MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Matroidok összegének grafikussága

PhD értekezés tézisei

Csehi Csongor György

Témavezető: Recski András

2017

Tartalomjegyzék

Összefoglaló

Létezik egy sejtés, mely szerint ha grafikus matroidok összege (matroid uniónak is hívják) nem grafikus, akkor nem is bináris [23]. Csak néhány speciális esetre volt mindezidáig belátva, például amikor egy matroidnak az önmagával vett összegéről beszélünk.
Elsőként új eredményeinket ismertetünk ebben a témakörben. Ezek az eredmények szükséges feltételeket és elégséges feltételeket fogalmaznak meg az összeg grafikusságára és csak speciális esetekre hagyják megválaszolatlanul a sejtés felvetését. Néhány új matroidosztályt is definiálunk. Bemutatjuk az eredményeink következményeit a villamos hálózatok elméletében és a kutatásaink egy melléktermékét a matroidösszeg bázisainak particionálhatóságáról.

1. Bevezetés

1.1. Definíciók

Többnyire az Oxley által használt jelöléseket és definíciókat használjuk [19].

Egy $M(E, I)$ *matroid* egy olyan (E, I) pár, ahol E az *alaphalmaz* és I az E részhalmazainak olyan halmaza amire teljesülnek a következők:

1. $\emptyset \in I$
2. Minden $X \subseteq E$ és $Y \subseteq X$ esetén, ha $X \in I$, akkor $Y \in I$
3. Minden $X \in I$ és $Y \in I$ esetén, ha $|X| > |Y|$, akkor létezik olyan $x \in X - Y$, hogy $Y \cup \{x\} \in I$

Az I-ben lévő halmazokat *függetlene*knek nevezzük M-ben. A maximális független halmazok a *bázis*ok. A minimális összefüggő halmazok a *kör*ök. Az olyan minimális halmazok, amiknek minden bázissal van metszetük a *vágás*ok. Az egy elemű kör a *hurok*, az egy elemű vágás pedig a *híd*. Ha néhány nemhíd elem pontosan ugyan azokban a körökben van benne, akkor *soros*nak nevezzük őket. Két elem *párhuzamos*, ha kört alkotnak. Legyen $L(M)$ a hurkok halmaza M-ben, és $NL(M)$ a nem hurkok halmaza M-ben.

Egy X halmaz *rang*ja a legnagyobb független részhalmazának mérete ($r(X)$-el jelöljük). $\sigma(X)$ jelöli egy X halmaz *lezártját* M-ben, ami $\sigma(X) = \{e | r(X \cup \{e\}) = r(X)\}$. Egy $X \subseteq E$ halmaz *zárt*, ha $\sigma(X) = X$.

Az $U_{k,n}$ *uniform* matroid egy olyan matroid, aminek n eleme van, és egy halmaz pontosan akkor független, ha legfeljebb k eleme van. Az $U_{n,n}$ matroid a *szabad matroid*.

Egy mátrix oszlopainak halmaza *vektor matroid*-ot alkot, ahol a lineárisan független vektorhalmazok lesznek a független halmazok. Azt mondjuk, hogy egy matroid *reprezentálható* egy F test felett, ha létezik olyan F feletti mátrix aminek a vektor matroidjaként előáll. Egy matroid *lineáris*, ha létezik olyan F test ami felett reprezentálható. Egy matroid *bináris*, ha $GF(2)$ felett repezentálható. Egy matroid *reguláris*, ha minden test felett reprezentálható.

Egy M matroid M^* *duálisa* egy olyan matroid, amiben a bázisok pontosan az M-beli bázisok komplementerei.

Egy matroid *grafikus*, ha létezik olyan gráf, aminek az élhalmaza a matroid alaphalmaza, és egy halmaz pontosan akkor független, ha körmentes a grában. Egy matroid *kografikus*, ha a duálisa grafikus.

Egy $X \subset E$ halmaz *törlés*e M-ből egy olyan $M \setminus X$ matroidhoz vezet, aminek az alaphalmaza $E - X$, és egy halmaz pontosan akkor független, ha független volt az eredeti matroidban. Egy $X \subset E$ halmaz *összehúzása* M-ben egy olyan M/X matroidhoz vezet, aminek az alaphalmaza $E - X$, és egy Y halmaz rangja $r_M(Y \bigcup X) - r_M(X)$ lesz. Egy M' matroid *részmatroid*ja az M-nek, ha elérhető belőle egy részhalmaz törlésével. Egy M' matroid az M egy *minor*ja, ha elérhető M-ből egy halmaz törlésével és egy halmaz összehúzásával.

