MŰEGYETEM 1782
TARTÓSZERKEZETEK MECHANIKÁJA TANSZÉK

Térbeli káosz diszkrét mechanikai rendszerekben: rugalmas rúdláncok és rugalmas rúdhálók

PhD értekezés tézisei

KOCSIS Attila

Tudományos vezető:
Dr. KÁROLYI György

Budapest, 2008.

1. A kutatás előzményei, célkitűzései

Az első kihajlási feladat, az *Euler*-kihajlás megoldása óta sokféle rúd és rúdszerkezet esetében határozták meg a kritikus terhet, illetve az egyensúlyi konfigurációkat. A mérnöki gyakorlatban többnyire az első kihajlási alak és a hozzá tartozó kritikus teher az érdekes, a tökéletlenség-érzékenység szempontjából azonban fontos a posztkritikus állapotok vizsgálata is. A mérnöki gyakorlaton túl a biológiában is kiemelt szerep jut a rudak és rúdszerkezetek egyensúlyi konfigurációinak: szálas biológiai struktúráknál – mint a DNS, a bio-polimerek, vagy a kacsok, indák – sokféle bonyolult térbeli megjelenés figyelhető meg.

Rudak, rúdszerkezetek kihajlásának vizsgálatára folytonos vagy diszkrét mechanikai modelleket szokás alkalmazni. Folytonos modell esetén az egyensúlyi, geometriai és anyagegyenletek egy differenciálegyenletre, vagy differenciálegyenlet-rendszerre, míg diszkrét modell használatával egy leképezésre vezetnek. Ezeket értelmezhetjük olyan dinamikai rendszerként is, ahol az idő (diszkrét esetben az időlépések száma) szerepét az ívhossz (diszkrét esetben az elemek száma) játssza. Ismert például, hogy az *Euler*-kihajlást leíró differenciálegyenlet formailag azonos a *matematikai inga* mozgásegyenletével (természetesen az előbbiben az ívhossz, míg az utóbbiban az idő a változó, valamint a paraméterek mögött különböző fizikai tartalmak állnak). A mozgásegyenletet azonban *kezdetiértékek* figyelembevételével oldjuk meg, és eredményül az inga helyzetét kapjuk az idő függvényében, míg a kihajlási feladatnál *peremfeltételek* adottak, véges tartományon kell megoldást keresnünk, eredményül pedig a kihajlott alakot kapjuk meg. Ismert az is, hogy az *Euler*-kihajlás egy diszkrét mechanikai modellje, a támaszvonalában terhelt kéttámaszú *rugalmas rúdlánc* kihajlásának vizsgálata olyan területtartó leképezésre vezet, amely formailag a periodikusan lökdösött rotátor mozgását is leíró *standard leképezéssel* egyezik meg. Természetesen előbbinél a merev rúdelemek száma, míg utóbbinál az időlépések száma a változó. Fontos különbség a példaként hozott folytonos és diszkrét idejű dinamikai rendszerek között, hogy a matematikai inga *reguláris*, míg a lökdösött rotátor *kaotikus*: a matematikai inga periodikus, szabályosan ismétlődő mozgást végez (épp ezért használhatták sokáig az idő mérésére), ellenben a lökdösött rotátor időbeli viselkedése bizonyos kezdőfeltételek mellett bonyolult, szabálytalan, soha nem ismétlődő, kaotikus. Ezzel analóg módon a kihajlási feladat megoldásaihoz a folytonos modellnél egyszerű kihajlott alakok társulnak, míg a diszkrétnél bonyolult, szabálytalan alakokat is találunk nagy számban, köztük sok stabilissal.

Rudak illetve rúdszerkezetek komplex térbeli konfigurációinak leírásához így a *káoszelmélet* nyújthat megfelelő eszközöket. A bonyolult kihajlott alakok jellemezte komplex viselkedéshez a *térbeli káosz* fogalmát társítják. Habár rudaknál az idő szerepét átvevő térbeli változó skalár, mivel bonyolult, kaotikus viselkedés megjelenhet már akár a síkbeli kihajlás során is, ezért a térbeli káosz elnevezést megtartottuk az időbeli káosztól való különbségtétel miatt.

Ilyen térben kaotikus viselkedést figyeltek meg makromolekulák konfigurációjának vizsgálatakor, a DNS, mágnesszallag, tengeri kábelek feltekeredésének leírásakor, vagy kacsok, indák, kúszó növények mechanikai modellezésénél, és periodikusan változó hajlítómerevségű folytonos rudak kihajlott alakjainak jellemzésekor is.

