

Doktori értekezés

Az információgeometria alkalmazása
kvantummechanikai rendszerekre

Lovas Attila

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Analízis Tanszék

Témavezető: Dr. Andai Attila
egyetemi docens

2017

Tartalomjegyzék

1. Sűrűségmátrixok információgeometriája	3
1.1. Kvantum valószínűségszámítási alapok	3
1.2. Operátormonoton függvények és monoton metrikák	9
1.3. Összefoglalás	16
2. Határozatlansági relációk	17
2.1. Történeti áttekintés	18
2.2. Kapcsolat az állapotter geometriájával	21
2.3. Szimmetrikus és antiszimmetrikus kvantum kovarianciák	23
2.4. Dinamikai határozatlansági relációk	25
2.5. Összefoglalás	29
3. Összetett kvantummechanikai rendszerek	31
3.1. Kvantum összefonódás	33
3.2. Szeparabilitási valószínűség a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapotteren	35
3.2.1. Milz és Strunz sejtésének bizonyítása	36
3.2.2. Általánosítás a $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaságra	46
3.2.3. Ellenőrző számítások	49
3.3. A $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterek geometriája	51
3.3.1. A $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterek szorzat struktúrája	51
3.3.2. PPT állapotok a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapottereken	56
3.3.3. Összefonódottság mérése a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ és $\mathcal{D}_{6,\mathbb{K}}$ állapottereken	60
3.4. Összefoglalás	61
4. Kvantum csatornák	63
4.1. Qubit csatornák reprezentációi	64
4.2. Eloszlás a klasszikus csatornák felett	66
4.2.1. Általános qubit csatornák	68
4.2.2. Egységőrző qubit csatornák	70
4.3. Véletlen qubit csatornák	74
4.4. A zaj egy lehetséges modellje	76
4.5. Összefoglalás	78
A. Lineáris algebra	89
A.1. Mátrixok	89
A.2. Pozitív definit mátrixok	90
A.3. Szuper operátorok	92

A.4. Tenzorszorzat és parciális nyom	93
B. Valószínűségszámítás és speciális függvények	95
C. A $\tilde{\chi}_1$ és $\tilde{\eta}_1$ függvények	99
C.1. A 3.2.1. Lemma bizonyítása	99
C.2. A 3.2.2. lemma bizonyítása	102
D. A $\tilde{\chi}_2$ függvény	105
E. A 4.3.1. lemma bizonyítása	107

Jelölések jegyzéke

\mathbb{N}	természetes számok halmaza
\mathbb{Z}	egész számok halmaza
\mathbb{Q}	racióális számok halmaza
\mathbb{R}	valós számok halmaza
\mathbb{C}	komplex számok halmaza
\mathbb{K}	számtest (ez esetünkben \mathbb{R} vagy \mathbb{C} lehet)
i	képzetes egység
$\text{Ran}(f)$	az f leképezés képtere
λ_n	n -dimenziós Lebesgue-mérték
$\mathbf{1}_A$	az A halmaz/esemény indikátorfüggvénye
$\mathbb{P}(A)$	az A esemény valószínűsége
$\mathbb{E}(X)$	az X valószínűségi változó várható értéke
$\mathbb{D}(X)$	az X valószínűségi változó szórása
$\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$	a $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorok által generált altér
$\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$	diagonális mátrix, melynek diagonálisában a μ_1, \dots, μ_n számok állnak
$\dim_{\mathbb{K}}(V)$	a V vektortér \mathbb{K} test feletti dimenziója
$\mathbb{K}^{n \times m}$	az $n \times m$ -es mátrixok \mathbb{K} számtest feletti vektortere
$\text{Lin}(V, W)$	a V vektorterről a W vektortérbe menő lineáris leképezések halmaza
$\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$	az $n \times n$ -es önadjungált mátrixok \mathbb{K} számtest feletti vektortere
$\text{rk}(A)$	az A mátrix rangja
$\text{tr}(A)$	az A mátrix nyoma
$\det(A)$	az A mátrix determinánsa
$\sigma(A)$	az A operátor spektruma
L_A	az A operátorral való balról szorzás operátora
R_A	az A operátorral való jobbról szorzás operátora
$\mathcal{B}(X)$	az X normált tér korlátos lineáris operátorai
\mathcal{A}^+	az \mathcal{A} C^* -algebra pozitív kúpja
$B_r(X)$	az origó középpontú r sugarú nyílt golyó az X normált térben
$\text{Vol}_g(\mathcal{M})$	az (\mathcal{M}, g) Riemann-sokaság térfogata (g -t néha nem írjuk ki)
∂A	az A halmaz határa
\square	bizonyítás vége

