ami meg nem magyarázott receptek gépies alkalmazásából szokott eredni. A levezetéseknél azonban nem a precíz matematikai fogalmazásra, hanem az érthetőségre és ahol lehetett a szemléletességre helyeztem a fősúlyt, még kisebb pongyolaságok árán is.

Köszönetemet fejezem ki a Mérnöki Továbbképző Intézetnek, amely e kis könyv megjelenését lehetővé tette.

1. Alapfeladat.

A rezgések elmélete a korszerű technika egyik lényeges fejezete. Az elméleti elektrotechnika, különösen a híradástechnika nagyrészben az elektromágneses rezgések elméletére épül. Az elektrotechnikának ebben a fejezetében, amely sokszor bonyolult időbeli folyamatokat tárgyal, ezek jellemzésére a matematikai segédeszközök bőséges használata válik szükségessé.

Villamos és egyes mechanikai, akusztikai és hőtani rendszerek állapotváltozását leíró időfüggvények, vagy kiterjedt rendszerek esetében a hely koordinátáit is tartalmazó többváltozós függvények egymáshoz nagyon hasonlóak, ilyen rendszerek matematikai segédeszközei közösen tárgyalhatók.

A rezgések tanulmányozása céljából villamos rendszer esetében feladatunkat a következőképen fogalmazhatjuk:

Különböző lineáris kapcsolási elemeket tartalmazó hálózat két pontja között a $t = 0$ időpontban tetszőleges időbeli lefolyású feszültség $U(t)$ lép működésbe.

Meghatározandó a hálózat valamely ágában ennek a feszültségnek hatására létrejött áram időbeli lefolyása.

Előrebocsájthatjuk, hogy sztacionér — állandó, vagy periódikus — feszültség esetében is, a hálózat vizsgált jellemzője, jelen esetben az áram csak bizonyos idő után vesz fel sztacionér értéket, amelyhez asszimptotikusan közeledik. Az alatt az idő alatt, amíg az áram sztacionér állapotát gyakorlatilag eléri, a kapcsolási, vagy berezgési folyamat játszódik le. Villamos egyensúlyi helyzetükből kimozdított rendszerek állapotváltozásának e kezdeti szakasza képezi e tanulmány tárgyát.

A fentebb vázolt feladat megoldásának klasszikus módja a következő: Adott dt idő alatt a vizsgált változók értékét, vagy ha sebességgel arányos mennyiséget vizsgálunk, változásuk sebességét állandónak tekintjük és a rendszerre alkalmazzuk az elektrotechnika alaptörvényeit.

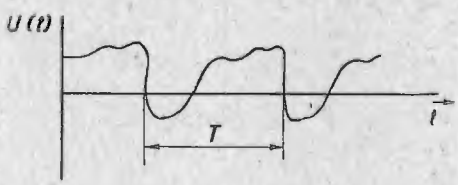
Így pl. t és $t + dt$ közötti intervallumban az R ellenállás kapcsain fellépő feszültség $U = RI =$ állandó. Vagy az L önindukciójú tekercsen a feszültség $U = L\,dI/dt =$ állandó, ahol dI az áram dt idő alatti változása. Az így nyert összefüggések a $dt \to 0$ határátmenetnél igazzá válnak és a rendszer differenciálegyenletét, vagy egyenletrendszerét alkotják. Lineáris hálózat esetében a differenciálegyenlet is lineáris. Megoldása a határértékek figyelembevételével feladatunk maradéktalan megoldása is, beleértve a berezgési folyamatot.

A modern elektrotechnika, különösen a híradástechnika sokszor bonyolult feladatai a matematika gazdag tárházából mind több és több segédeszközt vesznek igénybe és sok számolási munkát követelnek. A differenciálegyenletek elméletében és kezelésében kevésbbé otthonos mérnök gyakorlati számolásra alkalmas módszerek t keres; ennek a törekvésnek lett egyik folyománya a váltakozóáramú technikában ma már általánosan elterjedt komplex-

számok módszere, amelynek segítségével színuszos áramok esetében sztacionér állapotra a legtöbb feladat a differenciálegyenletek megkerülésével röviden megoldható. A berezgési folyamatok kiértékelésének munkájában is megnyilvánult az a törekvés, hogy oly módszer álljon a gyakorlati számoló rendelkezésére, amely a sokszor igen fáradságos számolási munkát megrövidíti. *Heaviside* nevéhez fűződik az operátorszámolás alkalmazása a század elején, amely fenti cél elérésére volt hivatott.[1] Hogy negy évtized alatt a *Heaviside*-féle operátorszámolás tagadhatatlan eleganciája és az elért számolási munkamegtakarítás ellenére kevéssé terjedt el, annak oka abban keresendő, hogy módszere nem rendelkezett kellő matematikai megalapozottsággal és az avatatlanok kezében sokszor téves eredményekre vezethetett. *Heaviside* a matematikát is kísérleti tudománynak tekintette és egy számolási szabályt igazoltnak vett, ha más eljárással is ugyanarra az eredményre jutott. Erre a kérdésre a továbbiak folyamán még visszatérünk. Az operátorszámolás alapjait a *Laplace*-féle függvénytranszformáció alkalmazásával sikerült megerősíteni.

2. Periodikus és aperiodikus függvények színképe. Fourier-sor, Fourier-integrál.

Visszatérve kiindulási feladatunkhoz, foglalkozzunk először a hálózatra ható feszültség $U(t)$ függvényével. Ha a feszültség időbeli lefolyása olyan, hogy azonos szakaszok megismétlődéséből áll, akkor periódikus függvénnyel jellemezhető (1. ábra). T egy periódus tartama, $f = 1/T$ pedig az időegység alatt lefolyt periódusok száma (frekvencia). A levezetendő számolási eljárás első lépése az a gondolat, hogy a feszültség függvényét harmonikus összetevőkre bontjuk, tehát tiszta színusz és koszínusz függvények összegeként állítjuk elő és kiszámítunk minden egyes harmonikus összetevő által létrehozott áramot; a szuperpozició elve alapján pedig kimondjuk — mivel a rendszer lineáris —, hogy az eredő áram az egyes áramösszetevők összegével egyenlő. Ily módon sztacionárius állapotra kapjuk a megoldást. Harmonikus, tehát egyszerű színusz-törvényt követő elektromotoros erőkkel pedig *Ohm* törvénye alapján a komplex-számok útján könnyen tudunk számolni.



1. ábra.
Periodikus függvény.

Az $U(t)$ függvény harmonikus összetevőkre bontása a *Fourier-sor* segítségével történik:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{in\omega t} \qquad \begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ n = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{2.1}$$

Euler tétele szerint $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ harmonikus függvény. Szemléletesebb alakban kifejezve:

$$U(t) = U_0 + U_1 \sin \omega t + U_2 \sin 2\omega t + \ldots + U_n \sin n\omega t + \ldots$$
$$+ U'_1 \cos \omega t + U'_2 \cos 2\omega t + \ldots + U'_n \cos n\omega t + \ldots$$

[1] *Heaviside* matematikai módszerébe *Cauchy* már fél évszázaddal előtte betekintést nyert.

A komponensek amplitudóinak (U_n) meghatározása céljából szorozzuk meg (2,1) mindkét oldalát $e^{-im\omega t}$-vel és integráljuk 0 és T között az idő szerint (m egész szám legyen).

$$\int_0^T U(t)\, e^{-im\omega t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T U_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\, dt$$

A jobboldal általános tagja

$$\int_0^T U_n e^{ik\omega t}\, dt = 0$$

ahol $k = n - m$ zérustól különböző. Színusz-függvény egy periódusra vett időintegrálja ugyanis zérus. A jobboldalból csak az a tag marad meg, amelynél $n = m$, vagyis $k = 0$, ugyanis $e^0 = 1$.

E szerint $$\int_0^T U_n\, dt = U_n T \qquad \text{ha } n = m$$

A fenti műveletet $m = 1, 2, 3 \ldots$ értékekre elvégezve mindig azt az együtthatót kapjuk, amelynek rendszáma m. Így

$$\int_0^T U(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = U_n T \quad \text{és} \quad U_n = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

Ezt az értéket (2,1)-be helyettesítve

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(\tau)\, e^{-in\omega\tau}\, d\tau\, e^{in\omega t} \tag{2.2}$$

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(\tau)\, e^{-in\omega(\tau - t)}\, d\tau \tag{2.3}$$

τ 0 és T között minden értéket felvesz, t pedig az integrálás szempontjából állandónak tekinthető, mert a vizsgált időpontot jelenti, τ pedig arra vonatkozik, ami egy perióduson belül történik.

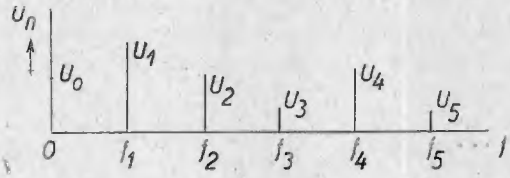
Fourier fenti tétele két lényeges részből áll. Az egyik kimondja, hogy minden periódikus függvény felbontható harmonikus összetevőkre,[1] amelyek frekvenciái egymással szoros összefüggésben vannak. A legkisebb rezgésszámú összetevő, az alaphullám frekvenciája a függvény periódusának felel meg, a többi összetevő frekvenciája pedig az alaphullám frekvenciájának egész számú többszöröse. Általában, egyes különleges esetektől eltekintve, az összetevők száma végtelen. A tétel másrészt módot ad az egyes összetevők amplitudóinak kiszámítására.

Fourier tétele alapján megrajzolható az $U(t)$ függvény színképe. Abszcisszának a frekvenciát, ordináta gyanánt az egyes rezgéskomponensek amplitudóit mérjük fel. Ily módon ú. n. vonalas színképet kapunk, amely periódikus függvényekre jellemző (2. ábra).

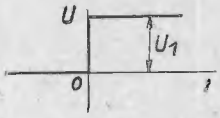
[1] Az analitikai feltételekre itt nem térhetünk ki, az elektrotechnikai gyakorlatban előforduló függvények általában felbonthatók.

Periódikus függvény harmonikus összetevőkre való bontását harmonikus analízisnek nevezzük, amely által kiindulási feladatunk sztacionárius állapotra megoldható. Kérdés, meg tudjuk-e oldani a feladatot abban az esetben is, ha a feszültség nem periódikus függvény? Ha pl. $U(t)$ a 3. ábra szerinti aperiodikus függvény. Ez a feszültségugrással gerjesztett hálózat esete. Ha aperiodikus függvényt is fel tudunk bontani harmonikus összetevőkre, akkor követhető az előbbi eljárás.

Figyeljük meg, mi történik a színképpel, ha a függvény alapperiodusa növekszik, vagyis az alapfrekvencia csökken (4. ábra). A színkép vonalsűrűsége nő és a határesetben, amikor az alapperiódus minden határon túl nő,

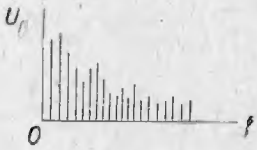


2. ábra.
Periodikus függvény színképe.



3. ábra.
Feszültségugrás.

az alapfrekvencia zérushoz tart, a vonalas színkép ú. n. folytonos színképbe megy át. A mennyiségtani kifejezést a *Fourier*-sor képletének általánosításából nyerjük. Induljunk ki a (2,3) egyenletből. Az integrálban az időt megkülönböztetésül τ-val jelöljük. τ 0 és T között változik és az integrálási független változót jelenti, míg t a vizsgált időpontra vonatkozik, tehát az integrálás szempontjából állandónak tekinthető és mint ilyent bevihetjük az $\int$-jel alá. 2π-vel osztva és szorozva:



4. ábra.
Vonalas színkép átmenete folytonos színképbe.

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \int_0^T U(\tau)\, e^{-in\omega(\tau - t)}\, d\tau$$

Végezzük el az imént vázolt határátmenetet, vagyis növeljük T-t minden határon túl, csökkentsük a függvény alapperiódusának frekvenciáját zérus felé. $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ végtelen kicsiny lesz, $d\omega$-val jelöljük, míg az összegezés átmegy integrálásba. Az integrálok határait kiterjesztjük $-\infty$ és $+\infty$ közé, mert egy periódus tartamára kell integrálni, az aperiódikus függvény pedig felfogható, mint végtelen hosszú periódusú periódikus függvény. $n\omega = n\, 2\pi/T$ véges értékű lehet, ha n elég nagy, ezért ω-val jelöljük. A lényeges különben csak az, hogy ω olyan mennyiség, amely szintén $-\infty$ és $+\infty$ között változik, ami az integrál képletében kifejezésre jut. Ezek szerint:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau)\, e^{-i\omega(\tau - t)}\, d\tau \qquad (2.4)$$

Ez a kifejezés Fourier-integrál néven ismeretes és ugyanúgy, mint a Fourier-sor képlete két részben is felírható:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, g(\omega)\, d\omega\,, \quad \text{ahol} \quad g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (2.5)$$

$g(\omega)$ nem más, mint egy elemi harmonikus összetevő amplitudója és a folytonos színkép burkoló görbéjét adja.

Példák.

a) A távolbalátás és a „radar" technikájában fontos szerep jut a rövid ideig tartó feszültséglökésnek (impulzus, lásd 5. ábra). Az átviteli rendszer, pl. erősítő méretezése szempontjából fontos az impulzus frekvenciaterjedelmének ismerete.

Legyen az impulzus tartama 2β, amplitudója pedig 1.

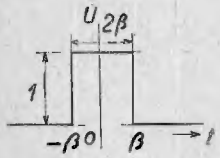
$$U(t) = 0, \quad \text{ha} \quad -\beta > t > \beta$$

$$U(t) = 1, \quad \text{ha} \quad -\beta < t < \beta$$

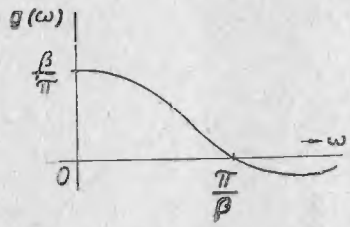
$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{1}{2\pi i \omega}\left(e^{-i\omega\beta} - e^{i\omega\beta}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin \omega\beta}{\omega}$$

Ha $\omega \to 0$, a szinuszt a szöggel helyettesíthetjük és így

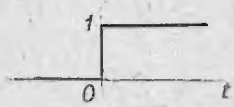
$$\underset{\omega \to 0}{g(\omega)} = \frac{\beta}{\pi}; \text{ viszont } g(\omega) = 0\text{-vá válik, ha } \omega\beta = \pi, \text{ máskép } \beta\, 2\pi f_1 = \pi, \text{ vagyis } f_1 = \frac{1}{2\beta}$$



5. ábra.
Impulzus ábrázolása.



6. ábra.
Impulzus színképe.



7. ábra.
Egységnyi ugrásfüggvény.

Az impulzus színképét a 6. ábra tünteti fel.

