Gráfmódosítási és stabil párosítási problémák paraméteres bonyolultsága

Schlotter Ildikó

PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Marx Dániel

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2010

1. Bevezetés

A paraméteres bonyolultságelmélet az utóbbi két évtizedben az elméleti számításelmélet dinamikusan fejlődő kutatási területévé vált. Ezen irányzat kereteit Downey és Fellows dolgozta ki [10], legfontosabb célkitűzése hatékony algoritmusok megalkotása számításilag nehéz feladatokra.

A paraméteres bonyolultságelméletben egy adott probléma minden bemenetéhez társítunk egy egész számot, melyet *paraméternek* nevezünk. Így egy algoritmus futási idejét olyan függvénnyel jellemezhetjük, mely függ mind a bemenet n hosszától mind pedig a k paramétertől. Ez a megközelítés lehetőséget ad rá, hogy valamely probléma számítási bonyolultságát részletesebben vizsgáljuk, mint azt a klasszikus bonyolultságelméleti módszerek lehetővé teszik, melyek egy algoritmus futási idejét legtöbbször csak a bemenet n hosszának függvényében tanulmányozzák. Így a paraméteres metodológia olyan problémák esetén is mélyreható bonyolultságelméleti vizsgálatokra ad lehetőséget, melyeket korábban egyszerűen az NP-nehéz problémák körébe soroltak. Mivel a paraméteres bonyolultsági vizsgálatok segítik ezen problémák jobb megértését, így hatékonyabb algoritmusok megtalálásához is vezetnek.

A paraméteres megközelítés alapötlete olyan algoritmusok keresése, melyek kezelhető futási idővel rendelkeznek abban az esetben, ha a paraméter értéke kicsi. Egy algoritmus *FPT* (*fixed-parameter tractable*, azaz *rögzített paraméter mellett kezelhető*), ha a futási ideje $f(k)n^{O(1)}$ alakba írható valamely kiszámítható f függvényre. Ebben az esetben a futási idő polinomiálisan függ a bemenet n hosszától, de az f függvény exponenciális vagy akár még gyorsabban növő függvény is lehet. Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy a futási idő exponenciális része csak a k paraméter értékétől függhet. Egy problémát FPT-nek hívunk, ha adható rá FPT futási idejű algoritmus. A paraméteres bonyolultságelmélet felfedheti egy feladat W[1]-nehézségét is, ami erős érvként szolgál annak alátámasztására, hogy az adott feladatra nem várható FPT algoritmus.

Az értekezés számos probléma paraméteres szempontból történő elemzését tartalmazza. A vizsgált feladatok két csoportra bonthatók: gráfmódosítási feladatként értelmezhető problémákra, illetve Gale és Shapley [14] klasszikus Stabil Házasítás feladatához kötődő problémákra. Az alábbiakban röviden ismertetjük az értekezésben vizsgált témaköröket.

- **Majdnem síkbarajzolható gráfok.** A síkbarajzolhatóság a klasszikus gráfelmélet egyik központi fogalma. Ez részben annak köszönhető, hogy számos, egyébként NP-nehéz feladatra síkgráfok esetén léteznek polinomiális algoritmusok [11, 19] vagy lineáris idejű közelítő sémák [5, 30]. A síkgráfokra adott algoritmusok egy része kiterjeszthető „majdnem síkbarajzolható” gráfok esetére is [34], így az ilyen gráfok vizsgálata fontos kutatási terület.

  Az értekezés k-*apex* gráfok felismerésével foglalkozik. Egy gráf akkor k-apex, ha található benne k csúcs, melyek törlése síkbarajzolható gráfot eredményez. Ezen gráfok felimerése NP-nehéz feladat [29], így a disszertációban k értékét paraméternek tekintve vizsgáljuk ezt a kérdést. A kutatás során Robertson és Seymour gráf-minor tételkörbeli nevezetes eredményeit [41, 40, 42, 43], valamint ehhez a témakörhöz kapcsolódó további algoritmikus eredményeket [8, 38, 4] használtunk fel.

- **Majdnem izomorf gráfpárok.** A bonyolultságelmélet egyik legjelentősebb nyitott kérdése annak a problémának a komplexitása, melyben a feladat eldönteni, hogy két gráf izomorf-e egymással. Speciális esetekre ismertek polinomiális algoritmusok, mint például síkgráfok [21] vagy intervallumgráfok [31] esetére. Az értekezés ennek a problémának egy változatával foglalkozik, mely azt kérdi, hogy két gráf izomorffá tehető-e egymással úgy, ha k csúcsot törölhetünk a nagyobbik gráfból. A disszertáció különböző gráfosztályok esetén tartalmazza ezen gráfmódosítási probléma paraméteres bonyolultságának vizsgálatát, a törlendő csúcsok k számát tekintve paraméternek.

- **Stabil házasítás döntetlenekkel.** A Stabil Házasítás, más néven Stabil Párosítás (Stable Marriage vagy Stable Matching) probléma olyan helyzeteket modellez, melyekben egy kétoldalú piac esetén keresünk a résztvevők preferenciáinak megfelelő párosítást bizonyos stabilitási kritériumok mellett. A probléma klasszikus változatát a következő szituáció szemlélteti: adott férfiak és nők egy halmaza, melyben minden személy preferenciái szerint rangsorolja az ellenkező neműeket. A feladat olyan férfi-nő párosítás keresése, amely *stabil* abban az értelemben, hogy nincs olyan férfi és nő, akiknek érdekében állna a megadott párosítás helyett egymással párt alkotni.

Az értekezés a Stabil Házasítás Döntetlenekkel és Hiányos Listákkal, röviden SMTI (avagy Stable Marriage with Ties and Incomplete Lists) feladatot vizsgálja paraméteres szempontból. Ebben a problémában a szereplők nem feltétlen rangsorolják az összes ellenkező nemű személyt, a preferencialisták pedig tartalmazhatnak döntetleneket is. Ezt a kiterjesztést számos gyakorlati alkalmazás motiválja, mint például a különféle oktatási felvételi rendszerek [6, 2, 3].

A döntetleneket kizáró esettel ellentétben az SMTI probléma egy példányában különböző méretű stabil párosítások is létezhetnek, ilyen helyzetekben a leggyakoribb cél a keresett stabil párosítás méretének maximalizálása. Ez a MaxSMTI (avagy Maximum Stable Marriage with Ties and Incomplete Lists) feladat, melynek NP-teljességét Iwama és társai bizonyították [25]. Azóta számos kutató foglalkozott a problémával, többségükben közelítő algoritmusokkal kapcsolatos eredményeket publikálva [24, 27]. Az értekezés ezen kutatásokkal ellentétben paraméteres szempontból tanulmányozza a MaxSMTI feladatot. A vizsgálatok során a preferencialistákban megjelenő döntetlenek száma, azok maximális vagy összhossza tekinthető paraméternek.