Az $M_1(E_1, I_1)$ és $M_2(E_2, I_2)$ matroidok *direktösszeg*e egy olyan $M_1 \oplus M_2$ matroid, aminek az alaphalmaza az E_1 és E_2 diszjunkt uniója, a függetlenjei pedig diszjunkt uniói egy I_1 és egy I_2 beli halmaznak.

Két $M_1(E, I_1)$ és $M_2(E, I_2)$ matroid *összege* egy olyan $M_1 \vee M_2$ matroid, aminek alaphalmaza E, a függetlenjei pedig uniói egy I_1 és egy I_2 beli halmaznak.

Egy matroid *összefüggő*, ha nem áll elő két kisebb matroid direktösszegeként. A *komponens*ek a maximális összefüggő részmatroidok. A *j-szeparáció*ja egy matroidnak egy olyan $\{E_1, E_2\}$ partíciója E-nek, hogy $r(E_1)+r(E_2) \leq r(E)+j-1$ és $r(E_1), r(E_2) \geq j$. Egy M matroid *k-összefüggő*, ha nincs j-szeparációja semmilyen j-re, ahol $1 \leq j < k$. Egy C^* vágás *nem szeparáló*, ha $M \setminus C^*$ összefüggő.

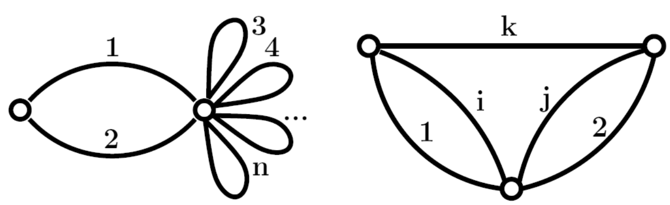
1.2. Előzmények

A grafikus matroidok alkotják az egyik legjelentősebb matroidosztályt. Amikor Whitney megalapozta a matroidok elméletét, a gráfokkal való kapcsolatok játszottak jelentős szerepet. Az alapvető matroidokon értelmezett műveletek nagy része egyértelmű kiterjesztése a megfelelő gráfokon értelmezett műveleteknek, például az él elhagyás, él összehúzás és a direkt összeg. A legtöbb matroid-osztály, például a bináris, reguláris vagy a grafikus matroidok osztálya, zárt ezekre a műveletekre nézve. A matroidösszeggel nem ez a helyzet, két grafikus matroid összege nem feltétlenül grafikus.

A [17] és [7] cikkek alapvető eredményei karakterizálják azokat a matroidokat, amelyek összege a szabad matroid (azaz egy fa körmatroidja). Az első cikk, ami azt vizsgálta, hogy mikor lesz a matroidok összege grafikus (azaz tetszőleges gráf körmatroidja) valószínűleg Lovász és Recski eredménye [14], ők vizsgálták azt az esetet, amikor egy matroid néhány példányát összegezzük.

Egy másik lehetséges megközelítés, hogy rögzítsünk le egy G_0 gráfot, és jellemezzük azokat a G gráfokat, amelyekkel a körmatroidok összege, vagyis $M(G_0) \vee M(G)$ grafikus. (Vegyük észre, hogy az eset, amikor G_0 minden éle hurok könnyen látható. Emellett nem kell foglalkoznunk olyan esetekkel sem, amikor G_0 tartalmaz hidat.) Villamos hálózatok analízise során felmerülő kérdések megválaszolásának melléktermékeként merült fel az az eset amikor G_0 két párhuzamos élből és sok hurokból áll, lásd a bal oldali gráfot az 1. ábrán. (Az előző észrevétel értelmében ez az eset a legegyszerűbb nem triviális választás G_0-ra.)

1. TÉTEL: [22] Legyen A és B az 1. ábrán szereplő két gráf körmatroidja rendre az $E_A = \{1, 2, ..., n\}$ és az $E_B = \{1, 2, i, j, k\}$ alaphalmazokon. Legyen M tetszőleges grafikus matroid az E_A alaphalmazon.
Ekkor az $A \vee M$ összeg pontosan akkor grafikus, ha B nem minorja M-nek semmilyen i, j, k hármas megválasztása esetén.



1. ábra. A és B egy-egy gráfreprezentációja

Recski [23] fogalmazta meg a következő sejtést immáron több mint harminc éve.

