Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

Viszkoelasztikus anyagi viselkedés modellezése és mérése ciklikus terhelés esetén

Tézisfüzet

Készítette:
Pálfalvi Attila

Témavezető:
Dr. Uj József

2010

1. A munka tárgya

A polimerek napjainkban igen népszerű szerkezeti anyagok, ezért periodikus anyagi viselkedésük leírása mérnöki szempontból fontos feladat. PhD-dolgozatom ezzel kapcsolatos témákkal foglalkozik.

Munkám első része polipropilén 10 és 100 Hz közötti viselkedésének végeselemes leírására alkalmas anyagparaméterek meghatározását mutatja be. A szakirodalomban több anyagmodell is ismert erre a célra, de közülük csak kevés található meg kereskedelmi végeselem-programokban. Emiatt logikus választás az általánosított Maxwell-modell (vagy általánosított standard solid-modell[1]) használata. Az anyagparaméterek meghatározásához mérésekre van szükség.

A munka második részében egy lineáris viszkoelasztikus rúd-végeselemet vizsgálok meg. Az elem (Lesieutre és Lee, 1996), amely az anyagi viselkedés leírásához nem-rugalmas elmozdulásmezőket használ, sajátrezgések vizsgálatára jobban használható, mint a kereskedelmi programcsomagokba általában beépített módszerek. Néhány kérdést azonban a szerzők nyitva hagytak, emiatt az elemnek további változatait készíthetjük el.

A harmadik részben törtrendben csillapított egyszabadságfokú lengőrendszer mozgásegyenletének megoldásával foglalkozom. Törtrendű deriváltakat egyes kutatók használnak anyagmodellezésre, emiatt érdekesek számunkra. A szakirodalomban több megoldási módszer is található (Suarez és Shokooh, 1997; Yuan és Agrawal, 2002; Saha Ray és mások, 2005), de ezek közül egyiket sem alkalmazzák széles körben. Érdekes tehát néhány meglévő eljárás összehasonlítása. Pontos megoldások számítására új eljárás kidolgozása is hasznos lehet.

2. Célkitűzések

A fentiekben bemutattam a munkám témáját. Ez alapján a célkitűzések:

1. Anyagparaméterek meghatározása polipropilén 10 és 100 Hz közötti rezgéseinek leírására.

2. A Lesieutre és Lee által javasolt végeselemes leírás vizsgálata, szükség esetén javaslattétel módosításra.

3. Szakirodalmi megoldási módszerek összehasonlítása törtrendben csillapított lengőrendszer mozgásegyenletére.

4. A jelenlegieknél hatékonyabb módszer kidolgozása törtrendben csillapított lengőrendszer mozgásegyenletének igen pontos megoldására.

[1] Munkámban (a végeselemes programcsomagokhoz igazodva) az „általánosított Maxwell-modell” elnevezést használom.

3. Tézisek

1. **Kimutattam, hogy polipropilén ciklikus mechanikai viselkedése a megvizsgált frekvenciatartományban hatékonyan modellezhető a dolgozatban megadott paraméterű általánosított Maxwell-modellel.**

   Polipropilén 10 és 100 Hz között használható anyagparamétereinek meghatározásához az anyagból készült próbatestek kényszer- és szabad rezgését mértem, és ennek alapján kétféle paraméteregyüttest adtam meg az általánosított Maxwell-modellhez. Ezeket úgy ellenőriztem, hogy ugyanazon anyagú gépalkatrész rezgéseit mértem, valamint a végeselem-módszerrel ki is számítottam. Az eredmények megfelelő egyezést mutattak. Megállapítható, hogy a két paraméteregyüttes közül a második közelíti jobban a mérési eredményeket.

   A dolgozat kapcsolódó része: I. rész
   Kapcsolódó publikációim: [1, 2, 6, 8–10]

2. **Megállapítottam, hogy a nem-rugalmas elmozdulásmezők leírásán alapuló rúd-végeselem jobban használható, ha a peremfeltételeket a belső szabadsági fokokra is alkalmazzuk.**

   A lineáris viszkoelasztikus anyagi viselkedés nem-rugalmas elmozdulásmezőn (ADF: Anelastic Displacement Field) alapuló leírását más kutatók már vizsgálták. Munkámban az általuk kifejlesztett Euler–Bernoulli-féle, lineáris viszkoelasztikus anyagú rúdelem két új változatát vizsgáltam meg. Ezek egyikében a peremfeltételeket a viszkoelasztikus szabadságfokokra is alkalmaztam (RADF: Restricted ADF; az alapötletet a szakirodalomban már említették), a másikban pedig belső csomópontokat vezettem be az említett szabadságfokok számára (EADF: Element ADF). Kimutattam, hogy mindkét változat ugyanazokat az eredményeket adja a fizikailag értelmezhető rezgésekre, mint az eredeti elem. Megállapítottam azt is, hogy az eredeti elem numerikus kondicionáltsága rosszabb, mint az új változatoké, továbbá hogy az RADF változattal készült modell legfeljebb annyi szabadságfokot használ, mint az EADF-fel készült modell.