- **Kórházak/Rezidensek házaspárokkal.** A Stabil Házasítás probléma egy általánosítása a Kórházak/Rezidensek feladat, melyet szintén Gale és Shapley vezetett be [14]. Az általa modellezett szituáció a Stabil Házasítás probléma „sok az egyhez” verziója. Ezt a következő, gyakorlatból származó példa illusztrálja: adott kórházak egy halmaza, melyek mindegyike adott számú pozíciót hirdet meg, valamint adottak a kórházak pozícióira jelentkező rezidensek. Minden rezidens rangsorolja a kórházakat, és fordítva, minden kórház rangsorolja a rezidenseket. A feladat a lehető legtöbb rezidens elhelyezése a kórházakban a megadott kapacitások tiszteletben tartásával úgy, hogy az eredményül kapott hozzárendelés bizonyos értelemben stabil legyen.

  A Roth [45] által bevezetett Kórházak/Rezidensek Párokkal, röviden HRC (angolul Hospitals/Residents with Couples) probléma során a rezidensek házaspárokat alkothatnak, melyek közös preferencialistával rendelkeznek. Ez azt jelenti, hogy a kórházak egyéni rangsorolása helyett minden házaspár *kórház-párokat* rangsorol a preferenciáiknak megfelelően. Ilyen módon például azt is ki tudják fejezni, ha azonos, vagy egymáshoz közel eső kórházakban szeretnének dolgozni. A Kórházak/Rezidensek Párokkal probléma feladata annak eldöntése, hogy egy ilyen szituációban létezik-e stabil hozzárendelés. Ez a kérdés szintén számos alkalmazásban felmerül, például az amerikai haditengerészek [39] vagy a szintén amerikai NRMP programban részt vevő gyakorló orvosok beosztásának elkészítésénél [45, 46].

  Ha a HRC feladat egy példánya nem tartalmaz házaspárokat, akkor egy maximális méretű stabil hozzárendelés lineáris időben található a Gale-Shapley algoritmus egy változatának segítségével [14, 18]. Roth [45] megmutatta, hogy egy házaspárokat is tartalmazó feladatban nem szükségszerűen létezik stabil hozzárendelés. Később Ronn [44] azt is belátta, hogy a HRC feladat NP-nehéz. A disszertáció a házaspárok számát paraméternek tekintve vizsgálja ezt a feladatot. Mivel a házaspárok száma jellemzően kicsi a rezidensek összlétszámához (azaz a bemenet méretéhez) képest, ez a paraméterezés a gyakorlatban is hasznos eredményekre vezethet.

Ahol a disszertáció eredményei valamely optimalizálási feladat számítási nehézségét jelzik még paraméteres értelemben is, ott foglalkozom a lokális keresés módszerének hatékony alkalmazhatóságának elméleti lehetőségeivel is. A lokális keresés egyszerű és rendkívül hasznos metaheurisztika, melyet elterjedten alkalmaznak olyan optimalizálási problémák kezelésére, ahol nem ismert polinomiális futási idejű algoritmus optimális megoldás keresésére [1]. Az alapgondolat egy tetszőleges megoldásból kiinduló iteratív javítás oly módon, hogy minden lépésben az eddiginél jobb megoldást keresünk az aktuális megoldás lokális környezetében. Ily módon a lokális keresési algoritmusok a megoldások terét megoldásról megoldásra lépkedve járják be. Egy ilyen módszer során a központi feladat a következő: adott a probléma valamely I példánya, egy S megoldás I-re, valamint egy ℓ egész szám, a feladat pedig olyan S-nél jobb S' megoldás keresése I-re, amely S-nek az ℓ-sugarú környezetében található.

Minél nagyobb környezetben keresünk egy ilyen lépés során, annál jobb megoldás megtalálásában reménykedhedünk. A lokális javítási feladat hatékony megoldása jelentősen növelheti a lokális keresés gyorsaságát, lehetővé téve viszonylag nagy méretű környezetek megvizsgálását kezelhető lépésszám mellett. Általában a lokális javítás feladata NP-nehéz, ha a keresés ℓ sugara tetszőleges értékű lehet; így természetesen adódik a kérdés, hogy vajon ℓ-et paraméternek tekintve adható-e FPT algoritmus erre a feladatra. Ezt a kérdést különböző feladatokkal kapcsolatban több kutató is vizsgálta már a szakirodalomban [35, 26, 47, 28, 12, 33]. Az értekezésben ezt a problémát paraméteres szempontból vizsgálom mind a MaxSMTI, mind a HRC feladatokhoz kapcsolódóan.

2. Kutatási célkitűzések

A disszertáció legfőbb célja az előző szakaszban bemutatott gráfmódosítási és stabil párosítási problémák paraméteres bonyolultságának vizsgálata volt.

Egy probléma számítási bonyolultságának elemzése során az első feladat annak eldöntése, hogy a probléma az NP-nehéz vagy a polinomiális időben megoldható feladatok körébe tartozik-e. Mivel NP-nehéz problémákra nem várható polinomiális futási idejű algoritmus, ezért a célom ezen problémák paraméteres szempontból történő tanulmányozása volt.

Mivel a paraméteres bonyolultságelméletben valamely feladat nehézségét a paraméter függvényében vizsgáljuk, a kutatás következő természetes lépése azon lehetséges paramétereknek a meghatározása, melyek érdemben befolyásolhatják a számítási komplexitást. Egy adott paraméterezés mellett a cél vagy egy FPT algoritmus megtalálása, vagy pedig annak bizonyítása, hogy a feladat W[1]-nehéz.

Egy probléma W[1]-nehézsége azt mutatja, hogy nem várható rá FPT algoritmus, ezért az ilyen problémák kezelése igen nehéz. Mivel a lokális keresési algoritmusok olyan esetekben is hasznosnak bizonyulhatnak, ahol az optimális megoldást nyújtó algoritmusok futási ideje túl nagy, ezért az értekezés egy további célja annak vizsgálata volt, hogy a W[1]-nehéznek bizonyuló feladatokra adhatók-e hatékony lokális keresési algoritmusok.

Egy másik potenciális kutatási irány a közelítő algoritmusok keresés. Azon esetekben, ahol nincs remény polinomiális futási idejű közelítő algoritmusokra, olyan közelítések keresése is cél lehet, melyek futási ideje FPT (valamely paraméterezés mellett). Néhány esetben ezzel a kérdéssel is foglalkozom.

3. Kutatási módszerek

3.1. Paraméteres bonyolultságelmélet

A disszertáció a klasszikus bonyolultságelméleti eszközök használata mellett számos módszert alkalmaz a paraméteres bonyolultág témaköréből. Ezen megközelítésbe nyújt közérthető bevezetést Downey és Fellows monográfiája [10], Niedermeier [37], illetve Flum és Grohe [13] könyvéből pedig frissebb és részletesebb áttekintést nyerhetünk.

