# PHD DISSZERTÁCIÓ – TÉZISFÜZET

# IZOPTIKUS GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK

**Csima Géza**

**Supervisor:** Szirmai Jenő
egyetemi docens
BME Matematika Intézet,
Geometria Tanszék

**BME**
**2017**

## 0.1. Bevezetés

Disszertációm témája az izoptikus görbék és felületek euklideszi és nemeuklideszi geometriákban. A kérdéskör a látókörívtétel általánosításával foglalkozik. A kérdés egész egyszerű: "Mi azon pontok mértani helye, melyekből egy adott objektum adott szög alatt látszik?" Jól ismert, hogy a síkon egy szakasz azon pontokból látszik adott $\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ szög alatt, melyek a szakaszra, mint közös húrra írt két körív uniója a végpontjaik kivételével. Ha az $\alpha$ $\frac{\pi}{2}$-vel egyenlő, akkor éppen a Thalész kört kapjuk. Ismert továbbá, hogy egy ellipszis centruma körüli $\sqrt{a^2+b^2}$ sugarú körén lévő pontok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a belőlük az ellipszishez húzott érintők derékszöget zárnak be egymással. A parabola esetében ezzel a tulajdonsággal annak tengelye rendelkezik.

Habár az "izoptikus görbe" elnevezést Taylor javasolta 1884-ben ([62]), korábbi eredményekre utaló hivatkozásokat lehet találni [63]-ban. Az izoptikus görbék homályos történelmében olyan neveket találunk közreműködőként, mint la Hire (cikloidok 1704) és Chasles (kúpszeletek és epitrochoidok 1837). A [63] munka tartalmaz továbbá egy nagyon érdekes táblázatot is az izoptikus és ortoptikus görbékről sajnos hivatkozások nélkül. Azonban újabb munkák is találhatóak ebben a témában mutatva ennek aktualitását. A [6] és [7] az euklideszi síkon vizsgálják a zárt, szigorúan konvex görbék izoptikusát a támaszfüggvények segítségével. A [34, 68, 69] munkák azon euklideszi görbékkel foglalkoznak, melyeknek kör, vagy ellipszis az izoptikusa. További euklideszi síkon izoptikusként felmerülő görbék is ismertek, lásd pl. [36, 67]. A kúpszeletek izoptikusait is vizsgálták [25]-ben és [55]-ben. Bézier görbékre Kunkli [et al] adtak eredményeket, lásd [32]. Sok munka fókuszál az izoptikus görbék tulajdonságaira, például [37, 38, 39] az ott megadott hivatkozásokkal együtt. Vannak továbbá az izoptikus görbéknek általánosításaik is, úgy mint ekvioptikus görbék ([52]) és szekantoptikus görbék ([49, 57]).

A kérdéssel és a témavezetőmmel is a BSc tanulmányaim harmadik félévében az Önálló kutatási feladat I keretében találkoztam. A felvetés egyszerűsége arra bátorított, hogy a félév vége után is folytassam a kutatást a tanulmányaim mellett. Témavezetőm javaslatára elkezdtem a témát nemeuklideszi geometriákban is vizsgálni, különös tekintettel a Bolyai-Lobacsevszkij féle hiperbolikus geometriában. Ebben az irányban nem találtam egyetlen meglévő eredményt sem, annak ellenére, hogy a nemeuklideszi geometriákban felvetett problémák vizsgálata kulcsfontosságú mind a miniatűr, mind csillagászati világunk megértéséhez és leírásához. Ezzel párhuzamosan erőfeszítéseket tettem a probléma magasabb dimenziós kiterjesztésére is. Természetesen lehetséges nemeuklideszi terekben is vizsgálódni és néhány eredmény már adódott az $\widetilde{\mathbf{SL}_2\mathbf{R}}$ geometriában, de a további kutatási eredmények már túlmutatnak ezen tézis tartalmán.

Ez a kutatási téma számomra a annak alkalmazhatósága miatt volt érdekes. Az $\mathbf{E}^3$ háromdimenziós euklideszi térben ez pont a látás. Ezért az eredmények több olyan területen is felhasználhatóak, melyek a láthatóságot érintik. Az izoptikus görbék kapcsolódnak a geometriai tomográfiához, ami az alakzatok röntgen képekből történő felismerésének tudománya (lásd [21]). A téma néhány friss eredményét a pakolási probléma motiválta (lásd [64] Remark 4.12). Természetesnek tűnik az euklideszi geometriában elért eredmények alkalmazása számítógépes grafikában. Talán egy nap az izoptikus görbék egy CAD rendszerben is implementálva lesznek.

Az első fejezetben az euklideszi síkon vizsgáljuk az izoptikus görbéket. Először áttekintést adunk néhány már meglévő eredményről a zárt, szigorúan konvex görbék kapcsán. A kúpszeletek izoptikusai már régóta jól ismertek ([5]), de most egy új megközelítést tárgyalunk, mely egy szerkesztési eljáráson alapul. Majd a poligonok izoptikusait vizsgálva egy új algoritmust adunk, mellyel meghatározható egy véges ponthalmaz izoptikusa. Végül az inverz kérdéssel foglalkozunk, melyet például Kurusa vizsgált (lásd [34]): "Meghatározza-e a konvex alakzatot az izoptikusa, vagy sem?"

A disszertáció második fejezetében az $\mathbf{E}^3$ euklideszi térben dolgozunk. Több mód is van az izoptikus görbe fogalmának izoptikus felületté való általánosítására, itt a térszög fogalmát választottuk. A hátránya ennek a megközelítésnek, hogy megszorítva az izoptikus felületet valamely síkra nem szükségszerűen adja vissza a megszorított görbe izoptikus görbéjét. Azonban az eredmények összefüggésben vannak a nukleáris fizika detektorelhelyezési és sugárzási szintfelület problémáival ([24]). A fejezetet a platóni és archimédeszi testek izoptikus felületeinek tárgyalásával zárjuk.

A harmadik fejezetben visszatérünk a síkra, azonban a geometria már nem lesz euklideszi. Az elliptikus és kiterjesztett hiperbolikus síkokat a $\mathcal{P}^3$ projektív háromdimenziós térbe való beágyazás keretében vizsgáljuk. Ez azért lesz hasznos, mert a pontokhoz és egyenesekhez is valós koordinátákat rendelhetünk.

Vizsgálódásunk fő tárgya itt is a kúpszeletek lesznek, melyek mind az elliptikus, mind a hiperbolikus geometriában igen érdekesek. Az irodalom a hiperbolikus kúpszeletek klasszifikációjában igen kiterjedt ([18, 19, 41]). Az izoptikus görbék meghatározásához elengedhetetlen, hogy definiáljuk az általánosított szöget és távolságot. Természetesen megadjuk minden típusú kúpszelethez tartozó izoptikus egyenletet és ábrázoljuk is őket.

Az utolsó fejezetben megismerkedünk a 8 Thurston geometria egyikével, az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ geometriával (lásd [62]). Bevezetjük a geodetikus és transzlációs görbék fogalmát, melyek ebben a geometriában különbözőek és egy érdekes eredményt is mutatunk a háromszög belső szögeinek összege kapcsán. Az izoptikus felületek ebben a geometriában egy egészen új kutatási irány. Még a szakasz izoptikus felülete is egész érdekes a geometria csavart természetének köszönhetően.

A *Wolfram Mathematica* szoftvercsomagot használtuk az összes megjelenített ábrához és a szükséges kalkulációk elvégzéséhez is.

# 1. fejezet

# Izoptikus görbék az euklideszi síkon

## 1.1. Szigorúan konvex zárt görbék izoptikusa

**1.1.1. Definíció ([63]).** *Azon pontok mértani helyét, melyekből egy görbéhez (vagy görbékhez) húzott érintők állandó $\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$) szöget zárnak be, az adott görbéhez (vagy görbékhez) tartozó $\alpha$-izoptikus görbének nevezzük. A derékszöghöz tartozó izoptikust ortoptikus görbének nevezzük.*

Az izoptikus görbék további vizsgálatainak érdekében összegzünk néhány ismert eredményt a támaszfüggvények kapcsán.

**1.1.2. Definíció.** *Legyen $\mathcal{C}$ egy szigorúan konvex zárt görbe, mely tartalmazza az origót. Legyen $p(t)$ ahol $t \in [0, 2\pi[$ az origótól mért távolsága a $\mathcal{C}$ görbe $e^{it}$ irányra merőleges támaszegyenesétől. A $p$ függvényt a $\mathcal{C}$ görbe támaszfüggvényének nevezzük.*

Jól ismert ([2]), hogy egy $\mathcal{C}$ szigorúan konvex zárt görbe támaszfüggvénye differenciálható. A következőkben szeretnénk kifejezni az izoptikus görbét a támaszfüggvény segítségével.

**1.1.3. Tétel ([66]).** *Legyen adott egy $\mathcal{C}$ szigorúan konvex zárt síkgörbe $z$ sugárral és $t$ szöggel polárkoordinátákban, ahol $t \in [0, 2\pi)$. Ekkor a következő formula teljesül*

$$z(t) = p(t)e^{it} + \dot{p}(t)ie^{it}.$$

Az előbbi tétel következménye, hogy ezen parametrizációt felhasználhatjuk $\mathcal{C}$ izoptikusának meghatározásához. A $p(t)$ és $p(t + \pi - \alpha)$ szöge éppen $\alpha$.

