



Budapesti Műszaki Egyetem, Híradástechnikai Tanszék

# Sztochasztikus modellek és távközlési alkalmazások

(Ph.D. disszertáció téziséhez)

szerző Bodrog Levente  
témavezető Dr. Telek Miklós, egyetemi tanár

Budapest, 2010

# 1. Bevezetés

Az értekezés a másodrendű Markov érkezési folyamatok rugalmasságát és a teljesítmény-kiegyenlítő kapcsolók teljesítményelemzését vizsgálja. A sztochasztikus modellezés illetve a telekommunikáció egy-egy széleskörben vizsgált részterületéről van szó.

Ennek megfelelően az értekezés is két fő részre tagolódik. Az első rész a kanonikus, másodrendű Markov érkezési folyamatok korrelációs határait tárgyalja. A szerzők [J2]-ben ugyanezen határok segítségével bizonyítják azon érkezési folyamatok ekvivalenciáját, amelyek határeloszlásának másodfokú a Laplace transzformáltja.

A minimális kanonikus reprezentációt felhasználva egy olyan másodrendű Markov érkezési folyamatillesztő eljárást dolgozunk ki, amelyben a másodrendű Markov érkezési folyamatosztályt (MAP(2)) határoló felületet egyszerűen az optimalizálás számára könnyen kezelhető részfelületekre bontjuk. Ez a felbontás elősegíti a numerikus eljárások megbízhatóbb működését az ismeretlen, vagy az ismert de bonyolult MAP(2) határfelületre megszorított eljárásokhoz képest.

Kifejlesztünk egy olyan együttes eloszlásillesztő eljárást is, amely szintén kihasználja a kanonikus alak minimális mivoltát. Az eljárás alapját egy numerikusan hatékony, mátrixművelet alapú, két MAP együttes eloszlásának euklideszi távolságát meghatározó kifejezés adja. Ugyanezen kifejezésből kiindulva meg tudjuk határozni végtelen együttes eloszlások távolságát is.

Az értekezés második része az úgynevezett terhelés-kiegyenlítő (LB) kapcsolók teljesítményelemzését fedi le. A [3]-ban és [4]-ben javasolt kapcsoló analízisének első lépéseként [1]-ben a szerzők megadják a véges pufferek alkalmazásából következő csomagvesztési valószínűséget azonos csomagokból álló bemeneti forgalom esetén. Mi a kapcsoló részletes modelljének segítségével megadjuk a csomagvesztési valószínűséget változó méretű csomagokból álló bemeneti forgalom mellett. A részletes modelltől azonban kiderül, hogy nagyon nagy állapotterű – a kapcsoló méretével ( $N$ ) exponenciális ( $O(N^N)$ ) bonyolultságú – Markov modellre vezet. Erre válaszul megadjuk a kapcsoló ON/OFF bemeneti forgalmon alapuló közelítő modelljét. Habár a modell állapotterének mérete kisebb, mint a részletes modellé, az még mindig exponenciális ( $O(2^N)$ ). Ezen a ponton azzal a megszorító feltételezéssel élve, hogy a forgalom minden bemeneten azonos paraméterekkel bír, a modell bonyolultsága lineárisra csökkenthető.

Mivel a terhelés-kiegyenlítő kapcsoló legfőbb problémája a csomagösszeállítás csomagvesztésből származó megnövekedett késleltetése, javaslatot teszünk egy csomagvesztés-minimalizáló eljárásra.

## 2. A kutatás célkitűzései

Az értekezés javaslatot tesz a másodrendű Markov érkezési folyamatok MAP(2) viselkedésének megértésére, illetve az erről szerzett ismeretek hasznosítására.

További fontos cél a terhelés-kiegyenlítő kapcsolók részletes analízise és működésének továbbfejlesztése.

### 2.1. Másodrendű Markov érkezési folyamatok

Jó kezelhetőségüknek köszönhetően a másodrendű érkezési folyamatok fontos szerepet játszanak a sztochasztikus modellezésben és itt mi megadjuk ennek az osztálynak a korrelációs határait. Ezt az új 4 elemű paraméterezés engedi meg, amelyet a minimális kanonikus alakot definiáló 4 paraméterből határozzunk meg.

A korreláció korlátainak meghatározása teszi teljessé a MAP(2) osztály momentumkorlátainak meghatározását a négy alaplomentumának tekintetében. Ez a felismerés vezetett minket arra, hogy az elért eredményeket MAP(2)-illesztésre hasznosítsuk.

Először a felbontás alapú illesztő eljárást vezetjük be, amelyben a momentumhatárookra megszorított távolságminimalizálás alapú illesztést egyszerűen felbontjuk természetesen adódó, könnyebben megoldható részfeladatokra.

Következő lépésként olyan MAP méretcsökkentő eljárást fejlesztünk ki, amely képes a MAP-ok méretét egy optimalizálási eljárás segítségével csökkenteni. Ezen optimalizálás során ismét felhasználjuk a minimális MAP(2)-re vonatkozó ismereteinket.

### 2.2. Terhelés-kiegyenlítő kapcsolók

Mivel az egy új és ígéretes kapcsoló architektúra, figyelmünket a terhelés-kiegyenlítő kapcsolók felé fordítottuk. Determinisztikus és egyszerű vezérlésének köszönhetően, jól skálázhatónak tűnik és képes közel 100%-os átvitelre még nem egyenletes forgalom esetén is. A kezdeti vizsgálatokkal ellentétben, ahol végtelen pufferméretet feltételeznek, [1]-ben a szerzők egy a valósághoz közelebbi (véges pufferrel szerelt) architektúra analitikus modelljét készítik el a csomagvesztési valószínűség meghatározására egyenlő csomagméret esetén. A mi munkánk továbbmegy és terhelés-kiegyenlítő kapcsolók csomagvesztési valószínűségét változó csomagméret esetén adja meg, illetve egy csomagvesztés-minimalizáló megoldást is ad.

### 3. A kutatás módszertana

E munka elméleti megfontolásokat és gyakorlati (markovi) modellezést is tartalmaz. A MAP(2) osztály korrelációs határainak meghatározásához matematikai analízist végzünk, míg a felbontás alapú MAP(2)-illesztésre elemi geometriát és numerikus optimalizálást alkalmazunk. A MAP méretcsökkenés esetén mátrix-analitikus módszereket és függvénygeometriát használunk a MAP együttes eloszlások euklideszi távolságának meghatározásához.

Az illesztő eljárások jóságát az eloszlásfüggvények, a korrelációs struktúra és a sorviselkedés összehasonlításával ellenőrizzük. Az eloszlás és a korreláció meghatározását elemi számításokkal elvégezhethetjük, amíg a sorviselkedést egy M/D/1-típusú rendszerben mátrix-analitikus módszerek alkalmazásával határozzuk meg.

A terhelés-kiegyenlítő kapcsolók teljesítményelemzéséhez markovi viselkedést feltételezünk, így elemi mátrix-analitikus módszerekkel oldhatjuk meg a problémát.