A színkép összetevőinek zöme f_1-nél kisebb frekvenciájú. Erősítők méretezésénél általában f_1-et szokás a sávszűrők határfrekvenciájának venni. Ha az impulzus tartama pl. 1 mikromásodperc, $f_1 = 1$ Mc.

b) Bontsuk most fel a feszültségugrás függvényét harmonikus összetevőkre. Az egységnyi ugrásfüggvény jelölése $U(t) = 1$. (lásd 7. ábra).

$$U(t) = 0, \text{ ha } t < 0$$

$$U(t) = 1, \text{ ha } t > 0$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{1}{2\pi i \omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi i \omega}$$

és

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\, d\omega \tag{2.6}$$

vagy más alakban:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega$$

A diszkontinuitás, vagy egységfüggvény matematikai kifejezésének ismerete egy fontos gyakorlati feladat megoldását teszi lehetővé, nevezetesen a feszült-

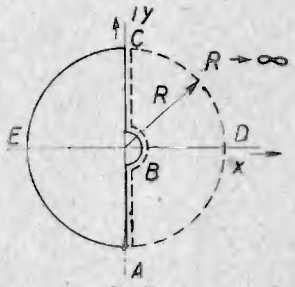
ségugrással gerjesztett hálózatban létrejött áramok és feszültségek időbeli lefolyásának meghatározását. Mivel ez az ú vezet leghamarabb *Heaviside* módszerének megértéséhez, a feszültségugrás függvényét közelebbről is megvizsgáljuk.

Nézzük meg, hogy (2.6) valóban az egységfüggvényt adja-e. Az integrál kiértékelését a következőképen végezzük: $i\omega = p$ helyettesítéssel

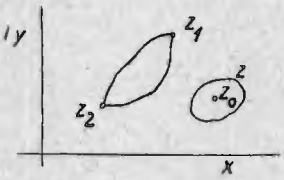
$$d\omega = \frac{1}{i}\,dp \qquad \text{és}$$

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp \tag{2.7}$$

Mivel p képzetes szám, a komplex számsíkban a képzetes tengely mentén kell végezni az integrálást. A 8. ábra az $U(t)$ függvény értelmezési tarto-



8. ábra.
Az ugrásfüggvény kiértékeléséhez.



9. ábra.
Komplex változós függvény értelmezési tartománya.

mányában az integrálási utakat tünteti fel. Az integrál kiértékeléséhez a komplex változ s függvénytan két fontos tételét alkalmazzuk.[1]

Egyik kimondja, hogy két pont között képezett vonalintegrál független az integrálási úttól, ha a függvény a vizsgált tartományban analitikus (differenciálható) (9. ábra). Ebből következik, hogy zárt vonal mentén

$$\oint f(z)\,dz = 0$$

abban az esetben, ha a vonal által bezárt tartományban a függvény reguláris, tehát nincsenek szinguláris pontjai. (Cauchy-féle integrál tétel.)

Ha azonban ebben a tartományban a függvénynek szinguláris pontja van, tehát olyan hely, ahol a függvény differenciálhányadosai 0 vagy ∞ határozatlan értéket vesznek fel, a zárt vonalintegrál zérustól különböző értéket ad. Az ilyen vonalintegrál meghatározása olymódon történhetik, hogy a függvényt a szinguláris pont (z_0) környezetében ($z - z_0$) hatványai szerint sorbafejtjük és a -1 kitevőjű tag együtthatóját 2π i-vel szorozzuk. Tehát:

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

a_{-1} együttható a függvény reziduuma a vizsgált szinguláris pontban (reziduumtétel).

[1] Lásd: Függelék.

Az egységfüggvény kiértékelését úgy végezzük, hogy $t < 0$ esetében (negatív időkre) az $ABCDA$ integrálási utat választjuk, hogy az R körív mentén p valós része pozitív legyen. A koordinátarendszer 0 pontjában lévő szinguláris pontot kis félkörrel jobbra kikerüljük

$$\int_{ABCDA} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0 \qquad \text{(Cauchy tétele szerint).}$$

$$\text{Ha } R \to \infty, \int_{CDA} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0, \quad \text{tehát } \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0, \quad \text{ha } t < 0.$$

Pozitív időkre, $t > 0$ $\oint_{ABCEA} \frac{e^{pt}}{p}\, dp \neq 0$, mert bezárja a $p = 0$ szinguláris pontot. A reziduumtétel értelmében, mivel

$$\frac{e^{pt}}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{tp}{1!} + \frac{t^2p^2}{2!} + \cdots\right) = \frac{1}{p} + t + \frac{t^2 p}{2!} + \cdots \qquad a_{-1} = 1$$

$$\text{és} \quad \oint_{p=0} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 2\pi i$$

Kimutatható, hogy a CEA ív mentén vett integrál t pozitív értékeire is zérus, ami könnyen belátható, ha tekintetbe vesszük, hogy a CEA ív két vége a képzetes tengely végtelenben fekvő pontján találkozik. Ezen a végtelenben zárt íven tehát a vonalintegrál önmagában zérus. Ezért a fenti eredmény a képzetes tengely mentén vett vonalintegrállal egyenlő.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 1 \qquad \text{ha } t > 0.$$

3. Feszültségugrás hatása lineáris rendszerre. Heaviside kifejtési képlete.

Ezek után térjünk vissza kiindulási feladatunkhoz. Az egységnyi feszültségugrás egy elemi összetevője:

$$dU_1 = \frac{dp}{2\pi i p} e^{pt} \qquad \text{ahol } p = i\omega$$

Ezzel a feszültségkomponenssel úgy számolhatunk, mint sztacionér állapotban állandó amplitudójú ω körfrekvenciájú rezgéssel. A hálózat kiválasztott ágában létrejött áramösszetevő

$$dI_1 = \frac{dp}{2\pi i p H(p)} e^{pt}$$

ahol $H(p) = H(i\omega)$ a hálózat vizsgált ágára vonatkozó impedancia. A $H(p)$ függvény tartalmazza a hálózat állandóit, L, R, C értékeket és a komplex részimpedanciákat: $i\omega L = pL$, $1/i\omega C = 1/pC$ és R.

$H(p)$ *Ohm* törvényével a szokott módon határozható meg. Az egységnyi feszültségugrás hatására létrejött áramerősség

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p\,H(p)}\,dp \tag{3.1}$$

Az integrált a reziduumtétel alkalmazásával ugyanúgy számítjuk ki, mint előbb. Az integrandusz szinguláris pontjait kis félkörökkel megkerüljük. A nevező zérushelyei adják az integrandusz ∞ helyeit, vagy pólusait.

Egy pólus a $p = 0$ hely, a többit a

$$H(p) = (p - p_1)\,(p - p_2)\ldots(p - p_n) = 0 \tag{3.2}$$

egyenlet $p_1, p_2, \ldots p_n$ gyökei szolgáltatják.

Az n-ik reziduumot az integrandusz hatványsorba fejtésével kapjuk p_n környezetében.

$$e^{pt} \to e^{p_n t} \qquad \text{és}$$

$$H(p) = H(p_n) + H'(p_n)\,(p - p_n) + \frac{1}{2!}H''(p_n)\,(p - p_n)^2 + \ldots$$

A jobboldal első tagja (3.2) értelmében zérus, $p - p_n$ egynél nagyobb kitevőjű hatványait másodrendű végtelen kicsinynek vehetjük, amivel

$$\left.\frac{e^{pt}}{p\,H(p)}\right|_{p=p_n} = \frac{e^{p_n t}}{p_n\,H'(p_n)}\,(p - p_n)^{-1} + \cdots \quad n = 1, 2, \ldots n,$$

$$\text{tehát} \qquad a_{-1} = \frac{e^{p_n t}}{p_n\,H'(p_n)}$$

Ha $p = 0$, akkor a kifejezés $\dfrac{1}{p\,H(p = 0)} = \dfrac{1}{H(0)}\,(p - 0)^{-1}$ és így

$$\boxed{I_1(t) = \frac{1}{H(0)} + \sum_{1}^{n} \frac{e^{p_n t}}{p_n\,H'(p_n)}} \tag{3.3}$$

Ilymódon Heaviside kifejtési képletéhez jutunk, amely a feszültségugrás által létrehozott áramerősség időbeli lefolyását adja.

Röviden összefoglalva a mondottakat, *Heaviside* képletével a számolás menete a következő:

1. $H(i\omega) = H(p)$ függvény meghatározása.
2. $H(p) = 0$ egyenlet $p_1, p_2, \ldots p_n$ gyökeinek kiszámítása.
3. $H'(p_n)$ differenciálhányadosok képezése.
4. Behelyettesítések.

$H(p)$ tört alakjában is előfordulhat, akkor képletünk a következő alakot veszi fel:[1]

$$I_1(t) = \frac{F(0)}{G(0)} + \sum_{1}^{n} \frac{F(p_n)}{p_n\,G'(p_n)}\,e^{p_n t} \tag{3.4}$$

Ebben az esetben is csak a nevező zérushelyeit kell meghatározni.

[1] Többszörös gyökök esetében ez a képlet nem használható. Ha tehát (3.2)-ben valamelyik gyöktényező 1-nél nagyobb kitevőn szerepel, más módszerhez kell folyamodni, amely a kifejtési tétel általánosításából nyerhető.

A $H(p)$ függvény a differenciálegyenletekből is felállítható. Ha ugyanis a hálózatot valamely $U(t) = U_0 e^{pt}$ harmonikus feszültség gerjeszti, a létrejött áram sztacionér értéke is $I(t) = I_0 e^{pt}$ alakú lesz. $I'(t) = pI_0 e^{pt} = pI(t)$,

$$U'(t) = pU(t), \quad \int I dt = \frac{1}{p} I_0 e^{pt} = \frac{1}{p} I(t)$$

Mivel a differenciálegyenlet minden tagja tartalmazza $U(t)$-t vagy $I(t)$-t, e^{pt}-vel rövidíthetünk és így ahol $I(t)$ első differenciálhányadosa szerepelt ott p marad mint szorzó, ahol $I(t)$ második differenciálhányadosa volt ott p^2 marad stb. Integrálásból $1/p$, kétszeri integrálás után $1/p^2$ marad stb. Tehát p a differenciálás, $1/p$ az integrálás műveletjele (szimbóluma) gyanánt is felfogható, de $p = i\omega$ fizikai jelentése a képzetes körfrekvencia. Csak a számolás mechanizálása érdekében nevezhetjük p-t differenciáloperátornak, mint ezt *Heaviside* tette, ami azonban önmagában még nem jogosít arra, hogy a számolás folyamán p-t mint algebrai számot kezelhessük.

Példák.

Heaviside képletének alkalmazását néhány egyszerű példával illusztráljuk.

a) Önindukciót és ellenállást tartalmazó áramkörbe állandó feszültségű áramforrást kapcsolunk (10. ábra).

$$U(t) = E\ 1. = RI + L\frac{dI}{dt}$$

(1. az egységnyi ugrásfüggvényt jelenti).
Egy harmonikus komponens amplitudója legyen

$$E_1 = R I_1 + i\omega L I_1 = I_1 (R + pL).$$

Heaviside terminológiájával: $p = \frac{d}{dt}$ a *differenciáloperátor*,

$R + pL$ *ellenállásoperátor*

$$I_1 = \frac{1}{R + pL} E_1$$

$H(p) = R + pL \qquad R + pL = 0, \qquad p_1 = -\frac{R}{L}$ (3.3) szerint:

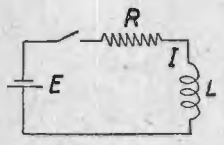
$H'(p) = L$

$H(0) = R$

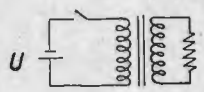
$$I = \left[\frac{1}{H(0)} + \frac{e^{p_1 t}}{p_1 H'(p_1)}\right] E = \left[\frac{1}{R} + \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{-\frac{R}{L} L}\right] E = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (3.5)$$

kifejezést kapjuk, amelyet természetesen ugyanilyen egyszerű módon a differenciálegyenlet megoldása is megadott volna.

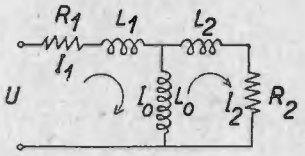
b) Feszültségugrás átvitele transzformátorral. Számítsuk ki egy ohmikus fogyasztóval terhelt transzformátornak a szekunder áramát, amelynek primer körében feszültségugrás lép fel (11. ábra).



10. ábra.
Feszültségugrás R, L áramkörben.



11. ábra.
Feszültségugrás átvitele transzformátorral.



12. ábra.
Transzformátor helyettesítő kapcsolása.

A transzformátor, mint ismeretes, a 12. ábrán feltüntetett helyettesítő kapcsolás-sal jellemezhető.

Heaviside kifejtési képletének felhasználásával a megoldás menete a következő: I_2-t szinuszos gerjesztő feszültség esetében sztacionér állapotra a szokásos módon számítjuk ki. Az önindukció mentén a feszültségesés pLI.

$$U = I_1 (R_1 + p L_1) + I_2 (R_2 + p L_2)$$

$$I_0 p L_0 = I_2 (R_2 + p L_2)$$

$$I_1 = I_0 + I_2$$

Legyen $L_1 + L_2 = L$ és $R_1 + R_2 = R$. Legyen továbbá a szórási önindukció L_1 és L_2 elhanyagolható L_0 mellett. A három ismeretlen I_0, I_1 és I_2 közül kettőt kiküszöbölve:

$$I_2 = U \frac{L_0 p}{p^2 L_0 L + p R L_0 + R_1 R_2} = \frac{U}{H(p)}$$

Heaviside képletében szereplő operátorfüggvény

$$H(p) = \frac{1}{L_0 p} (p^2 L_0 L + p R L_0 + R_1 R_2)$$

A $H(p) = 0$ egyenlet gyökei (a $p = \infty$ esetet kivéve)

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_0 L}}$$

A négyzetgyök alatti második tag kicsi lévén az elsőhöz képest, a gyököt kifejtve a következő közelítő értékeket kapjuk:

$$p_1 = -\frac{R_1 R_2}{L_0 R}$$

$$p_2 = -\frac{R}{L}$$

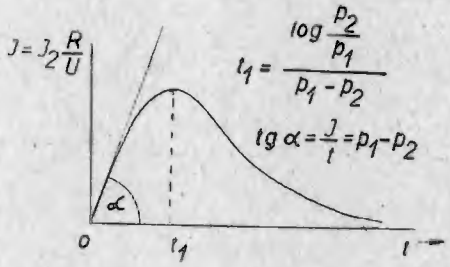
Heaviside kifejtési képlete:

$$I(t) = \frac{1}{H(0)} + \sum_n \frac{e^{p_n t}}{p_n H'(p_n)}$$

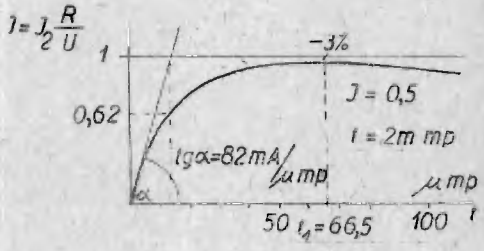
$$H'(p) = \frac{1}{p L_0} (2p L_0 L + L_0 R) = \frac{1}{p^2 L_0} (p^2 L_0 L + p L_0 R + R_1 R_2) = L - \frac{R_1 R_2}{L_0 p^2}$$

$$H'(p_1) = L - \frac{L_0 R^2}{R_1 R_2}, \qquad p_1 H'(p_1) = R - \frac{R_1 R_2 L}{R L_0} \cong R$$

$$H'(p_2) = L - \frac{L^2 R_1 R_2}{L_0 R^2}, \qquad p_2 H'(p_2) = -R + \frac{R_1 R_2 L}{R L_0} \cong -R$$



13. ábra.
Szekunderáram lefolyása a 11. ábra szerinti kapcsolásban.