Bevezetés

A kvantum információgeometria egy viszonylag fiatal tudományterület, mely az 1990-es évek elején a kvantummechanikából – ezen belül is a kvantum információelméletből – és a klasszikus információgeometriából fejlődött ki. Targyát tekintve – a klasszikus információgeometriához hasonlóan – a (kvantum) valószínűségi eloszlások terét Riemann-sokaság struktúrával ruházza fel és kapcsolatokat keres a modell differenciálgeometriai jellemzői és a megfigyelhető fizikai mennyiségek (kvantum valószínűségi változók) között. A kvantum információgeometria eredményeit többek között a kvantum információelmélet és a kvantum statisztikus fizika használja fel. Eszköztárát tekintve elmondható, hogy erőteljesen épít a funkcionálanalízis és differenciálgeometria eredményeire. A klasszikus valószínűség számítással szemben lényeges különbség az, hogy a kvantum eseményalgebra – a klasszikus eseményalgebrával ellentétben – egy tipikusan nemdisztributív, csupán ortomoduláris háló struktúrával rendelkezik. Ennek a ténynek számos igen fontos hozadéka van a kvantum információelméletre és kvantum információgeometriára vonatkozólag. A teljesség igénye nélkül említjük meg a határozatlansági relációk és az összefonódott állapotok létezését, továbbá azt, hogy a klasszikus Fisher-féle információ a kvantum esetre rendkívül sokféleképpen általánosítható. A kvantum eseményalgebra szokásos modellje egy szeparábilis Hilbert-tér projektorhálója. Ebben a dolgozatban csupán véges dimenziós Hilbert-terekkel leírható kvantummechanikai rendszerek információgeometriai elemzésével foglalkozunk. Az ehhez nélkülözhetetlen lineáris algebra, mátrixanalízis és valószínűség számítás ismereteket a dolgozat végén található tematikusan rendezett függelékben foglaltuk össze. Ugyancsak ide kerültek azok a lemmák, amelyek túlzottan technikai jellegűek vagy amelyek bizonyítása olyan hosszú és szövevényes, hogy annak nyomon követése túlságosan elvonná az Olvasó figyelmét a lényegről. A tárgyalás során felbukkanó Riemann-geometriás fogalmaknak Szenthe [81] könyvében lehet utánanézni.

Az első fejezetet előkészítő jellegű fejezetnek szánjuk, melyben a kvantum valószínűség számítás hálóelméleti vonatkozásaiból kiindulva definiáljuk a kvantum információgeometria alapvető objektumát, a kvantummechanikai állapotteret mint differenciálható sokaságot. Ugyanitt esik szó a Fisher-féle információ lehetséges kvantum általánosításairól és a Petz-féle osztályozási tételről. A kvantummechanikai állapotteret a Petz-féle osztályozási tétel által jellemzett monoton metrikákkal ellátva különböző statisztikus sokaságokat kapunk, melyek későbbi vizsgálódásaink tárgyát képezik.

Az első fejezetet követő három jól elkülönülő fejezetben a kvantum információgeometria bizonyos területein elért újabb eredményeinket mutatjuk be. A második fejezetben határozatlansági relációkat vizsgálunk. Rövid történeti áttekintés után saját eredményeink ismertetésére térünk rá. Megmutatjuk, hogy a határozatlansági relációk egy igen tág családja, mely magában foglalja az ún. dinamikai határozatlansági relációkat s ezen be-