A terhelés-kiegyenlítő kapcsolók analitikus modelljeinek eredményeit c++-ban megírt szimulátorunk eredményeivel hasonlítjuk össze.

### 4. Új tudományos eredmények

Az értekezés eredményei két csoportra oszthatók. Az első a másodrendű Markov érkezési folyamatokkal (MAP(2)), míg a második a terhelés-kiegyenlítő (LB) kapcsolókkal foglalkozik.

Az első csoport a MAP(2) osztály korrelációs határait és illesztését tárgyalja. A második csoport két további részre osztható. Az egyikben a különböző bemeneti forgalmak leírására képes modell segítségével az LB kapcsoló teljesítményelemzését, míg a másikban a teljesítményelemzésen kívül a csomagvesztés minimalizálását tárgyaljuk azonos bemeneti forgalom leírására képes LB kapcsoló modellünk segítségével.

#### 4.1. Másodrendű Markov érkezési folyamatok

##### 4.1.1. Másodrendű mátrix-exponenciális folyamatok Markovi kanonikus alakja

Az  $X(t) = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}$  érkezési folyamat, amelynek együttes eloszlása

$$f(\mathbf{x}) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 x_0} \mathbf{D}_1 e^{\mathbf{D}_0 x_1} \mathbf{D}_1 \dots e^{\mathbf{D}_0 x_n} \mathbf{D}_1 \mathbb{1}, \quad (1)$$

és a  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$  mátrixpár határozza meg, egy Markov érkezési folyamat, ha  $f(\mathbf{x})$  egy valódi sűrűség függvény,  $\mathbf{D}_0$  egy tranziens markovi generátor és

$\mathbf{D}_1 \geq 0$  úgy, hogy  $-\mathbf{D}_0 \mathbb{1} = \mathbf{D}_1 \mathbb{1}$ .  $\boldsymbol{\pi}$  a  $\boldsymbol{\pi}(-\mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi} \mathbb{1} = \mathbb{1}$  lineáris egyenletrendszer megoldása, azaz az érkezés utánra beágyazott diszkrét idejű Markov lánc állandósult állapota.  $\mathbb{1}$  a megfelelő méretű, csupa egyesekből álló oszlopvektort jelöli.

A  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$ -gyel adott, másodrendű Markov érkezési folyamat határeloszlása másodrendű fázis típusú (PH(2)). A PH(2) eloszlásfüggvénye

$$F(t) = 1 - \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbb{1} = 1 - [p \ 1-p] e^{\begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{\alpha} \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A MAP(2) korrelációs struktúrája

$$\text{corr}(X_0, X_k) = \gamma^k \frac{p(p + \alpha - 1)}{p(p - 2) - \alpha^2}. \quad (3)$$

A korrelációs struktúra geometriai lecsengésének paramétere  $\gamma$ .

Egy  $m$ -edrendű MAP megadható az  $m^2$  úgynevezett alaplomomentumának segítségével [J1].

Másodrendű esetben  $\{\lambda_1, p, \alpha, \gamma\}$  négy ekvivalens paraméter, amelyet (2)-ben és (3)-ban használunk. Megmutatható továbbá, hogy ez a paraméterhalmaz további ekvivalens paraméterhalmazokba transzformálható, mint például  $\{\lambda_1, p, \alpha, \gamma\} \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, a, b\} \equiv \{\mu_1, n_2, n_3, \gamma\}$ . Esetünkben a transzformáció arra az egyszerű okra vezethető vissza, hogy a különböző halmazok a következő esetekben adnak szép kifejezéseket:

- $\{\lambda_1, p, \alpha, \gamma\}$  segítségével definiáltuk a MAP(2) osztályt (2)-ben és (3)-ban, hogy az 1. táblázatban megadhassuk a korrelációs határait,
- $\{\lambda_1, \lambda_2, a, b\}$  segítségével fejezhető ki a MAP(2) minimális kanonikus alakja (4)-ben és (5)-ben és
- $\{\mu_1, n_2, n_3, \gamma\}$  segítségével jelenítjük meg a MAP(2) határokat grafikusán is az 1 ábrán.

Felhasználva a MAP(2)-t definiáló kifejezéseket (2)-ben és (3)-ban ki mondjuk a MAP(2) osztály korrelációs határaitra vonatkozó következő tézist.

**1.1. tézis.** *Az 1. táblázatban megadtam a másodrendű Markov érkezési folyamatok korrelációs ( $\gamma$ ) határait az osztály APH(2) határeloszlását meghatározó  $(p, \alpha)$  paraméterpár függvényében. [J2]*

A rendelkezésre álló kanonikus, másodrendű, aciklikus MAP(2) (AMAP(2)) első pillantásra a szükségesnél szigorúbbnak tűnhet egy tetszőleges AMAP(2)-nél a  $\mathbf{D}_0$  mátrixon kívül a  $\mathbf{D}_1$  mátrixban is megjelenő 0 elem

miatt. Azonban a szerzők a [J2]-ben megmutatják, hogy minden másodrendű mátrix-exponenciális folyamat (MEP(2)) e kanonikus alakba transzformálható. E transzformáció létezése bizonyítja az AMAP(2), a MAP(2) és a MEP(2) osztályok ekvivalenciáját [J2]-ben.

Az általános kanonikus alak meghatározásához a  $\{\lambda_1, \lambda_2, a, b\}$  paraméternégyest használjuk. A korreláció előjelétől függően a kanonikus alaknak két formája létezik.

**Definíció.** A MAP(2) első kanonikus alakja

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & (1-a)\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} a\lambda_1 & 0 \\ (1-b)\lambda_2 & b\lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A második kanonikus alak pedig

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & (1-a)\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & a\lambda_1 \\ b\lambda_2 & (1-b)\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

ahol  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ,  $0 \leq a \leq 1$  és  $0 \leq b \leq 1$ . Továbbá megköveteljük, hogy

- az első esetben  $a, b \neq 1$  (a visszatérőség miatt) és
- a második esetben  $b \neq 0$  (a visszatérőség miatt) és
- a második esetben  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ha  $a = 1$ .

Korrelált folyamatokra  $a$  és  $b$  nem lehet nulla.