**1.1.4. Tétel ([6]).** *Legyen adott egy $\mathcal{C}$ szigorúan konvex zárt síkgörbe, mely tartalmazza az origót. Legyen $p(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\mathcal{C}$ görbe támaszfüggvénye. Ekkor $\mathcal{C}$ $\alpha$-izoptikus görbéje a következő egyenlettel adható meg:*

$$z_\alpha(t) = p(t)e^{it} + \left(-p(t)\cot(\pi - \alpha) + \frac{1}{\sin(\pi - \alpha)}p(t + \pi - \alpha)\right)ie^{it}.$$

### 1.1.1. Példa

Egy tipikus példa lehet egy olyan ellipszis, melynek féltengelyei $a$ és $b$, melyek illeszkednek az $x$ és $y$ koordinátatengelyekre, azaz az ellipszisünk kanonikus. Ebben az esetben jól ismert a $(a\cos(t), b\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ paraméterezés. Most kiszámoljuk az ellipszis támaszfüggvényét és használjuk az 1.1.4 Tételt az izoptikus görbe meghatározásához.

$$p(t) = \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} \tag{1.1}$$

Végül alkalmazzuk az 1.1.4 Tételt és egyszerűsítésekkel adódik:

$$\begin{gathered} z_\alpha(t) = \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}e^{it} + \\ + \left(\cot(\alpha)\sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} + \frac{1}{\sin(\alpha)}\sqrt{a^2\cos^2(t-\alpha) + b^2\sin^2(t-\alpha)}\right)ie^{it} \end{gathered} \tag{1.2}$$

## 1.2. Euklideszi kúpszeletek izoptikus görbéi

Ebben a fejezetben meghatározzuk az euklideszi kúpszeletek izoptikus görbéit. Sok ismert mód van az izoptikus egyenletének megadására (lásd pl [36]), mi azonban egy új megközelítést követünk, amely a *külső pontból húzott érintő szerkesztési eljárást* használja (lásd pl[58]). Ez az eljárás kevés számítást igényel.

### 1.2.1. Ellipszis

**1.2.1. Tétel.** *Legyen adott az $\mathbf{E}^2$ euklideszi sík koordinátarendszerében egy kanonikus ellipszis $a$ és $b$ féltengelyekkel. Az $\alpha$-izoptikus görbéje $(0 < \alpha < \pi)$ a vizsgált ellipszisnek a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{\left(-a^2 + b^2 + x^2\right)^2 + 2y^2\left(a^2 - b^2 + x^2\right) + y^4}}.$$

### 1.2.2. Hiperbola

**1.2.2. Tétel.** *Legyen adott az $\mathbf{E}^2$ euklideszi sík koordinátarendszerében egy kanonikus hiperbola $a$ és $b$ féltengelyekkel. Az $\alpha$-izoptikus görbéje $(0 < \alpha < \pi)$ a vizsgált hiperbolának a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos^2\alpha = \frac{(-a^2 + b^2 + x^2 + y^2)^2}{\left(a^2 + b^2 - x^2\right)^2 + 2y^2\left(a^2 + b^2 + x^2\right) + y^4}.$$

**1.2.3. Megjegyzés.** *A téma irodalmának többségében, mint például [52]-ben, az ellipszis és a hiperbola izoptikusára vonatkozó egyenlet négyzetre emelve szerepel, megadva ezzel nem csak $\alpha$-, de a $\pi - \alpha$-izoptikust is. Az ellipszis esetében ez nem szügséges. A hiperbola esetében a két aszimptota a síkot négy részre vágja, melyek közül kettő tartalmazza a hiperbola egy-egy ágát (fokális tartomány), a másik kettő pedig üres. Legyen $K$ a hiperbola egy külső pontja. Ha $K$ fokális tartományban van, akkor az érintők a hiperbola ugyanazon ágát érintik, egyébként pedig különbözőeket. Ezekben az esetekben az izoptikus szögek egymás komplementerei, azaz az összegük $\pi$. Ezért négyzetre emeljük az egyenletet, mely mindkét féle izoptikust eredményezi.*

**1.2.4. Megjegyzés.** *Könnyű látni, hogy az origó afféle "nyeregpont" az érintők szögére vonatkozóan. A fokális tartományok bármely pontjából húzott érintők nagyobb szöget határoznak meg, a másik két tartományból húzott érintők pedig kisebbet. Ezért az izoptikus görbe nem létezik, ha a szög az alábbi tartományban van:*

$$\left(\arccos\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right), \arccos\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\right)$$

*ha $b > a$ egyenlőtlenség teljesül.*

### 1.2.3. Parabola

**1.2.5. Tétel.** *Legyen adott az $\mathbf{E}^2$ euklideszi sík koordinátarendszerében egy axiális parabola. Az $\alpha$-izoptikus görbéje $(0 < \alpha < \pi)$ a vizsgált parabolának a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos\alpha = -\frac{y}{\sqrt{(p - y)^2 + x^2}}.$$

## 1.3. Véges ponthalmaz izoptikus görbéje

Tisztáznunk kell, hogy mit jelent egy ponthalmaz izoptikus görbéje.

**1.3.1. Definíció.** *Egy adott $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz $\alpha$ szög alatt látható $(0 < \alpha < \pi)$ a $P$ pontból, ha a legkisebb $P$ csúcsú szögtartomány, mely tartalmazza $\mathcal{P}$ összes pontját, $\alpha$ szögű.*

**1.3.2. Definíció.** *Egy tetszőlegesen adott $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz izoptikus görbéje azon pontok mértani helye a síkon, melyekből $\mathcal{P}$ $\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ szög alatt látható. A derékszöghöz tartozó izoptikust ortoptikus görbének nevezzük.*

A definícióból könnyen látható, hogy:

**1.3.3. Következmény.** *Egy véges ponthalmaz izoptikus görbéjének meghatározásához elégséges a pontok konvex burkának izoptikusát meghatározni.*

Feltehetjük, hogy a megadott pontok általános helyzetűek, azaz nincs három kollineáris pont. Számos algoritmus van véges ponthalmaz konvex burkának meghatározására (lásd [1]), ezért feltesszük, hogy $n$ darab pontunk van ($X_i$ ahol $i \in 1, \ldots, n$), melyek rendezése megegyezik az óramutató járásával. Legyen $\mathcal{C}$ az a zárt görbe, melyet az $\overline{X_i X_{i+1}}$ szakaszok megrajzolásával kapunk (ha $i = n$, akkor $X_{i+1} = X_1$). Az adódó görbe egy egyszerű, zárt poligon lesz és a $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz izoptikus meg fog egyezni a $\mathcal{C}$ poligon izoptikusával.

Habár az első megközelítésünk használható arra, hogy ábrázoljuk az izoptikus görbét, nem adja meg a görbe konkrét formuláját, vagy paraméterezését, azonban az ötlet egyszerű és használható. Egy poligon érintője kétféle típusú lehet, vagy egy él egyenese, vagy pedig pontosan egy csúcsra illeszkedő. Amikor mindkét támaszegyenes pontosan egy ponton megy át, akkor hozzá tudunk rendelni egy átlót. Ez a szakasz nem változik egész addig, amíg legalább az egyik érintő másik ponton nem megy át. Ezért a poligon izoptikus görbéje véges sok körív uniójából fog állni.

**1.3.4. Lemma (CsG).** *Legyen adott egy $\alpha$ szög, ahol $(0 < \alpha < \pi)$ és egy $n$-szög $X_1$, $X_2, \ldots,$ $X_n$ csúcsokkal. Tekintsük az összes $\overline{X_i X_j}$ szakaszt. Legyen $\Omega$ azon körlapok uniója, melyek mindegyikéről egy adott $\overline{X_i X_j}$ szakasz $\alpha$ szög alatt látszik. Ekkor az $n$-szög izoptikus görbéje $\partial\Omega$ lesz.*

**1.3.5. Megjegyzés.** *Az a megállapítás, hogy "...egy konvex poligon izoptikus görbéje körívek uniója" megtalálható [34]-ben, bizonyítás nélkül csak a kerületi és középponti szögek tételét említve igazolásként.*

A célunk most az, hogy implicit egyenletet adjuk $\partial\Omega$-ra. Tegyük fel, hogy a poligon zárt, konvex és az $n$ darab $X_1$, $X_2$, $\ldots$ $X_n$ csúcsa az óramutató járása szerint van rendezve.

Ha meg akarjuk határozni egy szakaszhoz tartozó látószöget egy $P$ síkbeli pontból, akkor vetítsük azt fel a $P$ körüli egységkörre és számoljuk ki a keletkező ív hosszát. Vegyük észre, hogy ha az $n$-szögünk konvex, akkor ennek a vetülete pontosan kétszer fedi le a keletkező ívet. Ezért ha a $P$ pont rajta van a poligon izoptikus görbéjén, akkor az $X_i P X_{i+1}\angle$ ($i = 1 \ldots n$ és $X_{n+1} = X_1$) szögek összege éppen $2\alpha$.

**1.3.6. Tétel (CsG).** *Legyen adott egy $n$-szög az $X_1$, $X_2$, $\ldots$ $X_n$ $(X_i = (x_i, y_i)^T)$ csúcsokkal, melyek az óramutató járása szerint vannak rendezve és egy $\alpha$ szög, ahol $(0 < \alpha < \pi)$. Ekkor az $n$-szög $\alpha$-izoptikus görbéjének egyenlete:*

$$2\alpha = \sum_{i=1}^{n} \arccos\left(\frac{\left\langle \overrightarrow{PX}_i, \overrightarrow{PX}_{i+1}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{PX}_i, \overrightarrow{PX}_i\right\rangle \left\langle \overrightarrow{PX}_{i+1}, \overrightarrow{PX}_{i+1}\right\rangle}}\right) \tag{1.3}$$

*ahol $X_{n+1} = X_1$ és $P = (x, y)^T$.*

# 2. fejezet

# Izoptikus felületek az euklideszi térben

## 2.1. Izoptikus hiperfelületek $\mathbf{E}^n$

Először általánosítjuk a szög fogalmát az $\mathbf{E}^3$ euklideszi térben. Ebből már képesek leszünk általánosítani tetszőleges $n$ ($n \geq 3$) dimenziós euklideszi térben. A *térszög* fogalma jól ismert és kutatott az irodalomban (lásd [22]).