   A dolgozat kapcsolódó része: II. rész
   Kapcsolódó publikációm: [4]

3. **Néhány törtrendben csillapodó lengőrendszer számításán szakirodalmi módszereket összehasonlítva a következőket állapítottam meg:**

i. **Törtrendben csillapodó lengőrendszer megoldására zérus kezdeti feltételek esetén Yuan és Agrawal módszere általában hatékony.**

ii. **A Caputo-féle definíción alapuló direkt eljárás esetenként (a paraméterektől függően) még hatékonyabb lehet.**

iii. **Nemzérus kezdeti feltételek esetén vagy az Adomian-sorfejtést, vagy a Grünwald–Letnikov-definíción alapuló direkt módszert javaslom.**

A törtrendben csillapodó lengőrendszerek differenciálegyenletének megoldása jelenleg is kutatott téma. Néhány, a szakirodalomból vett módszert mintafeladatokon hasonlítottam össze. Az eredmények alapján a következőket jelenthetjük ki:

(a) 1/2-rendű derivált esetén Suarez és Shokooh módszere a megoldás hibája és a szükséges számítási idő tekintetében elég hatékony. Egységugrás-gerjesztésre a pontos analitikus megoldást adja, de a vizsgált módszerek közül sem volt a legpontosabb a harmonikusan gerjesztett mintafeladaton.

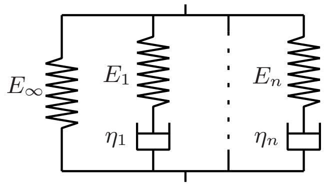
(b) Az Adomian-felbontáson alapuló módszer ugyanazt a pontosságot nyújtja, mint a Suarez–Shokooh-féle, de egy-két nagyságrenddel lassúbb, ha a számított időintervallum hosszú. Rövid számított időintervallum esetén viszont a számítási idő kedvező.

(c) Yuan és Agrawal módszere általában igen hatékony, a vizsgált esetekben mindig ésszerű idő alatt, többször pedig a módszerek közül a leggyorsabban vezetett mérnöki pontosságú eredményhez.

(d) A vizsgált, a Grünwald–Letnikov- ill. Caputo-definíciókon alapuló direkt eljárások lényegesen kevésbé pontosak, mint a Suarez–Shokooh féle eljárás ill. az Adomian-felbontás. Számítási idejük viszont a tesztfeladatokon elfogadható volt, néhány esetben kis ill. közepes pontosság mellett gyorsabbak voltak a Yuan–Agrawal-módszernél.

A dolgozat kapcsolódó része: III. rész, 8.1 fejezet
Kapcsolódó publikációim: [3, 7]

4. **A Taylor- és Adomian-sorok kombinálásával új módszert dolgoztam ki egyszabadságfokú, törtrendben csillapodó lengőrendszer mozgásegyenletének megoldására. Kimutattam, hogy az egyenlet igen pontos megoldása nagyságrendekkel gyorsabban számítható ki az új eljárással, mint direkt módszerrel.**



1. ábra. Az általánosított Maxwell-modell és paraméterei.

Az új módszerrel gyorsan számítható egyszabadságfokú, törtrendű deriválttal arányosan csillapított lengőrendszer mozgásegyenletének szinte tetszőleges pontosságú megoldása, amennyiben a gerjesztő függvény Taylor-sorba fejthető. A módszer nemzérus kezdeti feltételek esetén is használható. Fő hátránya, hogy a szimulált időtartam hosszával a számítási idő igen gyorsan nő.

A dolgozat kapcsolódó része: III. rész, 8.2 fejezet
Kapcsolódó publikációm: [5]

4. Kiegészítések a tézisekhez

4.1. Kiegészítés az 1. tézishez

A célkitűzés polipropilén 10 és 100 Hz közötti viselkedésének leírására alkalmas anyagparaméterek megadása volt. A munka menete:

1. Polipropilénből készült gépalkatrész kényszerrezgéseit vizsgáltam, az eredményekből frekvencia–erősítés függvényt számítottam.
2. A kísérleteket ugyanilyen anyagú, egyszerű geometriájú próbatesten is elvégeztem. Ugyanezen próbatest szabad lengését is mértem.
3. A 2. lépésben elvégzett mérések alapján meghatároztam az általánosított Maxwell-modell polipropilénre alkalmazható paramétereit.
4. A gépalkatrésznek az 1. lépésben mért rezgéseit végeselemes szimulációval is megvizsgáltam. Ehhez a 3. lépésben meghatározott anyagmodellt használtam.

