Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Reprezentáció optimalizálás markovi modellekben

Ph.D. tézisfüzet

Mészáros András

témavezető
Dr. Telek Miklós

2019. január 29.

1. Bevezetés

A Markov lánc alapú modellek felhasználási köre igen széles. Az alkalmazási területek közé tartozik a sorbanállás elmélet [19, 20, 6], megbízhatóság elemzés [30], kémiai reakciók elemzése [3], gépi tanulás [4], beszédfelismerés [27]. Ezen modellek népszerűségének több oka is van. Egyrészt rugalmasságuk folytán számos különböző viselkedési minta és jelenség közelítő leírására jól használhatók, másrészt gyakran olyan fizikai interpretációval rendelkeznek, mely a modellezendő problémához jól köthető, harmadrészt numerikus illesztésükre és jellemzőik számítására hatékony módszerek állnak rendelkezésre.

A Markov lánc alapú modelleket általában egy vagy több mátrix segítségével szokás megadni. Bár ez a leírás a definíció szempontjából kényelmes, ugyanakkor nagymértékben redundáns is, mivel a mátrixok elemeinek száma magasabb mint ami a modell megadásához szükséges lenne. Ehhez szorosan kapcsolódóan adott paraméterekhez végtelen különböző reprezentáció tartozik. Gyakorlati szempontból bizonyos reprezentációk alkalmazása előnyösebb mint másoké. Például egyes numerikus illesztési módszerek jellemzően jobban működnek ha a leíró mátrixokban a nem nulla elemek száma minimális. Szintén lényeges a reprezentáció kérdése olyan sorbanállási rendszerek vizsgálatánál, ahol a leíró mátrixok mérete végtelen. Ilyenkor a numerikus analízis során általában közelítéseket alkalmaznak. Bizonyos feltételek teljesülése esetén a leíró mátrixok mérete végesre redukálható úgy, hogy a rendszer lényeges teljesítmény jellemzői nem változnak.

Mint a fenti példák mutatják a markovi modellekben a legjobb reprezentáció megtalálása sok esetben fontos, azonban gyakran nehéz, és az alkalmazástól is függő feladat. Kutatásom során különböző reprezentáció optimalizálási problémákat vizsgáltam három Markovi modell osztály, a fázis típusú eloszlások (phase type distribution, PH), a Markov érkezési folyamatok (Markov arrival process, MAP) és a Markov döntési folyamatok (Markov decision process, MDP) esetén. Célom olyan, numerikus szempontból jól használható módszerek kidolgozása volt, melyek képesek a reprezentáció javítására, illetve, amennyiben az analitikus eredmények lehetővé teszik, az optimális reprezentáció megtalálására.

2. Kutatási célok

A markovi modellek alkalmazásának egyik oka rugalmasságuk és könnyű kezelhetőségük. A reprezentáció megfelelő megváltoztatásával ezek tovább javíthatók. Kutatásom elsődleges célja az volt, hogy megértsem, melyek a legjobb reprezentációk, hogyan lehet ezeket megtalálni, melyek azok a paraméterek amikkel jól jellemezhetők ezek a modellek és hogyan találhatók meg határaik. Ezen kutatás során a markovi modellek nem markovi kiterjesztéseit is tanulmányoztam, ennek következtében vizsgálataim a két osztály közti viszonyt is érintették.

Tárgya és az alkalmazott módszerek alapján kutatási eredményeim az alábbi három részre bonthatók:

1. Reprezentáció optimalizálás elemi transzformációs mátrixok segítségével
2. Másodrendű Markov érkezési folyamatok kanonikus alakja
3. Markov döntési folyamatok állapotterének redukciója

Az alábbiakban röviden bemutatom a fenti területeket és hozzájuk kapcsolódó kutatási céljaimat.

2.1. Reprezentáció transzformáció elemi transzformációs mátrixok segítségével

Azon esetekben amikor az optimális reprezentáció elérésére nem ismert egzakt eljárás, heurisztikus módszereket lehet alkalmazni a reprezentáció javítására. Ezek a módszerek nem garantálják az optimum elérését, azonban a gyakorlatban jól használható reprezentációkat adhatnak.

Kutatásomban egy olyan megközelítést vizsgáltam, mely megfelelően választott hasonlósági transzformációkon alapszik. Az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ mátrix hasonló, ha létezik olyan invertálható $\boldsymbol{T}$ mátrix, melyre

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}.$$

Ebben az esetben az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ mátrix közti átalakítást $\boldsymbol{T}$ mátrixszal történő hasonlósági transzformációnak nevezzük. A megfelelő $\boldsymbol{T}$ mátrixszal végzett transzformáció a markovi modell új reprezentációját adja.

Kutatásom során olyan algoritmusok kidolgozását tűztem ki célul, melyek kihasználják a reprezentáció transzformáció rugalamasságát, de alacsony a számítási igényük. Dolgozatomban két olyan módszert tárgyalok melyek ezt a célt elemi transzformációs mátrixok segítségével érik el.