**2.1.1. Definíció.** *Az $\Omega_{S(P)}$ térszög mértéke az $S$ felülethez egy $P$ pontra az $S$, $P$ körüli egységgömbjére vetített felület felszíne.*

A mértékek nemzetközi rendszerében (SI) a térszöget szteradiánban (sr) mérik, ami egy dimenzió nélküli egység[1]. Az egész $\mathbf{E}^3$ tér térszöge megegyezik $4\pi$ szteradiánnal. Ennek a definíciónak számos alkalmazása van fizikában (általában asztrofizikai, radiometriai és fotometriai vonatkozásokkal, lásd [4]), számítógépes geometriában (lásd [29]) és könnyen általánosíthatjuk magasabb dimenziókra. A magasabb dimenziós térszögekhez kapcsolódó eredmények megtalálhatóak [53]-ban. Az 1.1.1 Definíció is általánosítható:

**2.1.2. Definíció ([11]).** *A $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\alpha}$ izoptikus hiperfelülete a tetszőleges $2 \leq d \leq n$ dimenziós $\mathcal{D}$ kompakt halmaznak azon $P$ pontok mértani helye az $\mathbf{E}^n$ ($n \geq 3$) dimenziós térben, melyekből $\mathcal{D}$-nek $P$ köré írt egységgömbre vetített mértéke az adott $\alpha$ szög, ahol $\alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$)).*

**2.1.3. Megjegyzés.** *Egy másik fajta megközelítés található [50]-ben, számos alkalmazási lehetőséggel, lásd [33] Section 3.*

### 2.1.1. $(n-1)-$dimenziós hiperfelület izoptikus hiperfelülete $\mathbf{E}^n$-ben

Tekintsünk $\mathbf{E}^n$-ben ($n \geq 3$) egy hipersíkban fekvő $\mathcal{D}$ $(n-1)$ dimenziós kompakt hiperfelületet, mely a szokásos paraméteres alakban van megadva. Feltehető, hogy alkalmas transzformációt követően a paraméterezés a következő alakú:

$$\widetilde{\phi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ \widetilde{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

ahol $x_i \in [a_i, b_i]$,$(a_i, b_i \in \mathbb{R})$, $(i = 1, \ldots, n-1)$. Legyen $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = P(\mathbf{x}^0)$ egy pont, feltéve, hogy $x_n^0 > 0$ . $\mathcal{D}$-nek a $P$ körüli egységgömbre vetítve a következő paraméterezése adódik:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_angle

ahol ha $i \neq n$

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\widetilde{f}_i(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_1^0}{\sqrt{(\widetilde{f}_1(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_1^0)^2 + \cdots + (\widetilde{f}_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_{n-1}^0)^2 + (x_n^0)^2}},$$

egyébként

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{-x_n^0}{\sqrt{(\widetilde{f}_1(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_1^0)^2 + \cdots + (\widetilde{f}_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_{n-1}^0)^2 + (x_n^0)^2}}.$$

Jól ismert, hogy a felszínt az alábbi módon ki lehet számolni:

$$S(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \sqrt{\det G} \quad \mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_{n-2}\ldots\mathrm{d}x_1 \tag{2.3}$$

ahol

$$G = J^T J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\alpha}$ izoptikus felület a 2.1.2 Definíció alapján a következő:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\alpha} = \left\{\mathbf{x}^0 \in \mathbf{E}^n | \alpha = S(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\right\}, \text{ ahol } \alpha \in \left(0\,,\ \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\right). \tag{2.4}$$

Általános esetben az izoptikus hiperfelület csak numerikus módszerek segítségével számolható.

### 2.1.2. A téglalap izoptikus felülete

Az analízis eszköztárának segítségével megfogalmazható az alábbi tétel, melyet Gotoh és Yagi adott meg [24]-ben és ettől függetlenül Csima [11]-ben:

**2.1.4. Tétel ([11, 24]).** *Legyen adott egy téglalap a derékszögű koordinátarendszer $[x, y]$ síkjában. Továbbá feltehető, hogy a középpontja az origó, oldalai pedig $(2a, 2b)$. Ekkor egy adott $\alpha$ szögre ahol $(0 < \alpha < 2\pi)$ az izoptikus felület a következő implicit egyenlettel adható meg:*

$$\alpha = \arctan\left(\frac{(a-x)(b-y)}{z\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}\right) + \arctan\left(\frac{(a+x)(b-y)}{z\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}\right) +$$
$$+ \arctan\left(\frac{(a-x)(b+y)}{z\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}\right) + \arctan\left(\frac{(a+x)(b+y)}{z\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}\right).$$

**2.1.5. Megjegyzés.** *Ez az eredmény számos alkalmazási lehetőséget hordoz magában, például stadionok, színházak és mozik tervezése. Érdekes felvetés lehet az olyan stadion, melyre igaz, hogy a lelátó minden székéből a játéktér ugyanazon szög alatt látható.*

*Egy előadó tervezésénél fontos kérdés, hogy a tábla, vagy a vetítővászon tisztán látható legyen mindenhonnan. Ebben az esetben az izoptikus előadó nem megvalósítható, de van lehetőség optimalizálásra.*

### 2.1.3. Az ellipszoid izoptikus felülete

A standard analízis eszközeinek segítségével adunk egy módszert az ellipszoid izoptikus felületének kiszámítására, azonban az eredmény a számítási nehézségek miatt csak numerikusan adható meg. Jól ismert az ellipszoid paraméterezése:

$$\widetilde{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ b\cos u\sin v \\ c\sin u \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

ahol $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $v \in [0, 2\pi]$ és $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Felvetítve ezt egy $P(x_0, y_0, z_0)$ külső pont körüli egységgömbre:

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{a\cos u\cos v - x_0}{\sqrt{(a\cos u\cos v - x_0)^2 + (b\cos u\sin v - y_0)^2 + (c\sin u - z_0)^2}} \\ \frac{b\cos u\sin v - y_0}{\sqrt{(a\cos u\cos v - x_0)^2 + (b\cos u\sin v - y_0)^2 + (c\sin u - z_0)^2}} \\ \frac{c\sin u - z_0}{\sqrt{(a\cos u\cos v - x_0)^2 + (b\cos u\sin v - y_0)^2 + (c\sin u - z_0)^2}} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Most már megadhatjuk az ellipszoid izoptikus felületét:

$$2\alpha = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)| \, du \, dv. \tag{2.7}$$

Ez az integrál csak numerikusan számolható.

## 2.2. Poliéderek izoptikus felületei

Tekintsük a következő, poliéderek izoptikus felületének meghatározására fejlesztett algoritmust.

1. Feltehető, hogy a $\mathcal{P}$ poliéder egy szokásos adatstruktúrával van megadva. Ez a lista az $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ lapokból áll a hozzájuk tartozó $V_i$ csúcshalmazokkal, melyek az óramutató járásának megfelelően vannak rendezve. Minden lap beágyazható egy síkba.

   Jól ismert, hogy ha $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $b \in \mathbf{R}$, akkor $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 | \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$ egy sík és $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 | \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\}$ egy félteret definiál. Minden poliéder tekinthető félterek metszeteként. Ezért minden poliéder megadható egy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ egyenlőtlenség rendszer segítségével, ahol $A \in \mathbf{R}^{m\times 3}$ $(4 \leq m \in \mathbb{N})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$.

2. Egy tetszőleges $\mathbf{p}$ koordinátájú $P \in \mathbf{E}^3$ pontra el kell döntenünk, $\mathcal{P}$ mely lapjai láthatóak onnan. Bevezetjük az $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ jelölést a $\mathcal{P}$ poliéder $i-$edik lapjára, ahol $(i = 1, \ldots, m)$ és legyen $\mathbf{a}^i$ az $A$ mátrix $i-$edik sora, ami éppen az $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ lapot jellemzi.

   Mivel a $\mathcal{P}$ poliéder olyan $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ alakban adott, hogy egy adott laphoz az $\mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i$ egyenlőtlenség $(i \in \{1, 2 \ldots, m\})$ tartozik, ezért a $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ lap $P$-ből pontosan akkor látható, ha az $\mathbf{a}^i\mathbf{p} > b_i$ egyenlőtlenség teljesül.

   Most már definiálhatjuk minden $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ laphoz tartozó $\mathbb{I}^i_\mathcal{P}(\mathbf{x})$ karakterisztikus függvényt:

   $$\mathbb{I}^i_\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{a}^i\mathbf{x} > b_i \\ 0 & \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i. \end{cases}$$

3. A 2.1.1 Definíció alapján legyen $\Omega_i(P) := \Omega_{\mathcal{F}^i_\mathcal{P}}(P)$ azaz $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ lap térszöge $P$ pontból nézve.

   Az $\Omega_i(P)$ értéket a szférikus geometria segítségével határozzuk meg. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ lap $n_i$ darab $V_{i_j}(\mathbf{x}_{i_j})$ csúcsból áll, ahol $(j = 1, \ldots, n_i)$ és rendezésük megegyezik az óramutató járásával. Felvetítve ezen csúcsokat a $P$ körüli egységgömbre egy szférikus $n$-szöget kapunk, melynek területe az alábbi formulával számolható:

   $$\Omega_i(P) = \Theta - (n_i - 2)\pi.$$

   Ahol $\Theta$ az $\mathcal{F}^i_\mathcal{P}$ poligon felvetített képéhez tartozó $\tau_j$ szögeinek radiánban mért összege.

