



# Húzószilárdság nélküli rudak térbeli deformációinak számítása

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén a PhD  
fokozat követelményeinek részleges teljeítéseként  
benyújtott disszertáció rövid összefoglalója

Sipos András Árpád  
okleveles építészmérnök

Témavezető: Dr. Domokos Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Budapest  
2007

## 1. A PROBLÉMA FELVETÉSE

A húzó- és nyomószilárdsággal rendelkező, lineárisan rugalmas rúd alakváltozásaival számtalan publikáció foglalkozik mind elméleti, mind gyakorlati oldalról. A húzószilárdság nélküli, vagy csak korlátozott húzószilárdsággal rendelkező, például vasbeton rudak térbeli deformációinak számítása lényegesen ritkábban kerül elő a szakirodalomban, a publikációk többségében csak a probléma felvetése található meg. A deformációk számítására eddig javasolt eljárások (jellemzően számítógépes algoritmusok) vagy csak a probléma részleges megoldását teszik lehetővé (például a keresztmetszet alakja korlátozott), vagy pedig olyan számítási módszerekre vezetnek, melyek a mérnöki gyakorlat számára releváns példákat sem képesek megbízhatóan megoldani. A bizonyítottan megbízható eljárás hiánya arra vezethető vissza, hogy mire a térbeli rúdalak meghatározásához szükséges számítástechnikai kapacitás megjelent, addigra a vasbetonkutatás már túllépett az elemi szilárdságtanban alkalmazott feltevéseken, és a vasbeton viselkedésének minnél valóságosabb leírását kívánta megragadni, igaz, egyre bonyolultabb elméletekkel. Ahhoz, hogy egy matematikailag konzisztens, megbízható eljárást tudjunk bevezetni, vissza kell nyúlni az elemi szilárdságtanban használt vasbeton modellhez. Amennyiben ezen egyszerű megközelítés segítségével sikerül eljárást adnunk, természetesen megnyílik az út az eleminél bonyolultabb modellek vizsgálatára, illetve egyes jelenségek modellbe történő beépítésére is. A megcélzott algoritmus *robustus*, vagyis a rúd deformációi megbízhatóan számíthatók, nem kell tartani hamis megoldástól, illetve divergens viselkedéstől, azaz az eljárás eredmény nélküli leállásától.

	anyag törvény	a rúd alakja	hajlítás	szabad csavarás	gátolt csvarás	nyírás	össze-nyomódás
Bernoulli-Euler (1732)	lineáris	síkbeli	✓				
Kirchhoff (1859)	lineáris	térbeli	✓	✓			
Timoshenko (1921)	lineáris	térbeli	✓	✓		✓	
Vlaszov (1949)	lineáris	térbeli	✓	✓	✓	✓	
Cosserat (~ 1962)	tetszőleges	térbeli	✓	✓		✓	✓

1. táblázat. Rúdelméletek

A rudak modellezése a XVIII. század végére nyúlik vissza, az első következetes rúdmodell, igaz, csak síkbeli alakváltozás feltételezésével, Bernoulli és Euler nevéhez fűződik. 1859-ben publikálta modelljét Kirchhoff, mely már tartalmazta az ún. szabad, vagy más néven Saint-

Venant féle csavarás számítását, így térbeli deformációk számítására is alkalmas. A XX. század elején Love ismerte fel, hogy a Kirchhoff egyenletek kör keresztmetszetű rúd esetén teljesen integrálhatóak. Mielke később megmutatta, hogy más keresztmetszetre az egyenletrendszer tipikusan nem integrálható. Timoshenko a Kirchhoff modellt a nyírási deformációk számításával egészítette ki, a gátolt csavarás számítása pedig Vlaszov nevéhez fűződik. A jelenleg leginkább alkalmazott rúdelméletek kontinuum-mechanikai megfontolásokat is tartalmaznak, ezeket összefoglaló néven Cosserat féle rúdelméleteknek nevezik. Ámbár ezen elméletek alapjait a Cosserat fivérek már a XX. század elején megadták, mérnöki alkalmazásukra csak jóval később, a hatvanas években került sor.

Mivel célunk egy megbízható algoritmus leírása, munkánk során a Kirchhoff rúdelméletből indulunk ki, de szemben a klasszikus modellel, az anyagtörvény a húzott beton berepedése miatt nemlineáris. A rúdelméleti szakirodalomban nem létezik korlátozott húzószilárdságú rudak számítására megbízható algoritmus, ennek a már említetteken túl vélhetően az is oka, hogy a húzott zónában megjelenő repedések miatt a rúd merevsége függ a rúd alakjától, a *geometriai* és *anyag nemlinearitás* együtt határozza meg az egyensúlyi rúdalakot. Mielke nyomán a térbeli deformációkat leíró egyenletrendszer korlátozott húzószilárdság esetén már eredetileg kör keresztmetszetű rúd esetén sem integrálható a megjelenő repedések miatt. A feladat megoldására ezért *numerikus megoldást* keresünk.

Korlátozott húzószilárdsággal rendelkező rudak vizsgálata elsősorban a vasbeton szakirodalomban fordul elő. Itt elsősorban a keresztmetszet optimális méretezésére találunk eljárásokat, illetve ezzel összefüggésben a vasbeton összetett viselkedését leíró modelleket publikáltak. A tetszőleges alakú vasbeton keresztmetszet görbületének számításával kevesebben foglalkoztak, ezen eljárások bizonyítottan nem robusztusak.