14. ábra.
Szekunderáram lefolyása számértékekkel jellemezve.

Az U feszültségugrás hatására létrejött szekunderáram időfüggvénye ezek szerint

$$I_2(t) = U\left(\frac{e^{p_1 t}}{R} - \frac{e^{p_2 t}}{R}\right) \tag{3.6}$$

$$I_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

Az áram lefolyását a 13. ábra mutatja.

Számpélda: Egy transzformátoron a következő értékeket mértük:

$L_0 = 14{,}6\ hy$ $\quad R_1 = 8000\ \Omega$

$L = L_1 + L_2 = 0{,}27\ hy$ $\quad R_2 = 14\,300\ \Omega$ (áttételezve)

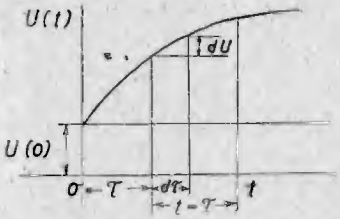
(3.6) szerint a 14. ábrán feltüntetett értékeket kapjuk.

4. Tetszőleges feszültségfüggvény. Duhamel tétele.

Az egységnyi feszültségugrás hatására létrejött áramfüggvény $I_1(t)$ ismeretében könnyen kiszámítható bármely tetszőleges lefolyású feszültség által okozott áram időfüggvénye.

A $t = 0$ időpontban a feszültség 0-ról $U(0)$-ra ugrik (15. ábra). A létrehozott áram a t időpontban

$$I(t) = U(0)\, I_1(t) + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} I_1(t-\tau)\, d\tau \tag{4.1}$$



15. ábra.
Tetszőleges feszültségfüggvény.

0-tól t-ig a feszültségfüggvény elemi feszültségugrásokra bontható (dU).

A τ időpontban az időegység alatt a feszültségváltozás $\frac{dU(\tau)}{d\tau}$, $d\tau$ időalatt $\frac{dU(\tau)}{d\tau} d\tau$ az elemi feszültségugrás, amely a τ időpontban jön létre. Mivel t időpontig $t - \tau$ idő telik el., az elemi feszültségugrás okozta elemi áram

$$dI = \frac{dU(\tau)}{d\tau} d\tau\, I_1(t-\tau)$$

mert *Heaviside* képlete a feszültség fellépésétől számított idő függvényében adja az áramot.

Az elemi áramok összege 0-tól t-ig való integrálással fejezhető ki. A (4.1) kifejezés, mint matematikai tétel, *Duhamel*-től származik, az angolszász irodalomban a szuperpozíció tétele néven is szerepel. Külön említést érdemel az a körülmény, hogy egy hálózat frekvencia-menetének $H(p)$ ismerete elegendő a berezgési folyamat meghatározásához.

Kimutatható, hogy matematikailag érvényes összefüggést kapunk akkor is, ha a változókat felcseréljük egymás között:

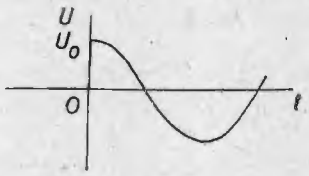
$$I(t) = U(0)\, I_1(t) + \int_0^t \frac{dU(t-\tau)}{d(t-\tau)} I_1(t)\, d\tau \tag{4.2}$$

$$I(t) = I_1(0)\, U(t) + \int_0 U(t-\tau)\, \frac{dI_1(\tau)}{d\tau}\, d\tau \tag{4.3}$$

$$I(t) = I_1(0)\, U(t) + \int_0^t U(\tau)\, \frac{dI_1(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, d\tau \tag{4.4}$$

A négy egyenlet közül esetenként a számolásra legalkalmasabbat választjuk.

Példa. Duhamel tételének bemutatására vegyük az előző példában tárgyalt transzformátort abban az esetben, amikor azt váltakozóáramú áramforrásra kapcsoljuk. Ebben az esetben lényeges, hogy a bekapcsolás a feszültség milyen fázisában történik. Legérdekesebb az az eset, amikor a transzformátort a feszültség maximumának pillanatában kapcsoljuk be. Ekkor ugyanis az áram rövid időre nagy értéket vesz fel. Legyen a 16. ábra szerint



16. ábra.
Váltakozó feszültség bekapcsolása csúcsértéken.

$$U(t) = U_0 \cos\omega t \qquad \text{ha } t > 0$$
$$= 0 \qquad \text{ha } t < 0$$

(3.6) szerint

$$I_1(t) = \frac{1}{R}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

amivel (4.1) alapján

$$I_2(t) = \frac{U_0}{R}\left[\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\cos\omega\tau\left(e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}\right) d\tau\right] \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{d\tau}\cos\omega\tau = -\omega\sin\omega\tau = -\omega\,\frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i},$$

amit (4.5)-be helyettesítve az integrandusz exponenciális függvényekké egyszerűsödik. A műveletek elvégzése után a képzetes kitevőjű exponenciális függvényeket ismét szögfüggvényekké alakítva végeredményül a következő kifejezést nyerjük:

$$I_2(t) = \frac{U_0}{R}\left[\omega\,\frac{p_2 - p_1}{\sqrt{(p_1^2 + \omega^2)(p_2^2 + \omega^2)}}\sin(\omega t + \varphi) + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 + p_1^2}\right)e^{p_1 t} - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 + p_2^2}\right)e^{p_2 t}\right] \tag{4.6}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \omega\,\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2 - \omega^2} \tag{4.7}$$

(4.6) jobboldalán az első tag berezgett állapotra érvényes, a másik kettő pedig a tranziens folyamatot jellemzi.

Eddigi fejtegetéseink során elérkeztünk ahhoz a ponthoz, ahol alapfeladatunkat a maga teljességében megoldhatjuk. Az ismertetett Heaviside-féle képiethez még sok számolási szabály tartozik, ezeket azonban az áttekinthetőség kedvéért egyelőre nem tárgyaljuk.

Heaviside a zsení intuiciójával dolgozott és sokszor olyan úton jutott az eredményhez, hogy a tétel matematikai alapját nem tudjuk felfogni. Elő-

szeretettel alkalmazta az operátorfüggvények sorbafejtését és ezen a téren figyelemreméltó eredményeket ért el, de a kellő mennyiségtani megalapozás nélkül. Ismét egy példa világítja meg legjobban a kérdést.

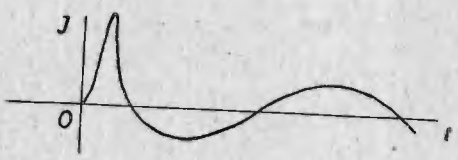
A C kondenzátort R ellenálláson át állandó E feszültségű telepből töltjük (18. ábra)

$$E = R\,I + U \qquad\qquad I = C\frac{dU}{dt}$$

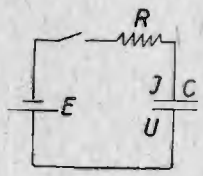
$$E = R\,C\frac{dU}{dt} + U \qquad\qquad \frac{1}{RC} = \alpha$$

$$\alpha\,E = \frac{dU}{dt} + \alpha\,U$$

Legyen $\frac{d}{dt} = p$, vagyis



17. ábra.
Szekunderáram lefolyása a transzformátor feszültségcsúcson való bekapcsolásakor.



18. ábra.
Kondenzátor feltöltése ellenálláson át.

a differenciálás szimbolumát jelöljük p-vel és kezeljük úgy, mint egy algebrai számot. Ez értelmetlen dolog, jól tudjuk, de nézzük meg, mit eredményez.

$$\alpha\,E = (p + \alpha)\,U, \qquad\qquad U = E\frac{\alpha}{p + \alpha}$$

Az $\frac{\alpha}{p + \alpha}$ ú. n. operátorfüggvényt fejtsük hatványsorba a binomiális tétel szerint a következőképen:

$$\frac{\alpha}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p}\left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{p}}\right) = \frac{\alpha}{p}\left(1 - \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha^2}{p^2} - \frac{\alpha^3}{p^3} + \ldots\right) = \frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\alpha^3}{p^3} - \ldots$$

Az operátorfüggvény hatványsorba fejtése után most a második önkényes feltevést tesszük: kijelentjük, hogy ha p differenciálást jelentett, akkor legyen $1/p$ az integrálás műveletjele; $1/p^2$ jelentsen kétszeri integrálást t szerint stb. Ezzel

$$\frac{\alpha}{p + \alpha} = \frac{\alpha\,t}{1!} - \frac{\alpha^2\,t^2}{2!} + \frac{\alpha^3\,t^3}{3!} = 1 - e^{-\alpha\,t}$$

$$U = E\,(1 - e^{-\alpha\,t}) \qquad\qquad \begin{array}{l} E = 0,\ t < 0 \\ E = \text{állandó},\ t > 0 \end{array}$$

Az eljárás tehát minden különössége ellenére helyes eredményre vezetett. Most próbáljuk meg a sorbafejtést másképen elvégezni:

$$\frac{\alpha}{p + \alpha}\,E = \frac{1}{1 + \frac{p}{\alpha}}\,E = \left(1 - \frac{p}{\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} - \frac{p^3}{\alpha^3} + \ldots\right)E$$

Ha p egyszeri, p^2 kétszeri differenciálást jelent, úgy $U = E$, mert $E =$ állandó, ha $t > 0$. Az eredmény ebben az esetben csak a kiegyenlítődés utáni állapotot jellemzi. Be kell látnunk tehát, hogy olyanok kezében, akik nem rendelkeznek elegendő rutinnal és olyan bonyolultabb feladatok esetében, amelyeknél az eredményből nem ellenőrizhető a számolás helyessége, ez a módszer nem alkalmazható minden további nélkül. A hatványsor konvergenciája nem is ellenőrizhető, mert p nem matematikai mennyiség. Másrészt az operátorszámolás sok esetben igen leegyszerűsíti a számolás munkáját.

Heaviside képletét ugyan matematikai alapon levezettük, de a módszer továbbfejlesztéséből eredő további szabályok nem mindegyike rendelkezik kellő mennyiségtani megalapozottsággal. A matematikai alátámasztás szükségessége ezért mindinkább előtérbe került és a matematikusok új alapra igyekeztek fektetni a Heaviside által felállított operátorszámolási szabályokat. Ez az új alap a Laplace-féle integrálon alapuló függvénytranszformáció.

A Laplace-transzformáció alkalmazásával egyébként lényegében ugyanazok a számolási szabályok vezethetők le, mint amelyeket Heaviside módszere ad.

5. A Laplace-féle függvénytranszformáció.

A Fourier-integrál következő alakja:[1]

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

fizikailag egy időben változó mennyiség frekvenciaszpektrumának előállítását, ill. egy időfüggvénynek színképével való ábrázolását jelenti, matematikailag pedig az $U(t)$ és $g(\omega)$ függvény közötti kapcsolatot fejezi ki.

Az a művelet, amely új független változó bevezetésével valamely függvényt más értelmezési tartományba vezet át, a függvénytranszformáció egy faja.[2]

A Fourier-integrált kissé átalakítva $i\omega = p$, $d\omega = \frac{1}{i} dp$ helyettesítéssel

$$f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp$$

kifejezéseket nyerjük, amelyek a Laplace-integrálhoz vezetnek.

[1] A Fourier-integrál (2.4) alatti teljes kifejezését kettéválasztva most (2.5)-tő eltérően az $\frac{1}{2\pi}$ tényezőt $U(t)$ kifejezéséhez csatoljuk.

[2] $g(\omega)$ kifejezésében $U(t)$-n végrehajtott műveletek következtében t kiesik az integrálási határok behelyettesítése után. Ugyanúgy $U(t)$ kifejezésében ω esik ki.

Legyen t valós, $p = c + q$ tetszésszerinti komplex szám, de valós része pozitív, legyen továbbá $U(t) = 0$, ha $t < 0$, akkor

$$\boxed{f(p) = \int_0^\infty U(t)\, e^{-pt}\, dt} \tag{5.1}$$

és

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp} \tag{5.2}$$

Az első integrál Laplace-féle integrál, vagy Laplace-transzformáció néven ismeretes, amely a t valós változó helyett a p komplex parametert vezeti be. $U(t)$-t eredeti, vagy főfüggvénynek, értelmezési tartományát főtartománynak, $f(p)$-t pedig képfüggvénynek, értelmezési tartományát képtartománynak, vagy alsó tartománynak nevezik. A fizikai jelentésre való tekintettel $U(t)$-t időfüggvénynek, $f(p)$-t pedig frekvenciafüggvénynek, vagy operátorfüggvénynek fogjuk hívni. A frekvenciatartományból az időtartományba való visszatérés a reciprok transzformáció útján történik.

A Laplace-transzformáció műveletjele:

$$\boldsymbol{L}\, U(t) = f(p), \qquad \boldsymbol{L}^{-1} f(p) = U(t)$$

A Laplace-transzformáció alkalmazása az elektrotechnikában a már vázolt fizikai vonatkozásoktól függetlenül a következő elgondoláson alapszik: A feladat első fogalmazásban időfüggvények és deriváltjaik közötti kapcsolat alakjában jelentkezik. A nehézkesen kezelhető időfüggvényt Laplace-integrállal átvezetjük a frekvenciatartományba, ahol a feladat rendszerint egyszerűbb alakban jelentkezik és a keresett érték Laplace-transzformáltja könnyebben kifejezhető explicit formában. Ha ebben a kifejezésben felismerjük valamely függvény Laplace-transzformáltját, úgy ez a függvény a feladat megoldását adja. Az időtartományba való visszatérés a reciprok transzformáció útján is történhetik. Fizikai hasonlattal élve gondoljuk el, hogy feladatunk valamely vasércből a tiszta fémvas kiválasztása, amely szilárd halmazállapotban nehezen volna elérhető. Ezért az ércet megolvasztjuk, áttérünk cseppfolyós halmazállapotra, ahol megfelelő technológiai eljárással elkülönítjük a tiszta fémet, majd lehűtéssel ismét visszatérünk szilárd halmazállapotba. Hasonló eljárást követünk a matematikában a Laplace-transzformáció és reciprok transzformáció alkalmazásával. A $\boldsymbol{L}$-transzformáció mennyiségtani értelmezéséhez nincs szükség az időfüggvény frekvenciaszpektrumának fogalmára, sem pedig a harmonikus komponensekkel való számolásra, bár alakilag a képletek ezekre a fizikai fogalmakra visszavezethetők. A $\boldsymbol{L}$ és $\boldsymbol{L}^{-1}$ transzformáció egészen egyszerűen azt jelenti, hogy adott feltételek mellett, a kijelölt műveletek elvégezhetők és a két függvény közötti reciprocitás fennáll.

A Laplace-integrál tulajdonságaival részletesen *Doetsch* foglalkozik alapvető művében: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, ez a mű azonban inkább matematikusok, mint mérnökök számára készült.

A Laplace-integrálokról táblázatokat készítettek, ami nagymértékben megkönnyíti a gyakorlati alkalmazást.