A kanonikus alakok több jellemzője csak az  $a$  és a  $b$  paramétertől függ

**Következmény.** Az első kanonikus alak korrelációs paramétere

$$\gamma = ab. \quad (6)$$

A második kanonikus alak korrelációs paramétere

$$\gamma = -ab. \quad (7)$$

Az első kanonikus alak fázisának eloszlásvektora állandósult állapotban

$$\boldsymbol{\pi} = \left[ \frac{1-b}{1-ab} \quad \frac{b-ab}{1-ab} \right], \quad (8)$$

Ugyanez a második kanonikus alak esetében

$$\boldsymbol{\pi} = \left[ \frac{b}{1+ab} \quad 1 - \frac{b}{1+ab} \right]. \quad (9)$$

feltétel	$\gamma$ határ	
	alsó	felső
$1 - p < \alpha$	$-\frac{1-p}{p+\alpha}$	$\frac{\alpha+p(\alpha+p-1)-2\sqrt{p\alpha(-1+p+\alpha)}}{(p+\alpha)^2}$
$\alpha > 1 - p \wedge \frac{1-p}{p+\alpha} < 1$	$-\frac{1-p}{p+\alpha}$	1
$\alpha > 1 - p \wedge 1 \leq \frac{1-p}{p+\alpha}$	$\frac{p}{p+\alpha-1}$	1

1. táblázat. Korrelációs határok a  $(p, \alpha)$  paraméterek három lehetséges tartományára

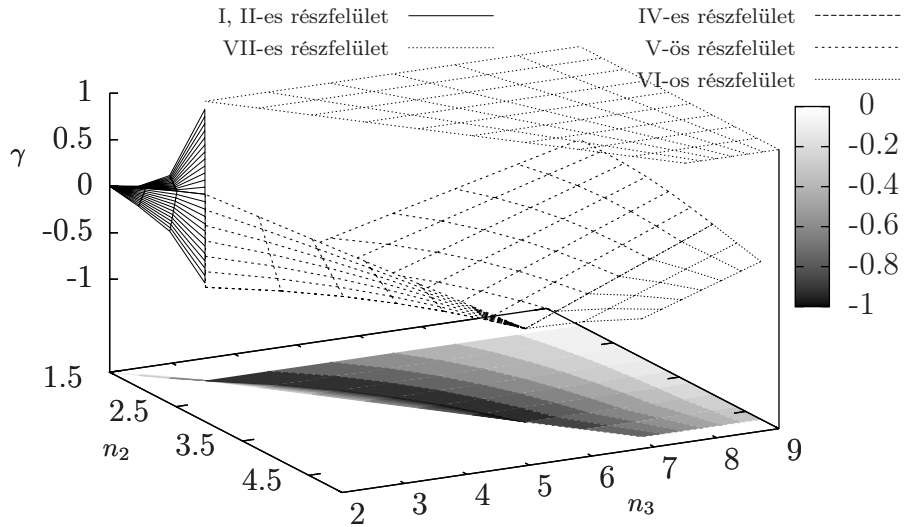
A  $\{\lambda_1, \lambda_2, a, b\}$  paraméterhalmazzal adott kanonikus alakoknak két előnye van. Egyszerűek és a határaik magától értetődőek mivel  $\lambda_1, \lambda_2$  pozitív ráták,  $a, b$  pedig valószínűségek. Ugyanakkor a  $\{\lambda_1, p, \alpha, \gamma\}$  paraméterhalmaz alapú leírás teszi lehetővé a MEP(2) és az AMAP(2) osztályok közötti azonosság bizonyítását [J2]-ben. Épp ezért a másodrendű érkezési folyamatok korrelációs határait is a  $\{\lambda_1, p, \alpha, \gamma\}$  halmaz segítségével adjuk meg az 1. táblázatban, míg ugyanezen folyamatosztály határeloszlásának, a PH(2)-nek a momentumkorlátai már adóttak például [2]-ben.

#### 4.1.2. Kanonikus alak alapú másodrendű Markov érkezési folyamatillesztés

Az illesztés mindig összetett probléma, néhány esetben még akkor is, hogyha az illesztő modell teljesen ismert. Általános esetben tehát a MAP-illesztés bonyolult hiszen a határai nem ismertek. Általános esetben a MAP-illesztés egy sokdimenziós optimalizálási problémára vezet. Ismert határok esetén a probléma a határookra megszorított optimalizálási feladatra vezet, ami még mindig lehet numerikusan kezelhetetlen, vagy adhat pontatlan eredményt például nem analitikusan adott, vagy nagyon bonyolult határ esetén.

**Felbontás alapú illesztő eljárás** Miután a másodrendű érkezési folyamatok momentumhatárai ismertek ezeket felhasználva javíthatjuk a MAP(2)-illesztést. Erre egy magától értetődő lehetőség a momentumok terében (vagy bármely más ekvivalens térben) a távolságminimalizálás MAP(2) határookra való megszorítása. A következőkben a momentumtávolság alapú megközelítés esetén még egy kicsit tovább megyünk és az optimalizálást az analitikusan adott részfelületenként külön-külön végezzük.

**1.2. tézis.** *Javítottam a MAP(2)-vel való, momentum- (vagy bármely más ekvivalens) távolságminimalizáláson alapú illesztésnek a hatékonyságát. Úgy,*



1. ábra. A MAP(2)-határok a momentumtérben

*hogy az optimalizálást az 1. táblázatban analitikusan adott részfelületekre bonttam és rájuk megszorítottam. [C11]*

Az 1. táblázatban adott különböző  $\gamma$  határok kínálkoznak a momentumtávolság alapú MAP(2)-illesztés természetes felbontásának. Valóban a felbontás alapú illesztő eljárás ezeket a természetes módon adott részfelületeket veszi sorra, ahogy az az 1. ábrán is látható.

Vegyünk egy külső (nem MAP(2)) pontot a momentumok terében. Felhasználva ismereteinket a  $\gamma$  határokról, a felbontás alapú illesztő eljárás azt használja ki, hogy a távolság egy tartomány és egy pont között a tartomány határán fekszik, azaz egy a határokra megszorított optimalizálást hajt végre. Mi még ennél is egy kicsit tovább megyünk és a határ minden egyes részfelületére külön-külön végezzük el az illesztést, mivel a MAP(2) határai részenként vannak adva. Az eljárás végigmegy az 1. ábrán megjelenő részfelületeken, minimalizálja a távolságot a külső pont és minden egyes részfelület között végül a minimumok közül a legkisebbet adja. Ezt az eljárást írja le tömören az 1. algoritmus.



---

## 1. algoritmus felbontott illesztő eljárás

---

**INPUT:**  $M = (n_2, n_3, \gamma)$  a külső pont

**OUTPUT:**  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, d)$  a legközelebbi MAP(2) és  $M$ -től való távolsága

- 1:  $d = \infty$
  - 2: **while** van még ellenőrizetlen részfelület **do**
  - 3:   találd meg a legközelebbi pontot  $M$ -től ( $\tilde{M}$ ) az aktuális részfelületen
  - 4:   számold ki  $\tilde{M}$  és  $M$  távolságát  $\tilde{d} = d(M, \tilde{M})$
  - 5:   **if**  $\tilde{d} < d$  **then**
  - 6:      $d = \tilde{d}$
  - 7:      $\hat{M} = \tilde{M}$
  - 8:   **end if**
  - 9:   jöhét a következő részfelület
  - 10: **end while**
  - 11:  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1) \leftarrow \hat{M}$
  - 12: **return**  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, d)$
- 