Az 1. lépés mérése és a 4. lépés számítása megfelelő egyezést mutatott az alábbi anyagparaméterek használata esetén:

$$E_0 = 1650 \text{ MPa},\ E_1 = 175 \text{ MPa},\ \tau_1 = 7.958 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$
$$E_2 = 175 \text{ MPa and } \tau_2 = 1.326 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

4.2. Kiegészítés a 2. tézishez

Lesieutre és Lee nem-rugalmas elmozdulásmezőket használt az általuk megadott viszkoelasztikus rúd-végeselem elkészítésére. Ez a leírási mód az általánosított Maxwell-modell csillapodó ágainak rugóihoz belső megnyúlásokat rendel hozzá, a belső megnyúlásokat pedig az azokhoz kapcsolható elmozdulásmezővel írja le. Ezeket az elmozdulásmezőket ugyanúgy kezeli, mint a valódi elmozdulásokat, végeselemes leírás esetén tehát külön szabadsági fokokat rendel hozzájuk.

A tézisben megvizsgált két kérdés a következő:

1. A peremfeltételeket a belső elmozdulásmezőket leíró szabadsági fokokon is elő kell írni (RADF változat)? *(Válasz: igen, ezzel az elem numerikusan jobban kezelhetővé válik.)*

2. A belső elmozdulásmezőket leíró szabadsági fokokat csomópontokhoz vagy elemekhez kell rendelni (EADF változat)? *(Válasz: mindkét esetben ugyanazokat a fizikailag értelmes megoldásokat kapjuk, de az elemekhez rendelt szabadságfokok nagyobb méretű mátrixokhoz vezetnek.)*

A tapasztalatok alapján a továbbiakban az RADF változat használatát javaslom.

4.3. Kiegészítés a 3. tézishez

A törtrendben csillapított egyszabadságfokú lengőrendszer differenciálegyenlete az alábbi alakban írható fel:

$$m\mathbf{D}^2 x(t) + c\mathbf{D}^\alpha x(t) + kx(t) = F(t)\,, \tag{1}$$

ahol m és k a tömeg ill. merevség, $F(t)$ a gerjesztő erő, c és α pedig a csillapítást írják le. $\mathbf{D}$ a differenciáloperátor. Az egyenlet másik, gyakran használt alakja:

$$\mathbf{D}^2 x(t) + 2\zeta\omega_\mathrm{n}^{2-\alpha}\mathbf{D}^\alpha x(t) + \omega_\mathrm{n}^2 x(t) = f(t)\,,$$

ahol

$$2\zeta\omega_\mathrm{n}^{2-\alpha} = \frac{c}{m},\ \omega_\mathrm{n}^2 = \frac{k}{m} \text{ és } f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

A fentebb említett módszereket (Suarez és Shokooh, 1997; Yuan és Agrawal, 2002; Saha Ray és mások, 2005; direkt módszer a Grünwald–Letnikov-definíció alapján; direkt módszer a Caputo-definíció alapján) néhány mintafeladaton hasonlítottam össze, zérus kezdeti feltételek esetén. A mintafeladatok paraméterei:

1. Harmonikus gerjesztés, $\alpha = 1/2$, $\omega_\mathrm{n} = 10$, $\zeta = 0.5$ és $f(t) = \sin(4\pi t)$, a $t = 0\dots10$ időintervallumon kiszámítva. Ennek a problémának az analitikus megoldása a vizsgálat időpontjában nem volt ismert.

2. Egységugrás-gerjesztés, $\alpha = 1/2$, $\omega_\mathrm{n} = 10$ ill. 5, $\zeta = 0.5$ ill. 0.1 (mind a négy kombinációt megvizsgáltam) a $t = 0\dots4$ időintervallumon kiszámítva. Egy esetet ($\omega_\mathrm{n} = 10$, $\zeta = 0.5$) a $t = 0\dots10$ intervallumon is kiszámítottam. Ennek a feladatnak az analitikus megoldását Suarez és Shokooh megadta 1997-ben.

