



Kollektív letörési jelenségek
számítógépes vizsgálata

PhD téziszfüzet

Stippinger Marcell

Témavezető: Kertész János

BME

2017

Előzmények

A kollektív letörési jelenségek statisztikus fizikai eszközökkel történő elemzése egyre fontosabb szerepet tölt be a krízishelyzetek hirtelen kialakulásának megértésében. Ezek a jelenségek az élet számos területén előfordulnak, legismertebb példái a globális gazdasági-pénzügyi válság kialakulása, a nagy területeket érintő áramkimaradások, kritikus kommunikációs és közlekedési-szállítási infrastruktúrák váratlan megbénulása. Kiemelt feladat az ezeket a jelenségeket leíró modellek vizsgálata és fejlesztése.

Az ún. gazdaságfizika, a gazdasági-pénzügyi folyamatok statisztikus fizikai eszközökkel történő elemzése és modellezése már másfél-két évtizedes múltra tekint vissza. A gazdaságfizika eddig főként az egyes tőzsdéi folyamatok leírásával foglalkozott a bőségesen rendelkezésre álló kereskedési adatok miatt. Az elmúlt évtizedben azonban jelentősen megnövekedett az olyan származtatott strukturált termékek piaca, mint a hitelderivatívák, amiknek az értéke csődeseményektől, illetve cégek vagy országok hitelminősítésében történt változásoktól függ. Ezeket a termékeket a kockázat csökkentésére hozták létre, de egyúttal a spekulációknak is teret engednek. Ezen kívül a pénzügyi szektorban egyre több áttételes kapcsolatot hoznak létre, ami a rendszerszintű kockázat növekedéséhez vezet. A 2007–2008-as gazdasági világválság során bebizonyosodott, hogy a derivatívák növekvő mennyisége a tőzsdén előre nem látható instabilitásokhoz vezethet.

Hasonló rendszerszintű kockázat nem csak a pénzügyi világban jelenik meg, hanem a különböző infrastrukturális hálózatokban is. Ahogy a különböző rendszerek növekvő méretű összekapcsolásával globális infrastruktúrákat hozunk létre, a letörési jelenségek következményei is egyre számottevőbbek, és nem tudjuk kellő biztonsággal felmérni a kölcsönhatásokból eredő kockázatokat. Ezekre példa az egész országokra kiterjedő áramkimaradások (Olaszország 2003, Kanada 2003, India 2012), amiket valamilyen műszaki hiba vagy természeti katasztrófa váltott ki. Az olaszországi eset mégis különleges figyelmet kapott a tudományos életben, mert itt az elektromos hálózat meghibásodása az internetes kommunikáció leállítását eredményezte, ami további fontos infrastrukturális elemek, így elektromos erőművek lekapcsolásához vezetett, vagyis a különböző hálózatok összekapcsolódása fokozta a kockázatot.

A hálózattudomány azért jött létre, hogy leírja a nagyméretű, sok hasonló, kölcsönható elemből felépített, komplex rendszerek mögött rejlő topológiát és annak hatását a működésre. A különböző hálózatok összekapcsolásával létrejövő, hálózatok hálózataként jellemezhető rendszerek a kutatás frontvonalában vannak. A példákban is szerepelő hálózatok egy-

szerre ellátják egymást és függenek is egymástól, ezért egymástól kölcsönösen függő hálózatoknak (interdependent networks) nevezzük őket. Az ilyen, több hálózati réteg csatolásával létrejövő rendszerekben új jelenségek jönnek létre, amelyek egyetlen rétegből álló hálózatokon nem figyelhetők meg. Ismertté vált, hogy ezek a csatolt hálózatok sokkal érzékenyebbek a véletlen meghibásodásokra, mint az önmagukban állók. Ennek oka a hálózatok között lavinaszerűen terjedő meghibásodások miatt bekövetkező hirtelen átmenet a helyes működési tartományból egy másikba, ami már működésképtelenségnek felel meg. Külön érdekessége a rendszert leíró modellnek, hogy ez az átmenet egy hibrid fázisátalakulásnak adódik, amit egyszerre jellemez a rendparaméter ugrásszerű változása és kritikus skálázás. A csatolt hálózatok tanulmányozásánál, a rácsmodellek, a kritikus jelenségek és a perkolációelmélet jó kiindulási alapot jelentenek.

Célkitűzések

Disszertációm célja volt, hogy a komplex rendszerekben megfigyelhető letörési jelenségeket számítógépes szimuláció segítségével tanulmányozzam és a statisztikus fizika módszereivel jellemezzem, ezzel segítve a rendszerszintű kockázat minél pontosabb becslését, illetve csökkentését.

