

# Nemperturbatív eljárások kvantumtérelméletekben

PhD tézisfüzet

**Mati Péter**

*Témavezető:* Prof. Jakovác Antal

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
EGYETEM  
Elméleti Fizika Tanszék  
(2015)

## 1. Bevezető

A szubatomi részecskék világában a fizikai objektumok viselkedése az emberek által megszokott klasszikus világgépen alapuló intuícóknak olykor teljes mértékben ellentmond. Kvantumtérelmélet (Quantum Field Theory, QFT) annak a matematikai modellnek a neve, ami eddig a leghatékonyabb leírását szolgáltatta az elemi részecskék univerzumának. Napjainkban már a modern fizika alapvető részeként tekintünk rá, ugyanakkor sok tankönyvben az elmélet effektív leírására helyezik a hangsúlyt, ami alatt most a perturbációs számítást kell értenünk (PSZ). Kétségtelenül, a kvantum elektrodinamika (Quantum Electrodynamics, QED) és a Standard Modell (SM) elektromágneses kölcsönhatásainak perturbatív leírása óriási sikertörténet: rendkívüli pontosságú elméleti jóslatokat igazoltak a mérések. Csak, hogy egy példát említsünk: QED-ban az elektron mágneses momentumának precíziós mérése során  $10^{-10}$  pontosságot értek el az elméleti számolásokkal [1]. Nem szabad ugyanakkor a PSZ-ra úgy tekinteni, mint a QFT fundamentális definíciójára, sokkal inkább úgy kell rá gondolni, mint a teljes elmélet közelítésére szolgáló technika, melyben a hibákat is kontrollált módon figyelembe lehet venni. Másfelől pedig komoly matematikai problémákkal is szembesülnünk kell: nemcsak az a baj, hogy a perturbációs sor konvergenciája bizonytalan, de sokszor olyan esettel is találkozunk, amikor még csak nem is aszimptotikus, és ezáltal tudjuk, hogy divergál. Ilyen szituációval találkozunk például erősen kölcsönható rendszerek esetén. Ezekben az esetekben elengedhetetlennek bizonyul az elmélet nemperturbatív alapokon történő definiálása.

1937-ben alkották meg a Bloch-Nordsieck (BN) modellt [2], ami a QED alacsony frekvenciás tartományát hivatott modellezni. A QED-ban jelenlevő infravörös szingularitások ezen modell kerete-

in belül kiköszöbölhetnek. Az infravörös probléma illusztrálásához elegendő egy szemiklasszikus képet tekintenünk: véges mennyiségű kisugárzott elektromágneses energiához végtelen sok lágyfoton rendelhető. A PSZ szintjén a QED keretein belül ugyanez a jelenség a perturbációs sor minden egyes tagjában jelentkezik: minden tag logaritmikus divergenciát mutat, ily módon a perturbációs sor elveszíti prediktív erejét. A BN modellben, ugyanakkor lehetőség van a teljes fermion propagátor meghatározására nemperturbatív eszközökkel (cf. [2, 3]). Mint egzaktul megoldható elmélet, tökéletes alanya lehet nemperturbatív módszerekkel kapott eredmények összehasonlítására.

Egy másik nemperturbatív módszer segítségével erősen korrelált statisztikus fizikai rendszerekről nyerhető ki információ. A Wilson-Kadanoff páros ötletén alapuló nemperturbatív renormálási csoport (renormalisation group, RG) leírása a gyors szabadsági fokok kiintegrálásával történik. Következésképpen az így definiált effektív elmélet Hamilton operátora csupán a még nem eliminált szabadsági fokokat tartalmazza, amiknek a frekvenciája kisebb, mint a levágási skála. Hasonló gondolatmenettel juthatunk el az átlagolt effektív hatás módszeréhez is, ahol pont fordítva történik a megfogalmazás. Ebben az esetben, a már kiintegrált szabadsági fokokra definiálunk egy  $k$  skálától függő egyparaméteres elméletek családját. Évégezve a  $k \rightarrow 0$  határértékszámolást, megkapjuk a teljes kvantum effektív hatást [4]. Az  $O(N)$  vektormodell az egyik legtöbbet tanulmányozott kvantumtérelméleti modell, amely közös univerzalitási osztályba esik  $N=1$  esetén az Ising modellel,  $N=2$  esetén az XY modellel,  $N=3$  esetén a Heisenberg modellel, és  $N=4$  esetén pedig a Standard Modell Higgs szektorának leírására illetve mezon fenomenológiára alkalmazzák. Az  $N \rightarrow \infty$  modell a szferikus modellnek feleltethető meg [5].

Az  $O(N)$  modell tökéletes alapot biztosít az elmélet fázis struktúrájának tanulmányozásához a funkcionális renormálási csoport (FRG) keretein belül. Az eredmények pontos egyezést mutatnak más, nemperturbatív eljárásokból kapott eredményekkel.

