Hosszú memóriájú véletlen folyamatok

Tézisfüzet

Horváth Illés

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Matematika Intézet

Témavezető: prof. Tóth Bálint
Konzulens: prof. Telek Miklós

2015

Bevezetés

A Markov folyamatok egy sokat vizsgált területe a matematikának a kiterjedt elmélet mellett számos gyakorlati alkalmazással is. A különböző alkalmazási területek között megtalálható statisztikus mechanika, kémia, gazdaságtan, populációdinamika és sorbanállási rendszerek is.

Ahogy a vizsgált modellek egyre összetettebbek, természetes igény merül fel a markovi modellekre ismert eredmények kiterjesztésére olyan rendszerekre, melyekre a Markov-tulajdonság nem áll fenn teljes egészében, azaz hosszú memóriájú véletlen folyamatokra. A memória pontos mibenléte sokféle lehet; a matematikai fizikai példák között megtalálhatóak kölcsönható részecskerendszerek és véletlen környezetben mozgó részecskék egyaránt. Ezekben az esetekben a memóriát a környezet állapota jelenti. Sorbanállási rendszerek esetén a nem-exponenciális várakozási vagy kiszolgálási idők M/G/1 illetve G/M/1 sorokhoz vezetnek; ezekben az esetekben a memória megfelel a nem-exponenciális órák idejének.

Nem-markovi viselkedést többféle módon lehet vizsgálni. Egy lehetőség az állapottér kiterjesztése, hogy a bővebb állapottérben már teljesüljön a Markov-tulajdonság. Ennek a megközelítésnek a fő nehézsége, hogy az állapottér túl nagy lesz és nehezen kezelhetővé Mindazonáltal ez a megközelítés működik számos fizikai rendszerre. Az elmélet az elmúlt évtizedekben folyamatosan fejlődik. A Kipnis és Varadhan [16] által bevezetett martingál-approximációs technikák révén sikerült centrális határeloszlás-tételt bizonyítani kölcsönható részecskerendszerek és véletlen környezetben történő bolyongások számos osztályára. A centrális határeloszlást biztosító elégséges feltételeket hagyományosan „szektor feltételeknek” nevezik. Véletlen környezetben való bolyongások egy konkrét osztálya a „rövidlátó öntaszító bolyongás”, mely a bolyongót a sokat látogatott területekről eltaszítja keveset látogatott területek felé. A modellt a fizikai irodalomban az 1980-as években vezették be [1].

Egyszerű sorbanállási modellek vizsgálatára rendelkezésre állnak mátrix-analitikus módszerek illetve közvetlen számítások is végezhetőek Laplace–Stieltjes transzformált segítségével. Ezek mára jól ismert és kidolgozott módszerek. Összetettebb, nem-markovi sorbanállási modellek esetén egy másik lehetséges tárgyalási mód a Markov-folyamatokkal való közelítés. Általános eloszlásokat lehet eloszlások speciális osztályával közelíteni. A markovi modellezés szempontjából egy ilyen releváns osztály a „fázis-típusú” (phase-type) eloszlások.

Nagy populációjú markovi rendszerek viselkedését behatóan vizsgálták az utóbbi évtizedekben. Az egyik első eredmény Kurtz tétele [20], amely egy ilyen rendszer átlag-tér (mean-field) viselkedését (azaz amikor a populáció létszáma végtelenhez közelít) írja le közönséges differenciálegyenletek révén. Azóta számos különböző terület képviselői (pl. számítógéptudomány, biológia, kémia) vizsgálták a klasszikus modell különböző nem-markovi kiterjesztéseit. Egy ilyen populációs modell az ún. „általánosított szemi-markovi populációs folyamat” (population generalized semi-Markov process, PGSMP).

Az értekezés négy fejezetre van bontva.

A 2. fejezet témája elégséges feltételek a martingál approximáció és centrális határeloszlás-tétel bizonyítására stacionárius és ergodikus Markov-láncokra. Ez közös munka Tóth Bálinttal és Vető Bálinttal, és a [15] cikkre és a [14] cikk egy részére alapul.

A 3. fejezet témája a rövidlátó öntaszító bolyongás viselkedése $d \geq 3$ dimenzióban. Ez közös munka Tóth Bálinttal és Vető Bálinttal, és a[14] cikk egy részére alapul.

A 4. fejezet témája O'Cinneide karakterizációs tétele fázis-típusú eloszlásokra. A fő eredmény konstruktív bizonyítás a tétel elégséges irányára. Közös munka Telek Miklóssal, és a [13] cikkre alapul.

Az 5. fejezet témája egy bizonyos típusú általánosított szemi-markovi populációs folyamatosztálynak az átlag-tér határértéke. Ez közös munka Telek Miklóssal és Richard Hayden-nel, és a [11] cikkre alapul.

A kivonat további felépítése: először minden területhez adunk áttekintést a korábbi eredményekről, majd négy számozott tézisben a disszertáció eredményei kerülnek ismertetésre.

Centrális határeloszlás-tétel stacionárius és ergodikus Markov-folyamatok funkcionáljaira; szektor-feltételek

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ valószínűségi mező: Ω az állapottere egy *stacionárius és ergodikus* $t \mapsto \eta(t)$ Markov-folyamatnak. Tekintsük a $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\Omega, \pi)$ Hilbert-teret. A folyamat félcsoportjának *infinitezimális generátora*, G egy jól-definiált (esetleg nemkorlátos) zárt lineáris operátor $\mathcal{H}$-n.

Legyen $f \in \mathcal{H}$ 0 várható értékű függvény ($(f, 1\!\!1) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\pi = 0$). Centrális határeloszlás-tételt/invariancia-elvet szeretnénk vizsgálni a

$$N^{-1/2} \int_0^{Nt} f(\eta(s)) \, \mathrm{d}s \tag{1}$$

folyamatra $N \to \infty$ esetén.

A fő eszköz martingál-approximáció és centrális határeloszlás-tétel bizonyítására Kipnis és Varadhan következő tétele [16]:

1. Tétel. [KV] Az eddigi jelölésekkel, ha a következő két határérték létezik $\mathcal{H}$-ben:

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{1/2} \big(\lambda I - G\big)^{-1} f = 0,$$
$$\lim_{\lambda \to 0} S^{1/2} \big(\lambda I - G\big)^{-1} f =: v \in \mathcal{H},$$

akkor létezik egy olyan 0 várható értékű $M(t)$ $\mathcal{L}^2$-martingál, amely adaptált az $\eta(t)$ folyamat filtrációjához, stacionárius és ergodikus növekményű és

$$\lim_{N \to \infty} N^{-1} \mathbf{E} \left(\Big(\int_0^N f(\eta(s)) \, \mathrm{d}s - M(N) \Big)^2 \right) = 0.$$

A KV tétel egy absztrakt eredmény, mely konkrét esetekben esetleg nehezen alkalmazható közvetlenül; ezért érdemes olyan következményeit megfogalmazni, melyek adott esetben könnyebben ellenőrizhetőek.

A [16] cikkben Kipnis és Varadhan bizonyították, hogy a reverzibilis esetben (amikor G önadjungált), a KV tétel alkalmazható és így martingál-approximáció és centrális határeloszlás-tétel bizonyítható egyetlen további feltétellel, amely az f aszimptotikus szórásának végessége (amely nyilván szükséges):

2. Tétel. [Reverzibilis eset] Ha $G = G^*$, akkor a KV tétel alkalmazható minden olyan f függvényre, amelyre

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\mathbf{E}\left((\int_0^t f(\eta(s))\,\mathrm{d}s)^2 \right) < \infty. \tag{2}$$

Később általánosabb elégséges feltételeket fogalmaztak meg, melyeket együttesen „szektor feltételeknek" nevezünk.