A paraméteres bonyolultságelmélet célja olyan algoritmusok keresése NP-nehéz feladatokra, melyek csak kezelhető mértékben exponenciálisak abban az értelemben, hogy a futási idő exponenciális része kizárólag a bemenet egy részére, a paraméterre korlátozódik. Így a cél minden bemenethez egy paraméter meghatározása, mely a gyakorlatban előforduló esetekben kicsinek tekinthető. Adott k paraméterezés mellett $f(k)n^{O(1)}$ lépésszámú algoritmust keresünk, ahol n a bemenet hossza, f pedig egy tetszőleges, csak k-tól függő függvény. Az ilyen futási idővel rendelkező algoritmusokat FPT-nek nevezzük.

A paraméteres szempontból való kezelhetetlenséget írja le a *W[1]-nehézség* fogalma. Ez többé-kevésbé az NP-nehézség paraméteres analógiájaként képzelhető el. Egy paraméteres probléma W[1]-nehézségét úgy lehet megmutatni, hogy egy már ismerten W[1]-nehéz problémát úgynevezett FPT-redukcióval visszavezetünk a szóban forgó problémára. A disszertációban leírt FPT-redukciók legtöbbször a Maximális Klikk feladat szokásos paraméteres változatáról történnek, melyben a paraméter a keresett klikk mérete.

Az eddigiekben bemutatott definíciók általánosíthatók két vagy akár több paraméter esetére is. Ezt időnként *kombinált paraméterezésnek* is nevezik. Ha például egy problémához két paramétert rendelünk, akkor egy FPT algoritmus futási idejének $f(k_1, k_2)n^{O(1)}$ alakúnak kell lennie valamely f függvényre, ahol n a bemenet hossza, valamint k_1 és k_2 a bemenethez rendelt két paraméter. Könnyű látni, hogy egy újabb paraméter hozzárendelése egy adott paraméteres problémához megkönnyítheti egy FPT algoritmus megtalálását. Ezért ha egy feladat W[1]-nehéz valamely paraméterezés mellett, akkor érdemes megvizsgálni, hogy a bemenet valamely újabb jellemzőjét is paraméternek tekintve FPT problémához jutunk-e. Ezen gondolatmenetre alapozva az értekezés számos esetben vizsgál egy-egy problémát kombinált paraméterezés mellett.

3.2. Hatékony lokális keresés

Egy adott Q optimalizálási problémára adott *lokális keresési algoritmus* feladatának definiálásakor feltételezzük, hogy a probléma egy tetszőleges I példányának bármely két S_1 és S_2 megoldására definiált egy $d(S_1, S_2)$ távolság. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy Q maximalizálási feladat, melynek célfüggvényét T jelöli. Egy Q-ra adott lokális keresési algoritmus hatékonysága az alábbi, az eljárás során újra és újra megoldandó feladatra adott algoritmus gyors implementálásán múlik.

Szigorú lokális keresés Q-ra
Bemenet: egy (I, S_0, ℓ) hármas, ahol I a Q feladat egy példánya, S_0 egy megoldás I-re, és $\ell \in \mathbb{N}$.
Feladat: Ha létezik olyan S megoldás I-re hogy $d(S, S_0) \leq \ell$ és $T(S) > T(S_0)$, akkor adjunk ilyen S-et.

A fenti feladatot megoldó algoritmust Q-ra adott *szigorú lokális keresési algoritmusnak* nevezzük. A szigorú jelző ebben az elnevezésben arra utal, hogy a feladat megoldásához mindenképpen kénytelenek vagyunk olyan javított megoldást keresni, amely az S_0-nak ℓ-sugarú környezetében van. Bizonyos esetekben ez még akkor is nehéz lehet, ha amúgy még egy optimális megoldás is könnyen megtalálható (lásd például a Lefogó Ponthalmaz feladatot páros gráfokra [28]).

Ezzel ellentétben egy Q-ra adott *megengedő* lokális keresési algoritmus számára elfogadható az is, hogy olyan megoldást adjon vissza, amely amúgy nem esik közel S_0-hoz, viszont S_0-nál nagyobb értékű. Lokális keresési problémák során egy ilyen algoritmus ugyanolyan hasznos, mint a szigorú változata. A feladat formális definíciója a következő.

Megengedő lokális keresés Q-ra
Bemenet: egy (I, S_0, ℓ) hármas, ahol I a Q feladat egy példánya, S_0 egy megoldás I-re, és $\ell \in \mathbb{N}$.
Feladat: Ha létezik olyan S megoldás I-re hogy $d(S, S_0) \leq \ell$ és $T(S) > T(S_0)$, akkor keressünk I-re egy *tetszőleges* S' megoldást, melyre $T(S') > T(S)$.

Vegyük észre, hogy egy Q-ra adott szigorú lokális keresési algoritmus egyben egy Q-ra adott megengedő lokális keresési algoritmusnak is tekinthető. Emiatt bármely eredmény, amely valamely problémára kizárja egy megengedő lokális keresési algoritmus létezését, erősebb eredménynek tekinhető, mint annak belátása, hogy az adott problémára nem adható szigorú lokális keresési algoritmus.

Legtöbb esetben a fenti lokális keresési feladatok NP-nehezek. Ugyanakkor jellemzően $O(n^\ell)$ időben megoldhatók az összes lehetséges eset megvizsgálásával (azaz „brute force” megközelítéssel), ahol n a bemenet hossza, és ℓ a keresés sugara. Így természetesen vetődik fel a kérdés, hogy vajon ez a futási idő leszorítható-e $f(\ell)n^{O(1)}$ alakúra valamilyen f függvény esetén, azaz másképp fogalmazva, megoldható-e a lokális keresési feladat FPT algoritmussal, ha ℓ a paraméter. Ilyen jellegű kérdéseket a MaxSMTI és a HRC feladatokkal kapcsolatban vizsgáltam.

3.3. FPT-közelítés

A számításilag nehéz problémák kezelésével a paraméteres bonyolultságelmélet mellett egy másik kutatási irányzat, a közelítő algoritmusok területe is foglalkozik. Bár ez az értekezés elsősorban nem közelítő algoritmusokkal foglalkozik, bizonyos optimalizálási feladatok esetén *FPT-közelítő algoritmusok* megadásának lehetőségeit is megvizsgáljuk. Az ilyen típusú algoritmusok hasonlóak a klasszikus közelítő algoritmusokhoz abban az értelemben, hogy a kimenetül szolgáltatott megoldás minőségére – egy arányszámmal jellemezhető módon – garanciát adnak. A klasszikus definícióval ellentétben azonban az FPT-közelítő algoritmusok futási idejének nem kell polinomiálisnak lennie, elég, ha FPT lépésszmúak valamely paraméterezés mellett. Az értekezés stabil párosításokkal kapcsolatos optimalizálási feladatokra tartalmaz FPT-közelíthetetlenségi eredményeket.