4. Hogy megkapjuk a $\tau_j$ szögeket, meg kell határoznunk azon két sík hajlásszögét, melyek a szomszédos $\overline{PV}_{i_{j-1}}, \overline{PV}_{i_j}$ és $\overline{PV}_{i_j}, \overline{PV}_{i_{j+1}}$ éleket tartalmazzák. Minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re, ahol ($i_0 := i_{n_i}$ és $i_{n_i+1} := i_1$):

   $$\tau_j = \pi - \arccos\left(\frac{\left\langle \overrightarrow{PV}_{i_{j-1}} \times \overrightarrow{PV}_{i_j}, \overrightarrow{PV}_{i_j} \times \overrightarrow{PV}_{i_{j+1}} \right\rangle}{\left|\overrightarrow{PV}_{i_{j-1}} \times \overrightarrow{PV}_{i_j}\right| \left|\overrightarrow{PV}_{i_j} \times \overrightarrow{PV}_{i_{j+1}}\right|}\right).$$

Végül minden $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^i$ lapra és $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ pontra adódik a térszög függvénye:

$$\Omega_i(\mathbf{x}) = 2\pi - \sum_{j=1}^{n_i} \arccos\left( \frac{\left\langle \overrightarrow{XV}_{i_{j-1}} \times \overrightarrow{XV}_{i_j}, \overrightarrow{XV}_{i_j} \times \overrightarrow{XV}_{i_{j+1}} \right\rangle}{\left| \overrightarrow{XV}_{i_{j-1}} \times \overrightarrow{XV}_{i_j} \right| \left| \overrightarrow{XV}_{i_j} \times \overrightarrow{XV}_{i_{j+1}} \right|} \right).$$

Eredményeinket az alábbi tételben összegezhetjük:

**2.2.1. Tétel ([13]).** *Tekintsünk egy rögzített $\alpha$ szöget, ahol $(0 < \alpha < 2\pi)$ és egy $\mathcal{P}$ konvex poliédert a hozzá tartozó adatstruktúrával és egyenlőtlenség rendszerrel. Ekkor $\mathcal{P}$ izoptikus felülete az alábbi egyenlettel adható meg:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{\mathcal{P}}^i(\mathbf{x}) \Omega_i(\mathbf{x}).$$

**2.2.2. Megjegyzés.**

1. *Az algoritmus könnyen kiterjeszthető nem zárt felületekre is, például felosztási felületekre.*

2. *Ha a poliéderünk konvex, akkor felvetítve azt egy egységgömbre egy kétszeres fedést kapunk (dupla térszöget), ezért az algoritmust úgy módosíthatjuk, hogy nincs szükség a látható lapok meghatározására. Ebben az esetben az izoptikus felület a következő **implicit** egyenlettel adható meg:*

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \Omega_i(\mathbf{x}).$$

3. *Habár az egyenleteink $\mathcal{O}(e)$ lépésben megadhatóak, ahol $e$ a poliéder éleinek száma, a hozzájuk tartozó ábrák kirajzolása Wolfram Mathematica segítségével 20–40 percig is eltarthat. Az izoptikus felület implicit egyenlete olyan bonyolult, hogy abból nehéz lenne további következtetéseket levonni.*

# 3. fejezet

# Kúpszeletek izoptikus görbéi állandó görbületű nemeuklideszi síkgeometriákban

## 3.1. A szakasz izoptikus görbéje hiperbolikus és elliptikus síkon

**3.1.1. Tétel (CsG).** *Legyen adott az* $A = (a : 0 : 1)$ *és* $B = (-a : 0 : 1)$ *végpontjaival egy szakasz* $(a \in ]0, 1])$ *a* $\mathbf{H}^2$ *hiperbolikus vagy* $\mathcal{E}^2$ *elliptikus síkon. Ekkor egy adott* $\alpha$ *szögre, ahol* $(0 < \alpha < \pi)$*, az* $AB$ *szakasz* $\alpha$*-izotpikus görbéje a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos(\alpha) = \frac{\epsilon(\epsilon - \frac{1}{a^2} + \frac{a^2-x^2}{y^2a^2})}{\sqrt{(\epsilon + \frac{1}{a^2} + (\frac{a-x}{ya})^2)(\epsilon + \frac{1}{a^2} + (\frac{a+x}{ya})^2)}}, \tag{3.1}$$

*ahol* $\epsilon = \pm 1$ *attól függően, hogy a geometria elliptikus, vagy hiperbolikus.*

**3.1.2. Megjegyzés.**

1. *Az* $\alpha = \pi/2$ *választás adja az ortoptikus görbét:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{1-\epsilon a^2}} = 1. \tag{3.2}$$

*Ez egy euklideszi értelemben vett ellipszis (a szakasz végpontjainak kivételével), melyet Thalész görbének nevezhetünk.*

*A hiperbolikus síkon az "a" paraméter növekedésével a Thalész görbe egy hiperciklushoz (vagy ekvidisztans görbéhez) konvergál. Ez azt jelenti, hogy a hiperciklus az ortoptikus görbék egy speciális esete az alábbi egyenlettel:*

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

2. *A hiperbolikus síkon, ha* $a \to 1$*, akkor* (3.1) *az alábbi egyenlethez konvergál*

$$x^2 + \left(\frac{y}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = 1.$$

3. *Ha az elliptikus síkon figyelmen kívül hagyjuk az* $a \in ]0, 1]$ *feltételt és* $a \to \infty$*, akkor a* (3.1) *egyenlet jobb oldala 1-hez tart, ami azt jelenti, hogy az elliptikus geometria teljes egyenesének izoptikusa nem létezik.*

## 3.2. Az általános módszer

A szakaszra adott eljárás továbbfejlesztése egy általánosabb módszerhez vezet, mellyel a hiperbolikus és elliptikus síkon izoptikus görbéket számíthatunk ki. Azonban az eljárást csak kúpszeletekre írjuk le. Legyen $C$ egy hiperbolikus, vagy elliptikus kúpszelet és $P$ a $C$ egy pontja. Először a $P$-re illeszkedő érintőt határozzuk meg. Ezután a $K$ külső ponton átmenő érintők talpontjainak koordinátáira adunk egy egyenletrendszert. Egy ilyen pont kielégíti az adott görbe egyenletét és a hozzá tartozó érintőnek tartalmaznia kell $K$ külső pontot is. Ez az egyenletrendszer megoldható minden $K = (x^0 : y^0 : 1)$ külső pontra az $x^0$ és $y^0$ paraméterek függvényében. A $K$-ból húzott érintők koordinátái meghatározhatóak egy egyenletrendszer segítségével. Végül az érintő egyenesek szögét rögzítve jutunk el az izoptikus görbe implicit egyenletéhez. De ehhez szükségünk van magára a kúpszelet egyenletére.

## 3.3. Elliptikus kúpszeletek és izoptikusaik

Megjegyezzük, hogy az elliptikus síkon két pont maximális távolsága legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, ezért némely esetben a megadott görbe nem látható tetszőlegesen kis szög alatt.

### 3.3.1. Az elliptikus ellipszis és hiperbola egyenlete

**3.3.1. Definíció.** *Azon pontok mértani helyét az elliptikus síkon, melyeknek két rögzített ponttól mért távolságaiknak összege* $2a$ *állandó, elliptikus ellipszisnek nevezzük.*

**3.3.2. Definíció.** *Azon pontok mértani helyét az elliptikus síkon, melyeknek két rögzített ponttól mért távolságaiknak különbsége* $2a$ *állandó, elliptikus hiperbolának nevezzük.*

A következő egyenletek adódnak:

$$\left(\frac{x}{\tan(a)}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{(1+f^2)\cos^2(a)} - 1} = 1. \tag{3.3}$$

Ha a két fókuszpont közötti távolság kisebb, mint $2a$, akkor ez egy ellipszis, ha nagyobb, akkor pedig hiperbola. Mivel a koszinusz függvény a $[0, \pi]$-n monoton csökkenő és

$$\begin{aligned} d(F_1, F_2) <> 2a \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2a) <> \cos(d(F_1, F_2)) = \frac{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle}} = \frac{1 - f^2}{1 + f^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(a) - 1 <> \frac{2}{1 + f^2} - 1 \Leftrightarrow 1 <> \frac{1}{\cos^2(a)(1 + f^2)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 <> \frac{1}{\cos^2(a)(1 + f^2)} - 1. \end{aligned}$$

Ezért az elliptikus ellipszis és hiperbola a modellünkben is rendre ellipszis és hiperbola.

### 3.3.2. Az elliptikus parabola egyenlete

**3.3.3. Definíció.** *Azon pontok mértani helyét az elliptikus síkon, melyeknek egy rögzített ponttól (fókusztól) és egy rögzített egyenestől (tengelytől) mért távolságaik egyenlőek, elliptikus parabolának nevezzük.*

Az elliptikus parabolára a következő egyenlet adódik:

$$-x^2 + \frac{(1 + py)^2}{1 + p^2} = 1. \tag{3.4}$$

### 3.3.3. Az elliptikus ellipszis és hiperbola izoptikus görbéi

Most a 3.2 szakaszban leírt általános módszert alkalmazzuk, hogy meghatározzuk az elliptikus ellipszis és hiperbola izoptikusait.

**3.3.4. Tétel ([12]).** *Legyen a projektív modellben kanonikusan adva egy elliptikus ellipszis vagy hiperbola az "a" nagytengelyével ($a \in (0, \frac{\pi}{2})$ és $F_1 = (f : 0 : 1)$, $F_2 = (-f : 0 : 1)$ fókuszaival, ahol $(0 < f < 1)$ és rendre $2a > d(F_1, F_2)$ vagy $2a < d(F_1, F_2)$ teljesül. Ekkor az $\alpha$-izoptikus és $(\pi - \alpha)$-izoptikus görbéje $(0 < \alpha < \pi)$ ezen ellipszisnek, vagy hiperbolának a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\left((1+f^2)\cos(2a)\left(x^2+y^2+1\right)+f^2x^2-1\right)^2}{2\left(1+f^2\right)y^2\left(f^2+x^2\right)+\left(f^2-x^2\right)^2+\left(1+f^2\right)^2y^4}. \tag{3.5}$$

**3.3.5. Megjegyzés.**

1. *Az elliptikus ellipszis és hiperbola ortoptikus görbéjének egyenlete:*

$$\left(1+f^2\right)\cos(2a)\left(x^2+y^2+1\right)+f^2x^2=1.$$

2. *Az elliptikus hiperbola izoptikus görbéje létezik, ha igaz a következő formula:*

$$\left(\cos\alpha \le \max\left(\frac{1-(1+f^2)\cos(2a)}{f^2}, f^2+(1+f^2)\cos(2a)\right)\right)$$
$$\wedge\left(a \ge \frac{\pi}{6} \vee \left(f \le \sqrt{\frac{1}{\cos(2a)}-1}\right) \vee (\alpha \notin I)\right),$$

*ahol*

$$I = \left(\arccos\left(\frac{(1+f^2)\cos(2a)-1}{f^2}\right), \arccos\left(\frac{1-(1+f^2)\cos(2a)}{f^2}\right)\right).$$

### 3.3.4. Az elliptikus parabola izoptikus görbéje

**3.3.6. Tétel ([12]).** *Legyen a projektív modellben adva egy elliptikus parabola az $F = (0 : p : 1)$ fókuszával és az $x$ koordinátatengellyel egybeeső $e$ tengelyével. Ekkor az $\alpha$-izoptikus görbéje $(0 < \alpha < \pi)$ ezen parabolának a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos(\alpha) = \frac{y(py+1)}{\sqrt{(x^2+1)((p^2(x^2+1)-2py+y^2+x^2)}}. \tag{3.6}$$

**3.3.7. Megjegyzés.** *Az elliptikus parabola ortoptikus görbéje az $y = 0$ és $y = -\frac{1}{p}$ egyenesekből áll.*

**3.3.8. Megjegyzés.** *Az izoptikus görbékhez tartozó ábrák is igazolják a tényt, hogy az elliptikus geometriában valójában **csak egyféle kúpszelet** van. Azonban a projektív sík affin modelljében ezek különbözőknek tekinthetőek.*

## 3.4. Hiperbolikus kúpszeletek és izoptikusaik

### 3.4.1. Általános egyenes- és szögfogalom

Tekintettel arra a tényre, hogy az általános kúpszeletek többségének van ideális és külső pontja és érintője, elkerülhetetlen az általános hiperbolikus szögfogalom bevezetése. A kiterjesztett hiperbolikus síkon az $AK$ abszolút kúpszelettel vett metszéspontjaik alapján az egyenesek három osztályát különböztethetjük meg:

1. Az $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ egyenes *valós*, ha $\mathrm{card}(u \cap AK) = 2 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \rangle > 0$.