1996-ban Varadhan bevezette az „erős szektor feltételt" (strong sector condition, SSC) [37]; jelölje

$$S := -\frac{1}{2}(G + G^*), \qquad A := \frac{1}{2}(G - G^*).$$

a G operátor szimmetrikus és antiszimmetrikus részét.

3. Tétel. [SSC] Ha

$$\left\| S^{-1/2} A S^{-1/2} \right\| < \infty.$$

fennáll, akkor a KV tétel alkalmazható minden olyan f függvényre, melyre teljesül

$$f \in \mathrm{Ran}(S^{1/2}). \tag{3}$$

(3) *H_{-1}-feltétel* néven ismert; teljesülése garantálja, hogy f aszimptotikus szórása véges (lásd 2).

2000-ben Sethuraman, Varadhan és Yau bevezették a „szintenkénti szektor feltételt" (graded sector condition, GSC) [30]. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$ térnek adott egy ortogonális felbontása (más szóval a tér „szintezett"):

$$\mathcal{H} = \overline{\oplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n} \tag{4}$$

úgy, hogy a felbontás konzisztens az S és A operátorokkal a következő értelemben: S diagonális a felbontásra nézve

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,n}, \qquad S_{n,n} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n \tag{5}$$

és A a szintet 1-gyel változtatja meg:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,n+1} + A_{n,n-1}, \qquad A_{n,n+1} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1},\ A_{n,n-1} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1},\ A^*_{n,n+1} = -A_{n+1,n}. \tag{6}$$

4. Tétel. [GSC]

$$Amennyiben \| S^{-1/2}_{n+i,n+i} A_{n,n+i} S^{-1/2}_{n,n} \| \le c n^{\beta} \qquad (i = \pm 1)$$

teljesül $\beta < 1$ vagy $\beta = 1$ és kellően kis c érték esetén, akkor a KV tétel alkalmazható minden $f \in \mathrm{Ran}(S^{1/2})$ függvényre.

Bizonyos alkalmazásokhoz a GSC tétel egy olyan változatát is bizonyították, melyben megengedett, hogy az A operátornak is legyen diagonális része illetve az S operátornak is legyen a diagonálison kívüli része.

A különböző szektor-feltételek alkalmazásairól lásd a [17] áttekintő cikket.

Jelen tézisfüzet 1. fejezete és a [15] cikk bevezetnek egy új szektor feltételt, az ún. „relaxált szektor feltételt" és egy továbbfejlesztett változatát a szintenkénti szektor feltételnek.

Rövidlátó öntaszító bolyongás

A rövidlátó öntaszító bolyongás („true" (or myopic) self-avoiding walk, TSAW) modelljét először Amit, Parisi és Peliti vezették be a fizikai irodalomban [1]. Ez egy elsőszomszéd-bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, melyben a bolyongó preferálja azokat a szomszédokat, amelyeket a múltban kevesebb ideig látogatott meg. A hosszú memóriájú hatások a trajektóriák öntaszító hatása miatt jelennek meg, melyeket a lokális idő negatív gradiense (illetve annak valamely függvénye) általi taszítás okoz.

Legyen $t \mapsto X(t) \in \mathbb{Z}^d$ egy folytonos idejű elsőszomszéd-bolyongás a $\mathbb{Z}^d$ rácson, melynek eloszlása a következő módon adható meg:

$$\mathbf{P}\big(X(t+\mathrm{d}t) = y \;\big|\; \mathcal{F}_t, X(t) = x\big) = 1\!\!1_{\{|\,x-y\,|=1\}} w(\ell(t,x) - \ell(t,y))\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \qquad (7)$$

ahol

$$\ell(t,z) := \ell(0,z) + |\,\{0 \le s \le t : X(s) = z\}\,| \qquad z \in \mathbb{Z}^d \qquad (8)$$

az $X(t)$ bolyongás lokális idő eloszlása valamilyen $\ell(0,z) \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{Z}^d$ kezdeti feltétellel, és a w rátafüggvény növekvő. Ez egy folytonos idejű változata az [1]-ban definiált bolyongásnak.

Renormalizációs csoportos érvelések alapján, de precíz érvelések nélkül az [1], [25], [28] cikkek szerzői a következő sejtéseket fogalmazták meg a dimenzió függvényében:

- $d = 1$: $X(t) \sim t^{2/3}$ bonyolult, nem-Gauss határfolyamattal.
- $d = 2$: $X(t) \sim t^{1/2}(\log t)^{\zeta}$ a sejtés szerint Gauss határfolyamattal. (A ζ kitevő értékére nincs egyértelmű sejtés a fizikai irodalomban.)
- $d \ge 3$: $X(t) \sim t^{1/2}$ Gauss határfolyamattal.

A $d = 1$ esetben a modell bizonyos eseteire (diszkrét idő és éleken mért lokális idő a folytonos idő és csúcsokban mért lokális idő helyett) $t^{-2/3}X(t)$-re a határeloszlás-tétel bizonyítást nyert a [33] és [35] cikkekben. A $t \mapsto N^{-2/3}X(Nt)$ határfolyamatát a [36] cikkben határozták meg és analizálták.

$d = 2$-ben szuperdiffuzív alsó korlátot ($t^{1/2}(\log\log t)^{1/2}$ az izotróp és $t^{1/2}(\log t)^{1/4}$ az anizotróp esetben) bizonyítottak [34]-ben.

Egy szorosan kapcsolódó modell az ún. „öntaszító Brown-polimer”, amely lényegében a TSAW folytonos térbeli megfelelője. 1-dimenzióban diffuzív korlátokért lásd [31], illetve $d \geq 3$ esetért lásd [14] és Vető Bálint doktori disszertációját [38]. *Ez a modell nem része a jelen értekezésnek.*

A $d \geq 3$ esetet vizsgáljuk a 2. fejezetben és [14]-ben. Azonosítjuk a lokális idő-profil természetes stacionárius és ergodikus mértékét a mozgó részecskéből nézve. Rátafüggvények egy széles osztályára bizonyítunk diffuzív skálázást, valamint egy szűkebb osztályra teljes centrális határeloszlás-tételt a bolyongó helyzetének véges dimenziós eloszlásaira.

Ezek az eredmények részben tisztázzák az [1]-beli sejtéseket. A bizonyítás a nem-reverzibilis Kipnis-Varadhan elméleten alapul, azon belül egy továbbfejlesztett változatát használja a szintenkénti szektor-feltételnek.

Fázis-típusú eloszlások

Tekintsünk egy folytonos idejű Markov-láncot $n+1$ állapoton, melyek közül pontosan egy nyelő. Tegyük fel, hogy a nyelő súlya a lánc kezdeti eloszlásában 0. Jelölje X az elnyelődés idejét; az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(t) = -\alpha \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}} \mathbf{1}, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

ahol α a kezdeti eloszlás sorvektor n elemmel (elhagyva a nyelőt), és $\mathbf{A}$ az ún. eltűnő infinitezimális generátor mátrix: lényegében az infinitezimális generátor, csak a nyelő állapot nélkül. Tehát $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es szubsztochasztikus mátrix, melyben az i-edik sor összege egyenlő az i állapotból való elnyelődés rátájának ellentettjével. $\mathbf{1}$ az n hosszú egységvektor csupa 1-es elemmel. A nyelő 0 kezdeti súlya megfelel $\alpha\mathbf{1} = 1$-nek; ezzel ekvivalens, hogy X a 0-t 0 valószínűséggel veszi fel.

A fenti módon megkapható eloszlások az ún. „fázis-típusú eloszlások”; az osztályukat PH-val jelöljük.

Fázis-típusú eloszlások használhatóak általános eloszlások közelítésére, ugyanis totális variációs távolságban sűrű halmazt alkotnak az összes abszolút folytonos nemnegatív eloszlások terében [5].