**Magasabb rendű MAP-ok illesztése alacsonyabb rendűekkel** Feltételezzük, hogy adott két MAP mátrix-reprezentációja  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$  és  $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1)$ , véges együttes eloszlása  $f(\cdot)$  és  $g(\cdot)$  és állandósult állapotbeli fázis eloszlása  $\boldsymbol{\pi}$  és  $\boldsymbol{\gamma}$ . Ekkor kifejezhetjük a két együttes eloszlás szorzatának integrálját  $\mathbb{1}$ , a megfelelő méretű csupa egyesekből álló oszlopvektor segítségével a következőképpen

$$\begin{aligned}
L_{fg}(n) &= \int_{\mathbf{x}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 x_1} \mathbf{D}_1 e^{\mathbf{D}_0 x_2} \mathbf{D}_1 \dots e^{\mathbf{D}_0 x_n} \mathbf{D}_1 \mathbb{1}) \\
&\quad \otimes (\boldsymbol{\gamma} e^{\mathbf{G}_0 x_1} \mathbf{G}_1 e^{\mathbf{G}_0 x_2} \mathbf{G}_1 \dots e^{\mathbf{G}_0 x_n} \mathbf{G}_1 \mathbb{1}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\gamma}) (e^{\mathbf{D}_0 x_1} \otimes e^{\mathbf{G}_0 x_1}) (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{G}_1) \times \dots \\
&\quad \times (e^{\mathbf{D}_0 x_n} \otimes e^{\mathbf{G}_0 x_n}) (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{G}_1) (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) d\mathbf{x} \\
&= (\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\gamma}) \left( \int_{x_1} e^{\mathbf{D}_0 x_1} \otimes e^{\mathbf{G}_0 x_1} dx_1 \right) (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{G}_1) \times \dots \\
&\quad \times \left( \int_{x_n} e^{\mathbf{D}_0 x_n} \otimes e^{\mathbf{G}_0 x_n} dx_n \right) (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{G}_1) (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \\
&= \underbrace{(\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\gamma})}_{\boldsymbol{\nu}} \underbrace{(-(\mathbf{D}_0 \oplus \mathbf{G}_0)^{-1} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{G}_1))^n}_{\mathbf{N}^n} \underbrace{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}_{\mathbb{1}} \\
&= \boldsymbol{\nu} \mathbf{N}^n \mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

**1.3. tézis.** Felhasználva a m atrixkifejez est (10)-ben adtam egy a MAP-ok egy ttes eloszl as anak euklideszi t avols ag an alapuló illeszt o eljárást mind véges, mind végtelen egy ttes eloszlás eset ere. [C11]

A két MAP egy ttes eloszl as anak ( $f(\cdot)$  és  $g(\cdot)$ ) euklideszi t avols ag anak minimuma

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1} d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) &= \\
&= \min_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1} \int_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \\
&= \min_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1} \left( \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} - 2 \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) \quad (11) \\
&= \min_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1} \left( L_{ff}(n) + L_{gg}(n) - 2L_{fg}(n) \right).
\end{aligned}$$

Véges együttes eloszlások esetén (10) használható, hogy (11)-et kiszámoljuk.  Alt alában ez egy  $m(2m - 1)$ -dimenziós optimalizálási probléma, hogyha  $\mathbf{G}_0$  (és  $\mathbf{G}_1$ ) mérete  $m$ . Ha  $\mathbf{D}_0$  (és  $\mathbf{D}_1$ ) mérete  $o$ , akkor (10) számításának bonyolultsága az  $mo$  méretű  $\mathbf{D}_0 \oplus \mathbf{G}_0$  mátrix invertálásával egyezik.

Mostantól azt feltételezzük, hogy a  $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1)$  mátrix-reprezentációjával adott MAP másodrendű, ami megszorítás hiszen (10) és (11) igaz bármilyen két tetszőleges rendű MAP-ra. Ezzel a megszorítás al azonban fel tudjuk használni a másodrendű MAP-ok minimális reprezentációjára vonatkozó (4)-ben és (5)-ben adott ismereteinket és így egyrészt a MAP(2) hatáira megszorítjuk, illetve lecsökkentjük az optimalizálás méretét  $m(2m - 1) = 6$ -r ol 4-re.

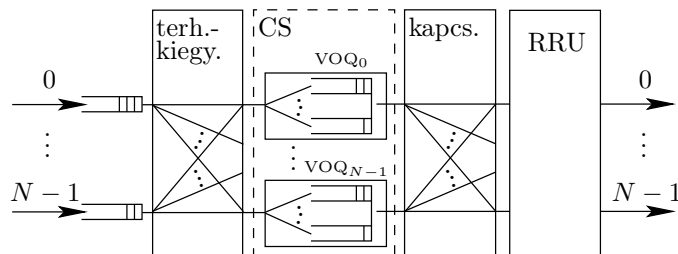
Végtelen együttes eloszlás esetében, amikor  $n \rightarrow \infty$ , (11) a k ovetkezo ve egyszerűsödik

$$\min_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1} (\lambda_f + \lambda_g - 2\lambda_{fg}),$$

ahol  $\lambda_f$ ,  $\lambda_g$  és  $\lambda_{fg}$  a megfelelő  $\mathbf{N}$ -el jelölt mátrix domináns sajátértéke  $L_{ff}(n)$ ,  $L_{gg}(n)$  és  $L_{fg}(n)$  kifejezésében.

Minden illesztő eljárás eredményét összehasonlítjuk az illesztendő folyamat határeloszlásával, korrelációs struktúrájával és a sorviselked es evel.

Itt ismét megjegyezzük, hogy a (11)-ben adott euklideszi távolság alapú optimalizálás változtatás nélkül alkalmazható bármilyen két MAP-ra, illetve bonyolultsága csökkenthető a későbbiekben az illesztő MAP minimális reprezentációjáról kapott bármilyen eredmény felhasználásával.



2. ábra. Az  $N$  méretű terhelés-kiegyenlítő kapcsoló áttekintése

## 4.2. Terhelés-kiegyenlítő kapcsolók teljesítményelemzése különböző bemeneti forgalmak esetén

A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló a [3]-ban leírt felismeréseket kihasználó kétfokozatú kapcsolóarchitektúra. [3] egy olyan kapcsoló átvitelét vizsgálja, amelyben kétdimenziós (virtuális kimeneti) sorok vannak és a determinisztikus round-robin (RR) kapcsolást alkalmazza. A szerzők megmutatják, hogy egy ilyen kapcsoló 100% átvitelt képes biztosítani független azonos eloszlású Bernoulli bemeneti forgalom esetén. Egy új bemeneti fokozatot kapcsolva ez elé a kapcsoló elé az így kapott kétfokozatú kapcsoló képes a nem egyenletes forgalmat egyenletesen elosztani a belső bemeneteken [5]. Ez a 2. ábrán adott és általunk is vizsgált terhelés-kiegyenlítő kapcsolóarchitektúra.