4. Új tudományos eredmények

Ebben a szakaszban bemutatom a disszertációban szereplő kutatási eredményeket a kapcsolódó problémakörök szerint csoportosítva. Az itt felsorolt tézisek mindegyike a disszertáció egy-egy új tudományos eredménye, melyek kizárólag a témavezetővel közös munka eredményeképpen születtek.

1. Téziscsoport: k-apex gráfok felismerése

Egy gráf *k-apex*, ha található benne k csúcs, melyek törlése síkbarajzolható gráfot eredményez. Adott G gráf és k szám esetén a k-Apex feladata eldönteni G-ről, hogy k-apex gráf-e. Mivel a k-apex gráfok minden rögzített k esetén egy minorra zárt halmazt alkotnak, ezért Robertson és Seymour gráf-minor-tételkörbeli nevezetes eredményeinek [41, 42] következményeképpen tudjuk, hogy a k-Apex problémára minden rögzített k esetén létezik köbös lépésszámú algoritmus. Ennek az eredménynek a bizonyítása azonban egzisztenciális, azaz csak bizonyítja egy ilyen algoritmus meglétét anélkül, hogy mutatna is egy megfelelő algoritmust. Az értekezésben bemutatom azt az FPT algoritmust, melyet a témavezetőmmel közös cikkünkben [MS07] erre a problémára javasoltunk. Az algoritmus minden fix k-ra négyzetes lépésszámú.

Tézis 1.1 A k-Apex probléma megoldható $f(k)n^2$ időben valamely f függvényre, ahol n jelöli a bemeneti gráf csúcsainak számát.
(A disszertáció 2.4.3-as tétele.)

Az értekezésben leírt algoritmus volt az első, amely a k-Apex feladatot FPT időben megoldotta, k értékét paraméternek tekintve. Ken-ichi Kawarabayashi egy nemrég megjelent cikkében [22] még gyorsabb algoritmust adott erre a problémára.

2. Téziscsoport: Majdnem izomorf gráfpárok felismerése

Tetszőleges $\mathcal{H}$ és $\mathcal{G}$ gráfosztályok esetén az Izomorfia Törléssel (Cleaning) problémát a következőképpen definiáljuk: adott (H, G) gráfpár esetén, melyre $H \in \mathcal{H}$ és $G \in \mathcal{G}$, a feladat olyan S csúcshalmaz keresése G-ben, melyet G-ből törölve H-val izomorf gráfot kapunk. Ezt a feladatot a törlendő csúcsok $k = |V(G)| - |V(H)|$ számával paraméterezzük, az így kapott paraméteres probléma bonyolultságát több $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{G}$ gráfosztály esetén is megvizsgáltuk.

Mivel a $k = 0$ eset éppen a nevezetes Gráfizomorfia problémát adja, az általános esetre (mikor H és G is tetszőleges lehet) adott FPT-algoritmus egyben a Gráfizomorfia problémára is polinomiális algoritmust szolgáltatna, megoldva ezzel az algoritmikus gráfelmélet egyik legfontosabb nyitott kérdését. Mivel ilyen eredményt nem várhattam, ezért olyan

$(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ gráfosztályok	Paraméter		
	Nincs	$\lvert V(H)\rvert$	$\lvert V(G)\rvert - \lvert V(H)\rvert$
(*Fa*, *Fa*)	P [36]	FPT (triv.)	FPT (triv.)
(*Fa*, $-$)	NP-teljes [15]	W[1]-teljes [9]	FPT [2.3 Tézis]
(*3-Összefüggő-Sík*, *Sík*)	NP-teljes [2.2 Tézis]	FPT [11]	FPT [2.1 Tézis]
($-$, *Sík*)	NP-teljes [15]	FPT [11]	Nyitott
(*Interval*, *Interval*)	NP-teljes [2.6 Tézis]	W[1]-nehéz [2.5 Tézis]	FPT [2.4 Tézis]

1. táblázat. Az Izomorfia Törlésse$(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ probléma bonyolultsága.

speciális esetekkel foglalkoztam, melyekre a Gráfizomorfia polinomiális időben megoldható.

A kutatásaim során fákat, síkgráfokat, 3-összefüggő síkgráfokat, illetve intervallumgráfokat vizsgáltam, a megfelelő gráfosztályokat rendre a következőképpen jelöltem: *Fa*, *Sík*, *3-Összefüggő-Sík* és *Intervallum*. Az összes gráfot tartalmazó gráfosztály jelölésére a ,,$-$" jelet használtam. az alábbi tézisek az Izomorfia Törléssel$(\mathcal{H},\mathcal{G})$ feladathoz kapcsolódó klasszikus, illetve paraméteres bonyolultsági eredményeinket foglalják össze a különféle gráfosztályokra.

2.1 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*3-Összefüggő-Sík*, *Sík*) probléma H és G gráfokra $f(k)n^2$ időben megoldható valamely f függvényre, ahol $|V(H)| = n$ és $|V(G)| = n + k$. Itt H-nak és G-nek is síkgráfnak, H-nak ezen felül pedig 3-összefüggőnek is kell lennie.
(A disszertáció 3.1.6-os tétele.)

2.2 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*3-Összefüggő-Sík*, *3-Összefüggő-Sík*) probléma NP-teljes.
(A disszertáció 3.1.1-es tétele.)

2.3 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*Fa*,$-$) probléma H és G gráfokra $f(k)n^3$ időben megoldható valamely f függvényre, ahol $|V(H)| = n$ és $|V(G)| = n + k$. Itt H-nak fának kell lennie, G viszont tetszőleges gráf lehet.
(A disszertáció 3.2.3-as tétele.)

2.4 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*Intervallum*,*Intervallum*) probléma H és G gráfokra $f(k)n^2$ időben megoldható valamely f függvényre, ahol $|V(H)| = n$ és $|V(G)| = n + k$. Itt H-nak és G-nek is intervallumgráfnak kell lennie.
(A disszertáció 4.3.1-es tétele.)

2.5 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*Intervallum*,*Intervallum*) probléma W[1]-nehéz, ha a paraméter a kisebbik bemeneti gráf csúcsainak száma.
(A disszertáció 4.2.1-es tétele.)

2.6 Tézis Az Izomorfia Törléssel(*Intervallum*, *Intervallum*) probléma NP-teljes.
(A disszertáció 4.2.1-es tétele.)

A 2. Téziscsoport új eredményeit valamint a terület néhány már előzőleg is ismert eredményét az 1-es táblázat foglalja össze. Az új eredményeket az [MS09a], [MS09b], valamint az [MS08] cikkekben jelentettük meg.