A térbeli és az időbeli bonyolultság közötti kapcsolat nem triviális. Ennek egyik oka, hogy előbbi egy *peremérték-feladat*, míg utóbbi egy *kezdetiérték-feladat* vizsgálatát jelenti. Peremérték-feladatnál az egyenlet(ek)et tipikusan véges tartományon, *peremfeltételek* figyelembevételével kell megoldani, és az eredményül kapott trajektóriák véges hosszúságúak. Ezzel szemben egy kezdetiérték-feladatnál az egyenlet(ek)et *kezdetiértékek* mellett kell megoldani és az eredményül kapott trajektóriák végtelen hosszúak. További problémát jelent, hogy egyetlen lényeges térbeli kiterjedéssel rendelkező szerkezeteknél (például rudaknál) a térbeli változónak (például ívhossznak) megfeleltethető ugyan az idő, de több (2 vagy 3) lényeges térbeli kiterjedéssel bíró szerkezeteknél a térbeli változóknak több (2 vagy 3) időváltozó felelne meg, így az időbeliség analógiájára itt már nem támaszkodhatunk még a vizsgált tartomány végtelen kiterjesztésével sem.

Mindezek miatt a térbeli káosz fogalma nincs még kellően tisztázva. Szokás úgy definiálni, mint a dinamikai rendszerek kaotikus viselkedését, de ez a definíció csak akkor állja meg a helyét, ha a probléma egyetlen térbeli változóval leírható, és a vizsgált tartomány végtelen hosszú. Jogosan merül fel a kérdés, hogy hogyan lehet a térbeli káoszt úgy definiálni, hogy az alkalmazható legyen véges és egynél magasabb dimenziós tartományon is.

Kihajlásvizsgálatot mindeddig főleg potenciálos erők hatására végeztek. Van azonban néhány példa nemkonzervatív erő alatti kihajlás vizsgálatára is, mint például a Beck-probléma, vagyis a követőerővel terhelt konzolos gerenda kihajlása. A követőerő a gyakorlatban számos helyen felbukkan, például folyadékot szállító csöveknél, egyszerűbb rakétamodelleknél. A követőerővel terhelt konzolos gerendáról nemlineáris dinamikai vizsgálatokkal kimutatták, hogy a stabilitásvesztés után nincs stabil egyensúlyi helyzete, hanem stabil periodikus mozgásba kezd. A vetületi terhek szintén nemkonzervatív terhek, mivel nem minden zárt pályán zérus az általuk végzett külső munka. Vetületi teherre példa a mérnöki gyakorlatban a hóteher. Habár emiatt a nemkonzervatív erők hatása is érdekes és fontos lehet, mindeddig térbeli komplexitás kapcsán csak potenciálos erővel terhelt szerkezeteket vizsgáltak. Kérdés, hogy megjelennek-e a térbeli bonyolultságra utaló jellemzők nemkonzervatív erők hatására is, illetve hogy ezek a statikai feladatok fázistérfogattartó (más néven területtartó), vagy disszipatív dinamikai rendszernek feleltethetők-e meg.

Az értekezésben síkbeli, egy és két lényeges térbeli kiterjedéssel bíró, lineárisan vagy nemlineárisan rugalmas, diszkrét mechanikai modellek statikai vizsgálatával foglalkozunk. Az értekezés célkitűzése az alábbi kérdések megválaszolása:

- Megjelenhet-e térben kaotikus viselkedés nemkonzervatív erők okozta kihajlási feladatoknál is?
- Van-e közös ismertetőjele potenciálos és nemkonzervatív erő okozta kihajlási feladatoknak?
- Miként definiálható a térbeli káosz véges – akár többdimenziós – tartományon?
- Megjelenik-e térben komplex viselkedés egy speciális, két lényeges térbeli kiterjedéssel rendelkező szerkezet síkbeli kihajlásának vizsgálata során, és az milyen kapcsolatban van a tartomány kiterjedéseivel?

2. Az értekezés felépítése, az elvégzett vizsgálatok

Az értekezés első részében rugalmas rúdláncokra ható nemkonzervatív terhelés hatását vizsgáljuk. A rugalmas rúdlánc a végtelen nagy nyíró- és normálmerevségű folytonos rúd egy diszkrét mechanikai modellje: csuklósan kapcsolt merev rúdelemeket páronként spirálrugókkal kötünk össze, ide redukálván a folytonos rúdmodell hajlékonyságát. Ha a rugalmas rúdláncot a végein egy görgős és egy fix támasszal látjuk el, és a két támaszt összekötő egyenesbe eső hatásvonalú, a görgős támasznál ható erővel terheljük, az *Euler*-kihajlás diszkrét mechanikai modelljét kapjuk.