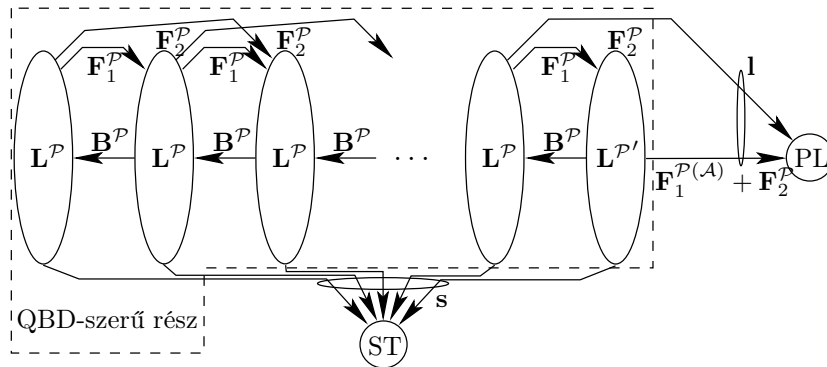
### 4.2.1. A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló részletes modellje különböző bemeneti forgalmak esetén

A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló kezdeti vizsgálataiban [3]-ban, [5]-ben és [7]-ben végtelen puffereket és egyenlő méretű csomagokat feltételeznek. [1]-ben a szerzők véges pufferek esetén analitikus modellt adnak a (továbbra is) egyenlő méretű csomagvesztési valószínűségekre. A mi munkánk annyiban megy tovább, hogy elvégzi a terhelés-kiegyenlítő kapcsolók teljesítményelemzését véges puffer és váltakozó csomagméret mellett.

**2.1. tézis.** *Megadtam a terhelés-kiegyenlítő kapcsoló pontos vizsgálatát váltakozó csomagméretű, különböző bemeneti forgalmak esetén. [T1]*

E vizsgálat során minden bemeneti forgalmat részletesen figyelembe veszünk, azaz minden (egymástól különböző) bemenet állapotát.

Mivel a váltakozó méretű csomagokat a azonos méretű cellákra szegmentáljuk egy csomag akkor vész el, hogyha legalább egy cellája elveszett a középső fokozat (CS) véges puffereiben. Az vizsgálat során markovi viselkedést



3. ábra. A vizsgált csomag életciklusát modellező DTMC

feltételezve megmutatjuk, hogy a csomagvesztés valószínűsége megegyezik a PL nyelőállapotba jutás valószínűségével a 3. ábrán látható tranzien diszkrét idejű Markov láncban (DTMC). Ez a DTMC a vizsgált csomag életciklusát modellezi, amelynek a két lehetséges befejezése a csomag sikeres átvitele (az ST nyelőállapotba jutás), vagy elvesztése (PL-be való jutás). A DTMC tranzien része emlékeztet a kvázi születési halálozási (QBD) folyamatokra azzal a különbséggel, hogy esetünkben több mint egy szintet léphet előre a folyamat, ennek megfelelően ezt a részt „QBD-szerű”-ként jelöljük. A DTMC szintfolyamata (vízszintes irány) jelenti a CS puffer sorhosszát, míg a fázisfolyamata (függőleges irány) a bemenetek együttes viselkedését.

A fázisfolyamat érkezés alapú felbontása adja az  $N \times N$ -es kapcsoló szintátlépési mátrixait ( $\mathbf{B}^P, \mathbf{L}^P, \mathbf{F}_i^P, i \in [1, N - 1]$ ). A szintátlépéseket a cella- és a csomagvesztésre, illetve a sikeres átvitelre való tekintettel adjuk meg.

A 3. ábrán szereplő tranzien DTMC-t a kezdeti eloszlása ( $\boldsymbol{\pi}^T$ ), az állapotátmeneti mátrixa ( $\mathbf{P}^P$ ) és egy nyelőbejutási vektora (a kettőből –  $\mathbf{s}$  vagy  $\mathbf{l}$ ) adja meg.

E reprezentáció birtokában a sikeres átvitel, azaz az ST állapotba jutás valószínűsége

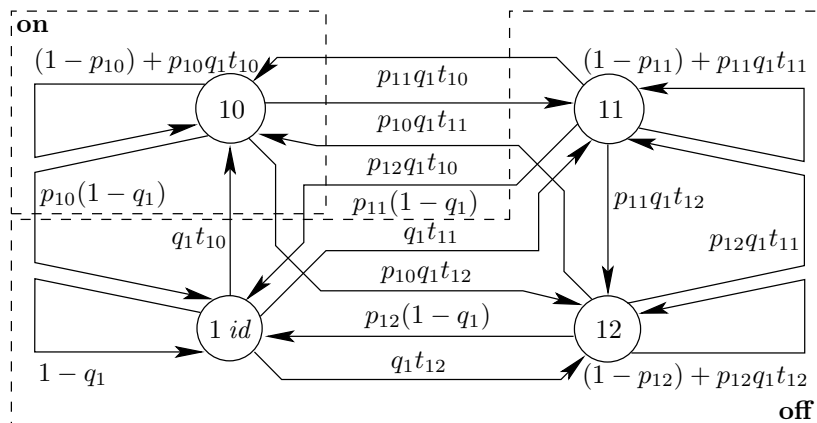
$$p_s = \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}^P)^{-1} \mathbf{s},$$

míg a csomagvesztés, azaz a PL állapotba jutás valószínűsége

$$p_l = \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}^P)^{-1} \mathbf{l}.$$

#### 4.2.2. A különböző bemeneti forgalmú terhelés-kiegyenlítő kapcsoló ON/OFF közelítő vizsgálata

A 2.1. tézisben adott részletes modell túl bonyolult. Minden bemenetet figyelembe venni az egyes bemenetek modelljeiben a kapcsoló méretével ará-



4. ábra. A bemeneti folyamat részletes modellje

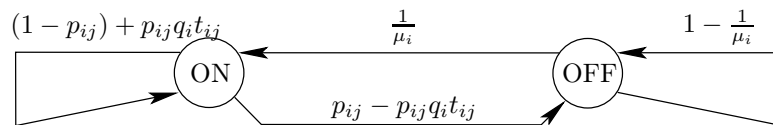
nyos állapotteret eredményez. Majd ezeket a bemeneti modelleket használva a 3. ábrán szereplő QBD-szerű rész fázisfolyamatának (a bemenetek együttes viselkedésének) meghatározására egy  $(N+1)^N$  állapotú DTMC-t eredményez. Ez olyan nagy állapottér, hogy csak nagyon kicsi (csupán  $N = 3$ ) kapcsolókra lehet megoldani.

Az állapottér-robbanásra adott válaszul bevezetjük a bemeneti forgalmak ON/OFF közelítésén alapuló modelljét.