3. Tézicsoport: A Stabil Házasítás Döntetlenekkel és Hiányos Listákkal probléma vizsgálata

A Stabil Házasítás Döntetlenekkel és Hiányos Listákkal, röviden SMTI (az angol elnevezés alapján) probléma bemenete férfiak és nők egy halmaza, valamint minden személyhez egy-egy preferencialista. Egy p személy preferecialistája a p számára elfogadható ellenkező nemű személyeket rangsorolja. A listák által megadott rendezés nem feltétlenül szigorú, mivel azokban megengedünk *döntetleneket* is. Az SMTI probléma feladata egy *stabil párosítás* megtalálása, azaz olyan férfi-nő párosítás keresése, melyben nincs olyan, a párosításban nem szereplő (m, w) férfi-nő pár, melyre m és w is szigorúan egymást preferálja a párosításbeli párjához képest. A probléma optimalizálási változatában (MaxSMTI) a feladat egy maximális méretű stabil párosítás keresése. (Egy M párosítás mérete a benne szereplő párok száma.)

Ha a MaxSMTI feladat egy példánya nem tartalmaz döntetleneket, akkor a probléma lineáris időben megoldható [14, 18]. Ugyanakkor Manlove és társai [32] bizonyították, hogy a MaxSMTI feladat NP-teljes még abban a rendkívül speciális esetben is, amikor döntetlenek csak a nők preferencialistáinak végén lehetnek, valamint minden döntetlen 2 hosszú (ahol egy döntetlen hossza a benne szereplő személyek száma). Ezen eredményeket kiegészítve tisztáztam a MaxSMTI feladat paraméteres bonyolultságát azokban az esetekben, ahol a paraméter a döntetlenek száma, illetve a döntetlenek összhossza.

3.1 Tézis A MaxSMTI probléma W[1]-nehéz, ha a paraméter a döntetlenek száma.
(A disszertáció 5.1.2-es tétele.)

3.2 Tézis A MaxSMTI probléma $O(T^T n)$ időben megoldható, ahol T a döntetlenek összhossza, és n a bemenet hossza.
(A disszertáció 5.1.1-es tétele.)

A MaxSMTI feladatra vonatkozó lokális keresési feladatok vizsgálatakor két stabil párosítás távolságán azok szimmetrikus differenciájának méretét értjük. Így a megengedő lokális keresési feladat a MaxSMTI problémára a következő: adott a probléma egy I példánya, egy M stabil párosítás I-re valamint egy ℓ egész szám, a feladat egy M-nél nagyobb stabil párosítás meghatározása I-re, amennyiben van olyan M-nél nagyobb stabil párosítás, melynek a távolsága M-től legfeljebb ℓ. (Ha nincs ilyen párosítás, akkor az algoritmus kimenete tetszőleges lehet.)

Az alábbi eredményeim kizárják annak lehetőségét, hogy erre a feladatra hatékony algoritmust adjunk (feltéve, hogy a paraméteres bonyolultságelmélet szokásos W[1] $\neq$ FPT feltételezése igaz).

3.3 Tézis Ha W[1] $\neq$ FPT, akkor nem létezik olyan megengedő lokális keresési algoritmus a MaxSMTI problémára, melynek futási ideje FPT, ahol a paraméter a keresés ℓ sugara. Az eredmény akkor is igaz, ha minden döntetlen 2 hosszú.
(A disszertáció 5.2.2-es tétele.)

3.4 Tézis Ha W[1] $\neq$ FPT, akkor nem létezik olyan megengedő lokális keresési algoritmus a MaxSMTI problémára, melynek futási ideje FPT, ahol a paraméterek a keresés sugara és a döntetlenek száma.
(A disszertáció 5.2.1-es tétele.)

A disszertációban az SMTI probléma két olyan változatával is foglalkozom, ahol nem feltétlenül maximális méretű, hanem valamilyen egyéb kívánatos, a méltányosságot kifejező tulajdonsággal bíró stabil párosítást keresünk. Mindkét vizsgált probléma a következő fogalmon alapul: egy p személy *költségét* valamely M párosításban a p személy M-beli párjának p preferencialistájában kapott sorszámát nevezzük. Ez a definíció p elégedettségét írja le az M párosításban.

Egy I SMTI feladatra adott *egalitariánus* stabil párosítás egy olyan stabil párosítás I-re, amely mellett az I-beli személyek összes költsége a lehető legkisebb. Hasonlóan, egy *minimális* *max-költségű* (angolul *minimum regret*) stabil párosítás I-re egy olyan stabil párosítás, amely mellett az I-beli személyek költségei közül a legnagyobb értéke a lehető legkisebb. Az EgalSMTI (angolul Egalitarian Stable Marriage with Ties and Incomplete Lists) probléma feladata egy egalitariánus stabil párosítás keresése; a MinregSMTI (Minimum Regret Stable Marriage with Ties and Incomplete Lists) probléma ezzel analóg módon definiálható.

Egyik fenti problémára sem várható hatékony közelítő algoritmus, mivel Halldórsson [20] megmutatta, hogy létezik olyan $\delta > 0$, melyre mind az EgalSMTI, mind a MinregSMTI probléma $\delta N(I)$ arányú közelítése NP-nehéz, ahol $N(I)$ az I-ben szereplő férfiak száma. Ha azonban nem engedünk meg döntetleneket a preferencialistákban, akkor mindkét feladat megoldható polinomiális időben [23, 17].

Egyrész a fentieket általánosítottam oly módon, hogy mutattam egy FPT-algoritmust ezen feladatokra, ahol a paraméter a döntetlenek összhossza. Másrészt megmutattam, hogy a probléma nem jól közelíthető, ha csak a paraméterek számát, vagy azok maximális hosszát tekintjük paraméternek.

3.5 Tézis Mind az EgalSMTI, mind a MinregSMTI feladatra létezik FPT algoritmus, ha a paraméter a döntetlenek összhossza.
(A disszertáció 5.3.1-es tétele.)

3.6 Tézis Létezik olyan $\delta > 0$ konstans, hogy ha $\mathrm{W}[1] \neq \mathrm{FPT}$, akkor nem létezik FPT futási idejű δN arányú közelítő algoritmus az EgalSMTI feladatra, ha a paraméter a döntetlenek száma. Itt N a bemenetben szereplő férfiak számát jelöli.
(A disszertáció 5.3.2-es tétele.)

3.7 Tézis Ha $\mathrm{W}[1] \neq \mathrm{FPT}$ és $\varepsilon > 0$, akkor nem létezik FPT futási idejű $N^{1-\varepsilon}$ arányú közelítő algoritmus a MinregSMTI feladatra, ha a paraméter a döntetlenek száma. Itt N ismét a bemenetben szereplő férfiak számát jelöli.
(A disszertáció 5.3.3-as tétele.)

Érdemes lehet megjegyezni, hogy a 3. Téziscsoport minden nehézségi eredménye igaz marad abban a speciális esetben is, amikor döntetlenek csak a nők preferencialistáinak végén helyezkedhetnek el. A téziscsoport új eredményeit valamint a terület néhány már előzőleg is ismert eredményét a 2-es táblázat foglalja össze. Az eredmények az [MS09c] cikkben kerültek publikálásra.