2. SEJTÉS: Ha két grafikus matroid összege nem grafikus, akkor nem is bináris.

A sejtés igaznak bizonyult abban az esetben, ha a két matroid megegyezik, vagy ha az egyik izomorf az 1. tételben szereplő A-val – ezek az állítások egyértelműen következnek [14]-ből, illetve [22]-ből. Ebben a fejezeben kiterjesztjük az 1. tétel eredményét.

1.3. Kapcsolódó eredmények

A bináris és a grafikus matroidok karakterizálására elsőként Tutte [27], [28] adott ekvivalens feltételeket:

3. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor bináris, ha nem tartalmaz $U_{2,4}$ minort.

4. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor grafikus, ha nem tartalmaz $U_{2,4}$, F_7, F_7^*, $M^*(K_5)$ és $M^*(K_{3,3})$ minort sem.

Ezek után a 2. sejtést átfogalmazhatjuk a következő képpen: Két grafikus matroid összege grafikus vagy van benne $U_{2,4}$ minor. Vegyük észre, hogy ezekből a tételekből az is következik, hogy egy grafikus (/bináris) matroid minden minorja is grafikus (/bináris).

Azokra a nem grafikus esetekre, amik törlésre nézve minimálisak, Wagner [31] adott ekvivalens karakterizációt.

5. TÉTEL: Legyen M egy nem grafikus bináris matroid. Ha minden $e \in E$-re az $M \setminus e$ matroid grafikus, akkor M soros bővítése az F_7, az F_7^*, az R_{10}, az $M^*(K_5)$ vagy az $M^*(K_{3,3}^i)$ matroidnak valamely $0 \geq i \geq 3$-re.

A Fournier hármasok [9] sok algoritmusnak szolgálnak alapul a témakörben.

6. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor grafikus, ha bármely három különböző vágásra, amiknek van közös metszete igaz, hogy valamelyik szeparálja a másik kettőt.

Érdemes itt megemlíteni a bináris matroidok néhány fontos tulajdonságát [32], [20] [30].

7. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor bináris, ha bármelyik körnek és vágásnak a metszete páros elemszámú (ilyen metszet semelyik matroidban sem lehet 1 elemű).

8. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor bináris, ha bármely két kör szimmetrikus differenciája köröknek diszjunkt uniója.

9. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor bináris, ha bármely két kör szimmetrikus differenciája tartalmaz kört.

Gráf-realizációs problémának hívjuk annak eldöntését, hogy egy adott bináris matroid grafikus-e. Tutte adott rá elsőként polinomiális algoritmust [29]. Később továbbfejlesztette az algoritmusát [30] a következő eredmény felhasználásával:

10. TÉTEL: Bármely összefüggő M bináris matroid, amire $r(M) > 2$, tartalmaz F_7 minort vagy szeparáló vágást.

Ezekhez az algoritmusokhoz fontos, hogy hatékonyan tudjunk szeparáló vágást keresni, ezért érdemes megemlíteni, hogy Cunningham [6] adott erre megfelelő algoritmust.

Később sok másik gyorsabb és egyszerűbb algoritmus született még a gráf-realizációs problémára (PQ gráfok segítségével [10] megkonstruálja a gráfot a fundamentális körrendszerből; [15] Fournier hármasokat és elkerülési gráfot használ). Számunkra ezek kevésbé használhatóak, hiszen, még ha fel is tesszük, hogy az összeg bináris, nem ismerjük annak mátrixát, vágásait vagy fundamentális körrendszerét.

Seymour a gráf-realizációs probléma általános változatára (ahol nem tesszük fel, hogy a matroid grafikus) adott polinomiális algoritmust [25] (a csúcsok csillagai játszanak központi szerepet). A következő tétel az algoritmusának egyik legfontosabb eleme:

11. TÉTEL: Pontosan akkor igaz, hogy $M = M(G)$, ha $r(M) \leq r(M(G))$ és G-ben minden csúcs csillaga M-beli vágások uniója.

Truemper [26] a következő tétel segítségével tudta továbbfejleszteni Seymour algoritmusát:

12. TÉTEL: $M = M(G)$, ha a következők teljesülnek:

- M és $M(G)$ összefüggőek
- Létezik egy B közös bázisa M-nek és $M(G)$-nek, amire a fundamentális körrendszer körei megegyeznek M-ben és $M(G)$-ben
- Minden G-beli csúcs csillaga tartalmaz vágást M-ben

2. Redukciós lépések

Ebben a fejezetben olyan redukciós lépéseket mutatunk be, amelyek arra adnak lehetőséget, hogy egyszerűsítsük az összeadandó matroidokat (a 13, 14, 15, 16 Lemmák a [2]-ben lettek publikálva; a 17, 18 és 19 lemmák pedig a [3]-ban lettek publikálva). Ezek mind azonos E alaphalmazon értelmezett tetszőleges grafikus matroidok (M_1 és M_2) összegére vonatkoznak.