Első lépésként ezt a kéttámaszú rugalmas rúdláncot a változatlan hatásvonalú erő helyett egy, a görgős támaszhoz kapcsolódó elem tengelyvonalába eső hatásvonalú *követőerővel* terhelve vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ez a nemkonzervatív erő hatására történő kihajlás is területtartó leképezésre vezet. Ezt követően nemlineárisan rugalmas, konzolos rúdlánc síkbeli kihajlását vizsgáljuk általános terhelés alatt. A terhelést úgy írjuk le, hogy az nemkonzervatív terheket is modellezhessen. Bizonyítjuk, hogy a kihajlási feladat minden esetben területtartó leképezésre vezet, függetlenül a terheléstől és az anyagi nemlinearitástól. Néhány konkrét terhelési esetre numerikusan megszerkesztjük az egyensúlyi helyzeteket rendszerező bifurkációs diagramot.

A potenciálos és nemkonzervatív terhelésnél megfigyelt közös jellemzők után a térbeli káosz felismerésének egy általunk javasolt módját fogalmazzuk meg. Megmutatjuk az általános terhelésű, nemlineárisan rugalmas, konzolos rúdláncra, hogy a peremérték-feladat megoldásainak száma úgy változik az értelmezési tartomány hosszának (a rúdelemek számának) függvényében, ahogy a megfelelő diszkrét idejű kezdetiérték-feladat periodikus pályáinak száma változik a periódus hosszával (a periódus időlépéseinek számával). A térbeli káosz definíciója ennek megfelelően a dinamikai rendszerek elméletéből jól ismert mennyiségen, a topologikus entrópián alapulhat. Ezt a definíciót akár több lényeges kiterjedésű, véges tartományra is alkalmazhatjuk.

Ezután néhány konkrét terhelés alatt konzolos és kéttámaszú rugalmas rúdláncok bifurkációs pontjainak számításával foglalkozunk, részletesen tárgyalva a triviális egyensúlyi út elágazásait.

Az értekezés utolsó részében egy két lényeges térbeli kiterjedésű diszkrét mechanikai modell, a csuklókkal és spirálrugókkal összekapcsolt, azonos hosszúságú, merev rúdelemek alkotta síkbeli négyzetháló, röviden *rugalmas rúdháló* síkbeli kihajlásvizsgálatával foglalkozunk. Egyirányú, egyparaméteres terhelés és fix, valamint fix-görgős megtámasztások mellett meghatározzuk a rugalmas rúdháló egyensúlyi helyzeteit bizonyos terhelési lépcsőkben, különböző méretű rúdhálókra. Numerikusan mérjük a megoldások számának változását a tartomány kiterjedéseinek (a rúdháló oszlop- és gerendasorai számának) függvényében. Ezt követően az egyensúlyi utak bifurkációs pontjaival foglalkozunk. A triviális egyensúlyi út elágazását a katasztrófaelmélet eszközeivel részletesen elemezzük. Végül a csak nyírási deformációra képes folytonos rúd és a rugalmas rúdháló triviális egyensúlyi állapotának kicsiny környezetében érvényes rokon viselkedésére mutatunk rá.

3. Az értekezés új tudományos eredményei, tézisek

Az elvégzett kutatás alapján az alábbi öt tézist fogalmaztam meg.

1. tézis. *Megmutattam, hogy a kéttámaszú rugalmas rúdlánc síkbeli kihajlásának vizsgálata egy nemkonzervatív teher, a követőerő alatt is területtartó leképezésre vezet. Rámutattam, hogy az egyensúlyi helyzeteket rendszerező bifurkációs diagram topológiailag ekvivalens a támaszvonalában potenciálos erővel terhelt feladatéval.*
([2] publikáció alapján.)

2. tézis. *Megmutattam, hogy az általánosan terhelt, konzolos, nemlineárisan rugalmas rúdláncok egyensúlyi, geometriai és anyagegyenletei területtartó leképezésre vezetnek a terheléstől és az anyagi nemlinearitástól függetlenül. A diszkrét mechanikai modell síkbeli kihajására felírt peremérték-feladatnak minden esetben egy disszipatív hatásoktól mentes, diszkrét idejű kezdetiérték-feladat feleltethető meg.*
([1] publikáció alapján.)