A modern pénzügy egyik elterjedt strukturált hitelderivatívája a Collateralized Debt Obligation (CDO), ami egy nagyjából száz elemű referencia portfólióra kötött, sávokra osztott biztosítás. A portfólióban egy meghatározott minimum szint (attachment point) feletti kárt téríti meg egy meghatározott maximumig (detachment point). A nemlineáris kifizetési függvény miatt az árazása többnyire csak számítógépes szimulációval oldható meg. Egyik célom egy olyan Monte Carlo átsúlyozásos algoritmus megvalósítása volt, amivel pontosabban és/vagy gyorsabban lehet ezeknek a szerződéseknél az értékét megállapítani, különös tekintettel a ritka, de nagy kockázatot hordozó eseményekre, amelyek miatt a hagyományos szimuláció nagyon számításgépes feladat.

A káresemények közelítő modellje az összetett Poisson folyamat, ami- ben az események időpontja Poisson folyamatból, nagysága pedig egy meghatározott független eloszlásból származik. Ez a modell analitikusan is megoldható, így ezzel terveztem az általános célú számítógépes módszer ellenőrzését.

Másik kutatási célom a csatolt infrastruktúrák leírására használható, de a pénzügyi rendszerekre is általánosítható, egymással kölcsönös függőségben levő hálózatokon kialakuló jelenségek vizsgálata. Az irodalomban

korábban sztatikus megközelítést alkalmaztak abban az értelemben, hogy a csatolt rétegek egyikén véletlenszerűen eltávolították a csomópontok véges hányadát és ennek hatását tanulmányozták. Ezt a modellt célszerűnek látszott dinamikaivá tenni, vagyis lépésenként eltávolítani a pontokat. Ezek után a cél a letörési jelenség, illetve az ahhoz tartozó hibrid fázisátalakulás részletes leírása volt. Mivel a kétdimenziós szabályos rács topológia jobban megfelel a valós infrastruktúráknak, mint a véletlen (Erdős-Rényi) hálózatok, ezért előbbiekre különös hangsúlyt fektettem. Feladatomban volt egyrészt a rendparaméterhez köthető kritikus paraméterek (letörési pont, exponensek) meghatározása, másrészt annak a tisztázása, hogy a lavinastatisztika mutat-e kritikus sajátosságokat, és ha igen, akkor azokat milyen mennyiségekkel célszerű leírni, és milyen kapcsolatban vannak a rendparaméterhez köthető, hagyományosabb jellemzőkkel. Fontos kérdés, hogy a statisztikus fizikában megismert skálaösszefüggések érvényben maradnak-e a hibrid a fázisátalakulás során, és hogy vannak-e az ilyen átalakulásra jellemző, sajátos skálaösszefüggések.

A korábban bevezetett modellekben a meghibásodások rövid időskálán zajlottak, a hálózatok csak passzívan elszenvették azokat. Azonban bizonyos körülmények között, például egyes pénzügyi-gazdasági hálózatokban a szereplőknek lehet ideje reagálni a meghibásodásokra, és új kapcsolatokat létesíthetnek. Célom volt egy olyan dinamikus modell kidolgozása és vizsgálata, amelyben egy véletlen paraméter által jellemzett gyógyulási mechanizmus a hálózat hirtelen összeomlását megnehezíti, illetve lassítja. Ahhoz, hogy az ilyen módon általánosított modell viselkedését a kritikus tartományban megfelelő részletességgel el lehessen végezni, célul tűztem ki a közelmúltban bevezetett, igen hatékony algoritmus továbbfejlesztését. Az új modellel kapcsolatban fontos kérdések vártak tisztázásra. Meg kellett vizsgálnom, hogy a gyógyulás valószínűsége hogyan befolyásolja a hálózat túlélését, mi az a minimális gyógyulás, amivel a hálózat hirtelen összeomlása elkerülhető, a gyógyulási paraméter függvényében hogyan alakul a hibrid fázisátalakulás, változnak-e a skálaexponensek, illetve a lavinák jellemzői.

Célkitűzéseim alapvető kutatási jellegűek voltak, de az általam vizsgált jelenségek és modellek szorosan kapcsolódnak nagy technológiai-gazdasági fontosságú kérdésekhez. A pontosabb CDO árazás a pénzügyi stabilitást szolgálhatja, a lavinaszerű letörés, a hozzá kapcsolódó hibrid fázisátalakulás és a gyógyulási lehetőségek megértése az infrastrukturális katasztrófák elkerüléséhez járulhat hozzá.