A mérnöki gyakorlatban a vasbeton rudak alakváltozásainak számítására szolgáló eljárások általában csak szimmetrikus keresztmetszetű, egyenes hajlítással, illetve szimmetriatengelyen működő, külpontos erővel terhelt rudakra használhatóak. Ezen megoldások egy része kísérleti eredményekből levezetett összefüggés, az általánosan elterjedt közelítő megoldás az ún. *effektív merevség* segítségével adja meg a rúd alakváltozását. A módszer ferde hajlításra, illetve aszimmetrikus keresztmetszetekre nem alkalmazható. Ha mégis ilyen feladatot kell kiszámítani, akkor jelenleg a gyakorlatban leginkább valamely, a végeelem módszeren alapuló szoftvert használnak fel. Az végeelemes alkalmazásokat ismertető publikációk viszont mellőzik a módszer megbízhatóságának vizsgálatát, ráadásul gyakran használnak fel olyan algoritmusokat (például a Newton-Raphson módszert harmad-, vagy magasabb fokú egyenletek megoldására), melyek bizonyítottan divergensnek lehetnek egyes esetekben.

Dolgozatomban tehát egy, a húzószilárdság nélküli, illetve korlátozott húzószilárdságú, és vasbeton rudak térbeli deformációinak számítására szolgáló algoritmust és annak lehetséges alkalmazásait ismertetem. A robusztus működés minden, a mérnöki gyakorlatban használt algoritmussal szemben elemi követelmény. Ez persze nem jelenti azt, hogy ne használnánk olyan eljárásokat, melyek nem minden esetben megbízhatóak, de törekedni kell az alkalmazott eljárások megbízhatóságának igazolására. Ezért dolgozatomban előre vettem a kritikus problémát, vagyis az algoritmus megbízhatóságának vizsgálatát, ami elsősorban a húzószilárdság nélküli keresztmetszet görbületét meghatározó eljárás konvergenciájának igazolását jelenti. Az első rész tartalmazza továbbá a rúd deformációit számító algoritmus ismertetését is. A dolgozat második részében a kifejlesztett eljárást vasbeton oszlopok és gerendák posztkritikus viselkedésének és térbeli alakváltozásainak számítására alkalmazom. Itt kerül sor a numerikus számítások analitikus és kísérleti eredményekkel történő összevetésére is.

## 2. A KUTATÁSI MUNKA RÖVID ISMERTETÉSE

### 2.1. AZ ALGORITMUS

Rudak térbeli deformációit a hajlításból származó görbület és az elcsavarodás hosszmenti integrálásával lehet számítani (összhangban a Kirchhoff rúdelmélettel, a nyírásból és összenyomódásból származó deformációkat figyelmen kívül hagyjuk). Munkám során felteszem, hogy a keresztmetszetek a deformáció után is síkok és merőlegesek maradnak a rúd tengelyére (Beronulli-Navier hipotézis). A javasolt eljárás az elcsavarodás számításakor nem veszi figyelembe a rúd öblösödését, ezért vékonyfalú szelvények és karcsú I-keresztmetszetek számítására nem alkalmazható. További megkötés a keresztmetszet alakjára vonatkozóan, hogy azt egyetlen zárt görbe határolja. Ekkor de Saint-Venant nyomán a rúd egy keresztmetszeténél az elcsavarodás közelítésképpen számítható az azonos területű és poláris inerciájú ellipszis elcsavarodásának meghatározásával, az elcsavarodást a berepelt keresztmetszet merevségével számítom.

A vizsgált rúd keresztmetszete jellemzően húzószilárdság nélküli anyagból áll, ezt a továbbiakban *betonnak*, a húzószilárdsággal rendelkező tartományokat *vasaknak* nevezem. A keresztmetszet a  $P$  nyomóerő külpontosan terheli. A rúd egy keresztmetszeténél a  $\kappa$  görbület számításához szükséges a semleges tengely helyének ismerete. A semleges tengely meghatározása egy nemlineáris egyenletrendszer megoldását követeli meg, hiszen az ismeretlen semleges tengely határolja a *dolgozó betonkeresztmetszetet*. Az általános gyökkereső módszereket (pl.: Newton-Raphson módszer) használó eljárások bizonyíthatóan divergensnek bizonyos keresztmetszetek esetén, ezért a megoldásra egy, a hajlító nyomatékok és rúdirányú feszültségek egyensúlyát leíró egyenletekből származtatott rekurziót javaslok. *Lineárisnak* nevezem azt az anyagtörvényt, melyben a nyomott beton zónában, illetve a vasakban a feszültségek lineárisan függenek a megnyúlásoktól, egyéb esetekben az anyagtörvény *nemlineáris*. Természetesen mindkét esetben a beton húzószilárdsága korlátozott, ilyen értelemben ezeket a fogalmakat nem a szokásos értelemben használom.

Lineáris anyagtörvény esetén a javasolt rekurzió egy kétdimenziós leképzésnek feleltethető meg. A leképzés az  $i$ . lépésben az aktuális dolgozó keresztmetszethez húzószilárdság feltételezése mellett az egyensúlyi egyenletek megoldásával a semleges tengelyre vonatkozó  $(i + 1)$ . becslést rendeli hozzá. Az  $(i + 1)$ . semleges tengely az eredeti keresztmetszetből a húzott beton zóna elhagyásával adja meg a soron következő lépés dolgozó keresztmetszetét. Nemlineáris anyagmodell esetén az eljárás egy ötdimenziós, szemi-implicit leképzésnek feleltethető meg.