A következőkben megvizsgáljuk a Laplace-integrál néhány, a gyakorlat számára fontosabb tulajdonságát és megvizsgáljuk, hogy az egyik tartományban végzett műveletek a másik tartományban a transzformált függvény milyen változását vonják maguk után.

6. Számolási szabályok Laplace integrállal.

a) Disztributív elv:

$$L\{U_1(t) + U_2(t)\} = L\,U_1(t) + L\,U_2(t) \tag{6.1}$$

b) Lineáris helyettesítés az időtartományban.
(Az időlépték lineáris megváltoztatása.)

Legyen $L\,U(t) = f(p)$

az időléptéket lineárisan transzformálva:

$$t = \frac{\tau}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}, \quad \tau = \alpha t - \beta, \quad d\tau = \alpha\, dt \quad \text{és}$$

$$L\,U(\alpha t - \beta) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty U(\tau) e^{-p\left(\frac{\tau}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\right)} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}p} \int_0^\infty U(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau$$

Ez utóbbi integrál az U függvény $\frac{p}{\alpha}$ paraméterrel képzett Laplace-transzformáltja. A transzformáció feltétele:

$$U(\tau) \equiv 0, \text{ ha } \tau < 0 \quad \text{vagy} \quad U(\alpha t - \beta) \equiv 0, \text{ ha } t < \frac{\beta}{\alpha}$$

Ezzel

$$L\,U(\alpha t - \beta) \begin{cases} = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} f\left(\frac{p}{\alpha}\right) & \text{ha } t > \frac{\beta}{\alpha} \\ = 0 & \text{ha } t < \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \tag{6.2}$$

A gyakorlatban előforduló esetek:

$$\beta = 0, \quad \alpha > 0 \quad L\,U(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad \text{ha } t > 0 \tag{6.2.1}$$

(Hasonlósági tétel.) Az operátortartományban kis p-nek az időtartományban nagy t felel meg és fordítva, vagyis

$$\text{ha } p \to 0,\ t \to \infty \text{ és ha } p \to \infty,\ t \to 0.$$

A hasonlósági tétel fontos gyakorlati feladatok megoldását könnyítheti meg, mint később látni fogjuk. Amikor ugyanis bonyolultabb operátorfüggvényekkel van dolgunk és az időtartományba való áttérés nehézséggel jár, a bekapcsolást követő pillanatokban ($t \to 0$) vagy a bekapcsolás után hosszú idő mulva ($t \to \infty$) a keresett időfüggvény (áram) közelítő alakja rendszerint könnyebben előállítható, ha az operátorfüggvényben megfelelően $p \to \infty$ vagy $p \to 0$-t helyettesítünk és a lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtjuk.

A második gyakorlati eset:

$$\alpha = 1, \quad \beta > 0 \quad \boldsymbol{L}U(t-\beta) = e^{-\beta p} f(p) \quad \text{ha } t > \beta$$
$$= 0 \quad \text{ha } t < \beta \tag{6.2.2}$$

(Eltolási szabály.) Az időlépték β-val való eltolása pozitív irányban az operátortartományban $e^{-\beta p}$-vel való szorzásnak felel meg.

c) Differenciálás az időtartományban.

Legyen $\boldsymbol{L}\,U(t) = f(p) \quad \boldsymbol{L}\,U'(t) = ?$

$$\boldsymbol{L}\,U'(t) = \int_0^\infty e^{-pt}\, U'(t)\, \mathrm{d}t$$

Parciális integrálással: $\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$ alapján

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Legyen $\quad u = e^{-pt} \qquad du = -\,p\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

és $\quad \mathrm{d}v = U'(t)\,\mathrm{d}t \qquad v = U(t)$

$$\boldsymbol{L}\,U'(t) = \left| e^{-pt} U(t) \right|_0^\infty + p \int_0^\infty U(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\,U(0) + p\,\boldsymbol{L}\,U(t)$$

$$\boldsymbol{L}\,U'(t) = p\,f(p) - U(0) \tag{6.3.1}$$

Hasonlóképen

$$\boldsymbol{L}\,U''(t) = p^2 f(p) - [p\,U(0) + U'(0)] \tag{6.3.2}$$

és általános esetben

$$L\,U^n(t) = p^n f(p) - [p^{n-1}\,U(0) + p^{n-2}\,U'(0) + \ldots U^{(n-1)}(0)] \tag{6.3.3}$$

Heaviside megfelelő számolási szabálya a jobboldalon csak az első tagot tartalmazza, ami arra mutat, hogy csak energiamentes rendszerekben fellépő erő hatásának kiszámítására alkalmas. A Laplace-integrállal való számolásnál ez a megkötöttség nem áll fenn. Ez az egyik alapvető különbség a két módszer között.

d) Integrálás az időtartományban.

Az előbbi tételhez hasonló egyszerű módon kimutatható, hogy

$$\boldsymbol{L}\left\{ \int_0^t U(t)\,\mathrm{d}t \right\} = \frac{1}{p}\,\boldsymbol{L}\,U(t) = \frac{1}{p} f(p) \tag{6.4.1}$$

$$\boldsymbol{L}\left\{ \int_0^t \int_0^\xi U(t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \right\} = \frac{1}{p^2}\,\boldsymbol{L}\,U(t) = \frac{1}{p^2} f(p) \tag{6.4.2}$$

Ebben az esetben nincs eltérés *Heaviside* idevonatkozó szabályától.

e) Lineáris helyettesítés a frekvenciatartományban.

$$L^{-1} f(\alpha p \pm \beta) = \frac{1}{\alpha} U\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{\mp \frac{\beta}{\alpha} t} \tag{6.5}$$

Különleges esetek:

$$\beta = 0, \quad \alpha > 0 \quad L^{-1} f(\alpha p) = \frac{1}{\alpha} U\left(\frac{t}{\alpha}\right) \tag{6.5.1}$$

$$\beta \neq 0 \quad \alpha = 1 \quad L^{-1} f(p \pm \beta) = e^{\mp \beta t} U(t) \tag{6.5.2}$$

(Csillapítási tétel.) A csillapítási tétel fontos gyakorlati alkalmazása a következő eset: ismeretes egy operátorfüggvényhez tartozó időfüggvény; ha ugyanaz az operátorkifejezés $p + \beta$ függvényében jelentkezik, az előbbi időfüggvény exponenciális csillapítású lesz.

f) Differenciálás a frekvenciatartományban.
Legyen $L\,U(t) = f(p)$ akkor (6.5.2) figyelembevételével

$$L\{(1 - e^{-\alpha t})\, U(t)\} = f(p) - f(p + \alpha) = -[f(p + \alpha) - f(p)]$$

α-val osztva:

$$L\left\{\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} U(t)\right\} = -\frac{f(p + \alpha) - f(p)}{\alpha}$$

Ha $\alpha \to 0$, $e^{-\alpha t}$ sorbafejtése után a határmenetnél

$$L\{t\, U(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} f(p) \tag{6.6.1}$$

szabályt kapjuk, amelynek ismételt alkalmazása adja az általános ú. n. multiplikációs tételt:

$$f^{(n)}(p) = (-1)^n\, L\{t^n\, U(t)\} \tag{6.6.2}$$

g) Integrálás a frekvenciatartományban

$$L^{-1}\left\{\int_p^\infty f(p)\, \mathrm{d}p\right\} = \frac{1}{t} U(t) \tag{6.7.1}$$

$$L^{-1}\left\{\int_p^\infty \mathrm{d}p \int_p^\infty \mathrm{d}p \ldots \int_p^\infty f(p)\, \mathrm{d}p\right\} = \frac{1}{t^n} U(t) \tag{6.7.2}$$

h) Faltung-tétel.
Ismeretes két operátorfüggvényhez tartozó időfüggvény

$$L^{-1} f_1(p) = U_1(t), \quad L^{-1} f_2(p) = U_2(t)$$

Feladat meghatározni a két operátorfüggvény szorzatának megfelelő időfüggvényt. A tételt levezetés nélkül adjuk:

$$L^{-1}\{f_1(p)\, f_2(p)\} = \int_0^t U_1(\tau)\, U_2(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t U_1(t - \tau)\, U_2(\tau)\, d\tau \tag{6.8.1}$$

A Faltungnak nevezett integrál műveletjele a következő:

$$L^{-1}\{f_1(p)\, f_2(p)\} = U_1(t) * U_2(t) \tag{6.82}$$

7. Gyakori Laplace-integrálok. Képlettár.

Legyen $U(t) = \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ha } t < 0 \\ \text{ha } t > 0 \end{matrix}$ (Ugrásfüggvény) $U(t) = 1$.

$$\boldsymbol{L}\,1. = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\left|e^{-pt}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

$$\boldsymbol{L}\,1. = \frac{1}{p} \tag{7.1}$$

Legyen $U(t) = t$

$$\boldsymbol{L}t = \int_0^\infty t\,e^{-pt}\,dt$$

Parciális integrálással

$$u = t \qquad du = dt$$

$$dv = e^{-pt}\,dt \qquad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$$

$$\boldsymbol{L}t = \left|-\frac{t}{p}e^{-pt}\right|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p^2}$$

$$\boldsymbol{L}t = \frac{1}{p^2} \tag{7.2.1}$$

és általános esetben

$$\boldsymbol{L}\,\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{p^{n+1}} \tag{7.2.2}$$

Legyen $U(t) = e^{\alpha t}$

$$\boldsymbol{L}e^{\alpha t} = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}\,dt = \frac{1}{\alpha - p}\left|e^{(\alpha-p)t}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}$$

$$\boldsymbol{L}e^{\pm\alpha t} = \frac{1}{p \mp \alpha} \qquad \text{ha } R_e(p-\alpha) > 0 \tag{7.3}$$

Legyen $U(t) = \sin\,\omega t$

$$\boldsymbol{L}\sin\omega t = \frac{1}{2i}\boldsymbol{L}\left\{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right\} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\boldsymbol{L}\sin\omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{7.4}$$

Legyen $U(t) = \cos\omega t$

$$\boldsymbol{L}\cos\omega t = \boldsymbol{L}\left\{\frac{d}{dt}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega}\sin 0$$

$$\boldsymbol{L}\cos\omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{7.5}$$

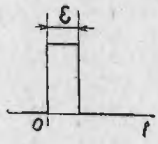
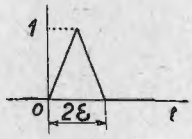
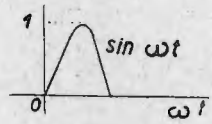
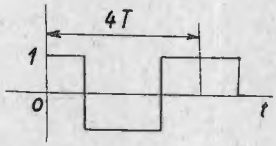
(7.4) és (7.5) feltétele: $R_e(p) > R_e(\omega)$.

Laplace-integrál táblázat

$$f(p) = \int_0^\infty U(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$U(t) = L^{-1} f(p)$	$f(p) = L\, U(t)$	Konv. abszc.
$1.$	$\frac{1}{p}$	0
t	$\frac{1}{p^2}$	0
$\frac{t^n}{n!}$ (n egész)	$\frac{1}{p^{n+1}}$	0
t^α $(R_e\, \alpha > 1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p\,\alpha+1}$	0
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	$R_e\, \alpha$
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p\,(p+\alpha)}$	,,
$\frac{e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}$	$\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}$	$R_e\,(\alpha_2 - \alpha_1)$
$\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\, e^{-\alpha_1 t} + (\alpha_1-\alpha_2)\, e^{-\alpha_2 t} + (\alpha_2-\alpha_1)\, e^{-\alpha_3 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\,(\alpha_2-\alpha_3)\,(\alpha_3-\alpha_1)}$	$\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)(p+\alpha_3)}$	$R_e\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$
$1 + 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$	$\frac{1}{p}\,\frac{p-\alpha_1}{p+\alpha_1}\,\frac{p-\alpha_2}{p+\alpha_2}$	$R_e\,(\alpha_2 - \alpha_1)$
$L_n(\alpha t) = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \binom{n}{K} \frac{(\alpha t)^K}{K!}$	$\frac{(p-\alpha)^{n-1}}{p^n}$	0
$e^{-\alpha t} L_n(\alpha t)$	$\frac{p^n}{(p+\alpha)^{n+1}}$	0
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$R_e\, \omega$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	,,
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	,,
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	,,
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	,,

$U(t) = L^{-1} f(p)$	$f(p) = L\,U(t)$	Konv. absze
$t \cos \omega t$	$\dfrac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	,,
$\sinh \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	,,
$\cosh \omega t$	$\dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$	,,
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	0
$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	0
$1 - \Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$
$\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-u^2}\,du$		
$\dfrac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\sqrt{t}$
$e^t[\Phi(\sqrt{t}) - 1] + \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p} + 1}$	$\sqrt{t}$
$1 + e^t[\Phi(\sqrt{t}) - 1]$	$\dfrac{1}{p(\sqrt{p} + 1)}$	,,
$e^t[1 - \Phi(\sqrt{t})]$	$\dfrac{1}{\sqrt{p} + p}$	,,
$1 + 2e^t[\Phi(\sqrt{t}) - 1]$	$\dfrac{1}{p}\,\dfrac{1 - \sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}}$	,,
$J_0(t) = \sum\limits_{K=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^K}{(K!)^2}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2K}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$	0
$J_0(i\,\alpha\,t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}}$	0
$J_0(\alpha\,t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}$	0
$e^{-\alpha t} J_0(i\,\alpha\,t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \alpha^2}}$	0
$J_0(\sqrt{t^2 - x^2})$ $U(t) = 0$, ha $t < x$	$\dfrac{e^{-x\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{p^2 + 1}}$	0

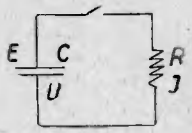
$U(t) = L^{-1} f(p)$	$f(p) = L\, U(t)$	Konv. absze
$J_0(\alpha \sqrt{t})$	$\dfrac{e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}}{p}$	0
$J_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}$	0
$J_n(t) = 2^n \sum\limits_{K=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^K}{K!} \dfrac{n!}{(n+K)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2K+n}$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	0
$\dfrac{1}{t} J_n(\alpha t) \qquad R_e\, n > 0$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+\alpha^2} - p)^n}{n\, \alpha^n}$	0
$t^{\frac{n}{2}} J_n(\alpha \sqrt{t})$	$\dfrac{\alpha^n}{2^n p^{n+1}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$	0
$\alpha^n J_n(\alpha t) \qquad R_e\, n > -1$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+\alpha^2} - p)^n}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	0
	$\dfrac{1 - e^{-\varepsilon p}}{p}$	
	$\dfrac{(1 - e^{-\varepsilon p})^2}{\varepsilon p^2}$	
	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)$	
	$\dfrac{1}{p}\left(1 - \dfrac{1}{\cosh p\, T}\right)$	

Példák Laplace-transzformáció alkalmazására.

Először egy egészen egyszerű példát vegyünk, amelyet lépésről lépésre fogunk kidolgozni a számolás menetének kidomborítása céljából. Egy E feszültségre töltött kondenzátort ellenálláson át kisütünk (19. ábra). Az áramkör differenciál-egyenlete:

$$U = R I \qquad I = -C \frac{dU}{dt}$$

$$U = -\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dt} \qquad \frac{1}{RC} = \alpha$$



19. ábra.
Kondenzátor kisülése ellenálláson át.