**2.2. tézis.** *Megadtam a terhelés-kiegyenlítő kapcsoló, ON/OFF bemeneti modellen alapuló közelítő modelljét különböző, váltakozó csomagméretű bemeneti forgalom esetén. [C8]*

Az ON/OFF bemeneti modell esetén a teljes modell bonyolultságát sikerült a kimerítő bemeneti forgalmi modell elvetésének árán  $O(2^N)$ -re csökkenteni, ugyanakkor továbbra is képesek vagyunk különböző bemeneti forgalmakat figyelembe venni.

A részletes bemeneti modell  $N + 1$  állapotot tartalmaz, ebből  $N$  jelenti a különböző kimenetekre való érkezést és egy további az üresjárást. Egy kimenet szempontjából vizsgálva csak egy állapot jelent érkezést, az összes többi üresjárást. Például a  $3 \times 3$ -as kapcsoló esetén az 1-es bemenetet és a 0-s kimenetet tekintve ez az állapot **on**-nal van jelölve a 4. ábrán. A 0-s kimenet szempontjából az összes többi állapot üresjárást jelent. Ezeket **off**-fal jelöljük. E felismerés vezetett az **off** állapotok tartási idejének, egyetlen OFF állapottal való, diszkrét fázis típusú (DPH) közelítéséhez és a kétállapotú ON/OFF bemeneti modellhez, ahogy az az 5. ábrán meg van adva.  $\mu_i$  az **off** állapotokat helyettesítő DPH-ban az átlagos nyelési idő és ennek megfelelően  $1 - \frac{1}{\mu_i}$  az OFF állapottartási valószínűsége.



5. ábra. Az általános be- és kimeneti párt modellező ON/OFF DTMC

Ezzel a helyettesítéssel megadjuk a bemenetek méretfüggetlen modelljét és a továbbiakban követjük a 2.1. tézisben megadott lépéseket a QBD-szerű modell megalkotása során, ami ismét a megjelölt csomag életciklusát modellezi. Mivel a fázisfolyamat ismét a bemenetek együttes viselkedése, a modell bonyolultsága a kapcsoló méretének exponenciális függvénye marad, most azonban a hatványozás alapja konstans  $O(2^N)$ .

Kihangsúlyozandó a két modell közötti különbségeket az itt szereplő transziens DTMC-t leíró mennyiségeket a következőképpen jelöljük. A kezdeti eloszlása  $\mathbf{q}^T$ , az állapotátmeneti mátrixa  $\mathbf{Q}^P$  és az ST állapotba való jutás vektora  $\mathbf{t}$ , a PL-be jutásé  $\mathbf{m}$ . Felhasználva őket a sikeres átvitel valószínűsége

$$q_s = \mathbf{q}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^P)^{-1} \mathbf{t}$$

és a csomagvesztési valószínűsége

$$q_l = \mathbf{q}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^P)^{-1} \mathbf{m}.$$

### 4.3. Terhelés-kiegyenlítő kapcsolók teljesítményelemzése és csomagvesztésének minimalizálása azonos bemeneti forgalmak esetén

Mivel mind a 2.1. tézisben, mind a 2.2. tézisben megadott modell bonyolultsága a kapcsoló méretének exponenciális függvénye továbbmegyünk és olyan modellt vezetünk be, aminek a bonyolultsága lineárisan ( $O(N)$ ) függ a kapcsoló méretétől. Habár ez a modell kevésbé bonyolult, mint az előzőek, ez esetben azonos bemeneti forgalmakat feltételezünk, amellyel megszorítjuk a modellünket.

Mivel ez az új megközelítés ígéretesnek tűnik kidolgozunk egy numerikus eljárást is, amellyel tovább tudjuk csökkenteni a modellünk számítási igényét, illetve adunk egy becslést a csomagkéleltetésre is.

Adunk továbbá egy veszteségminimalizáló eljárást is. A csomagvesztés csökkentése azért fontos, mert a már korábban elveszett (egy cellája már elveszett) csomag megmaradó cellái további csomagvesztést okozhatnak a CS

puffer telítésbe vitelével, illetve fölöslegesen új igényt támasztanak a kimene-  
ti összeállítást végző egység (RRU) tárolóegységének növelésére is. Az össze-  
állítási probléma megoldására több megoldás született már, például [4]-ben  
és [6]-ban, amelyek együtt alkalmazhatók az általunk javasolt csomagvesztés-  
minimalizáló eljárással.

#### 4.3.1. A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló közelítő modellje azonos be- meneti forgalmak esetén

**3.1. tézis.** *A terhelés-kiegyenlítő kapcsolónak olyan modelljét adtam, amely azonos bemeneti forgalmat feltételez, ezáltal a modell bonyolultsága lineárisra csökkent a kapcsoló méretének ( $N$ ) függvényében. Becslést is adtam a csomag-  
késleltetésre, illetve egy gyors numerikus eljárást a modell megoldására. [C7]*

**A csomagvesztés meghatározása** Ha azonos érkezési folyamatokat felté-  
telezünk minden bemeneten, akkor az ON/OFF közelítésük is azonos. Ennek  
megfelelően az együttes viselkedésüket egy  $N + 1$  állapotú DTMC írja le,  
amelynek minden egyes állapota az épp adó (ON) állapotban lévő beme-  
netek számát jelenti. Egy ilyen DTMC épp a megjelölt csomag életciklusát  
modellező kvázi születésiszzerű (QB-szerű) tranzien DTMC fázisfolyamatát  
írja le hasonlóan a 4.2. alszakaszban leírtakhoz.

A DTMC kezdeti eloszlását jelölje  $\sigma^T$ , az átmeneti állapotok egylépéses  
állapotátmeneti mátrixát  $\mathbf{S}^P$  és a nyelőbe jutási vektort az ST állapotba  $\mathbf{u}$  a  
PL állapotba pedig  $\mathbf{n}$ . Ezeket a jelöléseket használva a DTMC megoldásképp  
kapjuk a csomag sikeres átvitelének valószínűségét

$$s_s = \sigma^T (\mathbf{I} - \mathbf{S}^P)^{-1} \mathbf{u}$$

és a csomagvesztési valószínűséget

$$s_l = \sigma^T (\mathbf{I} - \mathbf{S}^P)^{-1} \mathbf{n}.$$

**Numerikus eljárások** A megjelölt csomag életciklusát modellező tranzi-  
ens DTMC reprezentációjának egyes elemeit külön-külön határozzuk meg.

A kezdeti eloszlás meghatározásához először a kapcsoló cellaszintű leírás-  
át oldjuk meg, ami egy QBD-szerű DTMC. Az állapotátmeneti mátrixának  
az alsó mellékátlójában, az átlójában és a felső  $N - 1$  mellékátlójában van-  
nak 0-tól különböző blokkok. Ezt újra felosztjuk még hozzá úgy, hogy blokk-  
tridiagonális legyen.

Ezután a blokk-tridiagonális mátrixszal rendelkező lineáris egyenletrend-  
szerek megoldására kitalált gyors és hatékony Folding algoritmust (lásd pél-  
dával [8]-ban) alkalmazzuk a modellünk megoldására. A mátrix újra felosztá-  
sakor ugyan a blokkméret növekszik, azonban csak ezáltal válik alkalmassá a

kezdeti eloszlás Folding algoritmussal való meghatározása nagy pufferméretetek esetén, azaz amikor a mátrix sok blokkot tartalmaz.