2.2. Másodrendű Markov érkezési folyamatok kanonikus reprezentációja

A kanonikus forma fogalmát a matematika számos területén használják. Az általános elvárás a kanonikus formákkal szemben, hogy az adott osztály minden eleméhez egy egyértelmű leírást rendeljen hozzá. A kanonikus formák nemcsak egyszerű és szabványos módot adnak matematikai objektumok leírására, hanem a kapcsolódó osztály tulajdonságait is segíthetnek megérteni, valamint, markovi modellek esetén, hatékony illesztési eljárások kidolgozásában is szerepük lehet. Számos markovi modellre kidolgoztak már kanonikus alakokat. Ezek közé tartoznak a másodrendű és harmadrendű folytonos és diszkrét idejű fázis típusú eloszlások [15, 26, 16], valamint a másodrendű folytonos idejű stacionárius Markov érkezési folyamatok [5]. Célom az volt, hogy hasonló alakokat találjak további modell osztályokra. Kutatásom során kanonikus formákat határoztam meg másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamatokra, valamint másodrendű folytonos idejű nemstacionárius és tranziens Markov érkezési folyamatokra.

2.3. Markov döntési folyamatok állapottér redukciója

Markov döntési folyamatokat gyakran alkalmaznak döntési problémák leírására a telekommunikáció [11], közgazdaságtan [8], robotnavigáció [22], gépi tanulás [18] és számos egyéb tudományág területén. A Markov döntési folyamatok standard leírása az $(S, A, \boldsymbol{Q}(a), \boldsymbol{C}(a))$ négyes segítségével történik, melyben S a modell állapotainak halmaza, A az állapotokban hozható döntések halmaza, $\boldsymbol{Q}(a)$ a folyamat döntéstől függő generátor mátrixa, és $\boldsymbol{C}(a)$ a döntéstől függő jutalom ráta mátrix. A klasszikus probléma a Markov döntési folyamatok esetén azon $\pi^*(s) \in \{\pi(s) : S \to A\}$ optimális politika (állapot-döntés összerendelés) megtalálása, mely maximalizálja a hosszú távú átlagos jutalom rátát.

Az optimális politika megtalálásának számítási igénye a hagyományos megoldó módszerek esetén polinomiálisan nő az állapotok és a lehetséges döntések számával [25]. Ennek következtében nagy méretű vagy végtelen állapottér esetén az optimalizálás meglehetősen időigényessé vagy akár elvileg lehetetlenné is válhat. Kutatásom célja az volt, hogy ezen eseteket kezelhetővé tegyem az állapottér megfelelő redukciója segítségével.

3. Módszertan

A fenti három terület természetszerűen három különböző megközelítést igényel. A reprezentáció transzformáció analitikusan nehéz probléma, különösen nagyobb markovi modellek esetében. Ennek következtében ezen problémakör esetén megfelelő heurisztikus eljárások kidolgozására koncentráltam. A javasolt algoritmusok a lineáris algebra egyszerű eredményein alapszanak és numerikus vizsgálatok segítségével lettek tesztelve. A kanonikus formák megtalálása tisztán analtikus megközelítést igényel, ezek során olyan egyszerű matematikai eszközöket használtam (pl. fixpont iteráció, elemi kalkulus). A Markov döntési folyamatok állapotterének redukciója során a legfontosabb szerepet az úgynevezett mátrix analitikus módszerek [23] alkalmazása kapta, mely egy népszerű eszköztár Markov-lánc alapú modellek tulajdonságainak számítására.

4. Eredmények

4.1. Reprezentáció transzformáció elemi transzformációs mátrixok segítségével

1.1. tézis. *Kifejlesztettem egy heurisztikus algoritmust fázis típusú eloszlások reprezentációjának transzformációjára, melynek alkalmazásával két lépcsős Markov érkezési folyamat illesztési eljárásokban nagyobb lag-1 autokorreláció érhető el.*

A Markov érkezési folyamatok (Markov arrival process, MAP) statisztikai paraméterekre vagy érkezési időközök sorozatáre történő illesztése kihívást jelentő feladat, melyre nincs általánosan elfogadott eljárás. A legáltalánosabb módszer az úgynevezett EM (expectation maximization) eljárás [9]. Ez az eljárás azonban igen számításigényes, valamint numerikus stabilitási problémái is vannak. Ezen hátrányok elkerülésére számos olyan algoritmust kidolgoztak melyek heurisztikákat vagy speciális struktúrájú MAP-okat használnak [2, 13]. Egy lehetséges heurisztikus megközelítés az illesztés szétbontása két lépésre [10, 14]. Ennek lényege, hogy az első lépésben az érkezési időközök határeloszlását közelítjük PH eloszlás segítségével, majd a második lépésben ezt MAP-pá egészítjük ki a dinamikus jellemzők illesztésével. Ezen megközelítés előnye, hogy a feladatot - és ezzel az illesztendő paramétereket - két részre osztja, így csökkenti az illesztési probléma komplexitását. További előny, hogy a számos elérhető PH illesztési algoritmus közül az alkalmazó kiválaszthatja a feladatnak legjobban megfelelő eljárást. A két lépcsős illesztési eljárás egyik problémája, hogy az első lépésben kapott PH eloszlás reprezentációja befolyásolja a második lépésben elérhető dinamikus jellemzők tartományát. Vannak például olyan PH reprezentációk, melyek csak korrelálatlan érkezési időközű MAP-pá egészíthetők ki. Hogy ezt a problémát orvosoljuk, a PH reprezentációt optimalizálni kell. Buchholz és Kriege erre a célra egy egyszerű transzformációs eljárást javasol [10]. Munkám során egy olyan módszert dolgoztam ki, mely nagyobb dinamikát képes elérni mint ez az eljárás. A numerikus eredmények ennek megfelelően azt mutatják, hogy az általam javasolt algoritmus a korábbinál jobb MAP illesztést eredményez, azonban magasabb a számítási igénye is.