A differenciálegyenlet minden tagját transzformáljuk az operátortartományba:

$$L\,U = U$$

és (6.3.1) alapján

$$L \frac{dU}{dt} = p\,U - U(0) = p\,U - E$$

Ezzel

$$\alpha\,U = -p\,U + E$$

egyenletünk az operátortartományban. Megoldása:

$$U = E \frac{1}{p + \alpha}$$

Mivel (7.3) szerint

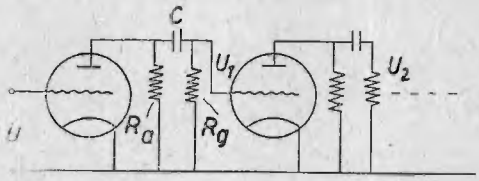
$$L^{-1} \frac{1}{p + \alpha} = e^{-\alpha t},$$

$$U = E\,e^{-\alpha t}$$

az időtartományba visszatranszformált egyenlet.

8. RC-csatolású erősítő berezgése.

Több fokozatú, ellenállás-kondenzátor csatolású erősítő kimenő feszültségének időbeli lefolyását keressük abban az esetben, ha az erősítő bemenő kapcsain feszültségugrás lép fel (20. ábra).



20. ábra.
RC-csatolású erősítő.

Egyszerűség kedvéért valamennyi fokozat csatoló elemeit egyenlőnek vesszük.

Legyen mindegyik cső belső ellenállása R_b
erősítési tényezője K
meredeksége S

$$K = S\,R_b$$

A gerjesztő feszültség $U(t) = E\,1.$ és $L\,U(t) = U = E\frac{1}{p}$

A számolást Laplace-transzformációval végezzük, de az alapegyenletet az operátortartományban állítjuk fel, hasonlóan Heaviside módszeréhez, így megtakarítható a differenciálegyenlet felállítása. Az erősítőt a gerjesztés előtt — váltóáramilag — villamosan semleges állapotban levőnek tételezzük fel, ezért a változók és deriváltjaik zérusnak vehetők, ha $t < 0$. A csatoló kondenzátor kapcsain a feszültség $U_c = \frac{1}{c}\int I_c\,dt$ és $L\,U_c = \frac{1}{c}\,L\int I_c\,dt$,

vagyis $U_c = \frac{I_c}{pC}$

A kondenzátor reaktanciája tehát $\frac{1}{pC}$.

A recept tehát ugyanaz, mint Heaviside módszerénél: a keresett értékeket szinusos feszültségek esetére számítjuk ki $i\omega$ helyett p-t írva. Hogy ez így van, az nem véletlen. A L-transzformáció ugyanis alakilag a Fourier-integrállal egyezik és a számolás fizikai háttere a rendszerre rákapcsolt feszültség elemi harmonikus komponensekre való bontása. Az operátortartományban felállított egyenlet egy harmonikus feszültségösszetevő hatásának kifejezése. A reciprok L-transzformáció pedig ezen elemi hatásoknak az összegezését jelenti.

Az anódimpedancia:

$$Z_a = \frac{R_a\left(R_g + \frac{1}{pC}\right)}{R_a + R_g + \frac{1}{pC}} = \frac{R_a\,(1 + pC\,R_g)}{1 + pC\,(R_a + R_g)}$$

Az anódfeszültség:

$$U_a = U\,K\,\frac{Z_a}{Z_a + R_b}$$

Erről a második cső rácsára jut

$$U_1 = U_a\,\frac{R_g}{R_g + \frac{1}{pC}} = U_a\,\frac{1}{1 + \frac{1}{pC\,R_g}} = U\,K\,\frac{1}{1 + \frac{R_b}{Z_a}}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{pC\,R_g}}$$

Behelyettesítés és rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$U_1 = US\,R\,\frac{p}{p + \alpha}$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{T} = \frac{R}{R_0}\,\frac{1}{C\,R_g}$$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_g}$ R a három párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője.

$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_a}$ R_0 a cső belső ellenállásának és munkaellenállásnak az eredője.

Rendszerint $R \cong R_0$, mert a gyakorlatban $R_g \gg R_a$, ezért $T = C R_g$ időállandót gyakorlatilag a csatolókondenzátor és rácsellenállás értéke szabja meg. A következő cső rácsán a feszültség

$$U_2 = U_1 S R \frac{p}{p+\alpha} = U (S R)^2 \left(\frac{p}{p+\alpha}\right)^2$$

és n fokozat után

$$U_n = U (S R)^n \left(\frac{p}{p+\alpha}\right)^n$$

Számítsuk ki először $U_1(t)$-t. $U = E \frac{1}{p}$ behelyettesítéssel

$$U_1 = E S R \frac{1}{p+\alpha}$$

Az időtartományba való visszatérést reciprok Laplace-transzformációval végezzük:

$$L^{-1} U_1 = U_1(t) \quad \text{és} \quad L^{-1} \frac{1}{p+\alpha} = e^{-\alpha t} \quad [(7.3) \text{ szerint.}]$$

amivel

$$U_1 = E S R e^{-\alpha t}$$

A harmadik cső rácsán

$$U_2 = E (S R)^2 \frac{1}{p} \left(\frac{p}{p+\alpha}\right)^2$$

Meghatározandó az $f(p) = \frac{p}{(p+\alpha)^2}$ operátorfüggvényhez tartozó időfüggvény. $f(p)$-t írjuk a következő alakban:

$$f(p) = p \frac{1}{p+\alpha} \frac{1}{p+\alpha}$$

A (6.8.2) szabály értelmében, ha ismeretes két operátorfüggvényhez különkülön a hozzájuk tartozó időfüggvény, akkor a két operátorfüggvény szorzata a két időfüggvény Faltungjának Laplace-transzformáltja.

Jelen esetben

$$L^{-1} \frac{1}{p+\alpha} = e^{-\alpha t} \quad \text{és}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+\alpha} \frac{1}{p+\alpha} \right\} = e^{-\alpha t} * e^{-\alpha t} = F(t)$$

Tisztázandó még a p tényező szerepe.

A (6.3.1) szabály értelmében

$$L F'(t) = p L F(t) = p \frac{1}{p+\alpha} \frac{1}{p+\alpha} \quad \text{és így}$$

$$F'(t) = \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} * e^{-\alpha t}) = L^{-1} \frac{p}{(p+\alpha)^2}$$

a keresett időfüggvény. A Faltungot elvégezve

$$e^{-\alpha t} * e^{-\alpha t} = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha \tau} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau = \left| t e^{-\alpha t} \right|_0^t = t e^{-\alpha t}$$

és differenciálva

$$F'(t) = e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} = (1 - \alpha t) e^{-\alpha t}$$

kifejezést nyerjük, amellyel

$$U_2 = E (SR)^2 (1 - \alpha t) e^{-\alpha t}$$

Számítsuk még ki a harmadik fokozat után a rácsfeszültséget.

$$U_3 = E (SR)^3 \frac{1}{p} \left(\frac{p}{p + \alpha} \right)^3$$

Hasonlóan az előbbi eljáráshoz:

$$f(p) = p \left(p \frac{1}{p + \alpha} \frac{1}{p + \alpha} \right) \frac{1}{p + \alpha}$$

$$L^{-1} f(p) = \frac{d}{dt} \left(F'(t) * e^{-\alpha t} \right)$$

$$F'(t) * e^{-\alpha t} = \int_0^t (1 - \alpha \tau) e^{-\alpha \tau} e^{-\alpha (t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \left(t - \frac{\alpha t^2}{2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\alpha t} \left(t - \frac{\alpha t^2}{2} \right) \right] = e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) - \alpha e^{-\alpha t} \left(t - \frac{\alpha t^2}{2} \right) = e^{-\alpha t} \left(1 - \alpha t - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right)$$

$$U_3 = E (SR)^3 \left(1 - 2\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) e^{-\alpha t}$$

Tovább folytatva az n-ik fokozat után

$$U_n = E (SR)^n L_{n-1} (\alpha t) e^{-\alpha t}$$

feszültséget kapjuk, ahol

$$L_n(x) = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \binom{n}{K} \frac{x^K}{K!}$$

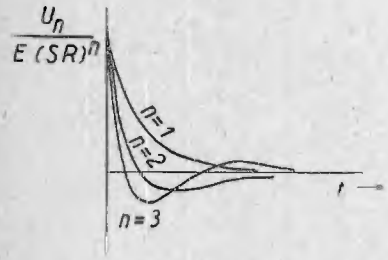
az ú. n. Laguerre-féle polinom. Az idevonatkozó Laplace-integrál képlete

$$L \left\{ e^{-\alpha t} L_{n-1} (\alpha t) \right\} = \frac{p^{n-1}}{(p + \alpha)^n}$$

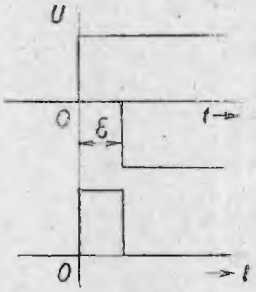
Az egyes fokozatok utáni feszültségeket a 21. ábra tünteti fel.

A feladat ilyen alakban való megoldása gyors feszültség, vagy áramváltozások (távírójelek, impulzusok) erősítésének tanulmányozását teszi lehetővé. Rövid feszültséglökések, impulzusok átvitele a távolbalátás és a radar technikájában különösen fontos szerepet játszik. Feszültségugrásról

impulzusra úgy térhetünk át, hogy az ugrás bekövetkezésétől számított és az impulzus szélességének megfelelő idő (ε) elmúltával ellenkező értelmű ugrást alkalmazunk, ami a folyamat tükörképének megismétlődését vonja maga után (22. ábra). A kimenő feszültség változása a valóságban nem ugrásszerű; példánkban nem vettük tekintetbe a csövek elektrodáinak, a kapcsolási elemeknek és a huzaloknak a földhöz és egymáshoz való kapacitásait, sem pedig önindukcióit. Ezeknek az adatoknak a figyelembevétele az átviteli görbe szögleteinek legömbölyödését eredményezi (23. ábra).



21. ábra.
RC-csatolású erősítő rácsfeszültségeinek lefolyása a bemeneten alkalmazott feszültségugrás esetében.



22. ábra.
Feszültséglökés (impulzus) leszármaztatása.

23. ábra.
Impulzus valóságos átviteli görbéje.

9. Feladatok a vezetékek elméletéből.

Eddigi példáinkat véges számú kapcsolási elemből álló rendszerek köréből vettük, amelyek térbeli terjedelme a szóbanforgó hullámhosszakhoz viszonyítva kicsiny. Ilyen rendszerek jellemző értékei (áram, feszültség) egy-egy időfüggvénnyel kifejezhetők.

Ezzel ellentétben léteznek olyan rendszerek, amelyek térbeli méretei akkorák, hogy a vizsgált értékek nem fejezhetők ki véges számú időfüggvénnyel. Így pl. míg egy rezgőkör villamos állapotváltozása a köráram és egy részfeszültség pl. az önindukció kapcsain lévő feszültség időfüggvényével leírható, addig egy hosszú vezetékben végbemenő villamos folyamat jellemzésére az áram és feszültség térbeli elosztásának ismerete is szükséges. A vezeték állapotváltozásának kifejezéséhez tehát kétváltozós függvény szükséges: $U(x,t)$, $I(x,t)$. Míg az előbbi rendszerek feladatai közönséges differenciál-egyenletekhez vezetnek, addig az utóbbi esetben parciális differenciál-egyenletekkel kerülünk szembe. A megoldáshoz természetesen a határfeltételek ismerete is szükséges. Az egydimenziós kontinuumok, a homogén vezetékek elméletéből vett néhány egyszerűbb feladatot fogunk az operátorszámolás szabályaival megoldani.

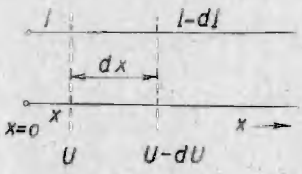
A 24. ábra egy homogén vezetéket tüntet fel, a következő állandókkal:

R ellenállás hosszegységenként

L önindukció „

C kapacitás „

G átvezetés „



24. ábra.
Homogén vezetékpár.

A vezeték kezdetén feszültségugrást hozunk létre és meghatározzuk az áram időfüggvényét a vezeték elején és az áram elosztását a végtelen hosszúnak képzelt vonal mentén. A gerjesztés előtt legyen a vonal energiamentes, így ha $t < 0$, a feszültség, az áram és deriváltjaik 0-sal egyenlők.

Az egyenletet hasonlóképen előbbi példáinkhoz az operátor-tartományban állítjuk fel, ahol U és I a feszültség, ill. áram Laplace-transzformáltjai.[1] Az operátortartományban nyert szimbolikus megoldás $I = f(x, p)$ az áram vonalmenti elosztására lesz jellemző. Az időtartományba való áttérés az áram hely és idő függvényét $I(x, t)$ adja.

$$-\frac{dU}{dx} = (R + pL)\,I \qquad -\frac{d^2U}{dx^2} = (R + pL)\frac{dI}{dx}$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G + pC)\,U \qquad -\frac{d^2I}{dx^2} = (G + pC)\frac{dU}{dx} \tag{9.1}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \gamma^2 U, \quad \frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I, \quad \text{ahol } \gamma^2 = (R + pL)(G + pC) \tag{9.2}$$

Egy partikuláris megoldás $U = A\,e^{kx}$, ezzel

$$\frac{dU}{dx} = A\,k\,e^{kx}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = A\,k^2 e^{kx} \qquad \text{behelyettesítve (9.2)-be:}$$

$$A\,k^2 e^{kx} = \gamma^2 A\,e^{kx}, \quad k^2 = \gamma^2, \quad k_1 = \gamma, \quad k_2 = -\gamma$$

$$U = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

Ezt az értéket (9.1)-be helyezve

$$-\frac{dU}{dx} = -A_1\gamma\,e^{\gamma x} + A_2\gamma\,e^{-\gamma x} = (R + pL)\,I$$

Ebből

$$I = -\frac{\gamma}{R + pL}A_1 e^{\gamma x} + \frac{\gamma}{R + pL}A_2 e^{-\gamma x} \quad \frac{\gamma}{R + pL} = \sqrt{\frac{G + pC}{R + pL}} = \frac{1}{Z}$$

Z-t hullámellenállásnak nevezzük.

$$U = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

$$I = -\frac{A_1}{Z}e^{\gamma x} + \frac{A_2}{Z}e^{-\gamma x}$$

A vonal egy nagyon távoli helyén, $x \to \infty$

$$U_\infty = 0 = A_1 e^{\gamma x} \qquad \text{tehát } A_1 = 0$$

[1] Ilymódon parciális differenciálegyenletek nem is lépnek fel, mert a L-transzformációval az egyik független változó, az idő kiküszöbölődött. Az operátoregyenletek ezek szerint közönséges differenciálegyenletek, melyek független változója a hely koordinátája.