## 2. Célkitűzések

A doktori kutatásom egyik fő témája a BN modell vizsgálata volt a nemperturbatív 2PI (kétrészecske-irreducibilis) funkcionális formalizmussal [6]. A 2PI sokrészecske rendszerek tárgyalására alkotott technika, mely a Feynman-diagramok egy adott osztályának szisztematikus felösszegzésén alapszik. A 2PI hatást általában csonkolnunk kell véges rendnél, hogy valódi számolásokat is kivitelezhessünk. A célom az volt, hogy a 2PI felösszegzési technikát továbbfejlesszem oly módon, hogy az már a vertex-korrekciókat is tartalmazza. Ha ezzel módszerrel képesek vagyunk megkapni a modell egzakt fermion propagátorát lehetséges, hogy ki tudjuk terjeszteni az eljárást más elméletekre is.

Egy másik kérdés a modell véges hőmérsékleten való viselkedése volt. A célom az volt, hogy egzakt megoldást találjak a véges hőmérsékletű elméletben felírható Dyson-Schwinger egyenletre. Ha levezethető az egzakt fermionikus spektrál függvény véges hőmérsékleten erre az elméletre, akkor jóslatokat tehetünk a teljes QED által leírt véges hőmérsékletű elméletre.

A 2PI felösszegzés kollektív jelenségek leírására lett létrehozva. Nulla hőmérsékleten a BN modell egyhurok sajátenergia 2PI leírása nem szolgáltatta a helyes megoldást, habár az infravörös tartományban véges maradt. A célom az volt, hogy tanulmányozzam a 2PI egyenleteket véges hőmérsékleten és összehasonlítsam az eredményt az egzakt megoldásból levezethetővel.

A doktori kutatásaim másik fő témája az FRG alkalmazása az  $O(N)$  modellekre. A Mermin-Wagner (MW) tétel szerint spontán szimmetriasértés nem lehet jelen folytonos szimmetriával rendelkező rendszerben két dimenzióban és az alatt. A célom az volt, hogy belássam a Mermin-Wagner tételt az FRG keretein belül, lokális potenciál közelítésben (LPA). Az MW tétel bizonyítása az FRG-ben LPA szinten alapvető igény, ugyanis csak sejtés volt rá korábban.

Ha az effektív potenciált Taylor-polinomba fejtjük az MW tétel sérülni látszik LPA-ban, továbbá  $D \geq 4$  esetre pedig az elméletek nem látszanak triviálisnak, mint ahogy annak lennie kéne. A célom az volt, hogy az FRG keretein belül, a potenciál polinomba való kifejtése esetén, megmutassam, hogy MW tétel csak véges rendű kifejtés esetén sérül, továbbá, hogy a  $D \geq 4$  rendszerek triviálisak.

### 3. Új tudományos eredmények

A doktori kutatásaim során elért tudományos eredmények az alábbiakban kerülnek felsorolásra.

#### 3.1.

Kiderült, hogy a BN modellben a Ward-Takahashi azonosságok egy egyértelmű megfeleltetést írnak le az elmélet fermionikus propagátora és a vertex függvény között. Következésképpen, lehetséges volt a 2PI sajátenergia egyenlet kibővítése a vertex függvénnyel, ami egy, a propagátorra vonatkozó, lineáris integro-differenciál egyenletre vezetett, ami ekvivalens a Dyson-Schwinger (DS) egyenlettel. Az elmélet precíz renormálása mellett az egyenlet egzaktul megoldható. Az eredeti levezetésben alkalmazott módszer [2, 3]

sokkal bonyolultabb így annak kiterjesztése további elméletekre nehézkesnek bizonyul. Ennek az eljárásnak az alkalmazása adott esetben könnyebben általánosítható. Az eredmények az alábbi cikkben kerültek publikálásra [I].

### 3.2.

A Ward azonosságok véges hőmérsékleti általánosításával lehetővé vált a 3.1 pontban említett integro-differenciál egyenlet véges hőmérsékleti felírása. Az egzakt fermionikus spektrál függvény analitikus, zárt formában is megkapható a fermion nyugalmi rendszerében. Ez a spektrál függvény korlátos és normálható tetszőleges véges hőmérsékletű paraméterre. A retardált Green függvény valós időben hatványfüggvény jellegű, nagy időkre exponenciális csillapodást mutat. Infravörös regulátorként kezelve a hőmérsékletet, egy új magyarázatra is lehetőség nyílt, ami a nulla hőmérsékletű viselkedést illeti. Az eredmények az alábbi cikkben kerültek publikálásra [II].