#### 2.1.1. Lineáris anyagtörvény

Lineáris anyagtörvény esetén az alkalmazott kétdimenziós leképzésről indirekt bizonyítással igazolom, hogy egy és csakis egy semleges tengelyre teljesülnek a nyomatéki és vetületi egyensúlyi feltételek. A megoldás lokális stabilitását a leképzést linearizálva, a stabilitási mátrix sajátértékeinek meghatározásával bizonyítom be. Ha a keresztmetszet szimmetrikus és a külpontos nyomóerő dőléspontja a szimmetria tengelyre esik, a semleges tengely helye egyetlen adattal megadható (ez az adat a semleges tengely és a dőléspont távolsága). Ez azt jelenti, hogy a rekurzió egy egy dimenziós leképzéssel is megvalósítható, feltéve, hogy a semleges tengelyre vonatkozó első becslés merőleges volt a szimmetria tengelyre. Ezen speciális eset globális konvergenciáját bebizonyítom. Az egydimenziós leképzésre vonatkozó bizonyítás nem általánosítható a kétdimenziós esetre, mivel ez utóbbiban két, egymást követő lépésben a semleges tengelyre vonatkozó becslések a keresztmetszet konvex burkán belül metszhetik

egymást. Szisztematikus numerikus szimulációk alapján azonban állítható, hogy a kétdimenziós leképzés is *globálisan konvergens*.

### 2.1.2. Nemlineáris anyagtörvény

A nemlineáris anyagtörvény esetén a berepedt keresztmetszet semleges tengelyét és a görbületet számító, ötdimenziós szemi-implicit leképzés a lineáris esetben használt kétdimenziós eljárásra épül. A módszer alapja, hogy egy nemlineáris anyagtörvényű, külpontosan nyomott keresztmetszet semleges tengelye megoldása egy tipikusan másik dőféspontú, de lineáris anyag-törvényű feladatnak. A módszer lényegében a semleges tengelyt és a lineáris feladathoz tartozó dőféspontot határozza meg. Az eljárás folyamán az  $i$ . lépésben először az aktuális dőféspont-hoz lineáris anyagtörvény feltételezésével meghatározom az  $(i + 1)$ . lépés semleges tengelyét. A teljes, nemlineáris anyagtörvénnyel felírt vetületi egyenletből kiszámítom a rúd  $\kappa^{i+1}$  görbületét. Nemlineáris anyagtörvény esetén nem teljesül a megoldások unicitása, ezért általában a görbületre több valós gyököt is kapok eredményül, ezek közül a legkisebb pozitív értékűvel folytatom a számítást. Ez a szabály lényegében nem más, mint a teher történetre vonatkozó feltevés: a teher a szerkezet adott keresztmetszetén a tervezési értéket soha nem haladta meg. A görbület és a semleges tengely együtt egyértelműen meghatároz egy feszültségi testet. Ennek segítségével kiszámítom a feszültségekből ébredő, ki nem egyensúlyozott nyomotékot, mely meghatározza az  $(i + 1)$ . lépés lineáris anyagtörvényhez tartozó dőféspontjára vonatkozó becslést. Az eljárást numerikusan vizsgáltam úgy, hogy a beton anyagtörvénye másodfokú, az acélé elsőfokú. Ebben az esetben minden külpontosan nyomott keresztmetszethez és adott helyzetű semleges tengelyhez létezik a  $P_{max}$  elméleti maximális határerő (ami nem feltétlenül azonos a keresztmetszet teherbírásával), ezen erőt meghaladó teher esetén az egyensúlyi egyenleteknek nincs valós megoldása. Az eljárás megvalósítására három lehetőség kínálkozik:

1. Adott  $P$  külpontos nyomóerő feltételezése minden lépésben, ha  $P > P_{max}^i$  akkor az eljárás leáll,
2. Minden lépésben  $P_{max}^i$  meghatározása és a semleges tengely számítása ezen a teher-szinten (ekkor teljesül a megoldás unicitása,)
3. Amíg  $P < P_{max}^i$  az 1. eljárás, egyébként a 2., eljárás használata.

Numerikus szimulációk alapján mindhárom megközelítés globálisan konvergens.

### 2.1.3. A rúd deformációinak számítása

A térbeli deformációkat számító algoritmus magja a rúd egy keresztmetszeténél a rúdtengely görbületét számítja, a fentiek alapján lineáris esetben a kétdimenziós, nemlineáris esetben az ötdimenziós leképzés felhasználásával. Mindkét eljárás robusztus, és igen gyorsan konvergál: tipikusan 5-10 lépés elegendő a semleges tengely és az egyensúlyi helyzethez tartozó görbület számítására.

A rúd térbeli deformációinak számítása a  $\kappa$  görbület és a  $\gamma$  elcsavarodás hosszmenti integrálásával számítható. Ha a rúd egyik végének geometriai helyzete, illetve az ott működő erők és nyomatékok ismertek, akkor az integrálást végre tudjuk hajtani, ebben az esetben *kezdetiérték-feladatról* beszélünk. Tipikusan a rúd mindkét végén vannak ismeretlen geometriai vagy statikai mennyiségek, ekkor egy *peremérték-feladatot* kell megoldani. Ez lényegesen