2. Az $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ egyenes *ideális*, ha $\mathrm{card}(u \cap AK) < 2$.

(a) Ha $\mathrm{card}(u \cap AK) = 1 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \rangle = 0$ akkor $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ egyenest *határ*egyenesnek nevezzük.

(b) Ha $\mathrm{card}(u \cap AK) = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \rangle < 0$ akkor $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ egyenest *külső* egyenesnek nevezzük.

Az általános szöget a [3], [26] és [65] munkák alapján definiálhatjuk a projektív modellben:

**3.4.1. Definíció.** *1. Tegyük fel, hogy $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ és $v = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ valós egyenesek.*

*(a) Ha $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 > 0$ akkor valós pontban metszik egymást és az $\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ szögük a következő formulával számolható:*

$$\cos\alpha = \frac{\pm\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}}. \tag{3.7}$$

*(b) Ha $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 < 0$ akkor külső pontban metszik egymást és a szögük megfeleltethető a normáltranszverzális hosszával az alábbi képlet alapján:*

$$\cosh\alpha = \frac{\pm\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}. \tag{3.8}$$

*(c) Ha $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = 0$ akkor határpontban metszik egymást és a szögük $0$.*

*2. Tegyük fel, hogy $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ és $v = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ a $\mathbf{H}^2$ külső egyenesei. Az ő szögüket a pólusaik távolságával adhatjuk meg a (3.8) formula segítségével.*

*3. Tegyük fel, hogy $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ valós, de $v = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ külső egyenes. A szögüket a külső egyenes polusának a belső egyenestől mért távolsága adja meg az alábbi képletet használva:*

$$\sinh\alpha = \frac{\pm\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}. \tag{3.9}$$

*4. Tegyük fel, hogy az $u = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ és $v = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ egyenesek közül legalább az egyik határegyenese $\mathbf{H}^2$-nek. Ha a másik egyenes illeszkedik a határpontra, akkor a szöget nem definiáljuk, egyébként pedig végtelen.*

**3.4.2. Megjegyzés.** *Az előző definícióban az 1. (a) eset kivételével valós távolság típusú értékeket használtunk a komplex szög típusú értékek helyett, melyek a többi esetben fellépnek. Az egyenletek jobb oldalán azért írtunk $\pm$ előjeleket, mivel az $\alpha$ és $\pi - \alpha$ szögeket együtt vizsgáljuk.*

### 3.4.2. Az általános hiperbolikus kúpszeletek klasszifikációja duális párokba rendezve

A hiperbolikus kúpszeletek klasszifikációjának irodalma egészen Liebmann 1902-es cikkéig megy vissza ([35]). Megjegyezzük, hogy mind Coolidge, mind Kagan részletesen vizsgálta a hiperbolikus kúpszeletek kérdését (lásd [8] és [30]). Számos, a témát feldolgozó irodalom létezik (lásd [17] és [54]), de ebben a szakaszban K. Fladt kiterjesztett hiperbolikus síkon vizsgált hiperbolikus kúpszeletekről szóló [18] és [19] eredményeit összegezzük és terjesztjük ki.

**3.4.3. Tétel ([14]).** *Ha a kúpszelet normálformája $ax^2 + by^2 = 1$ alakú, akkor a centrális kúpszeletek következő típusai adódnak:*

*1.* Abszolút kúpszelet: $a = b = 1$

*2.* *(a)* Kör: $1 < a = b$

*(b)* Abszolútot körülfoglaló kör: $a = b < 1$

*3.* *(a)* Hiperciklus: $1 = a < b$

*(b)* Abszolútot körülfoglaló hiperciklus: $0 < a < 1 = b$

*4.* Abszolútot kizáró hiperciklus: $a < 0 < 1 = b$

*5.* Konkáv hiperbola: $0 < a < 1 < b$

6. *(a)* Konvex hiperbola: $a < 0 < 1 < b$
   *(b)* Abszolútot kizáró hiperbola: $a < 0 < b < 1$
7. *(a)* Ellipszis: $1 < a < b$
   *(b)* Abszolútot körülfoglaló ellipszis: $0 < a < b < 1$
8. üres: $a \leq b \leq 0$

*ahol minden osztály vagy önduális, vagy (i) és (ii) duális párok az $a' = \frac{1}{a}$ és $b' = \frac{1}{b}$ helyettesítéssel.*

**3.4.4. Tétel ([14]).** *A parabolák normálformája $ax^2 + (b+1)y^2 - 2y = b - 1$ alakú és az álábbi esetek lehetségesek:*

1. *(a)* Horociklus: $0 < a = b$
   *(b)* Abszolútot körülfoglaló horociklus: $a = b < 0$
2. *(a)* Elliptikus parabola: $0 < b < a$
   *(b)* Abszolútot körülfoglaló parabola: $b < a < 0$
3. *(a)* Kétoldalú parabola: $a < b < 0$
   *(b)* Konkáv hiperbolikus parabola: $0 < a < b$
4. *(a)* Konvex hiperbolikus parabola: $a < 0 < b$
   *(b)* Abszolútot kizáró parabola: $b < 0 < a$

*ahol (i) és (ii) duális párok az $a' = -\frac{b^2}{a}$ és $b' = -b$ helyettesítéssel.*

**3.4.5. Tétel ([14]).** *Az úgynevezett félhiperbola normálformája $ax^2 + 2by^2 - 2y = 0$ alakú, ahol $|b| < 1$ és ennek duális párja projektív ekvivalens egy másik félhiperbolával az $a' = \frac{1}{a}$ és $b' = -b$ megfeleltetéssel.*

**3.4.6. Tétel ([14]).** *Ha a kúpszelet normálformája $(1 - x^2 - y^2) + 2ay(x+1) = 0$ alakú, ahol $a > 0$, akkor oszkuláló parabolának nevezzük. Ennek duálisa szintén oszkuláló parabola lesz, mely az eredeti tükörképe.*

### 3.4.3. Általános hiperbolikus kúpszeletek izoptikus görbéi

#### 3.4.3.1. Centrális kúpszeletek izoptikus görbéi

**3.4.7. Tétel ([14]).** *Legyen egy centrális kúpszelet az $ax^2 + by^2 = 1$ egyenletével megadva (lásd 3.4.3 Tétel). Ekkor az összetett $\alpha$-izoptikus görbéje, ahol $(0 < \alpha < \pi)$:*

$$\frac{\left(a\left((b+1)x^2-1\right)+(a+1)by^2-b\right)^2}{\left|(a-1)^2b^2y^4+2(a-1)b\left(b+a\left((b-1)x^2-1\right)\right)y^2+\left(a(b-1)x^2+a-b\right)^2\right|} =$$

$$= \begin{cases} \cosh^2(\alpha), & aby^2\left(ax^2+by^2-1\right) \geq 0 \;\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right) > 0 \;\wedge \\ & x^2+y^2 > 1 \\ \\ \cos^2(\alpha), & aby^2\left(ax^2+by^2-1\right) \geq 0 \;\wedge \\ & x^2+y^2 < 1 \\ \\ \sinh^2(\alpha), & aby^2\left(ax^2+by^2-1\right) \geq 0 \;\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right) < 0, \end{cases}$$

*melyben $u_{1,2}$ és $v_{1,2}$*

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{ax+\sqrt{aby^2(ax^2+by^2-1)}}{ax^2+by^2} & v_1 &= \frac{-ax+\sqrt{aby^2(ax^2+by^2-1)}}{ax^2+by^2} \\ u_2 &= \frac{-by^2+x\sqrt{aby^2(ax^2+by^2-1)}}{ax^2y+by^3} & v_2 &= -\frac{by^2+x\sqrt{aby^2(ax^2+by^2-1)}}{ax^2y+by^3}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

#### 3.4.3.2. Parabolák izoptikus görbéi

**3.4.8. Tétel ([14]).** *Legyen egy parabola az $ax^2 + (b+1)y^2 - 2y = b - 1$ egyenletével megadva (lásd 3.4.4 Tétel). Ekkor az összetett $\alpha$-izoptikus görbéje, ahol $(0 < \alpha < \pi)$:*

$$\left(a\left(b\left(2x^2+y^2-1\right)+(y-1)^2\right)+b^2\left(y^2-1\right)\right)^2\Big|(y-1)^2\left((y+1)^2b^4-\right.$$
$$\left.-2a\left(2x^2+y^2+b(y+1)^2-1\right)b^2+a^2\left((y-1)^2+b^2(y+1)^2+2b\left(2x^2+y^2-1\right)\right)\right)\Big|^{-1}=$$

$$=\begin{cases} \cosh^2(\alpha), & ab^2x^2\left(ax^2+b\left(y^2-1\right)+(y-1)^2\right)\geq 0\ \wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)>0\wedge \\ & x^2+y^2>1 \\ \\ \cos^2(\alpha), & ab^2x^2\left(ax^2+b\left(y^2-1\right)+(y-1)^2\right)\geq 0\ \wedge \\ & x^2+y^2<1 \\ \\ \sinh^2(\alpha), & ab^2x^2\left(ax^2+b\left(y^2-1\right)+(y-1)^2\right)\geq 0\ \wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)<0, \end{cases}$$