A módszereket a Maple-ben elvégzett számítások időtartama és a

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i^{\mathrm{num}} - x_i^{\mathrm{ref}}\right|$$

átlagos abszolút hiba alapján hasonlítottam össze. A vizsgálatok alapján a következőket jelenthetjük ki:

1. Egységugrás-gerjesztés esetén a Suarez és Shokooh-féle egzakt megoldás számítási ideje elég rövid (21–24 másodperc a „rövid" időintervallumok esetén). Harmonikus gerjesztésnél a számítási idő 78 másodperc volt, és a gerjesztő függvény diszkretizálása miatt a megoldás hibája nagyobbnak tűnik, mint a Yuan–Agrawal-módszer esetében.

2. Az Adomian-felbontáson alapuló módszer (Saha Ray és mások) ugyanazt a pontosságot nyújtja, mint a Suarez–Shokooh-megoldás, de hosszú szimulált időintervallumra egy-két nagyságrenddel lassabb. Rövid szimulált időintervallum esetén viszont a számítási idő kedvező (47–59 másodperc), figyelembe véve, hogy a Suarez–Shokooh-féle megoldás csak 1/2 rendű deriváltra vonatkozik.

3. Yuan és Agrawal módszere általában igen hatékony, mivel mérnöki pontosságú megoldáshoz (ennek azt tekintettem, amikor az elmozdulás átlagos hibája az állandósuló érték 1%-a volt) 4–10 másodpercre volt szüksége. Kis csillapítás esetén a fenti pontosságot a vizsgált módszerek közül a leggyorsabban érte el.

4. A vizsgált (a Grünwald–Letnikov- ill. Caputo-definíciókon alapuló) direkt módszerek jóval kevésbé pontosak, mint a Suarez–Shokooh-megoldás vagy az Adomian-felbontás, számítási idejük viszont a mintafeladatokon elfogadható volt. Az erősen csillapított rendszerekben a fent említett mérnöki pontosságot egy másodpercen belül, a Yuan–Agrawal-módszernél gyorsabban érték el, kis csillapításnál viszont ugyanehhez 30–50 másodpercre volt szükségük.

A fentiek alapján harmonikus gerjesztés esetén Yuan és Agrawal módszerét javaslom általános esetre, figyelembe véve, hogy ez csak zérus kezdeti feltételekre használható. Nem-zérus kezdeti feltételek esetén a Grünwald–Letnikov-definíción alapuló direkt módszer általában jó választás. Az Adomian felbontás nagyon jól használható, ha nagy pontosságra van szükség, számításigénye azonban nagyobb a többi módszerénél.

4.4. Kiegészítés a 4. tézishez

A törtrendben csillapított egyszabadságfokú lengőrendszer mozgásegyenletének pontos megoldását viszonylag kis számításigény mellet határozhatjuk meg, ha az $F(t)$ gerjesztő függvény Taylor-sorba fejthető:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i t^i.$$

Ebben az esetben a (1) egyenlet megoldása felírható az alábbi alakban:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[x_n^{\mathrm{IC}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} x_{n,i}^{f}(t) \right], \tag{2}$$

ahol

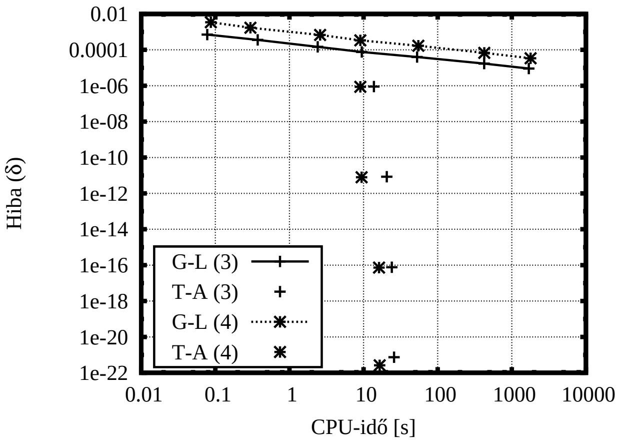
$$x_n^{\mathrm{IC}}(t) = \frac{(-1)^n}{m^n} t^{(2-\alpha)n} \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} c^{n-j} k^j t^{j\alpha} \times \left(\frac{X_0}{\Gamma(2n+1-(n-j)\,\alpha)} + \frac{V_0 t}{\Gamma(2n+2-(n-j)\,\alpha)} \right) \right] \tag{3}$$

és

$$x_{n,i}^{f}(t) = T_i \frac{(-1)^n}{m^n} \Gamma(i+1)\, t^{i+(2-\alpha)n+2} \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{c^{n-j} k^j}{\Gamma(i+3+2n-(n-j)\,\alpha)} t^{j\alpha}, \tag{4}$$

$X_0 = x(0)$ és $V_0 = \dot{x}(0)$ a kezdeti feltételek, $\Gamma(x)$ pedig a Gamma-függvény.