1.2. tézis. *Továbbfejlesztettem egy létező heurisztikus eljárást, mely mátrix exponenciális eloszlásokat és racionális érkezési folyamatokat markovi reprezentációba transzformál és numerikus vizsgálatok segítségével megmutattam, hogy a létező megoldásoknál jobb arányban képes markovi reprezentációt találni.*

A PH-kat és MAP-okat olyan vektorok és mátrixok segítségével definiáljuk melyek elemeinek szigorú előjel korlátokat kell kielégítenie. A mátrix-exponenciális eloszlások (matrix exponential distribution, ME) és racionális érkezési folyamatok (rational arrival process, RAP) ezen osztályok olyan kiterjesztései, melyekben ezeket az előjel korlátokat megszüntetjük. Ez az általánosítás két előnnyel is jár. Egyrészt, bizonyos esetekben, sokkal hatékonyabb leíráshoz vezet (melyben a leíró mátrixok és vektorok mérete kisebb), másrészt olyan illesztési eljárások használatát is lehetővé teszi, melyek nem képesek a markovi reprezentáció előjel korlátait biztosítani (lásd pl. [24]). A nemmarkovi kiterjesztés hátránya, hogy nincs olyan univerzális módszer, mellyel igazolni lehet, hogy adott nemmarkovi leírás valós folyamatot határoz meg (melynek (együttes) eloszlásfüggvénye nemnegatív). Amennyiben egy nemmarkovi reprezentációt sikerül markovi alakra transzformálni, ez igazolja, hogy az eredeti leírás valódi sztochasztikus folyamatot definiál. Erre a feladatra jelenleg csak heurisztikus eljárások ismertek. Kutatásom során egy ilyen létező reprezentáció transzformációs módszert fejlesztettem tovább. A javított eljárás a korábbinál általánosabb elemi transzformációkat alkalmaz, azonban továbbra is viszonylag alacsony számítási igénnyel rendelkezik. Több lehetséges általánosítást is kidolgoztam és összehasonlítottam. A numerikus vizsgálatok azt mutatják, hogy ezek az általánosítások mind nagyobb megbízhatósággal találják meg a markovi reprezentációt mint az eredeti eljárás, azonban ennek ára a számítási igény növekedése.

4.2. Másodrendű Markov érkezési folyamatok kanonikus alakja

2.1. tézis. *Bebizonyítottam, hogy a másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamatok (DMAP(2)) és a másodrendű diszkrét idejű racionális érkezési folyamatok osztálya ekvivalens, valamint megmutattam, hogy bármely másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamat megadható az alábbi négy kanonikus alak egyikével*

- *1. alak :* $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \gamma \geq 0$

$$\boldsymbol{D_0} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & (1-a)\lambda_1 \\ 0 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D_1} = \begin{bmatrix} a\lambda_1 & 0 \\ (1-b)\lambda_2 & b\lambda_2 \end{bmatrix},$$

- *2. alak:* $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \gamma < 0$

$$\boldsymbol{D_0} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & (1-a)\lambda_1 \\ 0 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D_1} = \begin{bmatrix} 0 & a\lambda_1 \\ b\lambda_2 & (1-b)\lambda_2 \end{bmatrix},$$

- *3. alak:* $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \gamma \geq 0$

$$\boldsymbol{D_0} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & a\beta_1 \\ \frac{1}{a}\beta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D_1} = \begin{bmatrix} (1-a)\beta_1 & 0 \\ (1-\frac{1}{a}\beta_2)b & (1-\frac{1}{a}\beta_2)(1-b) \end{bmatrix},$$

- *4. alak:* $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \gamma < 0$

$$\boldsymbol{D_0} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & a\beta_1 \\ \frac{1}{a}\beta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D_1} = \begin{bmatrix} 0 & (1-a)\beta_1 \\ (1-\frac{1}{a}\beta_2)b & (1-\frac{1}{a}\beta_2)(1-b) \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ *a DMAP(2) sajátértékei,* $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$, *és* $0 \leq a, b \leq 1$.