*melyben $u_{1,2}$ és $v_{1,2}$*

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{ax^2(b+y-1)+y\sqrt{ab^2x^2(ax^2+b(y^2-1)+(y-1)^2)}}{a(b-1)x^3+b^2xy^2} \\ u_2 &= \tfrac{ax^2-b^2y-\sqrt{ab^2x^2(ax^2+b(y^2-1)+(y-1)^2)}}{a(b-1)x^2+b^2y^2} \\ \\ v_1 &= \tfrac{-ax^2(b+y-1)+y\sqrt{ab^2x^2(ax^2+b(y^2-1)+(y-1)^2)}}{a(b-1)x^3+b^2xy^2} \\ v_2 &= \tfrac{ax^2-b^2y+\sqrt{ab^2x^2(ax^2+b(y^2-1)+(y-1)^2)}}{a(b-1)x^2+b^2y^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

#### 3.4.3.3. A félhiperbola izoptikus görbéi

**3.4.9. Tétel ([14]).** *Legyen egy félhiperbola az $ax^2 + 2by^2 - 2y = 0$ egyenlettel megadva, ahol $|b| < 1$ (lásd 3.4.5 Tétel). Ekkor az összetett $\alpha$-izoptikus görbéje, ahol $(0 < \alpha < \pi)$:*

$$\left(2a\left(b\left(x^2+y^2\right)-y\right)+y^2-1\right)^2\Big|y^4+4a^2\left(x^2+y^2\right)\left(\left(b^2-1\right)x^2+(by-1)^2\right)-$$
$$-4a\left(y-\left(2x^2+y^2\right)y+b\left(y^4+\left(x^2-1\right)y^2+x^2\right)\right)-2y^2+1\Big|^{-1}=$$

$$=\begin{cases} \cosh^2(\alpha), & ax^2\left(a+2y(by-1)\right)\geq 0\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)>0\wedge \\ & x^2+y^2>1 \\ \\ \cos^2(\alpha), & ax^2\left(a+2y(by-1)\right)\geq 0\wedge \\ & x^2+y^2<1 \\ \\ \sinh^2(\alpha), & ax^2\left(a+2y(by-1)\right)\geq 0\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)<0, \end{cases}$$

*melyben*

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{ax+\sqrt{a(ax^2+2y(by-1))}}{y} \\ u_2 &= \tfrac{ax^2-y+x\sqrt{a(ax^2+2y(by+1))}}{y^2} \\ \\ v_1 &= \tfrac{-ax+\sqrt{a(ax^2+2y(by-1))}}{y} \\ v_2 &= \tfrac{ax^2-y-x\sqrt{a(ax^2+2y(by+1))}}{y^2}. \end{aligned}$$

#### 3.4.3.4. Az oszkuláló parabola izoptikus görbéje

**3.4.10. Tétel ([14]).** *Legyen egy oszkuláló parabola az* $(1-x^2-y^2)+2a(x+1)y=0$ *egyenlettel megadva (lásd 3.4.6 Tétel). Ekkor az összetett* $\alpha$*-izoptikus görbéje, ahol* $(0<\alpha<\pi)$*:*

$$\frac{\left(-2\left(x^2+y^2-1\right)+2a(x+1)y+a^2(x+1)^2\right)^2}{|a^2(x+1)^3\left(4(1-x)+4ay+a^2(x+1)\right)|}=$$

$$=\begin{cases} \cosh^2(\alpha), & \left(x^2+y^2-1-2a(x+1)y\right)\geq 0\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)>0\wedge \\ & x^2+y^2>1 \\ & \\ \cos^2(\alpha), & \left(x^2+y^2-1-2a(x+1)y\right)\geq 0\wedge \\ & x^2+y^2<1 \\ & \\ \sinh^2(\alpha), & \left(x^2+y^2-1-2a(x+1)y\right)\geq 0\wedge \\ & \left(1-u_1^2-u_2^2\right)\left(1-v_1^2-v_2^2\right)<0, \end{cases}$$

*melyben*

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{-(1+ay)(x-ay)+\sqrt{y^2(x^2+y^2-1-2a(x+1)y)}}{(x^2+y^2)-2axy+a^2y^2} \\ u_2 &= -\tfrac{y^2-ax(x+1)y+a^2(x+1)y^2+x\sqrt{y^2(x^2+y^2-1-2a(x+1)y)}}{y((x^2+y^2)-2axy+a^2y^2)} \\ & \\ v_1 &= -\tfrac{(1+ay)(x-ay)+\sqrt{y^2(x^2+y^2-1-2a(x+1)y)}}{(x^2+y^2)-2axy+a^2y^2} \\ v_2 &= -\tfrac{y^2-ax(x+1)y+a^2(x+1)y^2-x\sqrt{y^2(x^2+y^2-1-2a(x+1)y)}}{y((x^2+y^2)-2axy+a^2y^2)}. \end{aligned}$$

A módszerünk alkalmas minden lehetséges paraméterre az általános hiperbolikus kúpszeletek izoptikus görbéinek meghatározására. Továbbá ezzel az eljárással lehetőség nyílik másfajta görbék izoptikusainak meghatározására.

# 4. fejezet

# Az $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathrm{R}}$ geometriáról

Az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ az $\mathbf{SL_2R}$ univerzális fedése, továbbá egyike a 8 Thurston geometriának (lásd [56, 62]) is mely az egységnyi determinánsú, $2 \times 2$-es valós mátrixok 3 dimenziós Lie csoportjából vezethető le. A [40] munka szerint az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ téren invariáns Riemann metrikák tere 3 dimenziós.

## 4.1. Az $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathrm{R}}$ geometria projektív modellje

Ez a geometria a $\mathcal{PS}^3$ projektív gömbön és $\mathcal{P}^3$ projektív térben levezethető az $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ alakú, $2 \times 2$ valós egységnyi determinánsú $(ad - bc = 1)$ mátrixokból (lásd [43]).

Bevezetjuk az új $(x^0 : x^1 : x^2 : x^3)$ projektív koordinátákat, ahol

$$a := x^0 + x^3, \quad b := x^1 + x^2, \quad c := -x^1 + x^2, \quad d := x^0 - x^3.$$

Ekkor következik, hogy

$$0 > bc - ad = -x^0x^0 - x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 \tag{4.1}$$

egyenlet egy $\mathcal{H}$ egyköpenyű hiperboloid belsejét írják le a szokásos euklideszi koordinátarendszerben, ahol az origó $E_0(1 : 0 : 0 : 0)$ és a koordinátatengelyek ideális pontjai $E_1^\infty(0 : 1 : 0 : 0)$, $E_2^\infty(0 : 0 : 1 : 0)$, $E_3^\infty(0 : 0 : 0 : 1)$. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tér (és így a fenti kiterjesztéssel az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ tér) izometriái az alábbi $(a_i^j)$ mátrix segítségével írható le (lásd [43, 45]):

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & a_0^3 \\ \mp a_0^1 & \pm a_0^0 & \pm a_0^3 & \mp a_0^2 \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ \pm a_2^1 & \mp a_2^0 & \mp a_2^3 & \pm a_2^2 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

ahol

$$\begin{cases} -(a_0^0)^2 - (a_0^1)^2 + (a_0^2)^2 + (a_0^3)^2 & = & -1, \\ -(a_2^0)^2 - (a_2^1)^2 + (a_2^2)^2 + (a_2^3)^2 & = & 1, \\ -a_0^0a_2^0 - a_0^1a_2^1 + a_0^2a_2^2 + a_0^3a_2^3 & = & 0, \\ -a_0^0a_2^1 + a_0^1a_2^0 - a_0^2a_2^3 + a_0^3a_2^2 & = & 0, \end{cases}$$

ahol a projektív szabadsági fok mellett csak pozitív irányítást engedünk meg.

A $\mathbf{G}_T$ *transzlációs csoport* az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ izometria csoportjának azon részcsoportja, melyek $\mathcal{H}$-n tranzitívan hatnak. A $\mathbf{G}_T$ leképezés az $E_0(1 : 0 : 0 : 0)$ origót a tetszőleges $X(x^0 : x^1 : x^2 : x^3) \in \mathcal{H}$ pontba képezi.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ -x^1 & x^0 & x^3 & -x^2 \\ x^2 & x^3 & x^0 & x^1 \\ x^3 & -x^2 & -x^1 & x^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \\ x^1 & x^0 & -x^3 & x^2 \\ -x^2 & -x^3 & x^0 & -x^1 \\ -x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

A [43] alapján bevezetjük az úgynevezett hiperboloid parameterizációt:

$$\begin{cases} x^0 = \cosh r \cos \phi, \\ x^1 = \cosh r \sin \phi, \\ x^2 = \sinh r \cos (\theta - \phi), \\ x^3 = \sinh r \sin (\theta - \phi), \end{cases} \tag{4.4}$$

ahol $(r, \theta)$ az alapsík polárkoordinátái és $\phi$ fibrum irányú koordináta és $\left(r \in \mathbb{R}^+,\ \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi)\right)$. Vegyük észre, hogy

$$-x^0x^0 - x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 = -\cosh^2 r + \sinh^2 r = -1 < 0.$$

Az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ tér $\mathbf{E}^3$ vizualizációja során fontos szerepet játszanak az alábbi inhomogén koordináták:

$$\begin{cases} x := \dfrac{x^1}{x^0} = \tan \phi, \\ y := \dfrac{x^2}{x^0} = \tanh r \dfrac{\cos (\theta - \phi)}{\cos \phi}, \\ z := \dfrac{x^3}{x^0} = \tanh r \dfrac{\sin (\theta - \phi)}{\cos \phi}. \end{cases} \tag{4.5}$$

## 4.2. Geodetikus és transzlációs görbék

Az infititezimális ívelem négyzet a szokásos visszahúzás alapján adható meg (lásd [42, 46, 61]).