Egy fázis-típusú eloszlás sűrűségfüggvénye mindig analitikus és a következő alakú:

$$f(t) = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} c_{\lambda_i,j} t^{j-1} e^{-\lambda_i t}$$

ahol $-\lambda_i$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei, n_i λ_i multiplicitása és$c_{\lambda_i,j}$ konstansok.

Egy adott f fázis-típusú eloszlásra α and $\mathbf{A}$ nem egyértelmű; még a méretük sem egyértelmű. Emiatt egy adott $(\alpha, \mathbf{A})$ párt az f reprezentációjának hívunk, ha (9) fennáll. α (és $\mathbf{A}$) mérete a reprezentáció rendje.

A „mátrix-exponenciális eloszlások” (ME) osztálya a következő:

1. Definíció. [ME eloszlások] Egy f sűrűségfüggvényű X nemnegatív valószínűségi változó az ME

osztályban van, ha valamely n-re létezik olyan α n méretű vektor és $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix, melyre

$$f(t) = -\alpha\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{1}, \quad t \geq 0,$$

Ebben az esetben f (és X) ME$(\alpha, \mathbf{A})$ eloszlású.

Az ME és a PH eloszlások közötti eltérés abból fakad, hogy az ME eloszlások esetében nem kötünk ki nemnegativitási feltételeket α-ra és $\mathbf{A}$-ra. Bár a formula pontosan megegyezik, abban az esetben, ha α-nak vannak negatív elemei vagy $\mathbf{A}$-nak nemdiagonális negatív elemei, az a sztochasztikus jelentés, hogy X egy Markov-lánc elnyelődési ideje, elvész.

PH $\subseteq$ ME. A két osztály közötti különbséget O'Cinneide [26] karakterizálta. Még két definícióra van szükségünk.

2. Definíció. [Pozitív sűrűség feltétel] f teljesíti a „pozitív sűrűség feltételt”, ha

$$f(t) > 0 \quad \forall t > 0.$$

A definíció megengedi $f(0) = 0$-t.

3. Definíció. [Domináns sajátérték feltétel] f teljesíti a „domináns sajátérték feltételt”, ha valamely minimális rendű $(\alpha, \mathbf{A})$ ME reprezentációra $\mathbf{A}$-nak egyetlen maximális valós részű sajátértéke van.

A domináns sajátérték feltétel garantálja, hogy f nem oszcillál 0 körül $t \to \infty$ esetén, továbbá a definíció kizárja azt az esetet, hogy van egy a domináns valós sajátérték és egy komplex sajátérték-pár ugyanakkora valós résszel. a multiplicitása azonban lehet 1-nél nagyobb. Megjegyzés: ha a domináns sajátérték feltétel teljesül valamely minimális rendű ME reprezentációra, akkor az összesre teljesül.

5. Tétel. [O'Cinneide karakterizációs tétele] Ha f_X ME$(\alpha,\ \mathbf{A})$ eloszlású, akkor f_X pontosan akkor van PH-ban, ha a következő két feltétel együttesen teljesül:

- f_X teljesíti a pozitív sűrűség feltételt;
- f_X teljesíti a domináns sajátérték feltételt.

A tétel fő jelentősége a két feltétel elégségessége. O'Cinneide eredeti bizonyítása nem konstruktív; Maier [22] adott egy automata-elméleti módszereken alapuló bizonyítást.

A 3. fejezetben és a [11] cikkben konstruktív bizonyítást adunk a karakterizációs tételre: adunk egy algoritmust, amely bizonyítottan mindig véget ér és egy PH reprezentációt ad, amennyiben f_X teljesíti a pozitív sűrűség feltételt és a domináns sajátérték feltételt.

A korábbi eredményekhez képest a fő előny a konstrukció áttekinthetősége. A bizonyítás elemi mátrix algebrai eredményeket, approximációs technikákat használ és sztochasztikus interpretációt használ. Egy másik előny, hogy a témakör frissebb eredményeit (például a monociklikus reprezentációt [8]) összeköti a karakterizációs tétellel.

Általánosított szemi-markovi populációs folyamatok

A (homogén) Markov populációs modell a következő. Rögzítsünk egy N pozitív egészt. N egyed mindegyike egy állapotban tartózkodik valamely véges $\mathcal{S}$ állapothalmazból. Az egyedek folytonos idejű markovi átmeneteket végeznek: egy i állapotban lévő egyed r_{ij}^N rátával ugrik a j állapotba. A ráták függhetnek a rendszer „globális állapotától"; a globális állapot az egyes állapotokban tartózkodó egyedek összes száma, azaz egy $\mathbf{x}^N \in (\{0,1,\dots,N\})^{|\mathcal{S}|}$ vektor, melyre $x_1^N + \cdots + x_{|\mathcal{S}|}^N = N$. $\mathbf{x}^N(t)$ egy folytonos idejű Markov-lánc.

Egy ilyen rendszer viselkedésére vagyunk kíváncsiak N nagy értékei esetén. Tipikus feltétel, hogy egy ilyen modell különböző N-nel szereplő példányai teljesítik a „sűrűség-függést" (density-dependence), azaz a ráták csak a „normált globális állapottól" függnek. A normált globális állapot $\bar{\mathbf{x}}^N = \frac{\mathbf{x}^N}{N}$.

A sűrűség-függés elég gyakori valós életből vett példákban: a kémia (pl. reakciósebességet befolyásolja a koncentráció), biológia és számos számítógépes rendszerekre vonatkozó alkalmazás esetén.

Ugyan a rendszer globális állapota Markov-láncot alkot, ennek a láncnak az explicit analízise a gyakorlatban nem kivitelezhető, mert a lánc állapotterének mérete N-ben exponenciálisan növekszik.

Kurtz klasszikus eredménye szerint [20] további regularitási feltételek mellett (úgymint r_{ij} Lipschitz-folytonosak és a kezdeti feltételek konvergálnak) egy sűrűség-függő Markov populációs modell $N \to \infty$ esetén konvergál egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásához. A fő előnye Kurtz megközelítésének, hogy a rendszer mérete $|\mathcal{S}|$ marad N értékétől függetlenül. Egy másik következmény, hogy a határfolyamat determinisztikus: N nagy értékeire a rendszer globális viselkedése közel determinisztikus. A határértéket átlag-tér (mean-field) határértéknek nevezzük.

Akárcsak a fent leírt Markov populációs modell esetén, az általánosított szemi-markovi populációs folyamatok (population generalized semi-Markov process, PGSMP) esetén minden egyes egyed egy $\mathcal{S}$ lokális állapottér valamelyikében tartózkodik; az egyedek a markovi átmenetek mellett azonban nem-markovi átmeneteket is végeznek. Bizonyos állapotokban van egy „aktív óra". Amikor egy egyed belép egy ilyen állapotba, elindít egy órát tetszőleges (előre adott) eloszlással, majd amikor az óra csörög, végrehajt egy átmenetet. Ezeket a nem-exponenciális időket késleltetésnek (delay) hívjuk; feltesszük, hogy a nem-exponenciális órák nem megszakíthatóak a markovi átmenetek által.

Az utóbbi időben újfent kiújult az érdeklődés a PGSMP rendszerek iránt; 2012-ben egymástól függetlenül Hayden [12] és Bortolussi és Hillston [4] egyaránt bizonyították az átlag-tér határértéket *determinisztikus* késleltetés esetén.

A 4. fejezetben és a [13] cikkben meghatározzuk az átlag-tér határértéket általános késleltetés esetén; a fő eltérés Kurtz tételéhez képest, hogy a határérték egy *késleltetett* differenciálegyenlet-rendszer megoldása. A közönséges differenciálegyenlettől való eltérés megfelel annak, hogy az általános késleltetések egyfajta memóriát visznek be a rendszerbe.