Ismert, hogy ha egy matroid grafikus, akkor az összes részmatroidja és minorja is grafikus. Így ha egy matroidnak van egy nem grafikus minorja, akkor a matroid sem lehet grafikus.

13. LEMMA: Legyen X az M_1 és Y az M_2 hídjainak halmaza. Az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, ha $(M_1 \setminus (X \cup Y)) \vee (M_2 \setminus (X \cup Y))$ grafikus.

14. LEMMA: Ha X egy összefüggő komponensnek az alaphalmaza M_1-ben és X része $L(M_2)$-nek, akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, amikor az $(M_1 \setminus X) \vee (M_2 \setminus X)$ összeg grafikus.

15. LEMMA: Tegyük fel, hogy M_1 a $G(V, E)$ gráf körmatroidja, amiben $X \subset L(M_2)$ egy összefüggő részgráfot határoz meg, és $E - X$-nek pontosan két közös pontja van X részgráfjával (legyenek ezek a és b). Legyen M_1' a $G' := G(V, (E - X) \cup \{(a, b)\})$ gráf körmatroidja, és $M_2' := (M_2 \setminus X) \cup hurok(a, b)$ (itt $hurok(a, b)$ egy hurkot jelöl, ami a G'-nek az (a, b) éléhez tartozik). Ekkor az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, amikor az $M_1' \vee M_2'$ összeg grafikus.

16. LEMMA: Tegyük fel, hogy M_1 a $G(V, E)$ gráf körmatroidja és E_0 egy kétszeresen pontösszefüggő komponens élhalmaza G-ben, amelynek egyetlen éle van $NL(M_2)$-ben. Ekkor az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, ha $((M_1 \setminus E_0) \cup hurok(x)) \vee (M_2 \setminus (E_0 - \{x\}))$ grafikus.

17. LEMMA: Ha M_1-nek x és y két párhuzamos éle soros M_2-ben, akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, ha az $(M_1 \setminus x) \vee (M_2/x)$ összeg grafikus.

18. LEMMA: Ha M_1-nek x és y két soros éle soros M_2-ben is, akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, ha az $(M_1 \setminus \{x, y\}) \vee (M_2 \setminus \{x, y\})$ összeg grafikus.

Vegyük észre, hogy az az eset amikor M_1-nek két soros éle hurok M_2-ben, már redukálható a 15. lemma szerint.

19. LEMMA: Tegyük fel, hogy x és y soros élek $M(G_1)$-ben és nincs közös körük $M(G_2)$-ben. Tegyük fel, hogy x nem hurok G_2-ben. Jelölje a és b az x két végpontját, c és d pedig y két végpontját G_2-ben. Legyen $G_1' = G_1/x$ és nevezzük át y-t z-re. Legyen G_2' az a gráf amit G_2-ből x-et és y-t elhagyva, a b és c pontokat egybe húzva és egy új z élet adva a és d közé, kapott gráf. Ekkor az $M(G_1) \vee M(G_2)$ összeg pontosan akkor grafikus, ha az $M(G_1') \vee M(G_2')$ összeg grafikus.

Ezek a redukciós lépések együtt a következőt adják:

20. TÉTEL: Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 grafikus matroidok, amikre a 13, 14, 15, 16, 17, 18 és 19 lemmákat alkalmazva ameddig lehetséges az M_1', M_2' párt kapjuk. Ekkor $M_1 \vee M_2$ pontosan akkor grafikus, ha $M_1' \vee M_2'$ grafikus.

Az alább következő utolsó két redukciós lemma különbözik a korábbiaktól, mert nem minden esetben vezetnek alaphalmaz csökkenéshez, hanem egy az összegre vonatkozó feltétel teljesülése esetén állítják, hogy az összeg nem grafikus, és csak ellenkező esetben adnak ekvivalens redukciót. Ez azt jelenti, hogy ez a két lemma nem annyira jól használható ekvivalens feltétel keresésére a grafikus matroidok összegének grafikusságára, ellenben sokat segíthet a 2. sejtésre lehetséges legkisebb ellenpéldák tulajdonságainak megfigyelésében.