2.2. tézis. *Meghatároztam a másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamatok momentum és korrelációs határait. (A határokat leíró egyenletek a [J1] publikációban találhatók meg.) Megmutattam, hogy bármely, a határokon belül eső* f_1, f_2, f_3 *momentum és* γ *korrelációs paraméter esetén a 2.1 tézisben szereplő kanonikus forma az 1. táblázatban található képletek segítségével számítható, ahol*

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 2{f_1}^2 - 2f_1 - f_2,\ \ h_2 = 3{f_2}^2 - 2f_1f_3, \\
h_3 &= 3f_1f_2 - 6(f_1 + f_2 - f_1^2) - f_3, \\
h_4 &= h_3^2 - 6h_1h_2, \\
z &= \frac{h_2}{|h_2|}, \\
p &= \frac{-z(h_3 - 6f_1h_1) + \sqrt{h_4}}{zh_3 + \sqrt{h_4}} \\
k_1 &= (1-\gamma)(p + \beta_1 + \beta_2 - p\beta_2) - 1 + \beta_1, \\
k_2 &= 4\beta_1(k_1 - \beta_1 + \gamma - \beta_2\gamma), \\
k_3 &= (1-\gamma)(-p(1-\beta_2) - 2\beta_2) - \gamma(1-\beta_1), \\
k_4 &= k_3 + \beta_2 + \gamma - \beta_2\gamma.
\end{aligned}
$$

kan. alak	paraméterek	
1. alak	$\lambda_1 = 1 - \frac{h_3 - z\sqrt{h_4}}{h_2}$	$a = \frac{d_1-\sqrt{d_2}}{2(1-s_1)}$ $b = \frac{d_1+\sqrt{d_2}}{2(1-s_2)}$
2. alak	$\lambda_2 = 1 - \frac{h_3 + z\sqrt{h_4}}{h_2}$	$a = \frac{-\gamma(1-s_2)}{p(1-s_2)(1-\gamma)-\gamma(1-s_1)}$ $b = \frac{p(1-s_2)(1-\gamma)-\gamma(1-s_1)}{1-s_2}$
3. alak	$\beta_1 = \frac{12f_1^2-3f_2(4+f_2)-2f_3+2f_1(-6+3f_2+f_3)}{(3f_2^2-2f_1f_3)}$	$a = \frac{k_1+\sqrt{k_1^2-k_2}}{2\beta_1}$ $b = 1 - \frac{a\gamma(1-\beta_2)}{(1-a)(a-\beta_2)}$
4. alak	$\beta_2 = \frac{-3f_2(2-2f_1+f_2)+2(-1+f_1)f_3}{12f_1^2-3f_2(4+f_2)-2f_3+2f_1(-6+3f_2+f_3)}$	$a = \frac{k_3+\sqrt{k_3^2+4\beta_2k_4}}{2k_4}$ $b = -\frac{a\gamma(1-\beta_2)}{(1-a)(a-\beta_2)}$

1. táblázat. DMAP(2) paramétereinek illesztése

2.3. tézis. *Bebizonyítottam, hogy a másodrendű folytonos idejű nemstacionárius Markov érkezési folyamatok és a másodrendű folytonos idejű nemstacionárius racionális érkezési folyamatok osztálya ekvivalens, és bármely másodrendű folytonos idejű nemstacionárius MAP(*$\pi_0, \boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H_1}$*) megadható a* $(\underline{\delta}, \boldsymbol{D_0}, \boldsymbol{D_1}) = (\underline{\pi_0}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H_0}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H_1}\boldsymbol{T})$ *kanonikus alak segítségével, ahol* $\boldsymbol{T}$ *az a transzformációs mátrix, mely a MAP(*$\boldsymbol{H_0}, \boldsymbol{H_1}$*) stacionárius MAP(2) reprezentációt az [5] által meghatározott* $(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H_0}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H_1}\boldsymbol{T})$ *kanonikus formára transzformálja.*

2.4. tézis. *Bebizonyítottam, hogy a másodrendű folytonos idejű tranziens Markov érkezési folyamatok és a másodrendű folytonos idejű tranziens racionális érkezési folyamatok osztálya ekvivalens, és bármely másodrendű folytonos idejű tranziens Markov érkezési folyamat leírható az alábbi öt kanonikus forma egyikével*

- *1. alak:* $\gamma > 0$

$$\boldsymbol{D_0^{(1)}} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \hat{c}\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D_1^{(1)}} = \begin{bmatrix} \hat{a}\lambda_1 & 0 \\ \hat{d}\lambda_2 & \hat{b}\lambda_2 \end{bmatrix},\ \underline{\delta}^{(1)} = \begin{bmatrix} (1-\hat{a}-\hat{c})\lambda_1 \\ (1-\hat{b}-\hat{d})\lambda_2 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \lambda_1 \le \lambda_2$, $\hat{b} > \hat{a}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$,