4. Téziscsoport: A Kórházak/Rezidensek Párokkal feladat vizsgálata

A Kórházak/Rezidensek Párokkal, röviden HRC (Hositals/Residents with Couples) probléma során adott kórházak egy halmaza, melyek mindegyike adott számú pozíciót hirdet meg, valamint adottak a kórházak pozícióira jelentkező rezidensek. Egyes rezidensek egyedülállóak, mások viszont házaspárokat alkotnak. Minden kórház rangsorolja a rezidenseket, minden egyedülálló rezidens rangsorolja a kórházakat, és minden házaspár rangsorolja a kórház-párokat. A megadott rangsorok szigorú sorrendezést határoznak meg.

A Kórházak/Rezidensek Párokkal probléma feladata a rezidenseket a kórházakhoz rendelő *stabil hozzárendelés* keresése, amely tiszteletben tartja a kórházak kapacitásait is. Egy hozzárendelést akkor nevezünk stabilnak, ha nem létezik hozzá blokkoló pár. Egy adott hozzárendelés esetén blokkoló párt alkot egy olyan kórház-rezidens páros, hogy mind a kórház, mind a rezidens számára előnyösebb lenne egymással szerződniük, mintsem elfogadni a megadott hozzárendelést. Blokkoló párt alkothat egy házaspár és egy kórház-pár is, ha mindkét kórház valamint a házaspár számára is előnyösebb lenne egymással szerződniük, mintsem elfogadni a szóban forgó hozzárendelést. A stabilitási kritérium pontosabb definíciója megtalálható az értekezés 6. fejezetében. A MaxHRC feladat a HRC probléma optimalizálási verziója, ahol a cél egy maximális méretű stabil hozzárendelés megtalálása; egy hozzárendelés mérete az általa pozícióhoz jutó rezidensek száma.

Ha a HRC probléma egy példányában nincsenek házaspárok, akkor lineáris időben található egy maximális méretű stabil hozzárendelés [14, 18]. Az alábbi tézisben ennek a feladat-

	Paraméterek		
	$T_{\max} = 2$ (és ℓ)	$T_{\text{szám}}$ (és ℓ)	$T_{\text{össz}}$
MAXSMTI	NP-nehéz [32]	W[1]-nehéz [3.1 Tézis]	FPT [3.2 Tézis]
Megengedő lokális keresés MAXSMTI-re	Nincs FPT alg. [3.3 Tézis]	Nincs FPT alg. [3.4 Tézis]	FPT [3.2 Tézis]
Közelítés EGALSMTI-re	Nincs $N^{1-\varepsilon}$ arányú poli. alg. ($\forall\varepsilon > 0$) [32]	Nincs δN arányú FPT alg. ($\exists\delta > 0$) [3.6 Tézis]	FPT, egzakt [3.5 Tézis]
Közelítés MINREGSMTI-re	Nincs $N^{1-\varepsilon}$ arányú poli. alg. ($\forall\varepsilon > 0$) [32]	Nincs $N^{1-\varepsilon}$ arányú FPT alg. ($\forall\varepsilon > 0$) [3.7 Tézis]	FPT, egzakt [3.5 Tézis]

2. táblázat. Az SMTI problémához kapcsolódó új, illetve előzőleg is ismert eredmények összefoglalása (feltételezve, hogy W[1] $\neq$ FPT és P $\neq$ NP). Az ℓ paraméter csak a lokális keresési feladatban definiált, és a keresés sugarát jelöli. A táblázatban $T_{\text{szám}}$, $T_{\max}$ és $T_{\text{össz}}$ rendre a döntetlenek számát, azok maximális, illetve összhosszának jelöli. Végül N jelöli a férfiak számát.

nak a paraméteres bonyolultságát határoztam meg, ha a paraméter a házaspárok száma.

> **4.1 Tézis** A HRC feladat (és emiatt a MAXHRC feladat is) W[1]-nehéz, ha a paraméter a párok száma, még akkor is, ha minden kórház kapacitása 1.
> (A disszertáció 6.1.1-es tétele.)

Ahhoz, hogy a lokális keresés feladatát értelmezhessük a MAXHRC feladatra, két (a rezidenseket a kórházakhoz rendelő) A és A' hozzárendelés, távolságán azon rezidensek számát értjük, akik nem ugyanahhoz a kórházhoz vannak beosztva A-ban, mint A'-ben. Ennek segítségével definiálhatjuk a MAXHRC feladatra vonatkozó szigorú lokális keresési feladatot: adott a MAXHRC probléma egy I példánya, egy stabil hozzárendelés I-hez, valamint egy ℓ egész, a feladat pedig olyan A' stabil hozzárendelés keresése I-re, amely A-nál nagyobb, és az A-tól vett távolsága legfeljebb ℓ.

Ennek a feladatnak a megengedő változatában elegendő egy tetszőleges, A-nál nagyobb stabil hozzárendelést megadni, amennyiben létezik A-nál nagyobb stabil hozzárendelés annak ℓ-sugarú környezetében. (Amennyiben nincs ilyen hozzárendelés, akkor a kimenet tetszőleges lehet.)

Az alábbi két tézisben megmutattam, hogy paraméternek csupán a keresés ℓ sugarát tekintve nem remélhetünk FPT algoritmust még a megengedő lokális keresési feladatra sem, ugyanakkor a keresés sugara mellett a házaspárok számát is paraméternek tekintve létezik szigorú lokális keresési FPT algoritmus a problémára.

> **4.2 Tézis** Ha W[1] $\neq$ FPT, akkor a MAXHRC problémára nem adható FPT futási idejű megengedő lokális keresési algoritmus, ha a paraméter a keresés sugara. Az állítás igaz akkor is, ha minden kórház kapacitása 1.
> (A disszertáció 6.2.1-es tétele.)

> **4.3 Tézis** A MAXHRC problémára létezik FPT futási idejű szigorú lokális keresési algoritmus, ha a paraméter a keresés ℓ sugara és a házaspárok c száma. A bemutatott algoritmus randomizált változatának lépésszáma $O(\ell(72c)^{\ell}|I|)$, az algoritmus kimenete pedig legalább $(2\ell)^{-2\ell}$ valószínűséggel helyes. Itt $|I|$ a bemenet hossza. A determinisztikus változat lépésszáma $O(\ell^{O(\ell)}c^{\ell}|I|\log|I|)$.
> (A disszertáció 6.2.2-es tétele.)