1. A relaxált szektor feltétel és a továbbfejlesztett szintenkénti szektor feltétel

Ezen fejezet fő eredményei a relaxált szektor feltétel és a továbbfejlesztett szintenkénti szektor feltétel. Közös munka eredménye Tóth Bálinttal és Vető Bálinttal. A [15] és részben a [14] cikkeken alapul.

A relaxált szektor feltétel

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ egy közös mag (core) a G, G^*, S és A operátoroknak és legyen

$$B_\lambda := (\lambda I + S)^{-1/2} A (\lambda I + S)^{-1/2}, \qquad \lambda > 0. \tag{10}$$

B_λ sűrűn definiált anti-önadjungált operátorok a $(\lambda I + S)^{1/2}\mathcal{C}$ halmazon.

A relaxált szektor feltétel kulcsa egy olyan B anti-önadjungált operátor létezése, amely formálisan

$$B := S^{-1/2} A S^{-1/2}, \tag{11}$$

valamint egy olyan kellően nagy altér, melynek elemein B_λ pontonként konvergál B-hez, amint $\lambda \to 0$. Ebben az esetben a (3) H_{-1}-feltétel biztosítja a KV tétel alkalmazhatóságát.

6. Tétel. [Relaxált szektor feltétel] Tegyük fel, hogy a $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \cap_{\lambda>0} \mathrm{Dom}(B_\lambda)$ altér sűrű $\mathcal{H}$-ban és rajta értelmezett egy $B : \widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{H}$ lényegében anti-önadjungált operátor, amelyre bármely $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}$ vektorra

$$\lim_{\lambda \to 0} \| B_\lambda \varphi - B\varphi \| = 0. \tag{12}$$

Ekkor a KV Tétel martingál-approximációja és a centrális határeloszlás-tétel következik.

A bizonyítás a Trotter-Kurtz tétel menetét követi, lásd pl. Theorem 2.12 [21]-ben.

Az alkalmazásokban a kulcsmomentuom a $\widetilde{\mathcal{C}}$ altér azonosítása és annak bizonyítása, hogy B nem csupán antiszimmetrikus (ami közvetlenül adódik az alakjából), hanem lényegében anti-önadjungált.

Az SSC tétel közvetlenül következik belőle. Tegyük most fel egy, az operátorokkal konzisztens ortogonális felbontás létezését ((4)–(6)). A GSC tétel következő változata is adódik:

. Tétel. [GSC a relaxált szektor feltételből] Ha létezik egy olyan növő pozitív c_n számsorozat, melyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} = \infty$$

és

$$\|S_{n+i,n+i}^{-1/2} A_{n,n+i} S_{n,n}^{-1/2}\| \le c_n \qquad (i = \pm 1),$$

akkor a KV tétel martingál approximációja és a centrális határeloszlás-tétel következik minden $f \in \mathrm{Ran}(S^{1/2})$ függvényre.

A bizonyítás kulcsa

$$\mathrm{Ran}(I \pm S^{-1/2} A S^{-1/2})^{\perp} = 0, \tag{13}$$

bizonyítása, amely az *önadjungáltság alapvető kritériumának* megfelelője. Lásd pl. Theorem VIII.3. [29]-ben.

A továbbfejlesztett szintenkénti szektor feltétel

Felírjuk a szintenkénti szektor feltételt ([27], [17]) egy továbbfejlesztett formában.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \pi)$ Hilbert-tér ortogonálisan felbomlik:

$$\mathcal{H} = \overline{\oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n}, \tag{14}$$

és a $G = -S + A$ infintezimális generátor konzisztens a felbontással a következő értelemben:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-r}^{r} S_{n,n+j}, \qquad S_{n,n+j} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+j}, \qquad S^*_{n,n+j} = S_{n+j,n}, \tag{15}$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-r}^{r} A_{n,n+j}, \qquad A_{n,n+j} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+j}, \qquad A^*_{n,n+j} = -A_{n+j,n} \tag{16}$$

valamely véges r egészre. Itt és a továbbiakban $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-r}^{r} \cdots$ a következőt jelöli $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-r}^{r} \mathbb{1}_{\{n+j \geq 0\}} \cdots$.

7. Tétel. [Továbbfejlesztett szintenkénti szektor feltétel] Tegyük fel, hogy létezik egy $D = D^* \geq 0$ operátor, amely diagonális $\mathcal{H}$ felbontása szerint:

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,n}, \qquad D_{n,n} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \tag{17}$$

továbbá

$$0 \leq D \leq S. \tag{18}$$

Tegyük fel, hogy adottak $C < \infty$ és $2 \leq \kappa < \infty$ konstansok, melyekkel a következő korlátok teljesülnek:

$$\left\| D_{n,n}^{-1/2} (S_{n,n} + A_{n,n}) D_{n,n}^{-1/2} \right\| \leq C n^{\kappa}, \tag{19}$$

$$\left\| D_{n+j,n+j}^{-1/2} A_{n,n+j} D_{n,n}^{-1/2} \right\| \leq \frac{n}{12 r^2 \kappa} + C, \qquad j = \pm 1, \ldots, \pm r, \tag{20}$$

$$\left\| D_{n+j,n+j}^{-1/2} S_{n,n+j} D_{n,n}^{-1/2} \right\| \leq \frac{n^2}{6 r^3 \kappa^2} + C, \qquad j = \pm 1, \ldots, \pm r, \tag{21}$$

Ezen feltételek teljesülése esetén bármely $f \in \oplus_{n=0}^{N} \mathcal{H}_n$, $(N < \infty)$ függvényre, melyre

$$D^{-1/2} f \in \mathcal{H}, \tag{22}$$

alkalmazható a KV Tétel és teljesül a martingál approximáció és a centrális határeloszlás-tétel.

A szintenkénti szektor feltétel korábbi felírásaiban ([30], [17], [27])) a szimmetrikus részre vonatkozó felső korlát (21) alakja megegyezett az antiszimmetrikus részre vonatkozó korlát alakjával (20). n helyett n^2 rendig a (21) képletben egy a megfelelő tagra vonatkozó pontosabb becslés révén tudunk felmenni.

2. Centrális határeloszlás-tétel a rövidlátó öntaszító bolyongásra $d \geq 3$ dimenzióban

Ezen fejezet és [14] fő eredménye a diffuzív korlátok a rövidlátó öntaszító bolyongásra rátafüggvények egy széles osztályára $d \geq 3$ esetén, és egy szűkebb osztályra belátjuk a teljes centrális határeloszlás-tételt a bolyongás véges-dimenziós eloszlásaira.

$t \mapsto X(t) \in \mathbb{Z}^d$ egy folytonos idejű elsőszomszéd bolyongás $\mathbb{Z}^d$-ben, melynek az átmeneteit (7) határozza meg valamely $w : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sima rátafüggvénnyel, melyre a következő feltevéseket tesszük.

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} w(u) := \gamma > 0. \tag{23}$$

Jelölje s és r w páros és páratlan részét:

$$s(u) := \frac{w(u) + w(-u)}{2} - \gamma, \qquad r(u) := \frac{w(u) - w(-u)}{2}. \tag{24}$$

(23)-n kívül a következő feltevéseket tesszük: léteznek olyan pozitív véges $c > 0$, $\varepsilon > 0$ és $C < \infty$ konstansok, melyekre

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} r'(u) > c, \tag{25}$$

$$s(u) < C \exp\{(c - \varepsilon)u^2/2\}, \tag{26}$$

és $r(\cdot)$ analitikus függvény, melyre teljesül

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{c - \varepsilon}\right)^{n/2} \left| r^{(n)}(0) \right| < \infty. \tag{27}$$

A (23) feltétel ellipticitást garantál, melynek révén a bolyongást minorálja egy közönséges egyszerű szimmetrikus bolyongás. A (25) feltétel garantálja a stacionárius mérték létezéséhez szükséges log-konkavitást. (26) és (27) technikai jellegű feltételek.