3. tézis. *Megmutattam, hogy egy általánosan terhelt, N elemű, konzolos, nemlineárisan rugalmas rúdlánc minden egyes egyensúlyi konfigurációjához egyértelműen hozzárendelhető a megfelelő diszkrét idejű dinamikai rendszer egy-egy $4N+2$ periódus hosszú periodikus pályája. Azt javaslom, hogy egy peremérték-feladatot akkor nevezzünk térben kaotikusnak, ha megoldásainak száma exponenciálisan függ az értelmezési tartomány kiterjedésétől/kiterjedéseitől, és az exponens pozitív. Az értekezésben vizsgált peremérték-feladatokra alkalmaztam ezt a definíciót, és a rugalmas rúdláncokra megmutattam, hogy az exponens a megfelelő dinamikai rendszer topologikus entrópiájával arányos mennyiség, a teherparaméter természetes alapú logaritmusa.*
([1] publikáció alapján.)

4. tézis. *Megmutattam, hogy egy terheletlen állapotban vízszintes, N elemű rugalmas rúdlánc triviális egyensúlyi útja*

- *konzolos esetben*
  - *a szabad végen ható vízszintes erő alatt nyomóerőnél, pontosan N*
  - *a csuklókon ható azonos nagyságú vízszintes erők alatt nyomóerőnél, legfeljebb N*
  - *vízszintes megoszló erő alatt zérus*
- *kéttámaszú esetben a görgős támasznál működő követőerő hatására nyomóerőnél, pontosan $N-1$*

pontban ágazik el.
(Részben [1] publikáció alapján.)

5. tézis. *Az egyirányban terhelt, N szintes rugalmas rúdhálókkal kapcsolatban*

- *kimutattam a vizsgált fix és fix-görgős megtámasztású esetekre az egyensúlyi konfigurációkban rejlő globális permutációs szimmetriát, és felhasználtam azt az egyensúlyi állapotok számítása során,*
- *megmutattam, hogy egyetlen fix támasz esetén az egyensúlyi helyzetek száma exponenciálisan függ a szintek számától, viszont növekedési üteme független az oszlopsorok számától, és ezt a viselkedést a spirálrugók speciális előfeszítése sem befolyásolja,*
- *megmutattam, hogy a vizsgált fix és fix-görgős megtámasztású esetekben a triviális egyensúlyi úton nemzérus teher és $N>2$ esetén fellépő egyetlen elágazásnál a potenciális energia függvényének $(N-2)$-es csúcskatasztrófa típusú pontja van,*
- *megmutattam, hogy azok a csak nyírási deformációra képes rúd diszkrét mechanikai modelljének tekinthetők a triviális egyensúlyi út infinitezimálisan kicsiny környezetében.*

(Részben [7] publikáció alapján.)

4. Az eredmények hasznosítása, további kutatási irányok

Az értekezésben bemutatott módszerek, eredmények a jövőben diszkrét és folytonos mechanikai modellek bonyolult térbeli alakjainak vizsgálatához nyújthatnak megfelelő alapot, elméleti hátteret. Ilyen, jellemzően a posztkritikus tartományba eső, térben kaotikus viselkedés nagy jelentőséggel bír a biológia terén, például makromolekulák, DNS és RNS térbeli konfigurációinak leírása során. Ezen hosszú, karcsú, láncszerű, szekvenciafüggő mechanikai tulajdonságú molekuláknál a diszkrét modell közelebb állhat a valósághoz, mint az egyébként gyakran alkalmazott folytonos modellek, melyek a molekulát kontinuumnak tekintik. Mérnökibb alkalmazások között említhetők például a tengeri- illetve fúrókábelek feltekeredésének problémái. A diszkrét modell sokszor a valósághoz közelebb álló megoldásokat szolgáltathat a mérnöki gyakorlatban is, mint a folytonos; gondoljunk csak a kapcsolatok lokális merevség csökkentő/növelő hatására, a szerkezeti anyagok inhomogenitására, vagy a geometria tökéletlenségére. Vigyázni kell azonban, mert a – sokszor elkerülhetetlen – diszkretizálás folyamán olyan megoldások léphetnek fel nagy számban a posztkritikus tartományban, melyek nem hozhatók összefüggésbe a folytonos modell egyetlen megoldásával sem. Ilyen, úgynevezett parazitamegoldásokat figyeltek már meg peremérték-feladatok végeselemes modellezésénél is, melyek elkerülésében fontos szerepet játszhatnak vizsgálataink.