A vonal bemenetén, $x = 0$

$$I = I_0 = \frac{A_2}{Z}, \quad \text{tehát} \quad A_2 = Z I_0$$

$$U = U_0 = A_2 \quad A_2 = U_0 \quad \text{és} \quad Z = \frac{U_0}{I_0}$$

Ezzel végtelen hosszú vonal esetében

$$U = U_0 e^{-\gamma x} \qquad \text{ahol } \gamma = \sqrt{(R + pL)(G + pC)}$$

$$I = \frac{U_0}{Z} e^{-\gamma x} \qquad Z = \sqrt{\frac{R + pL}{G + pC}} \tag{9.3}$$

adja a megoldást az operátortartományban, ami egyszersmind szinusz-feszültséggel gerjesztett vonal berezgett állapotában a vonalmenti feszültséget és áramot ábrázolja. Az időtartományban a megoldás a vonal jellege szerint igen különböző függvényekhez vezet. Az operátorfüggvény a szerint alakul, hogy a vezeték állandói egymáshoz hogyan aránylanak, melyik van túlsúlyban.

1. Veszteségmentes vezeték. $R = 0$, $G = 0$.

Ha a vonal ellenállása és átvezetése elhanyagolható, akkor

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{és} \quad \gamma = p\sqrt{LC} = \frac{1}{v} p \qquad \text{ahol } v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$U = U_0 e^{-\frac{x}{v} p}$$

$$I = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{x}{v} p}$$

Az operátortartományban $e^{-\alpha p}$-vel való szorzás az időlépték α-val való eltolását jelenti pozitív irányban [(6.2.2) szabály].

E szerint

$$\boldsymbol{U}(x, t) = \boldsymbol{U}\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\boldsymbol{I}(x, t) = \boldsymbol{I}\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{ha} \quad t > \frac{x}{v} \tag{9.4}$$

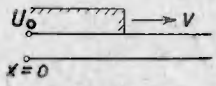
$$\text{és } \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} = 0 \quad \text{ha } t < 0$$

Ha $t = 0$, $x = 0$, $\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_0$

Ha $x = vt$, $\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0$ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_0$

Tehát a vezeték x pontjában a bekapcsolástól számított $t = \frac{x}{v}$ idő múlván ugyanaz a feszültség és az áram, mint a bekapcsolás időpontjában a veze-

ték bemenő kapcsain. Ez annyit jelent, hogy a vezetéken a feszültség és áramlökés mint vándorhullám $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sebességgel terjed tova csillapítás nélkül (25. ábra).



25. ábra. Csillapításmentes vezetéken terjedő vándorhullám.

2. Torzításmentes vezeték.

Torzításmentes az átvitel, ha az állandók között a következő arányosság áll fenn:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \alpha$$

Ezzel

$$\gamma = \sqrt{(R + pL)(G + pC)} = \sqrt{L(\alpha + p)C(\alpha + p)} = (\alpha + p)\sqrt{LC} =$$

$$= (\alpha + p)\frac{1}{v}$$

és

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{G + pC}{R + pL}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

amit (9.3)-ba behelyettesítve:

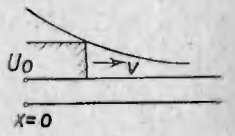
$$U = U_0 e^{-\frac{\alpha}{v}x} e^{-\frac{x}{v}p} \qquad U(x,t) = U\left(t - \frac{x}{v}\right) e^{-\frac{\alpha}{v}x}$$

$$I = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\alpha}{v}x} e^{-\frac{x}{v}p} \qquad I(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} U\left(t - \frac{x}{v}\right) e^{-\frac{\alpha}{v}x} \tag{9.5}$$

A megoldás ugyanaz, mint a veszteségmentes vezeték esetében, azzal a különbséggel, hogy úgy a feszültség, mint az áram vándorhulláma a vezeték kezdetétől távolodva exponenciális törvény szerint csökken, alakja azonban nem szenved változást (26. ábra).

3. Thomson-kábel $L = 0$, $G = 0$.

A következő feladatunkban olyan kábelek átviteli tulajdonságait fogjuk vizsgálat tárgyává tenni, amelyeknek csak ellenállásával és kapacitásával kell számolnunk, az önindukció és átvezetés elhanyagolható. Ilyen jellege a hosszú tengeri kábeleknek volt, amelyek önindukciója a régebben használt lassú távírójelek mellett nem volt számottevő.



26. ábra. Torzításmentes vezetéken terjedő vándorhullám.

$$\gamma = \sqrt{RCp}, \quad Z = \sqrt{\frac{R}{pC}}$$ amivel

$$U = U_0 e^{-x\sqrt{RCp}}$$

$$I = U_0 \sqrt{\frac{pC}{R}} e^{-x\sqrt{RCp}} \tag{9.6}$$

A vezeték kezdetére állandó E feszültséget kapcsolva:

$$U_0 = E\frac{1}{p}, \qquad \text{amivel}$$

$$U = E\frac{1}{p}e^{-x\sqrt{Rcp}} \quad \text{és} \quad I = E\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-x\sqrt{Rcp}} \tag{9.7}$$

Tekintettel arra, hogy az $\frac{1}{\sqrt{p}}$ operátor[1] a vonalak berezgéseinek számításánál fontos szerepet tölt be, a hozzátartozó időfüggvény kiszámítását részletesen közlöm. Ez az operátor különben a hővezetés elméletében is szerepel.

$$L^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}\,dp$$

Az integrandusz szinguláris pontja $p = 0$, amelyet hasonlóképen az ugrásfüggvény számításához, kis félkörrel megkerülünk. $t < 0$ esetében az integrá-

27. és 28. ábra.
$1/\sqrt{p}$ L-integráljának képzéséhez.

lási utat ugyancsak kiegészíthetjük a jobb félsíkban fekvő nagy félkörrel és mivel az így nyert integrálási út mentén és a tartomány belsejében a függvény reguláris, az integrál értéke 0 (27. ábra). Más azonban a helyzet, ha $t > 0$. $\frac{1}{\sqrt{p}}$ ugyanis nem egyértelmű függvény és 2π-vel való forgatással előjele megváltozik.

Legyen ugyanis $p = re^{i\varphi}$ akkor $\sqrt{p} = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$ és $re^{i(\varphi+2\pi)} = re^{i\varphi}$, de $\sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}} = -\sqrt{p}$.

Zárt vonalintegrált tehát nem alkalmazhatunk $p = 0$ körül. A nehézségek megkerülése céljából az integrálási utat megváltoztatjuk olymódon, hogy a forgatás csak $-\pi$ és $+\pi$ között történjék a 28. ábra szerint:

Az integrálási út így nem metszi az abszcisszát, hanem a valós tengely végtelenben fekvő pontján záródik.

Legyen $p = re^{i\varphi}$, $\sqrt{p} = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $p = 0$ környezetében $e^{pt} = 1$

$$dp = ri\,e^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{ri\,e^{i\varphi}}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 0, \quad \text{ha } r \to 0.$$

[1] $\sqrt{p}$ az operátorszámolás *Heaviside* szerinti fogalmazásában irracionális rendszámú differenciálhányados képzését jelenti, amiből sejthetjük, hogy ez a feladatunk az eddigieknél bonyolultabb.

Marad még a valós tengely alsó és felső éle mentén vezetett integrál. Az alsó él mentén

$$p = q\,e^{-i\pi} = -q, \quad \sqrt{p} = \sqrt{q}\,e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad dp = dq\,e^{-i\pi}, \qquad \text{amivel}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-qt}\,e^{-i\pi}}{\sqrt{q}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-qt}}{\sqrt{q}}\,dq$$

A felső él mentén

$$p = q\,e^{i\pi} = -q, \quad \sqrt{p} = \sqrt{q}\,e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad dp = dq\,e^{i\pi}, \qquad \text{amivel}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-qt}\,e^{i\pi}}{\sqrt{q}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-qt}}{\sqrt{q}}\,dq.$$

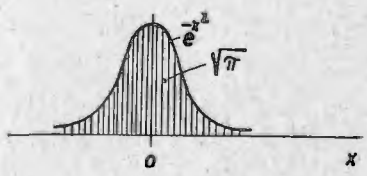
Ezzel

$$L^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-qt}}{\sqrt{q}}\,dq$$

$qt = z^2$ helyettesítéssel $dq = \frac{2}{t}z\,dz$, $\sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{t}}z$, amivel

$$L^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2\sqrt{t}}{t\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z^2}z}{z}\,dz = \frac{2}{\pi\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

Ez utóbbi integrál a Gauss-féle hibaintegrál 0 és ∞ között, amelynek értéke $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (a 29. ábrán a haranggörbe és abszcissza által bezárt terület fele).



29. ábra.
Haranggörbe.

Így $L^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ és

$$I(0, t) = E\sqrt{\frac{C}{R\,\pi\,t}} \qquad (9.8)$$

A képlet szerint a bekapcsolás pillanatában az áram végtelen nagy, ami azonban elméleti határeset, és annak a következménye, hogy az áramforrás belső ellenállását és a vonal induktivitását elhanyagoltuk.

Hátra van még a feszültség és áram vonalmenti elosztásának kiszámítása. Mivel $L\,U_0 = E\frac{1}{p}$,

$$U = E\,L^{-1}\frac{e^{-x\sqrt{RCp}}}{p} \quad \text{és} \quad I = E\sqrt{\frac{C}{R}}\,L^{-1}\frac{e^{-x\sqrt{RCp}}}{\sqrt{p}}$$

A következő két operátorfüggvényt kell kiértékelnünk:

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \quad \text{és} \quad \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}, \quad \text{ahol } a = x\sqrt{RC}$$

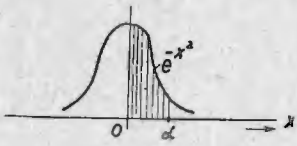
A részletes számítást itt mellőzöm. Laplace-integrál táblázatokban fellelhető.

$$L^{-1}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad \text{és}$$

$$L^{-1}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$\Phi(\alpha)$ a következőképen definiált függvény:

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

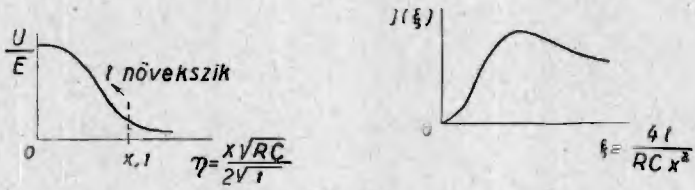


30. ábra.
Gauss-féle hibafüggvény.

a *Gauss*-féle hibafüggvény, amely a 30. ábra szerint a haranggörbe és az x-tengely által bezárt terület $x = 0$ és $x = \alpha$ közötti részének $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$-szerese. Ezzel a teljes megoldás

$$U(x, t) = E\left[1 - \Phi\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right], \quad I(x, t) = E\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{e^{-\frac{x^2RC}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \tag{9,9}$$

A *Thomson*-kábelen végbemenő folyamatokat állandó feszültség rákapcsolása esetében a 31. ábrán feltüntetett két diagramm ábrázolja. A *Thomson*-kábel



31. ábra.
Thomson-kábelen végbemenő folyamatok.

villamos állapotváltozását leíró fenti függvények gyakorlatilag csak közelítő értékeket adnak. Nem vettük ugyanis számításba sem az áramforrás belső ellenállását, sem a kábel induktivitását és a vezetését. Ennek az lett a következménye, hogy a kábel kezdetén a bekapcsolás pillanatában végtelen nagy áramot kapunk. $I(\xi)$ görbéje a kábel elejére nem érvényes. Az áram és feszültség görbéi ezenkívül azt mutatják, hogy a kábel kezdetétől bármekkora távolságban t tetszőleges kis értékeire is véges, bár kicsiny értéket kapunk. Ez pedig végtelen nagy terjedési sebességet tételez fel.[1] $x = 1$ távolságban U görbéje szerint t növekedésével η csökken, U növekszik.

[1] Ez a körülmény a képlet gyakorlati alkalmazását nem korlátozza számottevő mértékben.

Következő példánkban a valóságot jól megközelítő esetet fogunk tárgyalni, nevezetesen az átvezetés nélküli kábelt.

4. Átvezetés nélküli kábel: $G = 0$.

Ez az eset igen fontos a gyakorlat számára, mert jó kábeleknél az átvezetés hatása legtöbbször elhanyagolható. Itt is végtelen hosszú vagy a hullámellenállásával lezárt vezetéket fogunk tárgyalni, abban az esetben, ha a vezeték elején feszültségugrás lép fel: $U_0 = E\frac{1}{p}$.

$$\gamma = \sqrt{(R + pL)\,pC} \qquad Z = \sqrt{\frac{R + pL}{pC}}$$

$U = U_0 e^{-\gamma x}$ A vonal elején az áram lefolyását fogjuk kiszámítani, tehát $x = 0$.

$$I = \frac{U_0}{Z} e^{-\gamma x}$$

$$I_0 = E\frac{1}{pZ} = \frac{E}{p\sqrt{\frac{R + pL}{pC}}} = E\frac{Cp}{\sqrt{RCp + p^2 LC}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2\alpha p}}$$

ahol $\alpha = \frac{R}{2L}$

$$I_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \alpha^2}}, \qquad f(p) = \frac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \alpha^2}}$$

Ezt az operátor függvényt kell most az időtartományba visszavezetni. Először egy hasonló, de egyszerűbb függvényen végezzük el ezt a műveletet:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}$$

A visszatranszformálást most *Heaviside*nek egy előszeretettel használt módszere szerint sorbafejtés útján fogjuk végezni, de a *Laplace*-transzformáció alapján.

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{p^2}{p^2 + \alpha^2}} = \frac{1}{p}\left[1 + \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

A binomiális tétel szerint kifejtve,

$$f(p) = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2!}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3\, 3!}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^6 + \ldots\right]$$

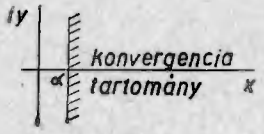
Mielőtt az időtartományba tagonként visszatranszformálnánk, néhány szót szentelünk ennek a kérdésnek a megvilágítására. Más helyen említettem, hogy egy operátorfüggvény hatványsorát nem lehet mennyiségtanilag értelmezni az operátorszámolás *Heaviside* szerinti fogalmazásában. Ha $p = \frac{d}{dt}$ a differenciálás műveletjele, akkor az

$$a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p_2} + \ldots$$

végtelen sor összetartási feltételei ismeretlenek. Ha azonnan egy operátorfüggvény valamely fizikai folyamatot jellemző időfüggvény *Laplace*-transzformáltja, $\mathcal{L}\, U(t) = f(p)$ akkor a p paraméter mennyiségtani értelemben vett valóságos szám és $f(p)$ egy tartomány belsejében, ahol reguláris, ábrázolható végtelen sorral. Közelfekvő az a gondolat, hogy egy ilyen sort tagonként $\mathcal{L}^{-1}$-val visszavezessünk az időtartományba. Ez általában lehetséges, bár nem mindig és a matematikusoknak még nem sikerült olyan általános érvényű kritériumot felállítani, amely minden esetet felölel. A fizikai és technikai gyakorlatban előforduló függvények esetében azonban legtöbbször egyszerű módon eldönthető, hogy ez az eljárás alkalmazható-e. A tagonkénti visszatranszformálás a fenti fajta sor esetében az $U(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$ sort szolgáltatja az időtartományban. Tudjuk azt, hogy $\mathcal{L}\, U(t) = f(p)$ egy p_r konvergencia-abszcisszától jobbra p minden értékére összetartó, ha $|p| > p_r$. A hasonlósági tétel szerint pedig nagy p-nek kis t felel meg: $p \to \infty$, $t \to 0$. $f(p)$ konvergenciájából következik, hogy a kezdeti időpont közelében, tehát t kis pozitív értékeinél $U(t)$ létezik és ott hatványsorral ábrázolható. Egy függvénynek egy pontban csak egy hatványsora van, $\mathcal{L}^{-1} f(p)$ sora tehát $U(t)$-t ábrázolja. Ugyanez érvényes p minden olyan értékére, amely a konvergencia-abszcisszától jobbra áll és sora összetartó. Például $\mathcal{L}\, e^{\alpha t} = \dfrac{1}{p-\alpha}$ konvergencia abszcisszája $p = \alpha$.

$$\mathcal{L}\, e^{\alpha t} = \int_0^\infty e^{(\alpha - p)t}\, dt$$

ugyanis csak akkor összetartó, ha $R_e p > \alpha$ (32. ábra).