Az értekezés a MAXHRC probléma egy egyszerűsített verzióját is vizsgálja, ahol meg-

Feladat:	Létezési probléma	Maximum probléma	Lokális keresési FPT alg.	
Paraméter:		c	ℓ	(c, ℓ)
HRC (pref.)	W[1]-nehéz [4.1 Tézis]	W[1]-nehéz [4.1 Tézis]	Nincs megengedő alg. [4.2 Tézis]	Szigorú alg. [4.3 Tézis]
MMC (pref. nélkül)	P (triv.)	Random. FPT [4.4 Tézis]	Nincs megengedő alg. [4.5 Tézis]	Megengedő alg. [4.4 Tézis]

3. táblázat. A 4. Téziscsoport eredményei (W[1] $\neq$ FPT feltétel mellett). A házaspárok számát c-vel, a keresés sugarát ℓ-lel jelöltük.

feledkezünk a preferenciákról. Ebben a változatban adott kórházak, egyedülálló rezidensek, valamint házaspárokat alkotó rezidensek egy halmaza, illetve adott még minden kórházhoz az elfogadható rezidensek listája, minden egyedülálló rezidenshez az elfogadható kórházak listája és minden házaspárhoz a számukra elfogadható kórház-párok listája. A Maximális Párosítás Párokkal, vagy röviden MMC (angolul Maximum Matching with Couples) probléma feladata egy olyan maximális méretű hozzárendelés keresése, amely az elfogadhatósági feltételeket tiszteli.

Világos, hogy ha nincsenek házaspárok, akkor ez a probléma maximális méretű párosítás keresésével ekvivalens egy páros gráfban, így polinomiális időben megoldható. Ha azonban házaspárok is szerepelhetnek a bemenetben, akkor a probléma nehézzé válik. Pontosabban szólva, a feladat eldöntési változata még abban a speciális esetben is NP-teljes [16, 7], ha minden kórház kapacitása 2, és tetszőleges házaspár esetén az elfogadható kórház-párok alakja (h, h) valamely h kórházra. Ugyanakkor ha a házaspárok száma kevés, ami sok gyakorlati alkalmazásban elfogadható feltételezés, akkor az MMC feladat hatékonyan megoldható, amint azt az alábbi tézisben megmutattuk.

4.4 Tézis A Maximális Párosítás Párokkal feladat randomizált FPT időben megoldható, ha a paraméter a házaspárok száma.
(A disszertáció 6.3.1-es tétele.)

A fenti tézis lehetőséget nyújt az MMC probléma megoldására abban az esetben, ha a házaspárok száma kicsi. Amennyiben a házaspárok száma nagy, akkor a feladat kezelésének egyik lehetséges módja a lokális keresés alkalmazása. Ezért az MMC feladatra adható hatékony lokális keresési algoritmusok lehetőségeit is megvizsgáltam, és az alábbi eredményre jutottam.

4.5 Tézis Ha W[1] $\neq$ FPT, akkor az MMC probléma megengedő lokális keresési feladatára nem létezik FPT lépésszámú algoritmus, ha a paraméter a keresés ℓ sugara, még abban az esetben sem, ha minden kapacitás 2.
(A disszertáció 6.3.5-ös tétele.)

A 4. Téziscsoport eredményei az [MS09d] cikkben jelentek meg, a benne szereplő tézisekről a 3-as táblázat nyújt összefoglalót.

Hivatkozások

[1] E. H. L. Aarts and J. K. Lenstra, editors. *Local Search in Combinatorial Optimization.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. Reprint of the 1997 original [Wiley, Chichester].

[2] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, and A. E. Roth. The New York City high school match. *American Economic Review*, 95(2):364–367, May 2005.

[3] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, A. E. Roth, and T. Sönmez. The Boston public school match. *American Economic Review*, 95(2):368–371, May 2005.

[4] S. Arnborg, A. Proskurowski, and D. Seese. Monadic second order logic, tree automata and forbidden minors. In *CSL 1990: Proceedings of the 4th Workshop on Computer Science Logic*, volume 533 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–16. Springer, 1991.

[5] B. S. Baker. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *J. ACM*, 41(1):153–180, 1994.

[6] P. Biró. Student admissions in Hungary as Gale and Shapley envisaged. Technical report, University of Glasgow, Department of Computing Science, 2008.

[7] P. Biró and E. J. McDermid. Matching with sizes (or scheduling with processing set restrictions). Technical report, University of Glasgow, Department of Computing Science, 2010.

[8] H. L. Bodlaender. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM J. Comput.*, 25(6):1305–1317, 1996.

[9] Y. Chen and J. Flum. On parameterized path and chordless path problems. In *CCC 2007: 22nd Annual IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 250–263. IEEE Computer Society, 2007.

[10] R. G. Downey and M. R. Fellows. *Parameterized complexity.* Monographs in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] D. Eppstein. Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems. *J. Graph Algorithms Appl.*, 3(3):1–27, 1999.

[12] M. R. Fellows, F. V. Fomin, D. Lokshtanov, F. A. Rosamond, S. Saurabh, and Y. Villanger. Local Search: Is brute-force avoidable? In *IJCAI 2009: Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 486–491, 2009.

[13] J. Flum and M. Grohe. *Parameterized Complexity Theory.* Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, New York, 2006.

[14] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[15] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman & Co., New York, 1979. A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[16] C. A. Glass and H. Kellerer. Parallel machine scheduling with job assignment restrictions. *Naval Research Logistics*, 54(3):250–257, 2007.

[17] D. Gusfield. Three fast algorithms for four problems in stable marriage. *SIAM J. Comput.*, 16(1):111–128, 1987.

[18] D. Gusfield and R. W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* Foundations of Computing Series. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[19] F. Hadlock. Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time. *SIAM J. Comput.*, 4(3):221–225, 1975.

[20] M. M. Halldórsson, R. W. Irving, K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, Y. Morita, and S. Scott. Approximability results for stable marriage problems with ties. *Theor. Comput. Sci.*, 306(1-3):431–447, 2003.

[21] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.

[22] K. ichi Kawarabayashi. Planarity allowing few error vertices in linear time. In *FOCS 2009: Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 639–648, 2009.

[23] R. W. Irving, P. Leather, and D. Gusfield. An efficient algorithm for the „optimal" stable marriage. *J. ACM*, 34(3):532–543, 1987.

[24] R. W. Irving and D. F. Manlove. Approximation algorithms for hard variants of the stable marriage and hospitals/residents problems. *J. Comb. Optim.*, 16(3):279–292, 2008.

[25] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita. Stable marriage with incomplete lists and ties. In *Automata, Languages and Programming (Prague, 1999)*, volume 1644 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 443–452. Springer, Berlin, 1999.

[26] S. Khuller, R. Bhatia, and R. Pless. On local search and placement of meters in networks. *SIAM J. Comput.*, 32(2):470–487, 2003.

[27] Z. Király. Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem. In *ESA '08: Proceedings of the 16th annual European symposium on Algorithms*, pages 623–634, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.

[28] A. Krokhin and D. Marx. On the hardness of losing weight. In *ICALP 2008: 35rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, volume 5125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 662–673, Berlin, 2008. Springer.