Egy további fontos lehetőség, amely az azonos bemeneti forgalmi feltételből következik a csomagszintű modell megváltozása úgy, hogy most a megjelölt csomag életciklusát modellező DTMC QB-szerű, azaz felső blokkháromszög. Ez a felismerés vezetett a csomagvesztési valószínűség ( $s_l$ ) és a sikeres átvitel valószínűségének ( $s_s$ ) egy iteratív numerikus eljárás alapján való megoldásához. Ebben az iteratív eljárásban a teljes mátrix invertálása helyett elegendő annak a diagonális blokkját (egyszer) invertálni.

**A csomagkésleltetés meghatározása** Az átlagos csomagkésleltetést az átlagos cellakésleltetéssel közelítjük, ami az átlagosan eltelt idő a cella kapcsolóba való belépése és kiszolgálásának megkezdése előtt.

#### 4.3.2. Csomagvesztés-minimalizálás a terhelés-kiegyenlítő kapcsolóban azonos bemeneti forgalmak esetén

A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló teljesítményelemzése során az derült ki, hogy ennek a kapcsolóarchitektúrának a legnagyobb problémája a csomagvesztés. Megnöveli a késleltetést a középső fokozatban és a kimeneti újra összeállító egységben (RRU) is. Erre a problémára válaszul bevezetünk egy csomagvesztés-minimalizáló eljárást, amely így képes csökkenteni a rendszer erőforrásigényét és késleltetését is.

Habár az új eljárás csökkenti a középső fokozat veszteségi valószínűségét itt megjegyezzük, hogy ezt a bemeneten való veszteség megjelenésének árán teszi. Azaz amikor az új eljárással kiegészített kapcsolót elemezzük, akkor mindkét veszteségi összetevőt figyelembe kell vennünk az eljárást nem alkalmazó kapcsolóval való összevetésben.

**3.2. tézis.** *Adtam egy csomagvesztés-minimalizáló eljárást, illetve az ezzel az eljárással kiegészített kapcsolónak az azonos bemeneti folyamatokat feltételező, közelítő kapcsolómodellen alapuló analitikus modelljét. [C10]*

A veszteséminimalizáló eljárás a következőképpen működik. Egy vezérlőegység figyeli a középső fokozatbeli pufferek sorhosszát. Ha a sorhossz egy előre definiált küszöb felett van, akkor a bemeneten az *újonnan* érkező csomagot a bemeneten eldobjuk.

Amikor a CS pufferek közel tele vannak egy újabb csomag elfogadása és celláinak pufferekbe irányítása megtelítené az adott puffert, ami mind a már elfogadott, mind az újonnan elfogadott csomag elvesztéséhez vezetne. Ehelyett az új csomagot már a bemeneten eldobjuk ezzel is megspórolva az általa és



a többi elvesző csomag fennmaradó cellái által elvesztegetett pufferkapacitást, mivel egyrészt a bemeneten eldobott csomag minden celláját eldobjuk (így nem okoz fölösleges cellaátvitelt) másrészt csökkentjük a már elfogadott csomag elvesztésének valószínűségét.

Az új eljárást alkalmazó kapcsoló modellezése során arra kell odafigyelni, hogy a kapcsoló viselkedése megváltozik, hogyha a középső fokozat sorhossza a küszöb felett van.

Az érkezési folyamat szemszögéből a csomagvesztés-minimalizáló eljárás annyit jelent, mintha a bemeneti folyamatot üresjárásban tartanánk, amikor a CS puffer sorhossza a küszöb felett van. Matematikailag ez egy olyan modellt (szintátlépési mátrixokat) jelent, amely esetén a bemeneti forgalom üresjárásának geometriai paramétere  $\hat{q} = 0$ .

A véges CS pufferek csomagvesztési valószínűségét ismét a megjelölt csomag életciklusát modellező tranzienst DTMC nyelési valószínűségeiként kapjuk. Most azonban a középső fokozatbeli csomagvesztési valószínűség a küszöbfüggő ( $t$ -függő) nyelési valószínűség a PL állapotban

$$s_i^{(\text{th})}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{(\text{th})\mathcal{I}}(t) \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}^{(\text{th})\mathcal{P}}(t) \right)^{-1} \mathbf{n}^{(\text{th})}(t).$$

Itt a jelöléseket a felső indexbeli  $*^{(\text{th})}$  segítségével különböztetjük meg a 3.1. tézisbeli közelítő modell jelöléseitől. A  $t$ -függőséget szintén hangsúlyozzuk.

Itt ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kapcsoló teljes csomagvesztési valószínűsége ez esetben egy másik tagot is tartalmaz, méghozzá a bemeneti csomagvesztési valószínűséget  $s_i(t)$ . Ezt felhasználva tehát a kapcsoló együttes bemeneti és középső fokozatbeli (I-CS) csomagvesztési valószínűsége

$$s_{\text{I-CS}}(t) = s_i(t) + (1 - s_i(t))s_i^{(\text{th})}(t),$$

Itt is hangsúlyozzuk, hogy a teljes csomagvesztés is  $t$ -függő.

## 5. Alkalmazások

A másodrendű Markov érkezési folyamatok korrelációs határai többféleképpen alkalmazhatók. Két fontos alkalmazási lehetőség a momentum alapú illesztésben illetve a MAP-csökkentésben való alkalmazhatóságuk. E két alkalmazás a tárgya az 1.2. és az 1.3. tézisnek. A gyakorlatban ezen illesztő eljárásoknak bonyolult rendszerek egyszerű modellezésében van szerepe mint például sorbanállási hálózatok vizsgálata esetén fontos lehet a modell méretének csökkentése lépésről lépésre.

A terhelés-kiegyenlítő kapcsoló hálózattervezésben használható. Becsült forgalom esetén például az adott minőségi paraméterek eléréséhez szükséges pufferkapacitás meghatározására használható, vagy az elfogadási küszöb beállításával a valós (vagy várt) forgalom mellett a csomagvesztési valószínűség csökkentésére (vagy beállítására) a lehető legkisebb puffer alkalmazásával.