A rugalmas rúdháló az építőmérnöki gyakorlatban (a konkrét feladatnak megfelelően megtámasztva és terhelve) rugalmas keretszerkezetek globális síkbeli stabilitásvesztésének vizsgálatára szolgálhat, feltéve, hogy a gerendák és az oszlopok merevebbek a kapcsolatoknál. Ezen kívül a rugalmas rúdháló (kis elmozdulások esetén) kapcsolatba hozható nyírási deformációra képes rúd stabilitásvizsgálatával is. Alkalmazható a rúdháló – akár térbeli kihajás számbavételével – kihajlási mintázatok, illetve horpadási feladatok diszkrét modellezésére is. Folyó kutatásaink vannak a kétirányban, kétparaméteres terheléssel terhelt rugalmas rúdhálók terén. Eddigi előzetes eredményeink alapján ebben az esetben a térbeli kaotikus viselkedés mindkét térbeli kiterjedés mentén megjelenik.

Rugalmas rúdláncokkal kapcsolatos jövőbeni kutatásaink tárgyát képezi a véges nyíró- és normálmerevség számbavétele, valamint a térbeli kihajlás, és az ennek során várhatóan megjelenő térbeli káosz vizsgálata. Ez igen fontos lenne a biológia területén, ahol olyan óriásmolekulákat, mint például a DNS, eleddig csak végtelen nagy nyíró- és normálmerevségű (diszkrét vagy folytonos) rúdmodellekkel vizsgáltak, holott a nyírási alakváltozás szerepe is igen jelentős lehet. A Pittsburgh-i Egyetem Matematika Tanszékének kutatóival közösen jelenleg a DNS néhány bázispár hosszúságú diszkrét mechanikai modelljét vizsgáljuk. Kérdés, hogy milyen stabilitásvesztési állapotok jöhetnek létre, és ezekhez milyen alakok tartoznak különböző peremfeltételek mellett és kinematikai terhek alatt. Ezek eredményei összevethetők laborkísérletekkel, és magyarázatul szolgálhatnak a molekula némely meglepő viselkedésére, például arra, hogy húzás hatására még jobban megcsavarodik, illetve túlcsavarás hatására megnyúlik.

Fontos megjegyezni, hogy az értekezésben vizsgált mechanikai modellek posztkritikus viselkedése mérnöki szempontból igen bonyolultnak tűnik, a biológia szemszögéből viszont ezek a lehető legegyszerűbb modellek, melyek mélyebb megértésével közelebb kerülhetünk a makromolekulák bonyolult térbeli megjelenésének feltérképezéséhez is.

5. Az értekezés alapjául szolgáló publikációk

Külföldön megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk:

1. Kocsis A., Károlyi Gy.: *Conservative spatial chaos of buckled elastic linkages,* Chaos (IF=1.76) **16** (2006) No. 033111 pp. 1–7.

Magyarországon megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk:

2. Kocsis A., Károlyi Gy.: *Buckling under nonconservative load: conservative spatial chaos,* Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng. **49/2** (2005) pp. 85–98.

Nemzetközi konferencia-kiadványban megjelent idegen nyelvű előadás:

3. Kocsis A., Károlyi Gy.: *Buckling under conservative and non-conservative load,* III European Conference on Computational Mechanics, Lisszabon, Portugália, 2006. június 5-9., CD-ROM, ID 1531, 11 p.

Magyar nyelvű, kiadványban megjelent konferencia-előadás:

4. Kocsis A.: *Kihajlás konzervatív és nemkonzervatív terhek alatt,* Doktori kutatások a BME Építőmérnöki Karán, Budapest, 2006. február 28., pp. 99-104.

Csak kivonatban megjelent nemzetközi konferencia-előadások:

5. Kocsis A.: *Elastic Web of Links — a discrete model of 2D buckling,* 15th Inter-Institute Seminar, Budapest, Magyarország, 2005. április 21-24., pp. 27.

6. Kocsis A., Károlyi Gy.: *Buckling under conservative and non-conservative load,* 6th European Solid Mechanics Conference, Budapest, 2006. augusztus 28 - szeptember 1., CD-ROM, S33.

7. Kocsis A., Németh R., Károlyi Gy.: *Analytical and numerical investigations of an elastic web of links,* 16th Inter-Institute Seminar, Bécs, Ausztria, 2007. május 17-20., pp. 11.