A $d \geq 3$ esetet vizsgáljuk. Először azonosítunk egy természetes stacionárius és ergodikus mértéket a környezetre (a lokális idők összességére) a bolyongóból nézve. A stacionárius és ergodikus tartományban diffuzív (t rendű) alsó és felső korlátot bizonyítunk $X(t)$ szórásnégyzetére és *diffuzív határértéket* (nem elfajuló centrális határeloszlás tételt normális skálázással) bizonyítunk a bolyongó helyzetére.

Tekintsük a környezetet a bolyongóból nézve:

$$\eta(t) = \big(\eta(t,x)\big)_{x\in\mathbb{Z}^d} \qquad \eta(t,x) := \ell(t, X(t)+x). \tag{28}$$

$t \mapsto \eta(t)$ egy c.a.d.l.a.g. (jobbról folytonos) Markov folyamat az

$$\Omega := \{\omega = \big(\omega(x)\big)_{x\in\mathbb{Z}^d} : \omega(x)\in\mathbb{R},\ (\forall\varepsilon>0) \lim_{|\,x\,|\to\infty} |\,x\,|^{-\varepsilon} |\,\omega(x)\,| = 0\}. \tag{29}$$

állapottéren. A lokális idők $\ell(0,x)\in\mathbb{R}$ kezdeti feltételei lehetnek negatívak is (és így $\ell(t,x)$ is). A térbeli eltolások

$$\tau_z : \Omega \to \Omega, \qquad \tau_z\omega(x) := \omega(z+x), \qquad z\in\mathbb{Z}^d \tag{30}$$

természetes módon hatnak Ω-n.

Jelölje

$$\mathcal{U} := \{e\in\mathbb{Z}^d : |\,e\,| = 1\}. \tag{31}$$

a $2d$ darab egységvektort.

A $t\mapsto\eta(t)$ folyamat infinitezimális generátora

$$Gf(\omega) = \sum_{e\in\mathcal{U}} w(\omega(0)-\omega(e))\big(f(\tau_e\omega) - f(\omega)\big) + \mathcal{D}f(\omega) \tag{32}$$

ahol a

$$\mathcal{D}f(\omega) := \frac{\partial f}{\partial\omega(0)}(\omega) \tag{33}$$

(nemkorlátos) lineáris operátor jóldefiniált sima cilinderfüggvényekre.

(32)-ben a különböző tagok jelentése világos:az összegben szereplő tagok a szomszédokba való ugrásoknak felelnek meg, míg a deriválás a lokális idő várakozás közbeni növekedésének felel meg.

Definiáljuk a leendő stacionárius és ergodikus mértéket Ω-n. Legyen

$$R : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad R(u) := \int_0^u r(v)\,\mathrm{d}v. \tag{34}$$

R szigorúan konvex és páros. $\pi(\omega)$ jelöli az *egyértelmű centrált Gibbs-mértéket* (Markov mezőt) Ω-n, melyet a következő feltételes specifikációk definiálnak egy véges $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ halmazon:

$$\mathrm{d}\pi\left(\omega_\Lambda \,\middle|\, \omega_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}\right) = Z_\Lambda^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\ |\,x-y\,|=1}} R(\omega(x)-\omega(y)) - \sum_{\substack{x\in\Lambda,y\in\Lambda^c\\ |\,x-y\,|=1}} R(\omega(x)-\omega(y))\right\}\mathrm{d}\omega_\Lambda \tag{35}$$

ahol ω_Λ a Lebesgue-mérték Λ-n. A (35) által definiált eltolás-invariáns Gibbs-mérték csak $d \geq 3$ esetén létezik (lásd [10]). A π mérték eltolás-invariáns és a $(\Omega, \pi, \tau_z : z \in \mathbb{Z}^d)$ dinamikai rendszer ergodikus.

Az $r(u) = u$, $R(u) = u^2/2$ speciális esetben a $\pi(\omega)$ mérték a „zéró tömegű szabad Gauss-mezőt" definiálja $\mathbb{Z}^d$-n $d \geq 3$-ra, melynek várhatü értéke és kovarianciája

$$\int_\Omega \omega(x)\,\mathrm{d}\pi(\omega) = 0, \qquad \int_\Omega \omega(x)\omega(y)\,\mathrm{d}\pi(\omega) = (-\Delta)^{-1}_{x,y} =: C(y-x) \tag{36}$$

ahol Δ a rácson értelmezett Laplace-operátor: $\Delta_{x,y} = 1\!\!1_{\{|\,x-y\,|=1\}} - 2d1\!\!1_{\{|\,x-y\,|=0\}}$. Ezt az esetet *Gauss-esetnek* hívjuk.

1. Állítás. [A mérték stacionárius és ergodikus] A $\pi(\omega)$ mérték stacionárius és ergodikus a $t \mapsto \eta(t) \in \Omega$ folyamathoz.

A stacionaritás bizonyítása a „Jaglom-reverzibilitás" tulajdonságon múlik: a

$$Jf(\omega) := f(-\omega), \tag{37}$$

jelölésekkel

$$JSJ = S, \quad JAJ = -A, \qquad JGJ = G^*. \tag{38}$$

(38) kicsit többet is jelent, mint stacionaritás: az idő-megfordított és J szerint invertált folyamat

$$t \mapsto \widetilde{\eta}(t) := -\eta(-t) \tag{39}$$

eloszlásban megegyezik az eredeti $t \mapsto \eta(t)$ folyamattal. Ezt a fajta szimmetriát nevezik Jaglom-reverzibilitásnak; számos szimmetrikus fizikai modellben megjelenik [40], [41].

Az ergodicitás az eltolások ergodicitásából adódik (Ω, π)-n.

Az ergodicitásból a nagy számok törvénye is következik:

1. Következmény. [Nagy számok törvénye] π-m.m. $\ell(0,\cdot)$ kezdeti eloszlás esetén

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} = 0 \quad \text{m.b.} \tag{40}$$

A fejezet fő eredményei a bolyongó helyzetére vonatkozó diffuzív korlátok és centrális határeloszlás-tétel.

8. Tétel. [Diffuzív korlátok és centrális határeloszlás-tétel]

(1) A (23), (25), (26) and (27) feltételek teljesülése esetén

$$0 < \gamma \leq \inf_{|\,e\,|=1} \varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{E}\left((e \cdot X(t))^2\right) \leq \sup_{|\,e\,|=1} \varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{E}\left((e \cdot X(t))^2\right) < \infty. \tag{41}$$

(2) Ha az előbbieken felül

$$r(u) = u, \qquad s(u) = s_4 u^4 + s_2 u^2 + s_0, \tag{42}$$

is teljesül, valamint s_4/γ elég kicsi, akkor létezik és nem elfajult a

$$\sigma_{kl}^2 := \lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{E}\left(X_k(t)X_l(t)\right) \tag{43}$$

aszimptotikus kovarianca-mátrix. Továbbá a

$$X_N(t) := N^{-1/2}X(Nt) \tag{44}$$

folyamat véges-dimenziós peremeloszlásai konvergálnak egy d-dimenziós σ^2 koverianciájú Brown-mozgás megfelelő peremeloszlásaihoz.

A bizonyítás a következő martingál + integrál felbontáson alapul:

$$X(t) = N(t) + \int_0^t \overline{\varphi}(\eta(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \widetilde{\varphi}(\eta(s))\,\mathrm{d}s. \tag{45}$$

$N(t)$ az ugrási rátáknak megfelelő martingál, míg a $\varphi : \Omega- > \mathbb{R}^d$ függvény a bolyongó feltételes sebessége a környezet függvényében.

A diffuzív alsó korlát bizonyítása azon múlik, hogy az $N(t)$ martingál egy része korrelálatlan a többi taggal.