21. LEMMA: Legyen x és y két párhuzamos éle M_1-nek és M_2-nek is. Ha x és y hidak vagy párhuzamosak az összegben, akkor létezik olyan $k \in \{1, 2\}$ index, hogy az $M_1 \vee M_2$ összeg pontosan akkor grafikus, ha az $(M_k/x) \vee (M_{3-k} \setminus x)$ összeg grafikus. Ha x és y nem hidak és nem is sorosak az összegben, akkor az összeg nem bináris (így nem is grafikus).

22. LEMMA: Legyen x és y két párhuzamos éle M_1-nek és tegyük fel, hogy x hurok, de y nem hurok M_2-ben. Ha x és y hidak vagy párhuzamosak az összegben, akkor az eredeti összeg pontosan akkor grafikus, ha az $(M_1/x) \vee (M_2 \setminus x)$ összeg grafikus. Ha x és y nem hidak és nem is sorosak az összegben, akkor az összeg nem bináris (így nem is grafikus).

3. Két speciális eset

Ebben a fejezetben ekvivalens feltételt adunk a redukciók segítségével az összeg grafikusságára, két speciális esetben. Mindkét esetben G_0 szerkezetét feltételezzük adottnak, a hurkokon kívül vagy csak egy kört vagy csak párhuzamos éleket tartalmazhat. A másik matroid tetszőleges grafikus matroid lehet (ezek az eredmények [2]-ben lettek publikálva).

23. TÉTEL: Legyen az $M_1' = M(G_0')$ és $M_2' = M(G')$ a 13, 14 és 15 lemmák redukciós lépései után kapott matroidok. Ha G_0' csak hurkokat és egy n hosszú kört tartalmaz ($n \geq 2$), akkor $M_1' \vee M_2'$ összeg pontosan akkor grafikus, ha $NL(M_1')$ tartalmaz vágást G'-ben, vagy $M_2' \setminus NL(M_1')$ a szabad matroid.

24. TÉTEL: Legyen az $M_1' = M(G_0')$ és $M_2' = M(G')$ a 13, 14 és 15 lemmák redukciós lépései után kapott matroidok. Ha G_0' csak hurkokat és n párhuzamos élet tartalmaz ($n \geq 2$), akkor $M_1' \vee M_2'$ összeg pontosan akkor grafikus, ha G'-nek nincs olyan 2-összefüggő komponense, amiből választható olyan a és b nem soros élpár $NL(M_1')$-ből, hogy $M_2' \setminus \{a, b\}$ nem a szabad matroid.

Ezen tételek bizonyításai közben az is kiderült, hogy ilyen esetből nem származhat ellenpélda a sejtésre.

Erre a két tételre villamosságtani alkalmazást is mutatunk a 8. fejezetben.

4. Elégséges feltételek

Bizonyítottuk, hogy a 23. és 24. tételek közös általánosítása elégséges feltételt ad általános grafikus matroidok összegének grafikusságára (ez a [3]-ban lett publikálva).

25. TÉTEL: Legyen M_1, M_2 két matroid az azonos E alaphalmazon értelmezve. Ekkor ha minden M_1-beli C körre igaz, hogy $r_2(E - C) < r_2(E)$ vagy $r_2(E - C) = |E - C|$ akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg grafikus.

Megmutattuk, hogy ez a feltétel elégséges marad akkor is, ha csak a legalább 2 hosszú körökre kötjük ki, azonban itt már fel kell tennünk, hogy M_2 grafikus (ez a [3]-ban lett publikálva).

26. TÉTEL: Tegyük fel, hogy M_2 grafikus. Ekkor ha minden M_1-beli legalább kettő elemű C körre igaz, hogy $r_2(E - C) < r_2(E)$ vagy $r_2(E - C) = |E - C|$ akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg grafikus.

5. Szükséges feltétel

Ebben az alfejezetben bemutatunk egy szükséges feltételt két grafikus matroid összegének binárisságára (ez a [3]-ban lett publikálva).

27. TÉTEL: Legyenek M_1 és M_2 grafikus matroidok. Ha az alábbi feltételek mind teljesülnek, akkor az $M_1 \vee M_2$ összeg nem bináris.