- *2. alak:* $\gamma > 0$

$$\boldsymbol{D_0^{(2)}} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}_1 & \bar{c}\bar{\lambda}_1 \\ (1-\bar{b}-\bar{d})\bar{\lambda}_2 & -\bar{\lambda}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D_1^{(2)}} = \begin{bmatrix} \bar{a}\bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{d}\bar{\lambda}_2 & \bar{b}\bar{\lambda}_2 \end{bmatrix},\ \underline{\delta}^{(2)} = \begin{bmatrix} (1-\bar{a}-\bar{c})\bar{\lambda}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$, $\bar{b} > \bar{a}\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2}$,

- *3. alak:* $\gamma < 0$

$$\boldsymbol{D_0^{(3)}} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \check{c}\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D_1^{(3)}} = \begin{bmatrix} 0 & \check{a}\lambda_1 \\ \check{b}\lambda_2 & \check{d}\lambda_2 \end{bmatrix},\ \underline{\delta}^{(3)} = \begin{bmatrix} (1-\check{a}-\check{c})\lambda_1 \\ (1-\check{b}-\check{d})\lambda_2 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $\check{d} > \check{a}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$,

- *4. alak:* $\gamma < 0$

$$\boldsymbol{D_0^{(4)}} = \begin{bmatrix} -\tilde{\lambda}_1 & \tilde{c}\tilde{\lambda}_1 \\ (1-\tilde{b}-\tilde{d})\lambda_2 & -\tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D_1^{(4)}} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a}\tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{d}\tilde{\lambda}_2 & \tilde{b}\tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix},\ \underline{\delta}^{(4)} = \begin{bmatrix} (1-\tilde{a}-\tilde{c})\tilde{\lambda}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$,

- *5. alak:* γ *pozitív és negatív is lehet*

$$\boldsymbol{D_0^{(5)}} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \dot{c}\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D_1^{(5)}} = \begin{bmatrix} \dot{a}\lambda_1 & (1-\dot{a}-\dot{c})\lambda_1 \\ \dot{d}\lambda_2 & \dot{b}\lambda_2 \end{bmatrix},\ \underline{\delta}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\dot{b}-\dot{d})\lambda_2 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \lambda_1 \le \lambda_2$.

A fenti alakok esetén minden paraméter 0 *és* 1 *között van, kivéve a* $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ *paramétereket.*

A stacionárius Markov érkezési folyamatok standard megadása két kvadratikus mátrix segítségével történik. Bármely MAP leírható több különböző méretű mátrixpár segítségével. A legkisebb ilyen méretet a MAP rendjének nevezzük. Ennek következtében egy n-ed rendű MAP standard leírása $2n^2$ paraméterrel történik, azonban kimutatható, hogy bármely n-ed rendű MAP teljesen meghatározható n^2 paraméter, például az érkezési időközök $2n-1$ momentuma és $(n-1)^2$ együttes momentuma segítségével [29]. Ennek következtében adott folyamatot többféle reprezentációval is megadhatunk. A standard megadás túlparametrizáltsága megnehezíti a MAP-ok numerikus illesztését. Ennek a problémának egy lehetséges megoldása az úgynevezett kanonikus alakok használata. Kanonikus alaknak nevezzük azt a megadást, mely minimális számú paramétert tartalmaz és minden folyamathoz egy egyértelmű reprezentációt rendel. A korábbiakban csak a másodrendű folytonos idejű stacionáius Markov érkezési folyamatokra volt ismert ilyen kanonikus forma [5]. Kutatásom során kanonikus formát dolgoztam ki a másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamatokhoz, valamint a másodrendű folytonos idejű nemstacionárius és tranziens Markov érkezési folyamatokhoz. Azt is bebizonyítottam, hogy ezek az osztályok megegyeznek nemmarkovi kiterjesztésükkel. Emellett a kanonikus reprezentáció alapján a másodrendű diszkrét idejű stacionárius Markov érkezési folyamatokra meghatároztam a momentum és korrelációs paraméter határokat.

4.3. Markov döntési folyamatok állapotterének redukciója

3.1. tézis. *Bebizonyítottam, hogy az S állapotterű, A döntési terű, π politikától függő $\boldsymbol{Q}(\pi)$ generátor mátrixú és $\boldsymbol{C}(\pi)$ jutalom ráta mátrixú, vagyis MDP($S, A, \boldsymbol{Q}(\pi), \boldsymbol{C}(\pi)$) megadású Markov döntési folyamat optimális politikája azonos az MDP($S_U, A, Q'(\pi), C'(\pi)$) optimális politikájával, ahol $S_U \subseteq S$ az eredeti MDP állapotterének azon részhalmaza melyben döntés hozható,*

$$\boldsymbol{Q'}_{ij}(\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{\underline{\tau}_i(\pi)}, & ha \quad i = j, \\ \frac{\boldsymbol{P}_{ij}(\pi)}{\underline{\tau}_i(\pi)}, & otherwise, \end{cases} \quad and \quad \boldsymbol{C'}_{ij}(\pi) = \begin{cases} \frac{\underline{c}_i(\pi)}{\underline{\tau}_i(\pi)}, & ha \quad i = j, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

ahol

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{ij}(\pi) &= Pr(X(\rho_{S_U \setminus i}) = j \mid X(0) = i), \\ \underline{\tau}_i(\pi) &= E[\rho_{S_U \setminus i} \mid X(0) = i], \\ \underline{c}_i(\pi) &= E[\int_{t=0}^{\rho_{S_U \setminus i}} C_{X(t)X(t)} dt \mid X(0) = i], \end{aligned}$$

és $\rho_{S_U \setminus i}$ az első olyan j állapotba érkezés időpontja melyre $j \in S_U, j \neq i$, feltéve hogy a folyamat kezdeti állapota $i \in S_U$, vagyis $\rho_{S_U \setminus i} = min(t|X(t) \in S_U \setminus i)$.