A diffuzív felső korlát Fourier-tartományban végzett számításokon alapszik és a Brascamp-Lieb egyenlőtlenség következő következményét használja (lásd pl. Proposition 2.1 [3]-ben):

9. Lemma. [Brascamp-Lieb] Bármely sima $F : \Omega \to \mathbb{R}$ cilinder-függvényre és $0 \le \lambda < c/2$-ra:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Z(\lambda)}\mathbf{E}\left(F(\omega)^2 \exp\{\lambda(\omega(0)-\omega(e))^2\}\right) \\ &\le \frac{1}{c}\frac{1}{Z(\lambda)}\mathbf{E}\left(\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} \partial_x F(\omega)(-\Delta)^{-1}_{xy}\partial_y F(\omega)\exp\{\lambda(\omega(0)-\omega(e))^2\}\right) \\ &\quad + \frac{1}{Z(\lambda)^2}\mathbf{E}\left(F(\omega)\exp\{\lambda(\omega(0)-\omega(e))^2\}\right)^2. \end{aligned} \tag{46}$$

∂_x $\frac{\partial}{\partial\omega(x)}$-et jelöli.

A lemma garantálja az aszimptotikus szórás végességét bármely polinom w-re a polinom foka szerinti indukcióval, illetve általánosabban gyorsan lecsengő hatványsorokra is.

Végezetül a

$$r(u) = u, \qquad s(u) = s_4 u^4 + s_2 u^2 + s_0,$$

speciális esetben a továbbfejlesztett szintenkénti szektor feltétel alkalmazható. Áttérünk az ekvivalens Fock-térre, ahol $\mathcal{H}_n$ ekvivalens megfelelője az n-edfokú polinomok (ortogonalizálva); a 7. tételbeli felső korlátok számítását ebben a térben végezzük. Az egyik kritikus tag

$$\left\| D_{n+j,n+j}^{-1/2} S D_{n,n}^{-1/2} \right\| = O(n^{\deg s/2}),$$

amely lehetővé teszi, hogy az s polinom fokát 4-ig növeljük.

3. A fázis-típusú karakterizációs tétel konstruktív bizonyítása

E fejezet fő eredménye egy új, konstruktív bizonyítás a 5. tétel elégséges irányára. Az eredmények a [13] publikációban szerepelnek.

Az algoritmus eredményeként előálló reprezentáció egyszerű és áttekinthető szerkezetű, valamint a rendje is expliciten kiszámítható. Az algoritmus 5 fő lépésre osztható. Az 1-es és 2-es lépés előkészítő jellegű, míg az 5-ös lépés a 2-es lépéshez kapcsolódó korrekció. A 3-as lépés [8] eredményein alapul; a fő újdonság a 4-es lépés, melyet kicsit jobban részletezünk a következőkben.

Legyen adott f_X mátrix-exponenciális függvény $(\alpha, \mathbf{A})$ reprezentációval, mely teljesíti a pozitív sűrűség feltételt és a domináns sajátérték feltételt.

- 1-es lépés. Keresünk egy ekvivalens minimális $(\alpha_1, \mathbf{A}_1)$ ME reprezentációt a felesleges sajátértékek eliminálása révén.

- 2-es lépés. Ez a lépés csak akkor kerül végrehajtásra, ha $f_X(0) = 0$. A lépés lényegében egy „dekonvolúció”: f_X-et előállítjuk egy f_Y mátrix exponenciális sűrűségfüggvény és egy megfelelő Gamma eloszlás sűrűségfüggvényének konvolúciójaként. A lépés értelme, hogy $f_Y(0) > 0$, továbbá ha f_Y-hoz találunk PH reprezentációt, akkor az automatikusan ad egy PH reprezentációt f_X-re is. A 3-as és 4-es lépést f_Y-ra hajtjuk végre, és csak az 5-ös lépésben váltunk vissza f_X-re.

- 3-as lépés. Egy $(\gamma, \mathbf{G})$ reprezentációt határozunk meg, ahol $\mathbf{G}$ szubsztochasztikus, viszont γ még mindig tartalmazhat negatív elemeket. A lépés fő eszköze a monociklikus struktúra (ún. Feedback-Erlang blokkokkal, [8]). $\mathbf{G}$ mérete tipikusan növekszik a 2-es lépés eredményéhez képest, mert minden egyes komplex sajátérték-párt legalább 3 fázissal (állapottal) reprezentál. Mindazonáltal $\mathbf{G}$ egy ritka és áttekinthető szerkezetű mátrix. Ehhez a lépéshez csak a domináns sajátérték feltétel szükséges.

- 4-es lépés. $(\gamma, \mathbf{G})$-t egy ún. Erlang-farok hozzáadásával áttranszformáljuk egy $(\beta, \mathbf{B})$ reprezentációra, ahol már β is nemnegatív (és $\mathbf{B}$ is szubsztohasztikus marad). Az Erlang farok azonos paraméterű sorbakötött fázisokból áll. A fő kihívás a farok hossza és paraméterének kiszámítása. A fő matematikai eszköz elemi függvények approximációi. A 4-es lépés váza a következő elemekből áll:

– Keresünk egy $\tau > 0$ értéket, melyre $\gamma e^{\tau \mathbf{G}} > 0$ (elemenként). A domináns sajátérték feltétel és a pozitív sűrűség feltétel teljesülése esetén ilyen τ mindig létezik, feltéve, hogy $\mathbf{G}$ a 3-as lépés eredményeként kapott Feedback-Erlang struktúrájú.

– Keresünk egy λ' értéket, melyre

$$\gamma \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{G}}{\lambda} \right)^{\tau\lambda} > 0 \quad \forall \lambda \geq \lambda';$$

ez mindig megvalósítható, mivel $\left\| \gamma (\mathbf{I} + \frac{\mathbf{G}}{\lambda})^{\tau\lambda} - \gamma e^{\tau \mathbf{G}} \right\| \to 0$ amint $\lambda \to \infty$.

– Legyen $\epsilon = \inf_{t \in (0,\tau)} f_X(t)$. $\epsilon > 0$ a pozitív sűrűség feltétel és a 2-es lépés eredményeképpen. Keresünk egy λ'' értéket, melyre

$$\left| -\gamma e^{\mathbf{G}\tau} \mathbf{G}\mathbf{1} + \gamma \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{G}}{\lambda} \right)^{\tau\lambda} \mathbf{G}\mathbf{1} \right| < \epsilon \quad \forall \lambda \geq \lambda''.$$

Ez garantálja, hogy $-\gamma \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{G}}{\lambda} \right)^k \mathbf{G}\mathbf{1} > 0$ for $k = 1, \ldots, n$ ahol $n = \tau\lambda''$. Ez mindig megvalósítható, mivel $\epsilon > 0$.

– A $(\gamma, \mathbf{G})$ reprezentációt kiterjesztjük egy Erlang-farokkal $\lambda = \max(\lambda', \lambda'')$ paraméterrel, melynek hossza $n = \lceil \lambda\tau \rceil$.

• 5-ös lépés. Visszaalakítjuk a 4-es lépés eredményét f_X egy reprezentációjává a 2-es lépésbeli változtatás alapján.

10. Tétel. [Az eljárás helyessége] Amennyiben a pozitív sűrűség és a domináns sajátérték feltétel teljesülnek, a fenti algoritmus mindig megadja f_X egy PH reprezentációját.

A 5. tétel szükséges iránya lényegében a Perron–Frobenius lemma egy általánosításán múlik, lásd [23].

4. Átlag-tér határérték populációs modellekre általános késleltetésekkel

Kiterjesztjük a homogén Markov populációs modellt. Akárcsak a fent leírt Markov populációs modell esetén, az általánosított szemi-markovi populációs folyamatok (population generalized semi-Markov process, PGSMP) esetén N egyed mindegyike egy $\mathcal{S}$ lokális állapottér valamelyik állapotában tartózkodik.