1. $i = 1$ és 2-re léteznek $\exists X_i$ összefüggő halmazok M_i-ben, melyekre
2. $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
3. Létezik olyan C_i köre M_i-nek, ami X_i-ben van és $|C_i| \geq 2$
4. $r_i(X_i) = r_i(X_1 \cup X_2)$
5. Létezik különböző $a, b \in C_1 \cup C_2$ elem, hogy $i \in \{1, 2\}$-re az alábbi két állítás közül valamelyik teljesül rájuk:
   - $a \in C_i$, $b \in C_{3-i}$ és a és b azonos komponensben vannak mindkét matroidban
   - $a, b \in C_i$ és létezik $X'_{3-i} \subset X_{3-i}$, hogy X'_{3-i}-t összehúzva M_{3-i}-ben a és b két különböző pontpárt összekötő átlója lesz C_{3-i}-nek

6. További elégséges feltételek

Hogy csökkentsük az esetek számát az elégséges és a szükséges feltételek között, az elégséges feltételt tovább gyengítettük, és hasonló formára hoztuk a szükséges feltétellel (nem publikált).

28. TÉTEL: Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 azonos alaphalmazon értelmezett matroidok, és legalább az egyikük grafikus. Ha nincs olyan C_i páros, hogy C_i kör M_i-ben, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ és C_i nem tartalmaz vágást M_{3-i}-ben, akkor $M_1 \vee M_2$ grafikus.

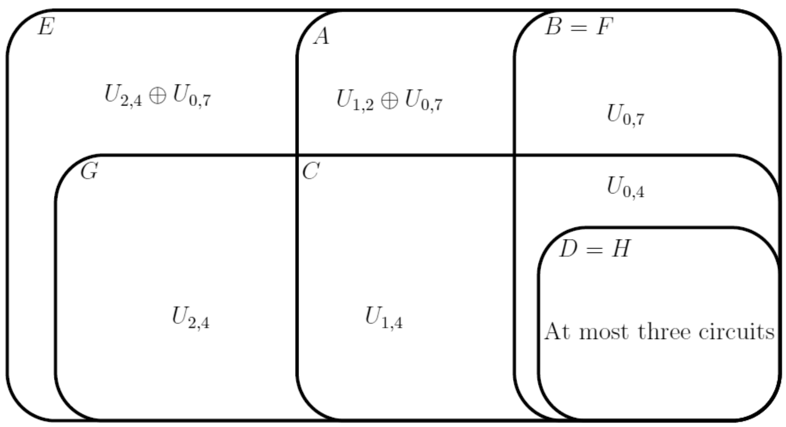
Tovább gyengítettük a feltételt, és sikerült még így is elégséges feltételt kapni (nem publikált).

29. TÉTEL: Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 azonos alaphalmazon értelmezett grafikus matroidok és az összeg összefüggő matroid. Ha nincsenek olyan X_1 és X_2 halmazok, hogy X_i összefüggő M_i-ben $i \in \{1, 2\}$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ és $r_i(X_i) = r_i(X_i \cup X_{3-i})$ ha $i \in \{1, 2\}$, akkor $M_1 \vee M_2$ grafikus.

7. Néhány a témához kapcsolódó matroidosztály

Hogy jobban megvizsgálhassuk a 2. sejtés mögött rejlő elméletet, definiáltunk nyolc matroidosztályt a következőek szerint. A táblázat első oszlopa a halmazok neve. Az összegeket természetesen azonos alaphalmazon értjük.

A	Azon grafikus matroidok	melyek bármely grafikus matroiddal vett összege	grafikus vagy nem bináris.
B	Azon grafikus matroidok	melyek bármely grafikus matroiddal vett összege	grafikus.
C	Azon grafikus matroidok	melyek bármely matroiddal vett összege	grafikus vagy nem bináris.
D	Azon grafikus matroidok	melyek bármely matroiddal vett összege	grafikus.
E	Azon matroidok	melyek bármely grafikus matroiddal vett összege	grafikus vagy nem bináris.
F	Azon matroidok	melyek bármely grafikus matroiddal vett összege	grafikus.
G	Azon matroidok	melyek bármely matroiddal vett összege	grafikus vagy nem bináris.
H	Azon matroidok	melyek bármely matroiddal vett összege	grafikus.



2. ábra. A definiált matroidosztályok, és példák

Vegyük észre, hogy a 2. sejtés szerint A megegyezik a grafikus matroidok osztályával.

A legtöbb tartalmazási reláció kézenfekvő ($D \subseteq C \subseteq A$, $D \subseteq B \subseteq A$, $H \subseteq G \subseteq E$, $H \subseteq F \subseteq E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$, $C \subseteq G$, $D \subseteq H$) ami leolvasható a 2. ábráról. Az, hogy $D = H$ abból látható, hogy bármely matroidot összeadva $U_{0,n}$-nel önmagát kapjuk, így M-nek grafikusnak kell lennie, hogy az összeg is az legyen. Mivel $U_{0,n}$ grafikus, így $F = B$ is teljesül. $(A \cap G) - C$ üres kell legyen, mert ha egy matroid G-beli, de nem C-beli, akkor nem grafikus.