[29] J. M. Lewis and M. Yannakakis. The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete. *J. Comput. Syst. Sci.*, 20(2):219–230, 1980.

[30] R. J. Lipton and R. E. Tarjan. Applications of a planar separator theorem. *SIAM J. Comput.*, 9(3):615–627, 1980.

[31] G. S. Lueker and K. S. Booth. A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism. *J. ACM*, 26(2):183–195, 1979.

[32] D. F. Manlove, R. W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, and Y. Morita. Hard variants of stable marriage. *Theor. Comput. Sci.*, 276(1-2):261–279, 2002.

[33] D. Marx. Local search. Parameterized Complexity News, pages 7–8, volume 3, 2008.

[34] D. Marx. Parameterized complexity and approximation algorithms. *The Computer Journal*, 51(1):60–78, 2008.

[35] D. Marx. Searching the k-change neighborhood for TSP is W[1]-hard. *Oper. Res. Lett.*, 36(1):31–36, 2008.

[36] D. W. Matula. Subtree isomorphism in $o(n^{5/2})$. *Ann. Discrete Math.*, 2:91–106, 1978.

[37] R. Niedermeier. *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*, volume 31 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2006.

[38] L. Perkovic and B. A. Reed. An improved algorithm for finding tree decompositions of small width. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 11(3):365–371, 2000.

[39] P. A. Robards. *Applying Two-Sided Matching Processes to the United States Navy Enlisted Assignment Process*. PhD thesis, Naval Postgraduate School Monterey CA, 2001.

[40] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. V. Excluding a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 41(1):92–114, 1986.

[41] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XIII. The disjoint paths problem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1):65–110, 1995.

[42] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. Wagner's conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.

[43] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Quickly excluding a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 62(2):323–348, 1994.

[44] E. Ronn. NP-complete stable matching problems. *J. Algorithms*, 11(2):285–304, 1990.

[45] A. E. Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92:991–1016, 1984.

[46] A. E. Roth and M. Sotomayor. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, volume 18 of *Econometric Society Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1990.

[47] S. Szeider. The parameterized complexity of k-flip local search for SAT and MAX SAT. In *SAT 2009: Proceedings of the 12th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, volume 5584 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–283. Springer, 2009.

Publikációk

1. Téziscsoporthoz kapcsolódó publikáció:

[MS07] D. Marx and I. Schlotter: Obtaining a planar graph by vertex deletion. *In Proc. of 33nd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2007)*, volume 4769 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 292–303, Berlin, Springer, 2007.

2. Téziscsoporthoz kapcsolódó publikációk:

[MS09a] D. Marx and I. Schlotter: Parameterized graph cleaning problems.
Discrete Applied Mathematics, 157(15):3258–3267, 2009.

[MS09b] D. Marx and I. Schlotter: Cleaning interval graphs.
Manuscript, 2009.

[MS08] D. Marx and I. Schlotter: Parameterized graph cleaning problems.
In Proc. of 34nd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2008), volume 5344 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 287–299, Berlin, Springer, 2008.

3. Téziscsoporthoz kapcsolódó publikáció:

[MS09c] D. Marx and I. Schlotter: Parameterized complexity and local search approaches for the stable marriage problem with ties.
To appear in *Algorithmica*. Published online on 23 May 2009.

4. Téziscsoporthoz kapcsolódó publikáció:

[MS09d] D. Marx and I. Schlotter. Stable assignment with couples: parameterized complexity and local search.
In Proc. of 4th International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC 2009), Copenhagen, Denmark, volume 5917 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 300–311, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

Egyéb publikációk:

[MS10a] K. Jansen, S. Kratsch, D. Marx and I. Schlotter: Bin packing with fixed number of bins revisited.
Accepted to *12th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory, Bergen, Norway (SWAT 2010).*

[MS10b] D. Marx and I. Schlotter: Parameterized complexity of the arc-preserving subsequence problem.
Manuscript, 2010, submitted.

[TRS06] G. Tassi, P. Rózsa and I. Schlotter: Matrix analysis of V- or Y-supported continuous bridge girders.
BME ÉÖK Hidak és Szerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei, Budapest, pages 181–192, 2006.

[SGL05] Schlotter I., Gáspár Cs., and Lukács. A: Internetes tartalmak minősítése a felhasználók modellezésével. *Híradástechnika*, 5:13–19, 2005.

[S04] Schlotter I: Hírportálok rovatainak modell alapú minősítése.
Tudományos Diákköri dolgozat, BME VIK, Távközlési és Médiainformatikai Tanszék, 2004.

Hivatkozási lista

[MS09a]

- R. van Bevern, H. Moser, R. Niedermeier: Kernelization through tidying—A case study based on s-plex cluster vertex deletion
  In Proc. of the 9th Latin American Theoretical Informatics Symposium (LATIN'10), volume 6034 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 528–539, Springer, Berlin, 2010.

[MS09c]

- ○ A. Krokhin, D. Marx: On the hardness of losing weight
  To appear in *ACM Transactions on Algorithms.*

[MS09d]

- P. Biró, E. J. McDermid: Matching with sizes (or scheduling with processing set restrictions)
  Technical Report TR-2010-307, University of Glasgow, Department of Computing Science, 2010.
- ○ A. Krokhin, D. Marx: On the hardness of losing weight
  To appear in *ACM Transactions on Algorithms.*

[MS07]

- I. Adler, M. Grohe, S. Kreutzer: Computing excluded minors
  In: *SODA 2008: Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 641–650, 2008.
- M. R. Fellows, J. Guo, H. Moser, R. Niedermeier: A complexity dichotomy for finding disjoint solutions of vertex deletion problems
  In Proc. of 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2009), volume 5734 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–330, Berlin, Springer, 2009.
- P. Heggernes, F. Mancini: Dynamically maintaining split graphs
  Discrete Applied Mathematics, 157(9):2057–2069, 2009.

- Ken-ichi Kawarabayashi: Planarity Allowing Few Error Vertices in Linear Time
  In: *50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009)*, pages 639–648, 2009.

- M. Mahajan, V. Raman, S. Sikdar: Parameterizing above or below guaranteed values
  Journal of Computer and System Sciences, 75(2):137–153, 2009.

- F. Mancini: Minimum Fill-In and Treewidth of Split+ke and Split+kv Graphs *In Proc. of 18th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2007)*, volume 4835 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 881–892, Berlin, Springer, 2007.

- F. Mancini: Graph Modification Problems Related to Graph Classes
  PhD Thesis, University of Bergen, 2008.

- G. B. Mertzios, S. D. Nikolopoulos: The lambda-cluster problem on parameterized interval graphs
  RWTH Aachen Technical Report, 2008.

◦ D. Marx: Parameterized complexity and approximation algorithms
  The Computer Journal, 51(1):60–78, 2008.

◦ D. Marx: Chordal deletion is fixed-parameter tractable
  To appear in *Algorithmica*.