Új tudományos eredmények

A disszertációban ismertetett kutatásom és a vonatkozó új tudományos eredmények az alábbi tézispontokban összegezhetőek:

1. Átsúlyozásos Monte Carlo módszert implementáltam a Collateralized Debt Obligation (CDO) elnevezésű hitelderivatíva szerződések árazására. Ezt a programot használtam összetett Poisson folyamattal jellemzett CDO szerződések árazására, valóság-hű ugrási méret- és időközeloszlást választva. Numerikusan megmutattam, hogy az ugrási méret- és időközeloszlás paramétereit megfelelően megváltoztatva az átsúlyozással csökkenthető az árazáshoz használt paraméterek mért szórása. Megmutattam, hogy ez a szórás-csökkenés jól egyezik az analitikus előrejelzésekkel, és a várható értékek megfelelnek az átsúlyozás nélkül mért eredeti értékeknek. Az átsúlyozást használva bizonyos termékeknel a szükséges számítási kapacitás akár tizenkettő részére csökkenthető. [I]
2. Tanulmányoztam a lavinaszerű meghibásodások modelljében (cascading failure model, CF) létrejövő hibrid fázisátalakulást (HPT) két csatolt hálózatból álló rendszeren. Megmutattam, hogy két exponenscsoport jellemzi a fázisátalakulást: az egyik a rendparaméter, azaz a legnagyobb kölcsönösen összefüggő komponens (MCC) relatív súlyának viselkedését írja le, míg a másik a lavinák statisztikáját. Bevezettem a $(\beta_m, \gamma_m, \bar{\nu}_m)$ skálaexponenseket a MCC méretére és fluktuációjára, valamint a $(\tau_a, \sigma_a, \gamma_a, \bar{\nu}_a)$ exponenseket a lavinák méretére. Numerikusan vizsgáltam a hibrid fázisátalakulást két egymással teljes kölcsönös függőségben álló kétdimenziós négyzet-rács topológiájú csatolt hálózaton, és számítógépes szimulációval megmértem az exponensek értékét. [II]
3. Két összefüggést vezettem le a β_m skála skálaexponensre, ami a MCC $m(p)$ méretét $m(p) - m_0 \propto (p - p_c)^{\beta_m}$ módon írja le közel a p_c kritikus ponthoz, ahol $1 - p$ a rendszerből kívülről eltávolított pontok aránya. Először megmutattam, hogy $\beta_m = 1/2$ általánosan, ha a függőségi élek hossza nem korlátozott. Ezután megmutattam, hogy $1 - \beta_m = \gamma_a$, ahol γ_a a véges lavinák átlagos méretét írja le $\langle s \rangle \propto (p - p_c)^{-\gamma_a}$ alakban. Ilyen módon általánosan érvényes kapcsolatot teremtettem a két exponenscsoport között. [II]

4. A CF modellbe bevezettem a gyógyulást, ami véletlenszerű gyógyulási élek által lehetővé teszi a meghibásodott pontok áthidalását, így a hálózat dinamikus helyreállítását. Általánosítottam egy hatékony algoritmust ennek a modellváltozatnak a szimulációjára. Számítógépes szimulációval megmutattam, hogy a gyógyulási valószínűség növelése javítja a hálózat hibatűrő képességét, és hogy létezik egy kritikus gyógyulási valószínűség, ami fölött a makroszkopikus lavinák megszűnnek, és a letörés helyett a hálózat egyre összekötöttebbé válik, miközben folyamatosan zsugorodik. Megmutattam, hogy ez a kritikus gyógyulási valószínűség két különböző viselkedésű univerzalitási osztályt választ el. A kritikus gyógyulás alatt a skálázás hasonlít az eredeti, gyógyulás nélküli esetre, míg fölötté a skálaexponensek triviális értékeket vesznek fel, és a fluktuációk a centrális határeloszlás tételét követik. [III, IV]
5. Tanulmányoztam a CF modellt az alacsony w gyógyulási valószínűségek esetén. Megmutattam, hogy a $w \rightarrow 0$ határesetben a MCC $m(p, w)$ méretét egy mestergörbe írja le az $1 - m(p, w) = a(w)[1 - m(1 - (1 - p)/a(w), 0)]$ összefüggés szerint, ahol $a(w) = (1 - p_c(0) - \Delta p_c(w))/(1 - p_c(0))$ és a gyógyulás nélküli kritikus ponttól való Δp_c távolság $\Delta p_c(w) \propto w^\gamma$ hatványfüggvény viselkedést mutat, ahol γ értéke egyhez közeli. [III]

A tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények

- [I] M. Stippinger, É. Rácz, B. Vető, and Zs. Bihary. *Analytic results and weighted Monte Carlo simulations for CDO pricing*. European Physical Journal B **85** (2) (2012), p. 51. arXiv: 1105.5416.
- [II] D. Lee, S. Choi, M. Stippinger, J. Kertész, and B. Kahng. *Hybrid phase transition into an absorbing state: Percolation and avalanches*. Physical Review E **93** (2016), p. 042109. arXiv: 1512.08335.
- [III] M. Stippinger and J. Kertész. *Enhancing resilience of interdependent networks by healing*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **416** (2014), pp. 481–487. arXiv: 1312.1993.
- [IV] M. Stippinger and J. Kertész. *Universality and scaling laws in the interdependent network model with healing*. (Submitted for review) (2017). arXiv: 1705.09829.