Az egyedek a markovi átmenetek mellett azonban nem-markovi átmeneteket is végeznek. Bizonyos állapotokban van egy „aktív óra”. Amikor egy egyed belép egy ilyen állapotba, elindul egy óra tetszőleges (előre adott) eloszlással, majd amikor az óra csörög, az egyed végrehajt egy átmenetet. Ezeket a nem-exponenciális időket késleltetésnek (delay) hívjuk.

A következő feltevéseket tesszük: a markovi átmenetek rátája sűrűség-függő; a ráták Lipschitz-folytonosak és korlátosak.

Valahányszor egy egyed beugrik egy „aktív” i állapotba, elindul egy nem-exponenciális óra F_i eloszlásfüggvénnyel. F_i tetszőleges, csak annyit kötünk ki, hogy a pozitív félegyenesre koncentrált. A generált idő mindentől független. Ha az idő letelt, az egyed elugrik i-ből; feltesszük, hogy mindig ugyanabba az állapotba ugrik át (ami i-től függhet), és a célállapotban nincs aktív óra. A jelölésben $p_j^i = 1$, ha j a célállapot i-ből; $p_j^i = 0$ minden más esetben. Az átmenet után az óra visszaállítódik 0-ra és legközelebb akkor indul el (újrainicializálva), amikor az egyed visszatér az i állapotba.

Tehát egy egyednek legfeljebb egy aktív órája lehet bármely pillanatban, viszont globálisan az aktív órák száma tetszőleges lehet bármely időpillanatban.

Feltesszük, hogy a nem-exponenciális órák nem megszakíthatóak a markovi átmenetek által, azaz ha i aktív állapot, akkor $r_{ij} = 0\,\forall j$.

Feltesszük továbbá, hogy a rendszer kezdeti állapota a nem aktív állapotokra koncentrálódik (tehát kezdetben nincs aktív óra).

Megadjuk a modell Poisson-reprezentációját. Legyenek $P_{ij}(.)$ független 1 rátájú Poisson-folyamatok minden $i \neq j \in \mathcal{S}$-re. Legyenek $\{T_k^{ij}\}_{k=1}^{\infty}$ független, azonos eloszlású példányok az F_i eloszlásból. Az F_i jelölést a nem-aktív i állapotokra is használjuk, de 0 együtthatóval, így ez esetben F_i tetszőleges.

$\bar{\mathbf{x}}^N(t)$ Poisson-reprezentációja

$$\begin{aligned}\bar{x}_i^N(t) =& \bar{x}_i^N(0) - \sum_{j:j\neq i} \frac{1}{N} P_{ij}\left(N\int_0^t r_{ij}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right) + \sum_{j:j\neq i} \frac{1}{N} P_{ji}\left(N\int_0^t r_{ji}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right) \\ &+ \sum_{h\in\mathcal{S}_0}\sum_{j\in\mathcal{S}_1}\int_{z=0}^t p_j^i \mathbf{1}\left(T^{ji}_{P_{hj}\left(N\int_0^z r_{hj}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right)} \leq t-z\right)\frac{1}{N}\mathrm{d}P_{hj}\left(N\int_0^z r_{hj}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right) \\ &- \sum_{h\in\mathcal{S}_0}\sum_{j:j\in\mathcal{S}_0}\int_{z=0}^t p_i^j \mathbf{1}\left(T^{ij}_{P_{hi}\left(N\int_0^z r_{hi}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right)} \leq t-z\right)\frac{1}{N}\mathrm{d}P_{hi}\left(N\int_0^z r_{hi}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right) \quad (47)\end{aligned}$$

minden $i \in \mathcal{S}$-re.

Az első tag a kezdeti feltétel. A második és harmadik tag felelnek meg az i-ből illetve i-be történő markovi átmeneteknek.

A negyedik tag értelmezése a következő. Ha i aktív, a tag 0. Ha i nem aktív, akkor tekintsünk egy aktív j állapotot, melyre $p_j^i = 1$ és egy inaktív h állapotot. Ha a z időpontban történik egy $h \to j$ Markov-átmenet, akkor egy F_j eloszlású aktív óra elindul. Az óra az értékét a $\{T_k^{ji}\}_{k=1}^{\infty}$ listából veszi; azért, hogy minden egyes óra független legyen a korábbiaktól, k értékét $P_{hj}\left(\int_0^z r_{hj}((\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right)$-ra állítjuk (ami P_{hj} minden egyes érkezésével növekszik). Amikor az indikátor változó 1, az óra a t időpontig bezárólag csörgött, és az átmenetet figyelembe kell vennünk. Amikor az indikátor változó 0, akkor az átmenet még nem következett be t-kor, így nem kell figyelembe vennünk.

Hasonlóan az ötödik tag csak akkor nemnulla, ha i aktív; legyen j azon inaktív állapot, melyre $p_i^j = 1$ és legyen h tetszőleges inaktív állapot. Ha a z időpontban történik egy $h \to i$ átmenet, akkor egy F_i eloszlású aktív óra elindul. Az óra ezúttal a $\{T_k^{ij}\}_{k=1}^{\infty}$ listából veszi az értékét $k =$

$P_{ij}\left(\int_0^z r_{ij}((\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u\right)$ választással. Az óra pontosan akkor csörög t-ig bezárólag, amikor az indikátor változó értéke 1, azaz számolnunk kell a t-ig bekövetkezett átmenetek között. Az átlag-tér határértéket a következő késleltetett differenciálegyenletek határozzák meg (integrál alakban írva):

$$\begin{aligned} v_i(t) =& v_i(0) - \sum_{j:j\neq i} \int_0^t r_{ij}(\mathbf{v}(u))\mathrm{d}u + \sum_{j:j\neq i} \int_0^t r_{ji}(\mathbf{v}(u))\mathrm{d}u \\ &+ \sum_{h\in\mathcal{S}_0} \sum_{j\in\mathcal{S}_1} \int_{u=0}^t p_j^i F_j(t-u) r_{hj}(\mathbf{v}(u))\mathrm{d}u \\ &- \sum_{h\in\mathcal{S}_0} \sum_{j:j\in\mathcal{S}_0} \int_{u=0}^t p_i^j F_i(t-u) r_{hi}(\mathbf{v}(u))\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{48}$$

minden $i \in \mathcal{S}$-re.

r_{ij} Lipschitz-folytonossága garantálja, hogy (48) megoldása létezik és egyértelmű.

Feltesszük a kezdeti feltételek konvergenciáját:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\|\mathbf{v}(0) - \bar{\mathbf{x}}^N(0)\| > \epsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

11. Tétel. [Az átlag-tér határérték] Az előbbi feltételek mellett minden $T > 0$ és $\epsilon > 0$ esetén:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in[0,T]} \|\bar{\mathbf{x}}^N(t) - \mathbf{v}(t)\| > \epsilon \right\} = 0$$

A bizonyításról tömören. Definiáljuk az $\mathbf{y}^N(t)$ segédfolyamatot:

$$\begin{aligned} y_i^N(t) :=& v_i(0) - \sum_{j:j\neq i} \int_0^t r_{ij}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u + \sum_{j:j\neq i} \int_0^t r_{ji}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u \\ &+ \sum_{h\in\mathcal{S}_0} \sum_{j\in\mathcal{S}_1} \int_{u=0}^t p_j^i F_j(t-u) r_{hj}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u \\ &- \sum_{h\in\mathcal{S}_0} \sum_{j:j\in\mathcal{S}_0} \int_{u=0}^t p_i^j F_i(t-u) r_{hi}(\bar{\mathbf{x}}^N(u))\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{49}$$

minden $i \in \mathcal{S}$-re.