3.2. tézis. *Kidolgoztam egy módszert M/G/1 típusú Markov döntési folyamatok állapotterének redukciójára.*

3.3. tézis. *Kidolgoztam egy módszert G/M/1 típusú Markov döntési folyamatok állapotterének redukciójára.*

Markov döntési folyamatokat számos területen alkalmaznak döntési problémák leírására. Sok döntési probléma könnyen megfogalmazható MDP segítségével, mivel a vizsgált rendszer paraméterei gyakran megfeleltethetők egy több dimenziós MDP valamely dimenziójának. Az MDP-k alkalmazásának egyik hátránya, hogy a fenti konstrukció nagyon nagy, vagy akár végtelen állapotteret is eredményezhet. Ezt a jelenséget állapottér robbanásnak is nevezik. Ennek a problémának a leküzdésére számos eljárást kidolgoztak. Némelyik módszer az adott MDP szerkezetét felhasználva tesz lehetővé pontos megoldást küszöb tulajdonságú [21, 12], és faktorizált formájú [7] MDP-k esetén. Más módszerekkel közelítést alkalmazva kvázioptimális megoldás érhető el. Egy lehetséges megközelítés az állapottér csonkolása, mely lehetséges a probléma fizikai modellje alapján (pl. a buffer méretének korlátozásával) [28, 17] vagy kizárólag matematikai megfontolások alapján [1].

Kutatásomban hatékony redukciós módszert dolgoztam ki, melyet olyan MDP-k esetén lehet alkalmazni, melyek állapottere két részre bontható úgy, hogy az első, döntéseket tartalmazó rész véges, míg a másik, döntéseket nem tartalmazó rész véges vagy végtelen is lehet. Az eljárás eredményeképp létrejövő MDP mérete megegyezik az állapottér döntést tartalmazó részének méretével. A módszer segítségével pontos megoldás adható, és általánosabb esetben használható, mint a faktorizálhatóságot vagy köszüb tulajdonságot megkövetelő eljárások. A javasolt módszer alkalmazásának feltétele, hogy az MDP bizonyos paraméterei hatékonyan számíthatók legyenek. Munkám során megmutattam, hogy ez lehetséges M/G/1 és G/M/1 típusú struktúrák esetén, melyek elsődleges jelentőségűek sorbanállási problémák MDP-vel történő leírása esetén.

5. Alkalmazási területek

Kutatásom eredményei számos különböző probléma esetén felhasználhatók. Az első téziscsoport eredményei elsősorban markovi struktúrák illesztésével összefüggésben alkalmazhatók. A fázis típusú eloszlás reprezentációját transzformáló eljárás (1.1 tézis) két lépcsős MAP illesztési eljárásokban alkalmazható. Az 1.2 tézisben javasolt reprezentáció transzformációs eljárás MAP-ok és PH-k illesztését teszi lehetővé a nemmarkovi kiterjesztésekhez kidolgozott algoritmus ([24]) segítségével, melynek eredményét a bemutatott eljárás markovi alakra transzformálja.

A második téziscsoport eredményei szintén alkalmazhatók illesztési célokra. Míg az általános megadás redundáns, a kanonikus forma minimális számú paramétert tartalmaz. Ennek következtében az ezekkel történő illesztés hatékonyabb, ami általában pontosabb illesztést tesz lehetővé (amint ez demonstrálva lett [J1] illesztési példájában). A kanonikus forma egyszerűbb struktúrája segíthet a pontos paraméter illesztésben, mint azt a 2.2 tézis is mutatja. Ezen felül a paraméter korlátok ismerete segítségével eldönthető, hogy az osztály alkalmazható-e adott valós életbeli folyamat modellezésére, vagy pedig rugalmasabb osztályra van szükség.

A harmadik téziscsoport eredményei segítségével az MDP-k egy széles osztálya hatékonyabban megoldható. Ezek az eredmények minden olyan esetben használhatók, ahol MDP segítégével szeretnénk döntési problémát megoldani. A 3.1 tézis általános redukciós eljárása véges állapotterű MDP-k esetén mindig alkalmazható és számos végtelen MDP esetén is használható. Két fontos esetet a 3.2 és 3.3 tézisek tárgyalnak. Ezek az MDP típusok sok olyan döntési probléma leírására alkalmazhatók, ahol az igen nagy buffer méretek végtelen nagyságúval közelíthetők.

Publikációk

[B1] A. Mészáros and M. Telek. “Server optimization of infinite queueing systems”. In: *Markov Decision Processes in Practice*. Springer, 2016.