32. ábra. Operátorfüggvény konvergenciatartománya.

Ha $f(p)$ $\dfrac{1}{p}$ hatványai szerint sorba fejthető, akkor

$$U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_n \frac{a_n}{p^n}\right\}$$

Ezekután térjünk vissza az átvezetésnélküli vezeték operátorfüggvényéhez. A *Laplace*-transzformáció szabályai szerint

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{t^n}{n!}$$

ha n pozitív egész szám. Ezt a szabályt a sor tagjaira alkalmazva:

$$\mathcal{L}^{-1} f(p) = 1 - \frac{(\alpha t)^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{(\alpha t)^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{(\alpha t)^6}{2^6 (3!)^2} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{\alpha t}{2}\right)^4}{2!^2} - \frac{\left(\frac{\alpha t}{2}\right)^6}{3!^2} + \ldots = J_0(\alpha t)$$

Ez a sor definició szerint az első fajú 0 rendszámú *Bessel*-függvény hatványsora. A konvergencia abszcissza $\alpha t = 0$, ami annyit jelent, hogy αt pozitív értékeire $J_0(\alpha t)$ összetartó és így a keresett időfüggvényt ábrázolja. Ha αt helyett $i\alpha t$-t írunk,

$$\mathcal{L}\, J_0(i\alpha t) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}}$$

Képzetes argumentumú *Bessel*-függvény valós értékű, mert a sor csak páros kitevőjű tagokat tartalmaz. A képzetes argumentum azt eredményezi, hogy a sor minden tagja pozitív.

A példánkban szereplő operátorfüggvény már csak annyiban különbözik attól, amelyet most számítottunk ki, hogy abban p helyett $p + \alpha$ szerepel. A csillapítási tétel értelmében, ha

$$L^{-1} f(p) = U(t),$$

akkor

$$L^{-1} f(p + \alpha) = e^{-\alpha t}\, U(t).$$

Ezzel tehát

$$L^{-1} \frac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \alpha^2}} = e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\, t)$$

és feladatunk megoldása

$$I_0(t) = E \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\, t), \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \tag{9,10}$$

A *Bessel*-függvény numerikus értékei táblázatokból kivehetők. Mivel a *Bessel*-függvények berezgési folyamatok tárgyalásánál is gyakran előfordulnak, e függvények fogalmának megvilágítására még néhány szót kell szentelnünk.

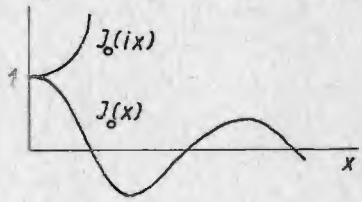
Főképen olyan feladatok esetében, amelyeknél egy tengely körüli körszimmetria van, pl. egy köralakú membrán rezgési alakjainak vizsgálatánál, a következő, *Bessel*ről, ezeknek a függvényeknek első feldolgozójáról elnevezett differenciálegyenlet lép fel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldását végtelen sorok szolgáltatják, amelyek általában gyorsan konvergálnak és így gyakorlati numerikus számolás céljaira is alkalmasak. Ha $n = 0$, a megoldás a már ismertetett sor, $x = 0$, $y = 1$ kezdeti feltételek mellett. n határozza meg a *Bessel*-függvény rendszámát.

$$y = J_0(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(K!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2K}$$

K pozitív egész. $J_0(x)$ hasonlít egy csillapított koszínusz görbéhez, amelynek frekvenciája az argumentum növekedésével csökken. $J_0(i\,x)$ parabolához hasonló görbe (33. ábra).



33. ábra.
Bessel-függvények.

Ha $n = 1, 2, \ldots$ egész szám, akkor a nagyobb rendszámú *Bessel*-függvényekhez jutunk.

$$J_n(x) = 2^n \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K n!}{K!\,(n + K)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2K+n}$$

Ezek a sorok eléggé gyorsan konvergálnak és így legalábbis az argumentum nem túlságosan nagy értékeinél numerikus számolás céljaira is felhasználhatók, egyébként a keresett értékek táblázatokban fellelhetők.

Hátra van még a vezeték mentén az áram elosztásának meghatározása. Az operátortartományban

$$I = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{e^{-\gamma x}}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\alpha^2}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{e^{-\frac{x}{v}\sqrt{(p+\alpha)^2-\alpha^2}}}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\alpha^2}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,f(p)$$

A részletes számítást mellőzve *Laplace*-integrál táblázatban megtalálhatjuk:

$$L^{-1} f(p) = e^{-\alpha t} J_0\left[i\alpha\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}\right] \quad \text{ha } t > \frac{x}{v}$$

$$= 0 \quad \text{ha } t < \frac{x}{v}$$

Az áram terjedési sebessége a vezeték mentén: $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I(x,t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\alpha t} J_0\left[i\alpha\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}\right] \quad \text{ha } t > \frac{x}{v} \qquad (9{,}11)$$

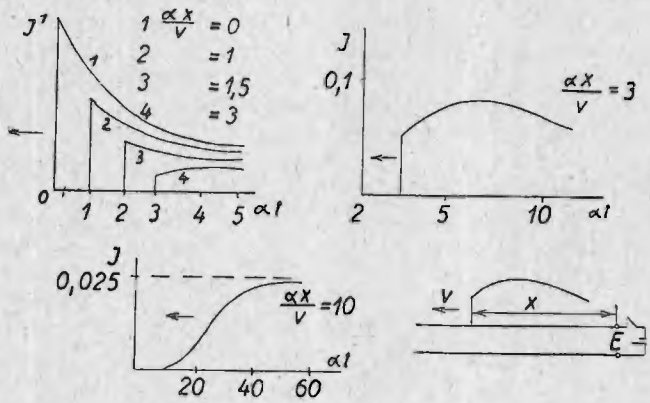
$$= 0 \quad \text{ha } t > \frac{x}{v}$$

$t = \frac{x}{v}$ idő multán az áram vándorhulláma a vezeték x pontjába érkezik és értéke (9,10) és (9,11) értelmében:

$$I_{t=\frac{x}{v}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}x} \qquad (9{,}12)$$

mert $J_0(0) = 1$.

Az áram időbeli lefolyása a vezeték különböző pontjaiban egységes görbékkel ábrázolhatók (34—35. ábra).



34. és 35. ábra.
Átvezetés nélküli vezetéken terjedő vándorhullámok.

Vizsgáljuk még meg, hogy az áram a vezeték elején I_0 mekkora lesz a bekapcsolás után elég hosszú idő mulva.

$$\underset{t \to \infty}{I_0} = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{J_0(i\alpha t)}{e^{\alpha t}}$$

A tört számlálója vagy nevezője kerül e túlsúlyba? Ha mindkét függvényt végtelen sorral ábrázoljuk és úgy akarnánk a kérdést eldönteni, nehéz munkát kellene végeznünk. Ilyen esetekben az operátorszámolás szabályai nagy segítséget nyújtanak. Meg kell vizsgálnunk a fenti kifejezés operátorfüggvényét.

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2\alpha p}}$$

A *Laplace*-transzformáció szabályaiból tudjuk, hogy ha az időtartományban $t \to \infty$, akkor az operátortartományban $p \to 0$. p számára elegendő kis értékeket választva elérhetjük, hogy $p^2 \ll 2\alpha p$, akkor

$$\underset{p \to 0}{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{p}} \qquad \text{és} \qquad \underset{t \to \infty}{\underset{p \to 0}{L^{-1} f(p)}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \to 0$$

$e^{\alpha t}$ tehát gyorsabban divergál, mint $J_0(i\alpha t)$. Ezzel $\underset{t \to \infty}{I_0} = 0$. Ez azért van így, mert a kábel átvezetését nem vettük számításba és a vezetéket végtelen hosszúnak tételeztük fel.

Az áram lefolyását ábrázoló diagrammok az áram vándorhullámait mutatják, amelyek most a jobboldalt elképzelt betáplálási pontból kiindulva a nyíl irányában balfelé haladnak v sebességgel. A diagrammok szerint — legalábbis a vezeték kezdetétől nem túl nagy távolságra —, a hullámfront merőleges a vezetékre, más szóval a hullám beérkezésének pillanatában az áram és feszültség ugrásszerűen emelkedik. A valóságban ez az emelkedés nem ugrásszerű, hanem véges idő alatt folytonosan megy végbe, aminek az oka az, hogy a vezeték anyagában, a drót belsejében az elektromágneses tér kialakulása véges idő alatt megy végbe és szembehelyezkedik a folyamattal, vagyis az áram kialakulásával. A huzal ellenállását az egyenáramú ellenállással azonosnak, állandónak vettük, holott ez a valóságban a hullám beérkezésekor megnő, mint egy rövid ideig tartó szkin-effektus eredménye. Mindennek eredményeképen a hullámfront ellaposodik, annál nagyobb mértékben, minél távolabbra kerül a hullám a vezeték elejétől. A hullámfront ellaposodásának mértéke a vezeték méreteinek és anyagának figyelembevételével kiszámítható és az ismertetett számolási eljárásokkal a feladat bonyolult voltához képest egyszerűen levezethető. A gyakorlati követelményeknek megfelelően egyszerűsített végeredmény a feszültséghullámra vonatkoztatva:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= E\,[1 - \Phi(z)], \qquad \text{ha } t > \frac{x}{v} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{ha } t < \frac{x}{v} \end{aligned} \tag{9,13}$$

ahol

$$z = \frac{4{,}9}{\sqrt{vt - x}} \frac{\sqrt{\mu \varrho}}{Z} \frac{x}{a}$$

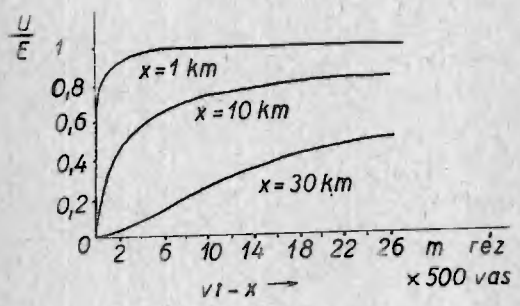
μ = permebilitás

ϱ = fajlagos ellenállás Ω/m. mm²

$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ hullámellenállás Ω

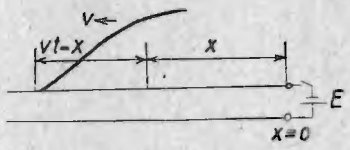
a = vezeték drót sugara cm.

x = vezeték kezdetétől számított távolság km-ben



36. ábra.

Hullámfront ellaposodása $Z = 500 < 1$ cm átmérőjű réz-, ill. vasdrótból készült szabad vezeték esetében.



37. ábra.

36. ábra magyarázatáui.

A 36. ábra a hullámfront alakját mutatja a (9,13) képlettel számolva 1 cm átmérőjű rézdrótokból álló szabad vezeték esetében a vezeték kezdetétől számított 1, 10 és 30 km távolságban. Abszcisszában a hullám beérkezésétől számított idő alatt befutott út szerepel a 37. ábra szerinti értelmezésben. Vasdrótban a nagy permeabilitás és nagyobb fajlagos ellenállás következtében a hullám ellaposodása sokkal nagyobb mértékű.

A 36. ábrában az abszcisszaértékeket 500-zal kell szorozni, ha a vezeték anyaga vas.

FÜGGELÉK.

Komplex változós függvények.

1. *Komplex számok:* Valós és képzetes szám összegét komplex számnak nevezzük: $z = x + iy$, ahol x és y valós szám és $i = \sqrt{-1}$ a képzetes egység. Legyen $p_1 = a + ib$ és $p_2 = a - ib$, akkor p_1 és p_2 konjugált komplex értékpár (a és b valós).

2. *Komplex számok ábrázolása.* Komplex szám oly derékszögű koordinátarendszerben ábrázolható, amelynek vízszintes tengelyére a valós, függőleges tengelyére pedig a képzetes értékeket mérjük (*Gauss*-féle számsík, 38. ábra). p_1 helyzetét ekkor az OA_1, p_2 helyzetét pedig az OA_2 vektor végpontjával

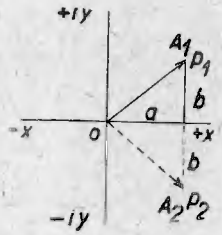
is ábrázolhatjuk. $|p| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a vektor hosszát jelenti. A komplex szám helyét megadja tehát egy vektor is, amelyet hosszával (r) és irányával (φ) határozunk meg. Az *Euler*-féle összefüggések alapján:

$$p = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{2,1}$$

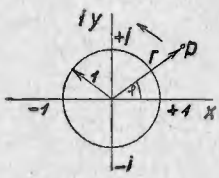
r-et modulusznak, φ-et argumentumnak nevezzük (polárkoordináták). Ezek szerint, pl. ha $r = 1$,

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}2\pi} &= 1, & e^{\mathrm{i}\pi} &= -1 \\ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} &= \mathrm{i}, & e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} &= -\mathrm{i} \end{aligned} \tag{2,2}$$

$p = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$ komplex szám helyét a komplex számsíkban úgy határozzuk meg, hogy az r hosszúságú vektort a valós tengely pozitív ágától φ szöggel pozitív forgásirányban elforgatjuk (39. ábra).



38. ábra.
Komplex szám ábrázolása.



39. ábra.
Komplex szám polárkoordinátái.

3. *Komplex változó függvénye.* Legyen $z = x + \mathrm{i}y$, ahol x és y változó mennyiség, akkor a z komplex változó függvénye, $f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$ általában szintén komplex, azaz egy valós és egy képzetes részből áll:

$$f(z) = u\,(x, y) + \mathrm{i}v\,(x, y) \tag{3,1}$$

A komplex $(x, \mathrm{i}y)$ számsík ekkor az $f(z)$ függvény értelmezési tartománya. A függvény értéktartománya geometriailag nem ábrázolható.