Ekkor

$$|\bar{x}_i^N(t) - v_i(t)| \leq |\bar{x}_i^N(t) - y_i^N(t)| + |y_i^N(t) - v_i(t)|$$

minden $i \in \mathcal{S}$-re.

Legyen

$$D_i^N(T) = \sup_{t\in[0,T]} |\bar{x}_i^N(t) - y_i^N(t)|.$$

$\|\mathbf{y}^N(t) - \mathbf{v}(t)\|$-t a következő módon becsüljük:

$$|y_i^N(t) - v_i(t)| \leq C \int_0^t \|\mathbf{x}^N(u) - \mathbf{v}(u)\| \mathrm{d}u$$

valamely véges C-re ($\|.\|$ a maximum norma $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$-en). A cél belátni, hogy $D_i^N(T) \to 0$ valószínűségben amint $N \to \infty$ minden $i \in \mathcal{S}$-re; ha ez megvan, akkor

$$\|\bar{\mathbf{x}}^N(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq \max_{i \in \mathcal{S}} D_i^N(T) + ZR \int_0^t \|\bar{\mathbf{x}}^N(u) - \mathbf{v}(u)\| \mathrm{d}u \tag{50}$$

és a Grönwall egyenlőtlenség ([9], page 498) szerint

$$\|\bar{\mathbf{x}}^N(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq \max_{i \in \mathcal{S}} D_i^N(T) \exp(ZRT),$$

ami bizonyítja a tétel állítását.

Azt, hogy $D_i^N(T) \to 0$ valószínűségben, különféle valószínűségi koncentrációs tételek alkalmazásával bizonyítjuk, nevezetesen a funkcionális nagy számok törvénye a Poisson-folyamatra ([39], Section 3.2) és az Azuma-egyenlőtlenség megfelelő alkalmazása révén [7, 2].

Hivatkozások

[1] D. Amit, G. Parisi, and L. Peliti. Asymptotic behavior of the true' self-avoiding walk. *Phys. Rev. B*, 27:1635–1645, 1983.

[2] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. *Tohoku Mathematical Journal*, 19(3):357–367, 1967.

[3] S. G. Bobkov and M. Ledoux. From Brunn–Minkowski to Brascamp–Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities. *Geom. and Funct. Anal.*, 10:1028–1052, 2000.

[4] Luca Bortolussi and Jane Hillston. Fluid approximation of ctmc with deterministic delays. *Int. Conf. on Quantitative Evaluation of Systems*, pages 53–62, 2012.

[5] L. Breuer and D. Baum. An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods Springer, 2005

[6] Peter Buchholz and Miklós Telek. On minimal representation of rational arrival processes. *Annals of Operations Research*, 202(1):35–58, 2013.

[7] Fan Chung and Linyuan Lu. Concentration inequalities and martingale inequalities: A survey. *Internet Mathematics*, 3(1):79–127, 2006.

[8] C. Commault and S. Mocanu. Phase-type distributions and representations: some open problems for system theory. *Int. J. Control*, 76(6):566–580, 2003.

[9] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Wiley, 2005.

[10] T. Funaki. *Stochastic Interface Models. Lectures on Probability Theory and Statistics, Lecture Notes in Mathematics*, volume 1869, 103–274, 2005.

[11] R. Hayden, I. Horváth, and M. Telek. Mean field for performance models with generally distributed-timed transitions. In W. Sanders G. Norman, editor, *11th International Conference on Quantitative Evaluation of Systems, QEST*, volume 8657 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 90–105. Springer, 2014.

[12] R. A. Hayden. Mean field for performance models with deterministically-timed transitions. In *9th International Conference on Quantitative Evaluation of Systems, QEST*, pages 63–73, Sept 2012.

[13] I. Horváth and M. Telek. A constructive proof of the phase-type characterization theorem. *Stochastic Models*, to appear, 2015.

[14] I. Horváth, B. Tóth, and B. Vető. Diffusive limits for „true" (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in dimensions 3 and higher. *Probability Theory and Related Fields*, 153(3-4), 2012.

[15] I. Horváth, B. Tóth, and B. Vető. Relaxed sector condition. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (N.S.)*, 7:463–476, 2012.

[16] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes with applications to simple exclusion. *Communications in Mathematical Physics*, 106:1–19, 1986.

[17] T. Komorowski, C. Landim, and S. Olla. *Fluctuations in Markov Processes – Time Symmetry and Martingale Approximation*, volume 345 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer, 2012.

[18] T. Komorowski and S. Olla. On the sector condition and homogenization of diffusions with a gaussian drift. *Journal of Functional Analysis*, 197:179–211, 2003.

[19] G. Kozma and B. Tóth. Central limit theorem for random walks in divergence-free random drift field: H_{-1} suffices. preprint, 2014, `http://arxiv.org/abs/1411.4171`

[20] Thomas G. Kurtz. Strong approximation theorems for density dependent Markov chains. *Stochastic Processes and their Applications*, 6(3):223–240, 1978.

[21] T. L. Liggett. *Interacting Particle Systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.*

[22] R. S. Maier. The algebraic construction of phase-type distributions. *Commun. Stat., Stochastic Models*, 7(4):573–602, 1991.

[23] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, 2004.

[24] S. Mocanu and C. Commault. Sparse representations of phase-type distributions. *Commun. Stat., Stochastic Models*, 15(4):759–778, 1999.

[25] S. P. Obukhov and L. Peliti. Renormalisation of the „true" self-avoiding walk. *J. Phys. A*, 16:L147–L151, 1983.

[26] Colm Art O'Cinneide. Characterization of phase-type distributions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 6(1):1–57, 1990.

[27] S. Olla. Central limit theorems for tagged particles and for diffusions in random environment. In É. Pardoux F. Comets, editor, *Milieux aléatoires*, volume 12 of *Panoramas et Synthèses.* Societé Mathématique de France, Paris, 2002.

[28] L. Peliti and L. Pietronero. Random walks with memory. *Riv. Nuovo Cimento*, 10:1–33, 1987.

[29] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1, 2.*, volume 1, 2. Academic Press New York, 1975.

[30] S. Sethuraman, S. R. S. Varadhan, and H-T. Yau. Diffusive limit of a tagged particle in asymmetric simple exclusion processes. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 53:972–1006, 2000.

[31] P. Tarrès, B. Tóth and B. Valkó. Diffusivity bounds for 1d Brownian polymers. Ann. Probab., 40(2):695–713, 2012.

[32] B. Tóth. Persistent random walk in random environment. *Probability Theory and Related Fields*, 71:615–625, 1986.

[33] B. Tóth. The 'true' self-avoiding walk with bond repulsion on $\mathbb{Z}$: limit theorems. *Ann. Probab.*, 23:1523–1556, 1995.

[34] B. Tóth and B. Valkó. Superdiffusive bounds on self-repellent Brownian polymers and diffusion in the curl of the gaussian free field in d=2. *Journal of Stat. Phys.*, 147(1):113–131, 2012.

[35] B. Tóth and B. Vető. Continuous time true' self-avoiding random walk on $\mathbb{Z}$. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 8:59–75, 2011.

[36] B. Tóth and W. Werner. The true self-repelling motion. *Probab. Theory Rel. Fields*, 111:375–452, 1998.

[37] S. R. S. Varadhan. Self-diffusion of a tagged particle in equilibrium of asymmetric mean zero random walks with simple exclusion. *Annales de l'Institut Henri Poincaré – Probabilités et Statistiques*, 31:273–285, 1996.

[38] B. Vető. Asymptotic behaviour of random walks with long memory. PhD Thesis, 2011.

[39] Ward Whitt. Internet supplement to Stochastic-Process Limits, 2002.

[40] A. M. Yaglom. On the statistical treatment of Brownian motion (russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 56:691–694, 1947.

[41] A. M. Yaglom. On the statistical reversibility of Brownian motion (russian). *Mat. Sbornik*, 24:457–492, 1949.