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + \cosh^2 r \sinh^2 r (\mathrm{d}\theta)^2 + \left[(\mathrm{d}\phi) + \sinh^2 r (\mathrm{d}\theta)\right]^2.$$

Így megkaphatjuk az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ tér $g_{ij}$ metrikus tenzorát:

$$g_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2 r(\sinh^2 r + \cosh^2 r) & \sinh^2 r \\ 0 & \sinh^2 r & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

A fenti számítások mintájára megkaphatjuk a metrikus tenzort az $(x^1, x^2, x^3)$ koordinátákra is:

$$g_{ij} := \begin{pmatrix} \frac{1+(x^2)^2+(x^3)^2}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{-x^1x^2-2x^3}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{-x^1x^3+2x^2}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} \\ \frac{-x^1x^2-2x^3}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{1+(x^1)^2+(x^3)^2}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{x^2x^3}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} \\ \frac{-x^1x^3+2x^2}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{x^2x^3}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} & \frac{1+(x^1)^2+(x^2)^2}{(-1-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)^2} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

### 4.2.1. Geodetikus görbék

Az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ geometriában a geodetikus görbét két (megfelelően közeli) általános pont közötti lokálisan minimális ívhosszúságú görbeként definiáljuk.

A $P, Q \in \widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ pontok közötti $d(P, Q)$ *geodetikus távolság* a köztük futú geodetikus görbe ívhosszaként van definiálva.

### 4.2.2. Transzlációs görbék

**4.2.1. Definíció.** *A $\mathcal{C}(t)$ görbét, ahol $t \geqslant 0$, transzlációs görbének nevezzük, ha*

$$\dot{\mathcal{C}}(0) \cdot T(t) = \dot{\mathcal{C}}(t), \quad t \geqslant 0.$$

**4.2.2. Definíció.** *Az $E_0(1 : 0 : 0 : 0)$ origó és $X(1 : x : y : z)$ pont közötti $\rho(E_0, X)$ transzlációs távolságot a köztük futó transzlációs görbe ívhosszával definiáljuk.*

4.1. táblázat. Geodetikus görbék

| Irány | Geodetikus görbe paraméterezése |
|---|---|
| $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ($\mathbf{H}^2$ – szerű) | $r(s,\alpha) = \operatorname{arsinh}\Big(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}\sinh(s\sqrt{\cos 2\alpha})\Big)$ $\theta(s,\alpha) = -\arctan\Big(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}\tanh(s\sqrt{\cos 2\alpha})\Big)$ $\phi(s,\alpha) = 2s\sin\alpha + \theta(s,\alpha)$ |
| $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ (fényszerű) | $r(s,\alpha) = \operatorname{arsinh}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}s\Big)$ $\theta(s,\alpha) = -\arctan\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}s\Big)$ $\phi(s,\alpha) = \sqrt{2}s + \theta(s,\alpha)$ |
| $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < -\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (fibrum – szerű) | $r(s,\alpha) = \operatorname{arsinh}\Big(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}\sin(s\sqrt{-\cos 2\alpha})\Big)$ $\theta(s,\alpha) = -\arctan\Big(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}\tan(s\sqrt{-\cos 2\alpha})\Big)$ $\phi(s,\alpha) = 2s\sin\alpha + \theta(s,\alpha)$ |

4.2. táblázat. Transzlációs görbék

| Irány | Transzlációs görbe paraméterezése |
|---|---|
| $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ($\mathbf{H}^2$ – szerű) | $\begin{pmatrix} x(s,\alpha,\lambda) \\ y(s,\alpha,\lambda) \\ z(s,\alpha,\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\tanh(s\sqrt{\cos 2\alpha})}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha\cos\lambda \\ \cos\alpha\sin\lambda \end{pmatrix}$ |
| $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ (fényszerű) | $\begin{pmatrix} x(s,\alpha,\lambda) \\ y(s,\alpha,\lambda) \\ z(s,\alpha,\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}s}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$ |
| $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < -\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (fibrum – szerű) | $\begin{pmatrix} x(s,\alpha,\lambda) \\ y(s,\alpha,\lambda) \\ z(s,\alpha,\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\tan(s\sqrt{-\cos 2\alpha})}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha\cos\lambda \\ \cos\alpha\sin\lambda \end{pmatrix}$ |

## 4.3. Geodetikus és transzlációs háromszögek

### 4.3.1. Geodetikus háromszögek

Tekintsük az $\widetilde{\mathbf{SL}_2\mathbf{R}}$ tér projektív modelljében az $A_1$, $A_2$, $A_3$ pontokat. Az $A_i$ és $A_j$ pontok közötti $a_k$ *geodetikus szakaszt*, ahol $(i < j,\ i,j,k \in \{1,2,3\}, k \neq i,j)$, az $A_1$, $A_2$, $A_3$ csúcsú $T_g$ geodetikus háromszög oldalának nevezzük.

#### 4.3.1.1. Fibrum-szerű derékszögű háromszög

Egy geodetikus háromszög fibrum-szerű, ha valamelyik oldala illeszkedik egy fibrumra.

**4.3.1. Lemma ([15]).** *Egy fibrum-szerű geodetikus derékszögű háromszög belső szögeinek összege nagyobb, vagy egyenlő, mint $\pi$.*

A 4.3 táblázatban numerikus számítási eredményeket közlünk az ott feltüntetett paraméterekre:

#### 4.3.1.2. Hiberbolikus-szerű geodetikus derékszögű háromszög

Egy geodetikus háromszög hiperbolikus-szerű, ha a csúcsai a modell alapsíkjában fekszenek, azaz az $[y,z]$ koordinátasíkban.

**4.3.2. Lemma ([15]).** *Egy hiperbolikus-szerű geodetikus derékszögű háromszög belső szögeinek összege lehet kisebb, vagy egyenlő is, mint $\pi$.*

4.3. táblázat. Fibrum-szerű geodetikus derékszögű háromszög: $x^3 = 1/5$

| $y^2$ | $\lvert\alpha_2^3\rvert = \lvert\alpha_3^2\rvert$ | $d(A_2A_3)$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\sum_{i=1}^3(\omega_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\to 0$ | $\to \pi/2$ | $\to$ $\arctan(1/5) \approx$ $\approx 0.1974$ | $\to \pi/2$ | $\to 0$ | $\to \pi$ |
| 1/1000 | 1.5657 | 0.1974 | 1.5658 | 0.0051 | 3.1417 |
| 1/3 | 0.4993 | 0.3970 | 0.3560 | 1.0715 | 3.1806 |
| 1/2 | 0.3170 | 0.5809 | 0.3560 | 1.2538 | 3.1806 |
| 3/4 | 0.1630 | 0.9891 | 0.2043 | 1.4078 | 3.1829 |
| 999/1000 | 0.0299 | 3.8032 | 0.0422 | 1.5409 | 3.1540 |
| $\to 1$ | $\to 0$ | $\to \infty$ | $\to 0$ | $\to \pi/2$ | $\to \pi$ |

4.4. táblázat. Hiperbolikus-szerű geodetikus derékszögű háromszög: $y^2 = 1/2$

| $z^3$ | $\lvert\alpha_2^3\rvert = \lvert\alpha_3^2\rvert$ | $d(A_2A_3)$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\sum_{i=1}^3(\omega_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\to 0$ | $\to 0$ | $\to$ $\operatorname{arctanh}(1/2) \approx$ $\approx 0.5493$ | $\to 0$ | $\to \pi/2$ | $\to \pi$ |
| 1/10 | 0.0811 | 0.5638 | 0.1334 | 1.2830 | 2.9872 |
| 1/3 | 0.2103 | 0.6994 | 0.3613 | 0.7170 | 2.6491 |
| $\frac{999}{1000}$ | 0.0649 | 4.0707 | 0.5817 | 0.0913 | 2.2438 |
| $\frac{(10^6-1)}{10^6}$ | 0.0330 | 7.5174 | 0.0467 | 0.6112 | 2.2288 |

**4.3.3. Sejtés ([15]).** *Egy hiperbolikus-szerű geodetikus derékszögű háromszög belső szögeinek összege kisebb, vagy egyenlő, mint $\pi$.*

A 4.4 táblázatban numerikus számítási eredményeket közlünk az ott feltüntetett paraméterekre:

#### 4.3.1.3. A $\pi$ belső szögű geodetikus háromszög

**4.3.4. Lemma ([15]).** *Van olyan $A_1A_2A_3$ geodetikus háromszög, melynek belső szögeinek összege $\pi$ és mindhárom csúcs valós, azaz $A_i \in \mathbf{SL_2R}$.*

**4.3.5. Tétel ([15]).** *Az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ tér geodetikus háromszögeinek belső szögösszege lehet kisebb mint $\pi$, nagyobb mint $\pi$, és $\pi$ is.*

### 4.3.2. Transzlációs háromszögek

Egy transzlációs háromszögről feltehető, hogy az egyik csúcsa az origóban van (toljuk oda, ha szükséges) és a másik két pontjának koordinátái rendre $A(1 : x_1 : y_1 : z_1)$ és $B(1 : x_2 : y_2 : z_2)$.

**4.3.6. Lemma ([15]).** *Egy origóra illeszkedő, $\mathbf{v}$ euklideszi normálvektorú $\sigma$ sík akkor és csak akkor invariáns egy (euklideszi értelemben) $\mathbf{v}$-re merőleges irányú eltolásra, ha $\mathbf{v}$ fényszerű.*

**4.3.7. Tétel ([15]).** *Az $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ tér transzlációs háromszögének belső szögösszege nagyobb vagy egyenlő mint $\pi$.*

**4.3.8. Megjegyzés.** *Egy transzlációs háromszög belső szögösszege akkor és csak akkor $\pi$, ha a háromszöget tartalmazó sík normálvektora fényszerű.*

## 4.4. A transzlációs szakasz izoptikus felülete

**4.4.1. Tétel (CsG).** *Legyen adott az* $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ *térben az* $A = (1:0:a:0)$ *és* $B = (1:0:-a:0)$ *végpontjaival egy transzlációs szakasz, ahol* $a \in (0,1)$. *Ekkor az* $\overline{AB}$ *szakasz* $\alpha$ *és* $\pi - \alpha$ *izoptikus felülete a következő egyenlettel adható meg:*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\left(x^2+y^2+z^2-a^2(1+x^2+z^2)\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2(1+x^2+z^2)\right)^2-(4axz-2ay)^2} \tag{4.8}$$

**4.4.2. Megjegyzés.** *Ha* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *teljesül, akkor megkapjuk az* $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ *tér Thalész felületét, amely a következő egyenletű forgási ellipszoid:*

$$\frac{x^2(1-a^2)}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2(1-a^2)}{a^2} = 1$$

# Irodalomjegyzék


[1] de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., Overmars, M.: Computational Geometry Algorithms and Applications, Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[2] Bonnesen, T., Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper, *Chelsea Publ. Comp.*, New York, 1948

[3] Böhm, J., Im Hof, C.: Flächeninhalt verallgemeinerter hyperbolischer Dreiecke, *Geometriae Dedicata*, 1992, **42**:223–233

[4] Camp, D. C., Van Lehn, A. L.: Finite solid-angle corrections for Ge(Li) detectors, *Nucl. Instrum. Methods*, Vol. **76**, No **2**., (1969), 192–240.