nagyobb számítási munkát igényel. A peremérték-feladat megoldására az ún. Párhuzamos Simplex Algoritmus (PSA) továbbfejlesztett változatát, a Párhuzamos Hibrid Algoritmust (PHA) használtam fel, mely a kezdetiérték-feladat megoldására vezeti vissza a problémát. A rúd egyik végén a peremfeltételek által nem rögzített  $n$  számú alakváltozási vagy statikai jellemzőt *változóknak*, a rúd másik végén a peremfeltételek által előírt  $n$  számú mennyiségre vonatkozó egyenletet pedig *függvényeknek* nevezzük. A megoldásokat a változók és a teherparaméter  $d = n + 1$  dimenziós térben keressük, melyet a továbbiakban a probléma *Globális Reprezentációs Terének* (GRS) nevezünk. A GRS egy-egy pontja tehát egy-egy kezdetiérték-feladatnak felel meg, és ezek között keressük a vizsgált mechanikai probléma peremérték-feladatának megoldásait. A szimplex módszernél első lépésben a GRS-t diszkrétizáljuk egy szimplex-hálóval. (Például egy síkbeli konzol 2D-s GRS-ében ez háromszögekre való felosztást jelent.) Ezután kiintegruáljuk a kezdetiérték-feladatot a szimplexek összes csúcspontjában, meghatározva a függvények e pontbeli értékét. A szimplexek belsejében lineáris interpolációt alkalmazva keressük a peremértékeket előíró egyenletek megoldásait. A példa teljes megoldásához a GRS összes szimplexében el kell végezni a számítást, ami rendkívül munkaigényes, a számítási igény GRS dimenziójával exponenciálisan nő. Ezért érdemes a módszert nagy teljesítményű, párhuzamos, illetve GRID technológiájú rendszerekre implementálni. A szimplex módszer különösen alkalmas erre, mivel a számításokat a GRS tetszőleges tartományában (akár szimplexenként) külön, egymástól függetlenül lehet végezni, tehát a számítási munka kis, önálló egységekre bontható. A PSA egy letapogató algoritmus, hiszen a GRS tartományainak számítása tartományról tartományra történik. A PHA algoritmus a véletlenszerű letapogatást útkövetéssel ötvözi: amennyiben a GRS egy tartományában megoldást talált, a szomszédos tartományokban folytatja a számítást, az egyensúlyi út megtalált szakaszát a tér határáig követi, majd újra véletlenszerű letapogatással folytatja a számítást.

A kifejlesztett algoritmust ipari feladatok számítására is fel szeretnénk használni, ezért szükséges, hogy a párhuzamos környezetben futó algoritmust az ipari felhasználók is el tudják érni. Pasztuhov Dániellel közösen kifejlesztettünk egy, az interneten elérhető portál felületet, ahol a számításhoz szükséges adatok megadhatóak, a számítás elindítható. Létrehoztam továbbá egy grafikus alkalmazást a számítási eredmények megjelenítésére. Az elkészült programcsomag a párhuzamos számítástechnika, illetve a GRID technológia egyik első hazai alkalmazása ipari feladat megoldására.

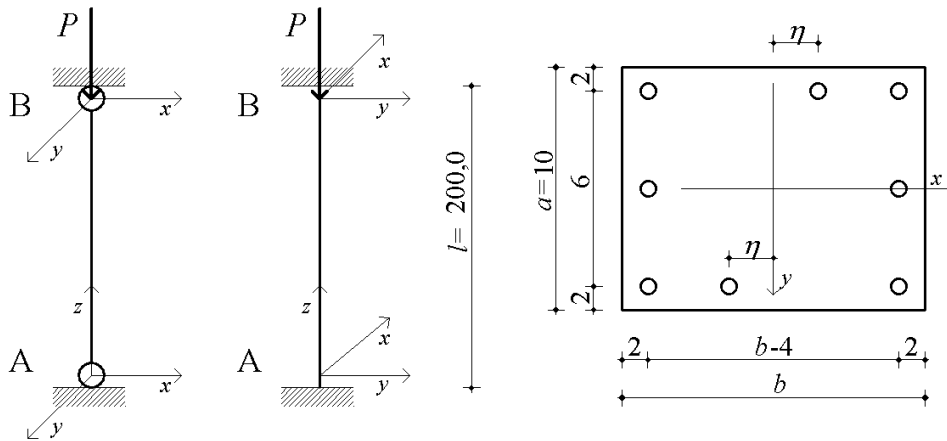
Az ipari felhasználás miatt szükség volt néhány további szubrutin beépítésére. Ezek az EU-ROCODE 2 szabvány alapján veszik figyelembe az ún. tension-stiffening jelenséget, a beton zsugorodását és kúszását, továbbá a feszítőerőben fellépő azonnali és időbeni veszteségeket. A kúszás számítására lehetőség van a helyettesítő rugalmassági modulus számításánál pontosabb Trost modell használatára is. A szubrutinok az algoritmus robusztus voltát nem befolyásolják, a deformációk valóságosabb számítását teszik lehetővé.

## 2.2. AZ ALGORITMUS ALKALMAZÁSA

A dolgozat második részében a kifejlesztett algoritmussal vasbeton oszlopok és gerendák viselkedését vizsgálom numerikusan. Mindkét fejezetben a posztkritikus tartomány vizsgálatát a lehetséges mérnöki alkalmazások bemutatása követi.