[C1] L. Bodrog et al. “Control of queues with MAP servers: experimental results”. In: *The Eighth International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models (MAM8)*. Calicut, Kerala, India, 2014, pp. 9–11.

[C2] A. Mészáros and M. Telek. “A two-phase MAP fitting method with APH interarrival time distribution”. In: *Proceedings of the Winter Simulation Conference*. WSC ’12. Berlin, Germany: Winter Simulation Conference, 2012, 425:1–425:12. URL: `http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2429759.2430310`.

[C3] A. Mészáros and M. Telek. “Markov Decision Process and Linear Programming Based Control of MAP/MAP/N Queues”. In: *Computer Performance Engineering, EPEW*. Vol. 8721. LNCS. Florence, Italy, Sept. 2014, pp. 179–193. DOI: 10.1007/978-3-319-10885-8_5.

[C4] A. Mészáros, G. Horváth, and M. Telek. “Representation Transformations for Finding Markovian Representations”. In: *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Ed. by A. Dudin and K. Turck. Vol. 7984. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 277–291. ISBN: 978-3-642-39407-2. DOI: 10.1007/978-3-642-39408-9_20.

[C5] A. Mészáros and M. Telek. “Canonical Form of Order-2 Non-stationary Markov Arrival Processes”. English. In: *Computer Performance Engineering*. Ed. by M. Beltrán, W. Knottenbelt, and J. Bradley. Vol. 9272. Lecture Notes in Computer Science. Madrid, Spain: Springer International Publishing, 2015, pp. 163–176. ISBN: 978-3-319-23266-9. DOI: 10.1007/978-3-319-23267-6_11.

[C6] A. Mészáros and M. Telek. “Canonical Representation of Discrete Order 2 MAP and RAP”. In: *Computer Performance Engineering*. Ed. by S. Balsamo, W. Knottenbelt, and A. Marin. Vol. 8168. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 89–103. ISBN: 978-3-642-40724-6. DOI: 10.1007/978-3-642-40725-3_8.

[J1] A. Mészáros, J. Papp, and M. Telek. “Fitting traffic traces with discrete canonical phase type distributions and Markov arrival processes”. In: *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 24.3 (2014), pp. 453–470. DOI: 10.2478/amcs-2014-0034.

[J2] A. Mészáros and M. Telek. “Canonical representation of order 2 transient Markov and rational arrival processes”. In: *Performance Evaluation* 114 (2017), pp. 78–96.

Független hivatkozások listája

[C2i1] Y. M. Ko and J. Pender. “Strong approximations for time-varying infinite-server queues with non-renewal arrival and service processes”. In: *Stochastic Models* 34.2 (2018), pp. 186–206.

[C2i2] P. Buchholz, I. Felko, and J. Kriege. “Transformation of acyclic phase type distributions for correlation fitting”. In: *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Springer. 2013, pp. 96–111.

[C2i3] P. Buchholz, J. Kriege, and I. Felko. "Parameter Fitting of MAPs". In: *Input Modeling with Phase-Type Distributions and Markov Models*. Springer, 2014, pp. 75–93.

[C3i1] A. Asanjarani. "QBD Modelling of a finite state controller for queueing systems with unobservable Markovian environments". In: *Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications*. ACM. 2016, p. 20.

[C5i1] J. Rodriguez, R. E. Lillo, and P. Ramirez-Cobo. "Analytical issues regarding the lack of identifiability of the non-stationary MAP2". In: *Performance Evaluation* 102 (2016), pp. 1–20.

[C5i2] M. Braženas and E. Valakevičius. "On Structured Initial Solution Generation for Phase Type Fitting with EM Method". In: *Information Technology And Control* 47.2 (2018), pp. 197–208.

[J1i1] A. Dudin, M. H. Lee, and S. Dudin. "Optimization of the service strategy in a queueing system with energy harvesting and customers' impatience". In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 26.2 (2016), pp. 367–378.

[J1i2] A. Brugno et al. "Analysis of an MAP/PH/1 queue with flexible group service". In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 27.1 (2017), pp. 119–131.

[J1i3] S. Balsamo et al. "Applying reversibility theory for the performance evaluation of reversible computations". In: *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Springer. 2016, pp. 45–59.

[J1i4] V. M. Vishnevskii and A. N. Dudin. "Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks". In: *Automation and Remote Control* 78.8 (2017), pp. 1361–1403.

[J1i5] Y. Xue et al. "Abnormal Prediction of Dense Crowd Videos by a Purpose–Driven Lattice Boltzmann Model". In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 27.1 (2017), pp. 181–194.

Hivatkozások

[1] E. Altman. *Constrained Markov decision processes*. Vol. 7. CRC Press, 1999.

[2] A. T. Andersen and B. F. Nielsen. "A Markovian approach for modeling packet traffic with long-range dependence". In: *IEEE journal on Selected Areas in Communications* 16.5 (1998), pp. 719–732.