A D halmazra ekvivalens karakterizációt adtunk (a [3]-ban lett publikálva).

30. TÉTEL: Egy matroid pontosan akkor van D-ben, ha legfeljebb három kört tartalmaz.

A 2. ábrán látható tartalmazások valódiak, ezt szemléltetik a példa matroidok. Egyetlen példa elhelyezkedésének bizonyítása nem kézenfekvő, erről szól a következő tétel (a [3]-ban lett publikálva):

31. TÉTEL: Az $E - (G \cup A)$ halmaz nem üres, a $K = U_{2,4} \oplus U_{0,7}$ matroid ide tartozik.

8. Egy villamosságtani alkalmazás

Ebben a fejezetben az előzőekben látott eredmények egy következményét tárgyaljuk a villamos hálózatok elméletében.
Tekintsünk egy kétpólusú alkatrészekből álló hálózatot. Az alkatrészek összekapcsolását egy G gráffal írhatjuk le. Bizonyos alkatrészek feszültségeit vagy áramait akkor írhatjuk elő egymástól függetlenül, ha a nekik megfelelő élek G-ben egy kör-, illetve vágásmentes részgráfot alkotnak. Kirchhoffnak [13] ez a klasszikus eredménye többkapu-alkatrészeket tartalmazó hálózatokra is általánosítható, azonban akkor egy M matroid köreit, illetve vágásait kell alkalmaznunk. Ez a matroid azonban már nem lesz feltétlenül grafikus.

A 23. és 24. tétel eredményeit felhasználva jellemezni tudjuk hálózatok egy olyan osztályát, ahol ez a leíró matroid grafikus lesz (ezek az [5]-ben lettek publikálva).

32. TÉTEL: Tegyük fel, hogy a hálózat kétpólusú eszközökből áll és egy R_0 ellenállás árama az $I_1, I_2, ..., I_k$ áramforrásokat vezérli az $i_j = c_j \cdot i_0$ egyenletek szerint ($j = 1, 2, ..., k$-ra) és ahol a $c_1, c_2..., c_k$ vezérlő konstansok általános paraméterek, azaz algebrailag függetlenek a racionális számok teste fölött. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az S élhalmaz vágásmentes. Ekkor az áramerősségeket leíró függetlenségi struktúra pontosan akkor grafikus matroid, ha nincs visszacsatolás a hálózatban.

33. TÉTEL: Tegyük fel, hogy a hálózat kétpólusú eszközökből áll és egy I_0 áramforrást az $R_1, R_2, ..., R_k$ ellenállások árama vezérel az $i_0 = \Sigma(c_j \cdot i_j)$ egyenlet szerint, ahol az összegzés $j = 1, 2, ..., k$ értékekre történik. Ahogyan a 32. tételben, itt is feltesszük, hogy a $c_1, c_2..., c_k$ vezérlő konstansok általános paraméterek, azaz algebrailag függetlenek a racionális számok teste fölött. Ekkor az áramerősségeket leíró függetlenségi struktúra pontosan akkor grafikus matroid, ha nincs visszacsatolás a hálózatban.

9. Matroid összeg bázisainak particionálása

Vizsgálataink során eredményeket nyertünk a matroid összegek bázisaira vonatkozóan (ezek a [4]-ben kerültek publikálásra).

34. TÉTEL: Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_n$ matroidok és M az összegük. Legyen M-nek B egy bázisa, és $B_1, B_2, \ldots, B_n$ egy jó partíció. Az M bármely B' bázisára létezik olyan $\cup_{i=1}^n B_i'$ jó partíció, hogy $\sigma_i(B_i) = \sigma_i(B_i')$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re.

35. ÁLLÍTÁS: Legyen B egy tetszőleges bázis $M = \vee_{i=1}^n M_i$-ben, $\cup_{i=1}^n B_i$ pedig legyen egy tetszőleges jó partíció. M_i'-t készítsük M_i-ből úgy, hogy az $E - \sigma_i(B_i)$ elemeit hurkokra cseréljük. Ekkor $M = \vee_{i=1}^n M_i'$.