### 2.2.1. Oszlopok

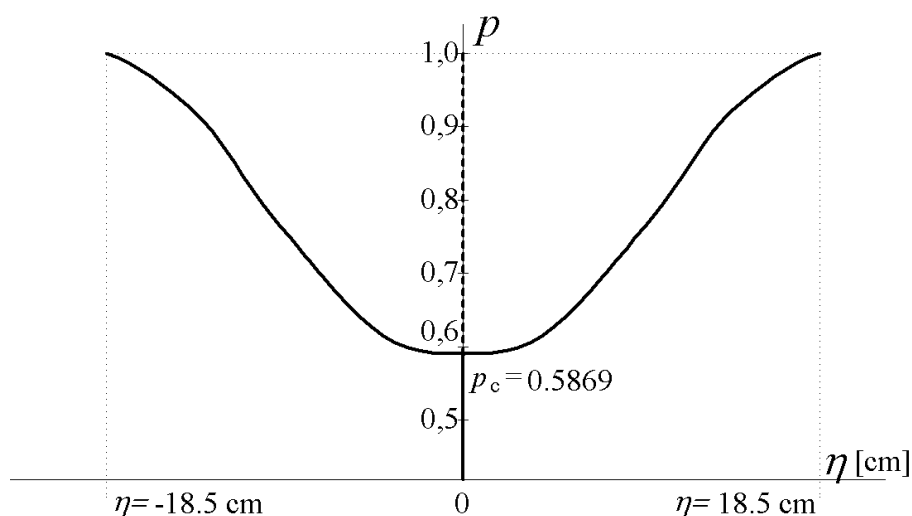
A központosan nyomott vasbeton oszlop kritikus ereje megegyezik a lineárisan rugalmas rúd kritikus erejével, amit a kifejlesztett algoritmus 1%-nál kisebb hibával számít a pontosnak tekinthető, analitikus megoldáshoz viszonyítva. A korlátozott húzószilárdság miatt a posztkritikus ág egy kritikus pont után instabillá válik. Vasalt keresztmetszet esetén egy második kritikus pontot is találunk, innen az ág újra emelkedő, és fokozatosan megközelíti a tiszta hajlítás alatt megrepedt keresztmetszetekkel számított rúd egyensúlyi útját. Korlátozott húzószilárdság esetén a rúd posztkritikus tartományban felvett alakja nem csak a rúd keresztmetszetének merevségétől, hanem a keresztmetszet alakjától is függ. Külpontosan nyomott, húzószilárdság nélküli oszlopokra numerikus számítással megmutatom, hogy a központos nyomásnál meglévő két kritikus pont az ún.  $e_{krit}$  kritikus külpontosságánál egy magasabbrendű katasztrófapontban (ún. cut-off pont) egyesül,  $e > e_{krit}$  külpontosságra az instabilitás eltűnik. A vasbetétek előfeszítése a külpontosan nyomott oszlop teherbírását és kritikus külpontosságát egyaránt növeli.



1. ábra. Aszimmetrikus vasbeton keresztmetszet

Az algoritmus segítségével olyan rudak kritikus terhe is számítható, melyek már az elágazás kis környezetében is térbeli alakot vesznek fel. Dolgozatomban példát mutatok kissé aszimmetrikus geometriájú rúdra, mely központos nyomás esetén a kihajlással szembeni biztonsága alapján optimális szerkezetnek tekinthető. A rudat mindkét végén párhuzamos tengelyű, síkbeli csuklók támasztják meg. A téglalap keresztmetszetű rúd (1. ábra) 8 darab vasbetétet tartalmaz, a szimmetria sértő változó két vasbetét helyzete ( $\eta$ ). Amennyiben a vasbetétek nem szimmetrikusan helyezkednek el, a rúd posztkritikus alakja térgörbe. Különböző oldalárányú (az oldalárány jele:  $p$ ) téglalap keresztmetszetek vizsgálata azt mutatja, hogy létezik az oldalak arányának egy kritikus értéke ( $p_c$ ), melynél a vasak szimmetrikus elrendezése nem optimális többé, ezen érték felett az optimum a vasak egyre aszimmetrikusabb elhelyezésével érhető el (2. ábra).

Oszlopok alakváltozásainak számításán túl a kifejlesztett algoritmus felhasználható befo-gott oszlopokkal merevített vasbeton keretvázak másodrendű nyomatékainak számítására. A módszer azon oszlopok (pl.: aszimmetrikus keresztmetszetű...stb.) megoldására is alkalmas, melyek sem a szabvány előírásaival, sem más szoftverekkel nem számíthatóak.