4. *Komplex változós függvény differenciálása.* A függvény z szerinti differenciálhányadosa a következőképen van definiálva:

$$f(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{4,1}$$

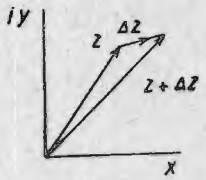
A differenciálhányados értékének függetlennek kell lennie a határátmenet módjától. Mivel Δz is egy kis vektor, z megközelítése végtelen sok irányból lehetséges (40. ábra). Ha $f'(z)$ független Δz választásától, akkor $f(z)$ a vizsgált pontban differenciálható. Ha $f(z)$ egy tartomány minden pontjában deriválható, úgy ebben a tartományban a függvény analitikus. A függvény analitikus mivoltának kritériuma fentebbi feltétel alkalmazásával egyszerűen leszármaztatható és a híres *Cauchy—Riemann*-féle differenciálegyenletekhez vezet.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4,2}$$

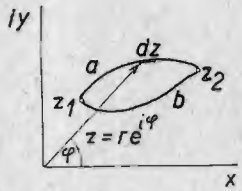
Ha tehát $f(z) = u + iv$ fenti differenciálegyenleteket egy tartomány minden pontjában kielégíti akkor $f(z)$ ebben a tartományban analitikus.

5. *Komplex változós függvény integrálása.* Komplex változós függvény vonalintegráljának definiciója valós függvények vonalintegráljához hasonlóképen a következő:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$



40. ábra.
Komplex változós függvény deriválásához.



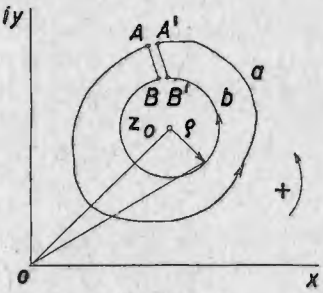
41. ábra.
Komplex változós függvény integrálási útja.

Valós függvény esetében f jelentse, pl. az erőnek az útelem irányába eső összetevőjét, a vonalintegrál akkor a végzett munkát jelenti, amely tudvalelően független az integrálási úttól. Hasonlóképen komplex vonalintegrál értéke sem függ az integrálás útjától, csak a kiindulási és véghelyzettől függ:

$$(a)\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = {}^{(b)}\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \qquad (5,1)$$

Ebből következik:

$$(a)\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz + {}^{(b)}\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz = \oint f(z)\,dz = 0 \qquad (5,2)$$



42. ábra.
Komplex változós függvény zárt vonalintegráljához.

Komplex változós függvény zárt vonalintegrálja tehát zérus, ha a függvény az integrálási út mentén és az általa bezárt tartomány belsejében analitikus (differenciálható). Ez a tétel a *Cauchy*-féle integráltétel, vagy a függvénytan főtétele néven ismeretes.

A főtételből gyakorlati fontosságú szabály vezethető le:

6. Legyen $f(z)$ az a vonallal (42. ábra) bezárt tartomány belsejében analitikus, akkor $\psi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ is analitikus a $z = z_0$ pont kivételével (lásd 8. szakaszt).

z_0-t zárjuk ki egy ϱ sugárral z_0 középpontból köréje vont körrel. $\overline{AB}$ és $A'B'$ legyen két párhuzamos egymáshoz igen közel fekvő egyenesdarab. A főtétel értelmében:

$$\oint \psi\,dz = \int_A^B \psi\,dz + \oint_b \psi\,dz + \int_{B'}^{A'} \psi\,dz - \oint_a \psi\,dz = 0$$

Ha a két egyenesdarab egymáshoz végtelen közel kerül, akkor

$$\int_A^B \psi \, dz + \int_{B'}^{A'} \psi \, dz = 0 \qquad \text{és így}$$

$$\oint_b \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_a \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{6,1}$$

A b kör mentén vezetett integrál a következő alakban írható:

$$z - z_0 = \varrho = r e^{i\varphi}, \quad dz = i r e^{i\varphi} d\varphi, \quad \oint_b \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \oint f(z_0 + r e^{i\varphi}) d\varphi$$

Ha $r \to 0$, akkor

$$\oint_b \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \, f(z_0)$$

Összevetve (6,1)-el

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{6,2}$$

ahol az integrált a mentén vezetjük.

A most levezetett tétel segítségével egy analitikus tartomány belsejében a függvény értéke bármely z pontban kifejezhető a tartományt határoló zárt vonal mentén vezetett integrállal. Az integrálási út pozitív iránya az, melyben haladva a tartomány belseje balra van.

A (6,2) kifejezést n-szer differenciálva:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{6,3}$$

amiből következik, hogy egy tartományban analitikus függvény összes deriváltja létezik, amelyek ott szintén analitikus függvények.

7. *Komplex változós függvény hatványsora.* Analitikus tartományban $f(z)$-nek z_0 környezetében előállítható a *Taylor*-sora ugyanúgy, mint valós változó esetében.

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots \tag{7,1}$$

Ezt a sort, amelyet *Laurent*-sornak is neveznek, a következőképen is írhatjuk:

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots = \sum^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{7,2}$$

(6,3) alapján

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{7,3}$$

8. *Szinguláris pontok:* Mindazon helyek, ahol a függvény differenciálhányadosai 0 vagy ∞ értékeket vesznek fel, a függvény szinguláris pontjai. (7,2) értelmében

$$f'(z) = a_1 + \sum_{2}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1} \tag{8,1}$$

$f'(z_0) = 0$, ha $a_1 = 0$. z_0-t a függvény zérushelyének is nevezik. Ha több együttható is eltűnik, pl.

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots a_{K-1} = 0,$$

akkor a függvény hatványsora a K-ik együtthatóval kezdődik:

$$f(z) = \sum_{K}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n = (z - z_0)^K \sum_{K}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^{n-K} = (z - z_0)^K f_1(z) \tag{8,2}$$

Ebben az esetben z_0 K-ad rendű zérushely, vagy K-ad rendű gyök. Ez (7,1) szerint akkor történik, ha $f(z)$-nek K-nál kisebb rendű deriváltjai eltűnnek. $f(z)$ tört függvény is lehet és a következő alakban jelentkezhetik:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \tag{8,3}$$

Ha $h(z)$-nek a z_0 pontban K-ad rendű zérushelye van, $f(z)$ ott végtelen és (8,2) szerint a következő alakban írható:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^K h_1(z)} = (z - z_0)^{-K} F(z) \tag{8,4}$$

$f(z)$-nek a $z = z_0$ helyen K-ad rendű pólusa van. $F(z)$ hatványsorát előállítva $f(z)$ sorában most negatív kitevőjű tagok is szerepelnek. Így általános esetben $f(z)$ *Laurent*-sora:

$$f(z) = \ldots a_{-2}\, (z - z_0)^{-2} + a_{-1}\, (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1\, (z - z_0) + a_2\, (z - z_0)^2 + \ldots \tag{8,5}$$

9. *Reziduum tétel.* A (7,3) kifejezés alkalmazása most igen fontos eredményre vezet. Ha ugyanis $n = -1$, az indegrandusz nevezője $= 1$ és

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, dz, \qquad \text{vagy}$$

$$\oint f(z)\, dz = 2\pi\, i\, a_{-1} \tag{9,1}$$

Jelentse a 42. ábrán z_0 $f(z)$-nek egy szinguláris pontját, akkor a *Cauchy*-féle integráltétel szerint:

$$\oint_a f(z)\, dz - \oint_b f(z)\, dz = 0 \tag{9,2}$$

A második integrált (9,1) értelmében kifejezve:

$$\oint_a f(z)\, dz = 2\pi\, i\, a_{-1} \tag{9,3}$$

Ez az összefüggés annyit jelent, hogy ha az $f(z)$ függvény egy tartomány határvonala mentén és belsejéhez az egyetlen z_0 pont kivételével analitikus

(reguláris), akkor a határvonal mentén képzett vonalintegrál kifejezhető a függvény z_0 szinguláris pontja környezetében előállított hatványsorának -1-rendű együtthatójával. a_{-1}-et a függvény reziduumának nevezzük. Ha több szinguláris pont: $z_1, z_2, \ldots z_n$ van a tartomány belsejében, akkor a reziduumok összegével kell számolni.

$$f(z)\,dz = 2\pi i \left[\underset{z_1}{Res.}\ f(z) + \underset{z_2}{Res.}\ f(z) + \ldots \right] \tag{9,4}$$

Ez a kifejezés reziduumtétel néven ismeretes. A reziduumtétel csak egyszerű pólusok esetében alkalmazható.

Példaképen határozzuk meg $\frac{\cos z}{z}$ zárt vonalintegrálját abban az esetben, ha az integrálási út a $z = 0$ szinguláris pontot zárja körül.

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots$$

$$a_{-1} = 1 \qquad \text{és} \qquad \oint_{z=0} \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i$$

IRODALOM.

V. Bush, Operational Circuit Analysis. 1929.

G. A. Campbell & R. M. Foster, Fourier integrals for practical applications. Bell Telephone System Monograph. B 583. 1931.

J. R. Carson, Electric circuit theory and operational calculus. 1926.

G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. 1937.

E. Hameister, Laplace-Transformation.

O. Heaviside, Electromagnetic theory. II. 1899, III. 1912.

N. W. Mc Lachlan, Complex variable and operational calculus with technical applications. 1939.

K. W. Wagner, Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik. 1940.

Kiadásért felelős: Mezey Miklós.

49.668. — Egyetemi Nyomda NV, Budapest. (F.: Tirai Richárd.)

A Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványai:

GÉPÉSZET:

7. sz. **Komondy:** Korszerű tüzelések.
10. sz. **Varga:** Repülőgépek szilárdságtani méretezésének időszerű feladatai.
12. sz. **Deniflée:** A könnyűfémek sajátságai és alkalmazásai.
15. sz. **Szilay:** A réznek és ötvözeteinek hegesztése.
17. sz. **Gillemot:** Hegesztés.
18. sz. **Vér:** Válogatott fejezetek az anyagvizsgálat köréből. Kifáradási és tartósfolyás jelenségek.
21. sz. **Balló:** Korszerű járóműcsapágyazás.
24. sz. **Szalóki:** Textilipari mű- és pótanyagok és azok felhasználása.
26. sz. **Udvary:** A repülés üzemanyagai.
27. sz. **Varga:** Merevség és rezgésmentesség kérdése a repülőgépszerkezeteknél.
28. sz. **Rácz:** Repülőgépszárny-kialakítások légerőtani szempontjai.
29. sz. **Abody:** Nagysebességű repülőgépek aerodinamikája.
30. sz. **Vajda:** Gőzfűtésű elgőzölögtetők.
31. sz. **Halácsy:** Áramirányítók.
33. sz. **Sztrókay:** A villamos helyiközlekedés korszerű járóművei.
34. sz. **Albert:** Különleges összetételű kerámiai anyagok az elektrotechnikában.
39. sz. **Papp Gy.:** Fémek villamosvezetésének kvantumelmélete.
40. sz. **Bay:** A rádióhullámok terjedése.
41. sz. **Karsa:** Villamos fogyasztásmérők és mérőváltók.
42. sz. **Millner—Túry:** Wolframgyártás.
44. sz. **Vajda:** Szárítókészülékek számítása.
45. sz. **Jáky:** Katonai rádiótechnika.
46. sz. **Verő:** A mikroszkópos fémvizsgálat módszerei.
47. sz. **Frohner:** A villamosipari szabványosítás.
48. sz. **Istvánffy:** Rádió üzenetátvitel; a rezgő kvarc; antennák.
49. sz. **Papp Gy.:** A fényvillamosság és gyakorlati alkalmazásai.
50. sz. **Koczka:** Távbeszélő központok gépesítésének alapjai.
51. sz. **Halácsy:** Nagy egyenirányító berendezések.
52. sz. **Magyari:** A híradástechnika közös alapelvei.
53. sz. **Pöschl:** A korszerű repülő-rádiókészülékek építése, vizsgálata.
54. sz. **Kovásznay:** Az aerodinamika kísérleti eszközei.
55. sz. **Dischka:** Textilszabványok.
56. sz. **Simonyi:** Érnélküli kábelek. Üreg-rezonátorok.
58. sz. **Gedeon (Scholcz):** Légcsavarok.
59. sz. **Tóth:** Harc az öntvények lyukacsossága és szívódása ellen.
60. sz. **Pattantyús:** Felvonók.
61. sz. **Victorisz:** Acélgazdálkodásunk minőségi kérdései.
62. sz. **Liska:** Villamosgépek vektorábrái.
63. sz. **Petúr:** Repülőgép-héjszerkezetek számítása.
64. sz. **Vasy:** Nehézségek repülőgépek aerodinamikai számításában.
65. sz. **Bognár:** Nagyfrekvenciás mérések.
66. sz. **Veress:** A repülés időjárási akadályai.
67. sz. **Tarnóczy:** Fizikai hangtan.
68. sz. **Weigl:** A villamos acélgyártás legújabb rendszerei.
69. sz. **Kazinczy:** A szerszám szerepének vizsgálata a gazdaságos vasipari gyártásban.

Ára: 16·— Ft.

A Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványai:

70. sz. **Záborszky:** Háromfázisú gépek és hálózatok aszimmetriás viszonyainak vizsgálata a szimmetrikus összetevők módszerével.
71. sz. **Bay:** Atommagfizika.
72/I. sz **Verebély:** Villamos erőátvitel. I. kötet. (Gyakorlati elektrosztatika.)
72/II. sz. **Verebély:** Villamos erőátvitel. II. kötet. (Elosztó- és távvezetékek).
72/III. sz. **Verebély:** Villamos erőátvitel. III. kötet. (Kábelek és szabadvezetékek.)
73. sz. **Gombás:** Bevezetés az atomelméletbe.
74. sz. **Tóth:** Homokvizsgálatok jelentősége az öntészetben.
75. sz. **Halácsy:** Szivattyúnélküli vasedényes kis higanygőz egyenirányítók.
76. sz. **Papp Gy.:** A villamosság áramlása gázokban.
77. sz. **Novobátzky:** Relativitás-elmélet.
78. sz. **Hornung:** Finom felületi megmunkálások.
79. sz. **Verő:** Az ipari vasötvözetek metallográfiája.
80. sz. **Lechner:** A munkaszervezés főbb elvei a gép- és fémipari tömeggyártásban.
81. sz. **Schimanek:** A hőerőgépek üzemtana.
82. sz. **Geleji:** Fémek képlékeny alakításakor fellépő erők és erőszükségletek meghatározása.
83. sz. **Pattantyús:** A gépek üzemtana. II. kiadás.
84. sz. **Nowotny:** A dugattyús gőzgépek fejlődése és korszerűsítése.
85. sz. **Hornung:** A forgácsolás elemei. I.
86. sz. **Budó–Kovács:** Molekula-szinképek.
87. sz. **Kozma:** A gépesített távbeszélőtechnika mérnöki feladatai.
88. sz. **Tábori:** Villamos vizsgálatok rádiókészülékek tömeggyártásánál.
89. sz. **Szigeti:** Lumineszkáló anyagok fizikája.
90. sz. **Gombás:** Bevezetés a szilárd testek elméletébe.
91. sz. **Nemes:** A távolbalátás haladásáról.
92. sz. **Verebély:** Villámhárító rudak és vezetők védőhatása.
93. sz. **Liska:** Villamos gépek. I. kötet. (Transzformátorok).
94. sz. **Blahó:** Repülőgépek csűrőkormányai.

MATEMATIKA:

1. sz. **Egerváry:** Differenciálegyenletek.
3. sz. **Egerváry:** A mechanikai differenciál-egyenleteiről.
4. sz. **Szentmártony:** Vektor- és tenzorszámítás. II. átdolgozott kiadás.

Beszerezhetők, illetve megrendelhetők:

vagy az Intézet 5670. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára való befizetéssel.