Hivatkozások

[1] CS. GY. CSEHI, Matroidelméleti vizsgálatok és alkalmazásaik, *Master's Thesis, Budapest University of Technology and Economics* (2012)

[2] CS.GY. CSEHI AND A. RECSKI, The graphicity of the union of graphic matroids, *European Journal of Combinatorics* (2015) **50**, 38–47. doi: 10.1016/j.ejc.2015.03.022

[3] CS.GY. CSEHI AND A. RECSKI, Matroid union – Graphic? Binary? Neither?, *Discrete Applied Mathematics* (2016) **209**, 75–83. doi: 10.1016/j.dam.2015.10.037

[4] CS.GY. CSEHI AND A. RECSKI, Partitioning the bases of the union of matroids, *Discrete Mathematics* (2017) **340/4**, 691–694. doi: 10.1016/j.disc.2016.12.011

[5] CS.GY. CSEHI AND A. RECSKI, On the Graphicity of the Independence Structure of Linear Active Networks, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* **61/2** (2017) 193-197. doi: https://doi.org/10.3311/PPee.9982

[6] W.H. CUNNINGHAM, Separating Cocircuits in Binary Matroids, *Linear Algebra and its Applications* **43** (1982) 69–86.

[7] J. EDMONDS, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *J. Res. Nat. Bur. Stand* **69B** (1965) 67–72.

[8] J. EDMONDS, Systems of distinct representatives and linear algebra, *J. Res. Nat. Bur. Standards 71B* **71B** (1967) 241–245.

[9] J. C. FOURNIER, Une relation de séparation entre cocircuits d'un matroide, *Journal of Combinatorial Theory B* **16** (1974) 181–190.

[10] S. FUJISHIGE, An efficient PQ-graph algorithm for solving the graph-realization problem, *Journal of Computer and Systems Sciences* **21** (1980) 63–68.

[11] M. IRI AND N. TOMIZAWA, A unifying approach to fundamental problems in network theory by means of matroids, *Trans. Inst. Electron. & Commun. Eng. Jpn.* **57A, 8** (1975) 35–41.

[12] A. K. KELMANS, M. V. LOMONOSOV, AND V. P. POLESSKII, On minimum coverings in matroids *Problemy Peredachi Informatsii* (1976) **12/3**, 94-107.

[13] G. KIRCHHOFF, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847) 497–508.

[14] L. LOVÁSZ AND A. RECSKI, On the sum of matroids, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1973) **24**, 329–333.

[15] J. MIGHTON, A new characterization of graphic matroids, *Journal of Combinatorial Theory B* **98** (2008) 1253–1258.

[16] J. NARAYANAN, Theory of Matroids and Network Analysis, *Ph.D. Thesis in Elect. Engin., Indian Institute of Tech., Bombay, India* (1974)

[17] C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS, Decomposition of finite graphs into forests, *Journal of the London Mathematical Society* **39 (1)** (1964) 12.

[18] C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS, On applications of matroids to graph theory, *Theory of Graphs Intern. Symposium* (1967) 263-265.

[19] J. OXLEY, *Matroid Theory,* Second Edition, Oxford University Press (2011)

[20] R. RADO, Note on independence functions, *Proceedings of the London Mathematical Society* **7** (1957) 300–320.

[21] A. RECSKI, On partitional matroids with applications, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai* **10** (1973) 1169–1179.

[22] A. RECSKI, On the sum of matroids II, *Proc. 5th British Combinatorial Conf. Aberdeen* (1975) 515–520.

[23] A. RECSKI, Some open problems of matroid theory, suggested by its applications, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* (1982) **40**, 311–325.

[24] A. RECSKI, Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics, *Springer, Berlin* (1989)

[25] P.D. SEYMOUR, Recognizing Graphic Matroids, *Combinatorica 1* (1981) 75–78.

[26] K. TRUEMPER, On the efficiency of representability tests for matroids, *European Journal of Combinatorics* **3** (1982) 275–291.

[27] W.T. TUTTE, A homotopy theorem for matroids I, II, *Transactions of the American Mathematical Society* **88** (1958) 144–174.

[28] W.T. TUTTE, Matroids and graphs, *Trans. Am. Math. Soc.* **90** (1959) 527–552.

[29] W.T. TUTTE, An Algorithm for Determining Whether a Given Binary Matroid is Graphic, *Proceedings of the American Mathematical Society* **11** (1960) 905–917.

[30] W.T. TUTTE, Lectures on matroids, *Journal of Research of the National Bureau of Standards B* **69** (1965) 1–47.

[31] D.K. WAGNER, A circuit characterization of graphic matroids, *Journal of Combinatorial Theory B* **118** (2016) 284–290.

[32] H. WHITNEY, On the abstract properties of linear dependence, *American Journal of Mathematics* **57** (1935) 509–533.