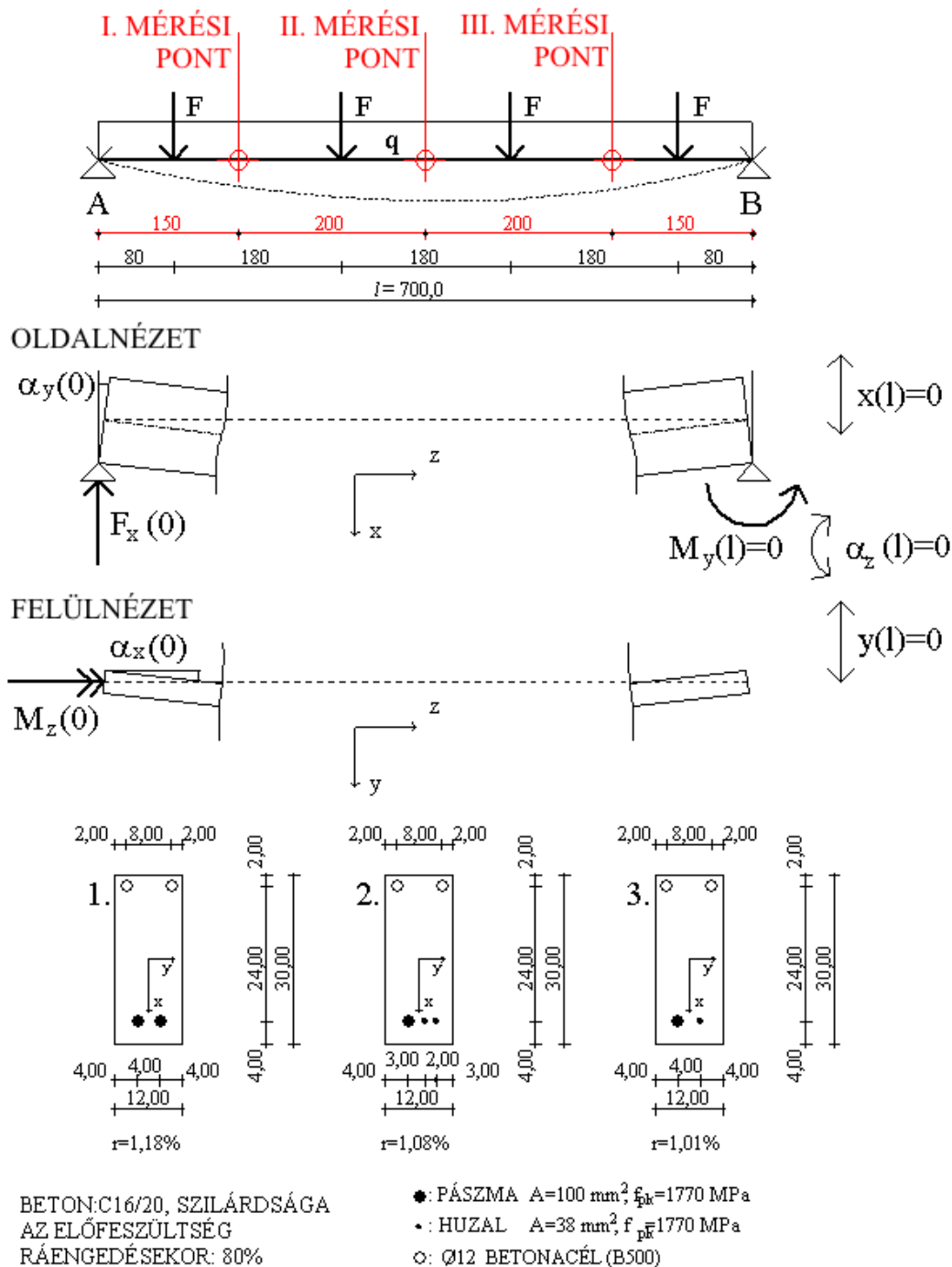
**2. ábra.** Az aszimmetrikusan vasalt oszlop optimum bifurkációs diagramja. Folytonos vonal jelöli az optimumot, szaggatott vonal a pessimumot

### 2.2.2. Gerendák

Húzószilárdsággal nem rendelkező, állandó nyomatékkal terhelt, kéttámaszú gerendák kritikus nyomatéka jelentősen eltér a húzószilárdsággal rendelkező gerendák kritikus nyomatékától. Húzószilárdság feltételezésével a numerikus számítás a pontosnak tekinthető analitikus megoldáshoz képest 4,0%-os eltérést mutat a kritikus nyomaték értékében. A posztkritikus viselkedés vizsgálata a rúd térbeli deformációinak számítását követeli meg. Megmutattam, hogy a másodlagos egyensúlyi út, melyet az analitikus képletekkel nem lehet követni a húzószilárdság hiányában a bifurkáció környezetében szubkritikus. A gerenda előfeszítése húzószilárdsággal rendelkező anyagmodell esetén a kritikus nyomaték értékét a gerenda felgörbülése miatt kismértékben, húzószilárdság hiányában a merevség növelése miatt jelentősen befolyásolja.

Az algoritmus által számított deformációkat kísérleti eredményekkel is összevettem (3. ábra). A kísérlethez három darab aszimmetrikusan előfeszített gerendát használtam. Egyrésztől a feszítőerő ráengedése után kialakuló rúd alakot, másrésztől ugyanezen gerendák terhelése során fellépő deformációkat hasonlítom össze, különös tekintettel a berepedt tartó alakváltozásaira. A kísérlettel elsősorban azt kívánom bemutatni, hogy az algoritmus a vasbeton előrágyártás során felmerülő pontatlanságok esetén is megbízhatóan jósolja meg a gerendák várható alakváltozásait mindaddig, amíg azok II. feszültségi állapotban vannak. A kifejlesztett algoritmus az előfeszítés hatására berepedt gerendák kigörbülését és lehajlását a gyakorlat számára megfelelő pontossággal (10%-os hibahatáron belül) számítja. Ámbár a legyártott három kísérleti elem statisztikai elemzéshez kevés, az algoritmus a mérési eredményekkel jól egyező adatokat szolgáltatott.





3. ábra. A kísérletekben használt kéttámaszú, előfeszített gerenda

### 3. TÉZISEK

Külpontosan nyomott, húzószilárdság nélküli vagy korlátozott húzószilárdságú keresztmetszet semleges tengelyének helyét az egyensúlyi egyenletekből származtatott direkt rekurzióval határozom meg. A keresztmetszet tartalmazhat húzószilárdsággal is rendelkező ponthalmazokat (pl. acélbetét). Általános esetben a húzószilárdsággal nem rendelkező rész (beton) és az acélbetét anyagtörvénye a következő egyenletekkel írható le:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2 + \dots + q_k\varepsilon^k, & \text{ha } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{ha } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_s(\varepsilon) = r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \dots + r_l\varepsilon^l, \quad (1)$$

ahol  $q_1 \geq 0$ ,  $r_1 \geq 0$ , továbbá  $k$  és  $l$  pozitív egész számok. Felteszem továbbá, hogy  $\sigma_c(\varepsilon)$  minden valós gyöke pozitív. A szakirodalom ugyan javasolja iteratív megoldások használatát a semleges tengely és a görbület számítására, de nem foglalkozik azok konvergencia-tulajdonságaival. A mérnöki gyakorlatban használt eljárások megbízhatósága szintén kérdéses. Az 1. tézis a speciális, lineáris esetre vontakozó állításokat tartalmazza, a 2. tézis az általános eset megoldását mutatja be.