[5] Chasles, M.: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, originally published by Hayezin Bruxelles 1837.

[6] Cieślak, W., Miernowski, A., Mozgawa, W.: Isoptics of a Closed Strictly Convex Curve, *Lect. Notes in Math.*, 1481 (1991), pp. 28–35.

[7] Cieślak, W., Miernowski, A., Mozgawa, W.:Isoptics of a Closed Strictly Convex Curve II, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **96**, 37–49, 1996

[8] Cooligde, J.L.: The elements of non-Euclidean geometry, Oxford, *Clarendon Press*, 1909.

[9] Csima, G., Szirmai, J.: Isoptic curves on the hyperbolic plane, S*tud. Univ. Žilina, Math. Ser.* **24**, No 1, 15–22, 2010

[10] Csima, G., Szirmai, J. : Isoptic curves to parabolas in the hyperbolic plane, *Pollac Periodica* **7**, (2012/1/1). 55–64

[11] Csima, G., Szirmai, J.: On the isoptic hypersurfaces in the $n$-dimensional Euclidean space, *KoG (Scientific and professional journal of Croatian Society for Geometry and Graphics)* **17** 53–57, 2013.

[12] Csima, G., Szirmai, J. : Isoptic curves of conic sections in constant curvature geometries, *Mathematical Communications* Vol **19**, No 2(2014). 277–290

[13] Csima, G., Szirmai, J.: Isoptic surfaces of polyhedra, *Comput. Aided Geom. Design* **47**, 55–60, 2016.

[14] Csima, G., Szirmai, J.: Isoptic curves of generalized conic sections in the hyperbolic plane, *Ukrainian Mathematical Journal (accepted 2017.07.14.)*

[15] Csima, G., Szirmai, J.: The sum of the interior angles in geodesic and translation triangles of $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ geometry, *submitted manuscript.*

[16] Divjak, B., Erjavec, Z., Szabolcs, B., Szilágyi, B.: Geodesics and geodesic spheres in $\widetilde{\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})}$ geometry, *Math. Commun.* **14**(2), 413–424 (2009).

[17] Epshtein, I. Sh.: Complete Classification of Real Conic Sections in Extended hyperbolic plane, *Izv.vuz.* 1960, No. 1, pp. 234–243 (Russain)

[18] Fladt, K.: Die allgemeine Kegelschnittgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie, *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik*, 1957(**197**):121–139

[19] Fladt, K.: Die allgemeine Kegelschnittgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie II, *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik*, 1958(**199**):203–207

[20] García-Jiménez, M., González-Arreola, E., Jerónimo-Castro, J.: A characterization of the Euclidean sphere with respect to an isoptic surface, *J. Monatsh. Math.*, **181:3**, 2016.

[21] Gardner, R. J.: Geometric tomography (second edition), Encyclopedia of Math. and its Appl. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[22] Gardner, R. P., Verghese, K.: On the solid angle subtended by a circular disc, *Nucl. Instrum. Methods*, Vol. **91**, No **1**., (1971), 163–167.

[23] Green, J.W.: Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.* **17**, 263–267, 1950.

[24] Gotoh, H., Yagi, H.: Solid angle subtended by a rectangular slit, *Nuclear Instruments and Methods*, Vol **91**, No 3, 485–486, 1971.

[25] Holzmüller, G.: Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft, *B.G. Teuber*, Leipzig-Berlin, 1882.

[26] G.Horváth, Á: Hyperbolic plane geometry revisited, *Journal of Geometry* DOI: 10.1007/s00022-014-0252-0 (2014).

[27] G. Horváth Ákos, Szirmai Jenő: Nemeuklideszi geometriák modelljei, Typotex Kiadó, 2004

[28] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest 1960

[29] Joe, B.: Delaunay versus max-min solid angle triangulations for three-dimensional mesh generation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol **31**, No. **5**, (1991), 987–997.

[30] Kagan, V.F.: Foundations of Geometry, vol.**2** ch. **14** par. **69**, Gostehizdat, Moscow Leningrad, 1956

[31] Klamkin, M.S.: Conjectured isoptic characterization of a circle, *Am. Math. Monthly* **95**, 845, 1988.

[32] Kunkli, R., Papp, I., Hoffmann, M.: Isoptics of Bézier curves, *Comput. Aided Geom. Design* **30**, 78–84, 2013.

[33] Kurusa, Á.: You can recognize the shape of a figure from its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59**, 113–125, 1996.

[34] Kurusa, Á.: Is a convex plane body determined by an isoptic?, *Beitr. Algebra Geom.* **53**, 281–294 (2012)

[35] Liebmann, H..: Die Kegelschnitte und Die Planetenbewegung im nichteuclidischen Raum, Berlin-Leipzig, Ges. Wiss. 54, **1902**, 244–260.

[36] Loria, G.:Spezielle algebrische und transzendente ebene Kurven. 1 & 2, B.G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1911

[37] Michalska, M.: A sufficient condition for the convexity of the area of an isoptic curve of an oval, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **110**, 161–169, 2003

[38] Michalska, M., Mozgawa, W.: $\alpha$ -isoptics of a triangle and their connection to $\alpha$-isoptic of an oval, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, Vol **133** (2015) , p. 159–172

[39] Miernowski, A., Mozgawa, W.: On some geometric condition for convexity of isoptics, *Rend. Semin. Mat., Torino* **55**, No.2 93–98, 1997

[40] Milnor, J.: Curvatures of left Invariant metrics on Lie groups. *Advances in Math.* **21**, 293–329 (1976)

[41] Molnár, E.: Kegelschnitte auf der metrischen Ebene, *Acta Mathematica Hungarica*, Vol **31** (3–4), 1978, pp. 317–434.

[42] Molnár, E.: Projective metrics and hyperbolic volume, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math. **32** (1989), 127–157

[43] Molnár, E.: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beitr. Algebra Geom.* **38**(2), 261–288 (1997)

[44] Molnár, E., Szilágyi, B.: Translation curves and their spheres in homogeneous geometries. *Publ. Math. Debrecen* **78**(2), 327–346 (2011)

[45] Molnár, E., Szirmai, J.: Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries, *Symmetry Cult. Sci.* **21**(1-3), 87–117 (2010)

[46] Molnár, E., Szirmai, J.: Volumes and geodesic ball packings to the regular prism tilings in $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ space, *Publ. Math. Debrecen*, Vol **84/1-2**, 189–203 (2014)

[47] Molnár, E., Szirmai, J., Vesnin, A.: Packings by translation balls in $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$, *Journal of Geometry* **105**(2), 287–306 (2014)

[48] Molnár, E., Szirmai, J., Vesnin, A.: Geodesic and translation ball packings generated by prismatic tesselations of the universal cover of $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$, *Results in Mathematics*, Vol **71(3)**, 623-642 (2017)

[49] Mozgawa, W., Skrzypiec, M.: Crofton formulas and convexity condition for secantopics, *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin* 16, No. 3, 435–445, 2009

[50] Nagy, F., Kunkli, R.: Method for computing angle constrained isoptic curves for surfaces, *Ann. Math. et Inf.* **42**, 65–70, 2013.

[51] Nitsche, J.C.C.: Isoptic characterization of a circle (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Am. Math. Monthly* **97**, 45–47, 1990.

[52] Odehnal, B.: Equioptic curves of conic sections, *J. Geom Graph.* **14**, No.1, 2010, 29–43

[53] Ribano, J. M.: Measuring solid angles beyond dimension three, *Discrete Comput. Geom.*, Vol **36**, pp 479–487, 2006.

[54] Rosenfeld, B. A.: Non-Euclidean Spaces, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1955. 744 pp.

[55] Siebeck, F. H. : Über eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Funktionen zusammenhängen,
*J. Reine Angew. Math.* **57** (1860), 359?70; **59** (1861), 173?84

[56] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **15**, 401–487 (1983)

[57] Skrzypiec, M.: A note on secantopics, *Beitr. Algebra Geom.* **49**, No. 1, 205–215, 2008

[58] Strommer Gyula: Geometria, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[59] Szalkowski, D.: Isoptics of open rosettes, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, Sect. A **59**, 119–128, 2005

[60] Szirmai, J.: Regular prism tilings in $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$ geometry, *Aequationes Mathematicae*, **88/1–2** , pp 67–79, 2014.

[61] Szirmai, J.: Non-periodic geodesic ball packings to infinite regular prism tilings in SL(2,R) space, *Rocky Mountain J. Math.*, Vol **46/3**, 1055–1070, 2016

[62] Thurston, W. P. (and Levy, S. editor): Three-Dimensional Geometry and Topology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, vol. **1** (1997)

[63] Yates, R. C.: A handbook on curves and their properties, J. W. Edwards, Ann. Arbor, 138–140, 1947.

[64] Yu, L.: Conic volume ratio of the packing cone associate to a convex body, *Geom. Dedicata*, **160:1**, 219–228, 2012

[65] Vörös, C. : Analitikus Bólyai féle geometria, Első kötet, Budapest, 1909.

[66] Widder, D.V.: Advanced Calculus, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: 1962

[67] Wieleitener, H. : Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert LVI, *Göschen'sche Verlagshandlung.* Leipzig, 1908.

[68] Wunderlich, W. : Kurven mit isoptischem Kreis, *Aequat. math.* **6** (1971). 71-81.

[69] Wunderlich, W. : Kurven mit isoptischer Ellipse, *Monatsh. Math.* **75** (1971) 346-362.