## Hivatkozások

- [1] Yury Audzevich, Yoram Ofek, Miklós Telek, and Bülent Yener. Analysis of load-balanced switch with finite buffers. In *IEEE GLOBECOM*, pages 1–6, New Orleans, LA, USA, 2008.
- [2] Andrea Bobbio, András Horváth, and Miklós Telek. Matching three moments with minimal acyclic phase type distributions. *Stochastic models*, pages 303–326, 2005.
- [3] Cheng-Shang Chang, Duan-Shin Lee, and Yi-Shean Jou. Load-balanced Birkhoff-von Neumann switches, part I: One-stage buffering. *Computer Communications*, 25:611–622, 2002.
- [4] Cheng-Shang Chang, Duan-Shin Lee, and Ching-Ming Lien. Load-balanced Birkhoff-von Neumann switches, part II: Multi-stage buffering. *Computer Communications*, 25:623–634, 2002.
- [5] Isaac Keslassy, Shang-Tse Chuang, Kyoungsik Yu, David Miller, Mark Horowitz, Olav Solgaard, and Nick McKeown. Scaling Internet routers using optics. In *ACM SIGCOMM*, Karlsruhe, Germany, 2003.
- [6] Isaac Keslassy and Nick McKeown. Maintaining packet order in two-stage switches. In *IEEE INFOCOM*, New York, US, June 2002.
- [7] Chih-Ying Tu, Cheng-Shang Chang, Duan-Shin Lee, and Ching-Te Chiu. Design a simple and high performance switch using a two-stage architecture. In *IEEE GLOBECOM*, volume 2, pages 733–738, St. Louis, MO, USA, November 2005.
- [8] Jingdong Ye and San-qi Li. Folding algorithm: A computational method for finite QBD processes with level-dependent transitions. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2/3/4):652–639, February/March/April 1994.

## Külföldön megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk

- [J1] Levente Bodrog, András Horváth, and Miklós Telek. Moment characterization of matrix exponential and Markovian arrival processes. *Annals of Operations Research*, 160(1):51–68, 2008.
- [J2] Levente Bodrog, Armin Heindl, Gábor Horváth, and Miklós Telek. A markovian canonical form of second-order matrix-exponential processes. *European Journal of Operational Research*, 190(2):459–477, 2008.
- [J3] Levente Bodrog, Gábor Horváth, and Csaba Vulkán. Analytical TCP throughput model for HSDPA. *IET Software*, 3(6):480–494, December 2009.

## Nemzetközi konferencia-kiadványban megjelent idegen nyelvű előadás

- [C1] Levente Bodrog, Gábor Horváth, and Miklós Telek. Comparison of simulation models for long-range dependent traffic traces. In János Leventovszky, editor, *3rd International Workshop on Rare Event Simulation and Combinatorial Optimization*, Budapest, Hungary, 7-8 September 2004.
- [C2] Levente Bodrog, Gábor Horváth, Sándor Rácz, and Miklós Telek. A tool support for automatic analysis based on the tagged customer approach. In *International Conference on the Quantitative Evaluation of SysTems*, pages 323–332, Riverside, CA, USA, September 2006. IEEE Computer Society.
- [C3] Levente Bodrog, András Horváth, and Miklós Telek. On the properties of moments of matrix exponential distributions and matrix exponential processes. In Dario Bini, Beatrice Meini, Vaidyanathan Ramaswami, Marie-Ange Remiche, and Peter Taylor, editors, *Numerical Methods for Structured Markov Chains*, Davis, Germany, November 2007.
- [C4] Levente Bodrog, Armin Heindl, Gábor Horváth, András Horváth, and Miklós Telek. Current results and open questions on PH and MAP characterization. In Dario Bini, Beatrice Meini, Vaidyanathan Ramaswami, Marie-Ange Remiche, and Peter Taylor, editors, *Numerical Methods for Structured Markov Chains*, Davis, Germany, November 2007.

- [C5] Levente Bodrog, Gábor Horváth, and Csaba Vulkán. Analytical TCP throughput model for HSDPA. In Jeremy Bradley and William Knottenbelt, editors, *24th UK Performance Engineering Workshop*, pages 89–106, London, UK, July 2008.
- [C6] Levente Bodrog, Ákos Horváth, and Miklós Telek. Statistical analysis of peer-to-peer live streaming traffic. In *Proceedings of Probability and Statistics with Applications*, Debrecen, Hungary, June 2009.
- [C7] Yury Audzevich, Levente Bodrog, Yoram Ofek, and Miklós Telek. Scalable model for packet loss analysis of load-balancing switches with identical input processes. In Khalid Al-Begain, Dieter Fiems, and Gábor Horváth, editors, *ASMTA*, volume 5513 of *LNCS*, pages 249–263, Madrid, Spain, June 2009. Springer.
- [C8] Yury Audzevich, Levente Bodrog, Yoram Ofek, and Miklós Telek. Packet loss analysis of load-balancing switch with ON/OFF input processes. In Jeremy Bradley, editor, *Computer Performance Engineering*, volume 5652 of *LNCS*, pages 197–211, London, UK, July 2009. Springer.
- [C9] Philipp Reinecke, Katinka Wolter, Levente Bodrog, and Miklós Telek. On the cost of generating PH-distributed random numbers. In *Proceedings of PMCCS*, Eger, Hungary, September 2009.
- [C10] Yury Audzevich, Levente Bodrog, Yoram Ofek, and Miklós Telek. Packet loss minimization in load-balancing switch. In Khalid Al-Begain, Dieter Fiems, and William Knottenbelt, editors, *ASMTA*, LNCS, Cardiff, UK, June 2010. Springer.
- [C11] Levente Bodrog, Peter Buchholz, Jan Kriege, and Miklós Telek. Canonical form based MAP(2) fitting. In *International Conference on the Quantitative Evaluation of SysTems*, Williamsburg, VA, USA, September 2010. IEEE Computer Society. accepted for publication, available at <http://webspn.hit.bme.hu/~bodrog/publicat/qest10.pdf>.

## Magyar nyelvű folyóiratcikk

- [J4] Levente Bodrog, Gábor Horváth, and Csaba Vulkán. A TCP/HSDPA rendszer átvitelének analitikus modellje. *HÍRADÁSTECHNIKA*, LXIII(11):36–43, November 2008. in Hungarian.

## Technical report

- [T1] Yury Audzevich, Levente Bodrog, Miklós Telek, Yoram Ofek, and Bülent Yener. Variable Size Packets Analysis in Load-balanced Switch with Finite Buffers. Technical report, Technical University of Budapest, Hungary, January 2009. available at <http://webspn.hit.bme.hu/~bodrog/techrep/AuBoTeOfYe09.pdf>.

## Ránk hivatkoznak

- [R1] András Horváth, Gábor Horváth, and Miklós Telek. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues. In *Proceedings of the 2008 Fifth International Conference on Quantitative Evaluation of Systems*, pages 125–134, Washington, DC, USA, 2008. IEEE Computer Society. [J1].
- [R2] András Horváth, Gábor Horváth, and Miklós Telek. A traffic based decomposition of two-class queueing networks with priority service. *Computer Networks*, 53(8):1235–1248, June 2009. [J1].
- [R3] Giuliano Casale, Eddy Z. Zhang, and Evgenia Smirni. Trace data characterization and fitting for Markov modeling. *Performance Evaluation*, 67(2):61–79, 2010. [J2].
- [R4] Carmen Sangüesa. On the minimal value in Maier’s property concerning phase-type distributions. *Stochastic Models*, 26(1):124–140, January 2010. [J2].