#### 1. TÉZIS

**1.1. ALTÉZIS** *Lineáris anyagtörvény ( $q_2 = q_3 = \dots = q_k = 0$  és  $r_2 = r_3 = \dots = r_l = 0$ ) esetére az egyensúlyi egyenletekből levezettem a tetszőleges alakú, külpontosan nyomott vasbeton keresztmetszet semleges tengelyét meghatározó rekurziót, mely az ún. Pelikán-iteráció természetes általánosításának tekinthető.*

*Az iterációhoz rendelhető kétdimenziós leképezésről a következő állításokat bizonyítottam analitikusan:*

- (a) *egy és csakis egy megoldás létezik,*
- (b) *az egyetlen megoldás stabil (lokálisan konvergens),*
- (c) *szimmetrikus keresztmetszet és szimmetria tengelyre eső erő esetén az eljárás globálisan konvergens.*

**1.2. ALTÉZIS** *Az általános, kétdimenziós esetben (aszimmetrikus keresztmetszet és/vagy teher) a szakirodalom alapján kaotikus viselkedésre lehet számítani. Szisztematikus numerikus szimulációk ennek ellenkezőjét valószínűsítik, a kétdimenziós leképezéssel megvalósított iteráció is globálisan konvergens.*

#### 2. TÉZIS

**2.1. ALTÉZIS** *Az általános esetben ( $q_2, q_3, \dots, q_k$  és  $r_2, r_3, \dots, r_l$  tetszőleges valós számok) módszert adtam a külpontosan nyomott vasbeton keresztmetszet semleges tengelyének meghatározására. Ez az eljárás egy ötdimenziós, szemi-implicit leképezésnek feleltethető meg.*

## 2.2. ALTÉZIS *Az eljárással a*

$$\sigma_c(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2, & \text{ha } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{ha } \varepsilon \leq 0 \end{array} \right\}$$

( $k = 2$ ) és  $\sigma_s(\varepsilon) = r_1\varepsilon$  ( $l = 1$ ) anyagtvénnyt vizsgáltam részletesen. Ekkor a semleges tengelyre vonatkozó bármely becsléshez létezik a  $P_{max}^i$  elméleti határerő. A rekurzió megvalósítására három megoldást definiáltam.

- (a) Adott  $P$  külpontos nyomóerő feltételezése minden lépésben, ha  $P > P_{max}^i$  akkor az eljárás leáll,
- (b) Minden lépésben  $P_{max}^i$  meghatározása és a semleges tengely számítása ezen a teher-szinten (ebben az esetben teljesül a megoldás unicitása),
- (c) Amíg  $P < P_{max}^i$  az (a) eljárás, egyébként a (b) eljárás használata.

Numerikus szimulációk alapján mindhárom megközelítés globálisan konvergens.

## 3. TÉZIS

Új algoritmust fejlesztettem ki vasbeton rudak térbeli deformációinak számítására, mely az eddig használt eljárásokkal szemben robusztus, vagyis a rúd deformációi megbízhatóan számíthatók, nem kell tartani hamis megoldástól, illetve divergens viselkedéstől. Ezen munka a következő munkarészek megvalósítását jelentette.

**3.1. ALTÉZIS** Az általános keresztmetszetű vasbeton rúd görbületét meghatározó algoritmust (1. és 2. tézis) beágyaztam a peremérték feladatok megoldására szolgáló Párhuzamos Hibrid Algoritmusbá (PHA). A görbületet számító algoritmus konvergenciája gyors, tipikusan 5-10 lépés elegendő ahhoz, hogy a berepedt keresztmetszet semleges tengelyének helyét és a görbületet 1%-os hibahatáron belül meghatározza. Mivel a görbület meghatározására szolgáló rekurzió globálisan konvergens és a PHA nem használ iterációt, így a teljes algoritmus robusztus.

**3.2. ALTÉZIS** Az eljárást a kúszás, a zsugorodás, a tension stiffening és az előfeszítés kezelésére alkalmas szubrutinokkal egészítettem ki. Ezen tulajdonságokat az EUROCODE 2 szabvány alapján vettem figyelembe, a kúszás esetében az ún. Trost modell is beépítésre került. Kimutattam, hogy a beépített szubrutinok az eljárás konvergencia-tulajdonságait nem befolyásolják.

## 4. TÉZIS

A kifejlesztett algoritmus segítségével numerikusan vizsgáltam vasbeton oszlopok viselkedését. A számításokat a nyomott zónában lineáris anyagtvénnyel ( $k = 1$ ,  $l = 1$ ) hajtottam végre. Számításaim alapján a következő megállapítások tehetők.

**4.1. ALTÉZIS** Megmutattam, hogy központos nyomás esetén az egyensúlyi út poszt-kritikus ágán tipikusan két határpont található. Az elágazás utáni első határpont a berepedés hatására jelenik meg, a határpont után az ág instabillá válik. Vasalt keresztmetszet esetén a második határpont után az ág újra emelkedő és aszimptotikusan megközelíti a tiszta hajlítás hatására berepedt rúddal azonos merevségű rúd egyensúlyi útját. Megmutattam, hogy külpontos nyomóerő (külpontossága:  $e$ ) esetén létezik az ún. kritikus

külpontosság ( $e_{crit}$ ): ha  $e = e_{crit}$  akkor a két határpont egy magasabbrendű katasztrófapontban (ún. cut-off pont) egyesül, és  $e > e_{crit}$  értékekre az instabilitás eltűnik. A külpontosan nyomott oszlop vasbetéteinek előfeszítése mind az első határponthoz tartozó teher értékét (a külpontos eset kritikus terhe), mind az  $e_{crit}$  kritikus külpontosság értékét növeli.