### 3.3.

A BN modell véges hőmérsékletű fermionikus spektrál függvényét numerikusan is meghatároztam a 2PI módszer keretein belül. A 2PI és az egzakt számolás szépen egyezik figyelembe véve egy véges csatolási állandó illesztést: a 2PI spektrálfüggvényről az egzakttal vett összehasonlítása során kiderült, hogy egy hőmérsékletfüggő futó csatolási állandóval helyettesítve az eredeti csatolási állandót a két módszerrel kapott spektrál függvény lényegében egymásra képezhető. Ezzel a módszerrel a 2PI eljárás pontossága ellenőrizhető. A legfontosabb üzenete ennek az eredménynek, hogy a 2PI módszer jól működik véges hőmérsékleten, feltéve, hogy a

csatolási állandóját átskálázzuk. Az eljárás talán alkalmazható a valódi QED-t érintő számolásokban is. Az eredmények az alábbi cikkben kerültek publikálásra [III].

### 3.4.

A spontán szimmetrisértés jelenlétének tanulmányozása  $O(N)$  elméletekre FRG (funkcionális renormálási csoport) segítségével. Megmutattam, hogy az LPA esetén is már analitikusan is belátható a Mermin-Wagner tétellel összhangban álló eredmény az FRG keretein belül. Ehhez szükséges volt a potenciál analiticitásának a feltétele. A bizonyítás  $N < \infty$  és  $N \rightarrow \infty$  is levezethető. Az eredmények az alábbi cikkben kerültek publikálásra [IV].

### 3.5.

Az eltűnő-béta-függvény görbék (Vanishing Beta Function curves) bevezetése, egy új eljárást nyújt az elmélet fixpont szerkezetének vizsgálatára, tetszőleges térkomponens ( $N$ ) és tetszőleges dimenzió ( $D$ ) esetén. Ez a módszer az effektív potenciál polinomiális kifejtésén alapszik az LPA közelítsen belül. A polinomiális kifejtésből adódóan az elméletben hamis fixpontok jelennek meg. Statisztikai érveléseket használva ki tudjuk nyerni a valódi (fizikai) fixpontokat tartalmazó megoldásokat, megegyező eredményre jutva korábbi számolásokkal  $D < 4$  esetén.  $D \geq 4$  estén az  $O(N)$  elmélet trivialitását mutatjuk meg, ami újdonságnak számít FRG LPA-t használva. A nagy- $N$  kifejtés esetén a  $4 < D < 6$  dimenzióban definiált  $O(N)$  modellekre egy új, kölcsönható fixpontot találunk, ami egy metastabil kritikus potenciált definiál. Ennek a fixpontnak a létezése jelenlegi kutatások tárgyát képezi az aszimptotikus biztonsággal (asymptotic safety) kapcsolatban [7, 8]. Az

eredmények az alábbi cikkben kerültek publikálásra [V].

**A tézispontok hivatkozásai. Ezek tartalmazzák a tudományos eredményeimet:**

- I A. Jakovac, P. Mati, *Resummations in the Bloch-Nordsieck model*, Phys. Rev. D **85**, e-Print: arXiv:1112.3476 [hep-ph].
- II A. Jakovac, P. Mati, *Spectral function of the Bloch-Nordsieck model at finite temperature*, Phys. Rev. D **87**, 125007, e-Print: arXiv:1301.1803 [hep-th].
- III A. Jakovac, P. Mati, *Validating the 2PI resummation: The Bloch-Nordsieck example*, Phys. Rev. D **90**, 045038, e-Print: arXiv:1405.6576 [hep-th].
- IV N. Defenu, P. Mati, I. G. Marian, I. Nandori, A. Trombettoni, *Truncation Effects in the Functional Renormalisation Group Study of Spontaneous Symmetry Breaking*, [arXiv:1410.7024 [hep-th]],  
A cikk publikálás alatt van a JHEP-nél.
- V P. Mati, *The Vanishing Beta Function curves from the Functional Renormalisation Group*, e-Print: arXiv:1501.00211 [hep-th],  
A PRD-ben fog megjelenni (Bírálat alatt: 2. kör. A bíráló csak apró, a prezentációt érintő módosításokat kért az első bírálatában.)



**További hivatkozások:****Hivatkozások**

- [1] R.P. Feynman, *QED, The strange theory of light and matter*, (Princeton University Press, 1985).
- [2] F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52** (1937) 54.
- [3] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theories to the quantized fields* (John Wiley & Sons, Inc., 1980)
- [4] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991); Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [5] H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **20**, 589 (1968).
- [6] J. M. Luttinger and J. C. Ward, Phys. Rev. **118** (1960) 1417. G. Baym, Phys. Rev. **127** (1962) 1391. J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **10** (1974) 2428.
- [7] Lin Fei, Simone Giombi, Igor R. Klebanov, Phys.Rev. **D90** (2014) 025018; Lin Fei, Simone Giombi, Igor R. Klebanov, Grigory Tarnopolsky, arXiv:1411.1099v3 [hep-th]
- [8] R. Percacci, G. P. Vacca, Phys.Rev. D **90** (2014) 10, 107702