Könnyen látható, hogy a (3) és (4) egyenletek jobboldalai „polinomok”, amelyeknek a kitevői nemcsak egészek, és ezek a kitevők a sorfejtésben gyorsan nőnek. A tapasztalat ráadásul azt mutatja, hogy a kifejezések számításához nagy és egymáshoz közeli számok különbségének pontos meghatározására van szükség, azaz a szokásos duplapontosságú aritmetika nem elégséges. A módszer



2. ábra. A módszerek összehasonlítása a dolgozat 3. és 4. mintafeladatán. G–L: direkt módszer a Grünwald–Letnikov-definíció alapján, T–A: új eljárás (Taylor–Adomian-módszer).

ezzel együtt is nagyságrendekkel gyorsabb a direkt módszereknél, ha pontos megoldásra van szükség (lásd a 2. ábrát, amely két, harmonikusan gerjesztett mintafeladat tapasztalatait mutatja). A módszer fő hátránya, hogy a számítási idő a számított időintervallum hosszával meredeken nő.

Hivatkozások

G. A. Lesieutre and U. Lee. A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics. *Smart Materials and Structures* 5:615–627, 1996.

L. E. Suarez and A. Shokooh. An eigenvector expansion method for the solution of motion containing fractional derivatives. *Journal of Applied Mechanics* 64:629–635, 1997.

L. Yuan and O. P. Agrawal. A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives. *Journal of Vibration and Acoustics* 124:321–324, 2002.

S. Saha Ray, B. P. Poddar and R. K. Bera. Analytical solution of a dynamic system containing fractional derivative of order one-half by Adomian decomposition method. *Journal of Applied Mechanics* 72:290–295, 2005.

Saját közlemények

Folyóiratcikkek

[1] A. Pálfalvi and K. Mashimo. Nonlinear finite element analysis of a polymer-made machine part. *Periodica Polytechnica (Mechanical Engineering)* 48(1):65–72, 2004.

[2] A. Pálfalvi. Polimer alkatrész nemlineáris végeselem-analízise. *Műanyag és Gumi*, 44(11):459–462, 2007.

[3] A. Pálfalvi. Methods for solving a semi-differential vibration equation. *Periodica Polytechnica (Mechanical Engineering)*, 51(2):77–81, 2007.

[4] A. Pálfalvi. A comparison of finite element formulations for dynamics of viscoelastic beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(14):814–818, 2008. (IF: 0.989 (2008))

[5] A. Pálfalvi. Efficient solution of a vibration equation involving fractional derivatives. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(2):169–175, 2010. (IF: 1.296 (2009))

Konferenciák kiadvánnyal

[6] A. Pálfalvi and K. Mashimo. Using a viscoelastic material model for the analysis of a polymer-made machine part. *Proceedings of the Fourth Conference on Mechanical Engineering*, 151–155; 2004. május 27–28., Budapest.

[7] A. Pálfalvi. Computational methods for material models involving fractional derivatives. *Proceedings of the Sixth Conference on Mechanical Engineering*, G-2008-M-11; 2008. május 29–30., Budapest.

Konferenciák kiadvány nélkül

[8] A. Pálfalvi and K. Mashimo. Tartószerkezet nemlineáris dinamikai analízise végeselem-módszerrel. *IX. MaMeK*, 2003. augusztus 27–29., Miskolc.

[9] A. Pálfalvi, K. Mashimo and T. Hashiguchi. Measuring Cyclic Mechanical Properties of Polypropylene. *European Solid Mechanics Conference 2006*, 2006. augusztus 28–szeptember 1., Budapest.

[10] A. Pálfalvi. Polipropilén alkatrész ciklikus mechanikai viselkedése. *MaMeK 2007*, 2007. augusztus 27–29., Miskolc.

További, a tézisekben nem hivatkozott közlemények

[11] K. Mashimo, K. Koizumi, M. Kawabata, A. Pálfalvi, G. Purcsel, G. Varga. Modelling tool for vibration analysis of electric distribution box. *FISITA 2004*, 2004. május 23–27., Barcelona, Spanyolország.

[12] A. Pálfalvi, K. Mashimo. Material modelling of cyclic behaviour for finite elements. *Polymers for Advanced Technologies*, 2005. szeptember 13–16, Budapest.