**4.2. ALTÉZIS** Példát mutattam olyan szimmetrikus keresztmetszetű, központosan nyomott vasbeton oszlopra, melyben a vasalás aszimmetriája növelheti a legkisebb kritikus teher értékét. Megmutattam, hogy a beton keresztmetszet arányai függvényében milyen mértékű vasalási aszimmetria optimális.

## 5. TÉZIS

A kifejlesztett algoritmus segítségével numerikusan vizsgáltam vasbeton gerendák viselkedését. A számításokat a nyomott zónában lineáris anyagtörvénnyel ( $k = 1$ ,  $l = 1$ ) hajtottam végre. Számításaim alapján a következő megállapítások tehetők.

**5.1. ALTÉZIS** Az irodalomban tárgyalt analitikus megoldásokkal a gerenda kiforduláshoz tartozó kritikus nyomatéka ugyan meghatározható, de a másodlagos egyensúlyi út vizsgálata a rúd térbeli deformációinak számítását követeli meg, ezért azt az analitikus megoldással már nem tudják követni. Megmutattam, hogy a bifurkáció az anyag húzószilárdságának hiányában szubkritikus. A gerenda előfeszítése húzószilárdsággal rendelkező anyagmodell esetén a kritikus nyomaték értékét a gerenda felgömbülése miatt kismértékben, húzószilárdság hiányában a merevség növelése miatt jelentősen befolyásolja.

**5.2. ALTÉZIS** A kifejlesztett algoritmust (és számítógépes programot) kísérletekkel is verifikáltam. A BVM Épelem Kft. segítségével szimmetrikusan és aszimmetrikusan előfeszített gerendák mért és számított alakváltozásait vetettem össze. A három kísérleti elem alakváltozásait három pontban és három teherszinten mértem. A kifejlesztett algoritmus az előfeszítés hatására berepedt gerendák kigömbülését és lehajlását a gyakorlat számára megfelelő pontossággal (10%-os hibahatáron belül) számítja. A mérési eredmények a mérési hiba (1 mm) és a gyártási folyamat bizonytalan tényezőinek (beton szilárdság, előfeszültség, feszítőbetét helye) figyelembevételével számított burkológömböken belül találhatóak mindaddig, amíg a gerenda a II. feszültségi állapotban van.

## A TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK GYAKORLATI HASZNOSÍTÁSA

Mivel a párhuzamos számítási környezet ma még nem nyújtja az asztali számítógépeken megszokott szolgáltatásokat, részt vettem az algoritmushoz tartozó, az ipari felhasználást célzó portál felület elkészítésében. Definiáltam a felülettől elvárt funkciókat, illetve a szükséges bemenő adatokat. A jelenleg már működő felület lehetővé teszi, hogy az ipari felhasználók egy internet-böngésző segítségével végezzenek számításokat ferdén külpontosan terhelt vasbeton oszlopokon és gerendákon a párhuzamos környezetben. Kifejlesztettem továbbá egy grafikus alkalmazást, mellyel a számítás végeredménye és az egyensúlyi út pontjaihoz tartozó rúdalakok jeleníthetők meg. A C++ nyelven implementált programcsomag a párhuzamos kapacitás (GRID) egyik első hazai, ipari felhasználásának tekinthető (Pasztuhov Dániellel közös munka).

## PUBLIKÁCIÓK

- Sipos A. Á., Juhász K. P., Domokos G.: Ferde külpontos nyomásra igénybe vett beton és vasbeton keresztmetszetek semleges tengelyének meghatározása rugalmas, berepedt állapotban. *Építés-Építésztudomány* **XXXI** (1-2), 19-41, 2003.
- Sipos A. Á.: Uniqueness of solutions for equilibrium under eccentric compression in the case of material with or without tensile strength. *Kari Bulletin* 135-142, 2004.
- Sipos A. Á., Domokos G., Gáspár Zs.: A kétdimenziós Pelikán-iteráció konvergencia-tulajdonságai. *Építés-Építésztudomány* **33** (1-2), 205-217, 2005.
- Sipos A. Á., Domokos G.: Asymmetrical, spatial deformations of reinforced concrete columns and prestressed beams. *Proceedings of the fib Symposium Keep Concrete Attractive* Vol. II, 693-698, 2005.
- Sipos A. Á.: A robust algorithm to calculate the spatial deformations of rods without tensile strength. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **55** (2), 96-111, 2006.
- Sipos A. Á., Domokos G.: Spatial deformations of RC members. *Concrete Structures 2006*, 64-69, 2006.
- Várkonyi P., Sipos A. Á., Domokos G.: Szerkezettervezés az Interneten: egy gépi algoritmus gyorsítási lehetőségei. *Építés-Építésztudomány* **34** (3-4), 271-291, 2006.
- Sipos A. Á., Domokos G.: An efficient algorithm to determine spatial deformations of RC bars. *IABSE Report-Rapports AIPC-IVBH Reports* Vol. **92** 188-189, 2006.
- Sipos A. Á., Domokos G.: Slightly asymmetric beams: Examples of a new class of structural optima. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 2007. (in press)

## EGYÉB PUBLIKÁCIÓK

- Sipos A. Á.: Budapest bemutatótávcsöve, a Heyde. *Természet Világa* **127** LXI-LXIII. 1996.
- Sipos A. Á.: A feketes doboz. *Természet Világa* **128** CXXX-CXXXIV 1997.
- Sipos A. Á.: Design of a hollow core slab and calculating its deflection. *Kari Bulletin* 46-51, 2005.