[3] D. F. Anderson and T. G. Kurtz. "Continuous time Markov chain models for chemical reaction networks". In: *Design and analysis of biomolecular circuits*. Springer, 2011, pp. 3–42.

[4] C. Andrieu et al. "An introduction to MCMC for machine learning". In: *Machine learning* 50.1-2 (2003), pp. 5–43.

[6] G. Bolch et al. *Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications*. John Wiley & Sons, 2006.

[7] C. Boutilier, R. Dearden, and M. Goldszmidt. "Stochastic dynamic programming with factored representations". In: *Artificial Intelligence* 121.1 (2000), pp. 49–107.

[8] A. Briggs, M. Sculpher, et al. "An introduction to Markov modelling for economic evaluation". In: *Pharmacoeconomics* 13.4 (1998), pp. 397–410.

[9] P. Buchholz. "An EM-algorithm for MAP fitting from real traffic data". In: *International Conference on Modelling Techniques and Tools for Computer Performance Evaluation*. Springer. 2003, pp. 218–236.

[10] P. Buchholz and J. Kriege. "A heuristic approach for fitting MAPs to moments and joint moments". In: *Quantitative Evaluation of Systems, 2009. QEST'09. Sixth International Conference on the*. IEEE. 2009, pp. 53–62.

[11] D. V. Djonin and V. Krishnamurthy. "MIMO transmission control in fading channels—a constrained Markov decision process formulation with monotone randomized policies". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 55.10 (2007), pp. 5069–5083.

[12] D. Efrosinin. "Controlled Queueing Systems with Heterogeneous Servers". PhD thesis. University of Trier, 2004.

[13] A. Horváth and M. Telek. "A Markovian point process exhibiting multifractal behaviour and its application to traffic modeling". In: *Proceedings of 4th International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic models*. 2002, pp. 183–208.

[14] G. Horváth, P. Buchholz, and M. Telek. “A MAP fitting approach with independent approximation of the inter-arrival time distribution and the lag correlation”. In: *Quantitative Evaluation of Systems, 2005. Second International Conference on the*. IEEE. 2005, pp. 124–133.

[15] G. Horváth and M. Telek. “On the canonical representation of phase type distributions”. In: *Performance Evaluation* 66.8 (2009), pp. 396–409.

[16] I. Horváth, J. Papp, and M. Telek. “On the Canonical Representation of Order 3 Discrete Phase Type Distributions”. In: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 318 (2015), pp. 143–158.

[17] K. Jagannathan et al. “A state action frequency approach to throughput maximization over uncertain wireless channels”. In: *Internet Mathematics* 9.2-3 (2013), pp. 136–160.

[18] L. P. Kaelbling, M. L. Littman, and A. W. Moore. “Reinforcement learning: A survey”. In: *Journal of artificial intelligence research* 4 (1996), pp. 237–285.

[19] L. Kleinrock. *Theory, Volume 1, Queueing Systems*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1975. ISBN: 0471491101.

[20] L. Kleinrock. *Queueing systems, volume 2: Computer applications*. Vol. 66. wiley New York, 1976.

[21] Y. L. Kocaga and A. R. Ward. “Admission control for a multi-server queue with abandonment”. English. In: *Queueing Systems* 65.3 (2010), pp. 275–323. ISSN: 0257-0130. DOI: 10.1007/s11134-010-9176-z. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s11134-010-9176-z.

[22] S. Koenig and R. Simmons. “Xavier: A robot navigation architecture based on partially observable markov decision process models”. In: *Artificial Intelligence Based Mobile Robotics: Case Studies of Successful Robot Systems* (1998), pp. 91–122.

[23] G. Latouche and V. Ramaswami. *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, 1999.

[24] A. van de Liefvoort. *The moment problem for continuous distributions*. Tech. rep. WP-CM-1990-02. University of Missouri – Kansas City, USA: School of Computing and Engineering, 1990.

[25] M. L. Littman, T. L. Dean, and L. P. Kaelbling. "On the Complexity of Solving Markov Decision Problems". In: *Proceedings of the Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. UAI'95. Montreal, Quebec;, Canada: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1995, pp. 394–402. ISBN: 1-55860-385-9. URL: `http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2074158.2074203`.

[26] J. Papp and M. Telek. "Canonical representation of discrete phase type distributions of order 2 and 3". In: *Proc. of UK Performance Evaluation Workshop, UKPEW*. Vol. 2013. 2013.

[27] L. R. Rabiner. "A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition". In: *Proceedings of the IEEE* 77.2 (1989), pp. 257–286.

[28] J. Slegers, I. Mitrani, and N. Thomas. "Optimal dynamic server allocation in systems with on/off sources". In: *Formal Methods and Stochastic Models for Performance Evaluation*. Springer, 2007, pp. 186–199.

[29] M. Telek and G. Horváth. "A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method". In: *Performance Evaluation* 64.9 (2007), pp. 1153–1168.

[30] J. A. Whittaker and M. G. Thomason. "A Markov chain model for statistical software testing". In: *IEEE Transactions on Software engineering* 20.10 (1994), pp. 812–824.