lül a Heisenberg-féle határozatlansági-elv Robertson általi általánosítását, lényegében a kvantummechanikai állapottéren értelmezett különböző Riemann-metrikák (és az ezeket indukáló operátormonoton függvények) közötti rendezésre vezethető vissza. Bevezetjük az antiszimmetrikus és a szimmetrikus kvantum kovarianciákat és megmutatjuk, hogy a közös – már Schrödinger által is vizsgált – kvantum kovariancia ezen utóbbi kovariancia családba sorolható. Megmutatjuk, hogy a szimmetrikus kovariancia család tagjaival az antiszimmetrikus család felülről becsülhető és bizonyítjuk azt is, hogy a számtani középhez és a harmonikus középhez tartozó operátormonoton függvények számtani közepe által indukált monoton metrika szolgáltatja a lehető legélesebb dinamikai határozatlansági relációt.

A harmadik fejezetben összetett kvantummechanikai rendszereket vizsgálunk. Itt mutatjuk be a dolgozat legfőbb eredményét: a 4×4 -es valós állapotokra vonatkozó szeparabilitási valószínűség meghatározását a közös Lebesgue-mértékre vonatkozólag. Mintegy melléktermékként kapjuk Milz és Strunz sejtésének bizonyítását, mely a 4×4 -es sűrűségmátrixokkal leírható kvantummechanikai rendszerekre kimondja a szeparabilitási valószínűség redukált állapottól való függetlenségét. Eredményeiket általánosítjuk arra az információgeometriai szempontból releváns esetre is, amikor az állapotteret a négyzetgyök függvény által származtatott monoton metrikával látjuk el. Megmutatjuk továbbá, hogy a $2n \times 2n$ -es sűrűségmátrixok alkotta állapottér előáll az $n \times n$ -es sűrűségmátrixok alkotta állapottér, az $n \times n$ -es önadjungált mátrixokból álló $[-I, I]$ operátor intervallum és az $n \times n$ -es mátrixok egységömbjének a direkt szorzataként. Ezt az egyébként messze nem lineáris felbontást használjuk fel arra, hogy geometriai leírását adjuk a 4×4 -es szeparabilis állapotoknak. Kiderül, hogy 4×4 -es szeparabilis kvantumállapotok pereme egy, a 2×2 -es mátrixok egységömbjén értelmezett függvény grafikonjaként előálló sokaság feletti triviális nyalábként áll elő. Ezek után bevezetünk egy kongruencia transzformációkra nézve invariáns távolságfogalmat az állapottéren, amire nézve meghatározzuk egy tetszőleges összefonódott állapot távolságát a szeparabilis állapotoktól.

A negyedik fejezetet qubit-qubit kvantum csatornák tanulmányozásának szenteljük. Ezek a csatornák egy qubit időfejlődését valamint a – minden kvantum számítási eljárás alapját képező – egy qubiten végrehajtható műveleteket írják le. A Choi-féle reprezentációban a qubit-qubit kvantum csatornák \mathbb{R}^{12} egy kompakt, konvex részsokaságaként jelennek meg. Erre a sokaságra később mint qubit csatornák terére hivatkozunk. Bevezetjük a qubit csatorna klasszikus nyomát mint a qubit csatorna klasszikus (diagonális) állapotokra történő megszorítottját. Ennek egy 2×2 -es sztochasztikus mátrix feleltethető meg. Ezek után meghatározzuk egy, a qubit csatornák terén egyenletes eloszlású csatorna klasszikus nyomának az eloszlását. Ezeket az eredményeket felhasználva független véletlen qubit csatorna sorozat qubitekre gyakorolt hatásával a dekoherenciát előidéző zajt modellezzük. Ennek a gyakorlati jelentősége abban áll, hogy a kvantumszámítógépekben alkalmazott kvantumkapuk sebessége a dekoherencia idejénél gyorsabb kell, hogy legyen, ezért a dekoherencia sebességének mérése a kvantumszámítógépek megvalósításának szemszögéből nézve kulcsfontosságú. A dekoherencia utáni állapot információ tartalmát a teljesen kevert állapotra vonatkozó relatív entrópiával, a dekoherencia előtti állapothoz képesti információ veszteséget pedig a kezdeti állapot dekoherencia utáni állapotra vonatkozó relatív entrópiájával jellemezzük. A fejezetet és egyben a dolgozatot a teljesen kevert állapothoz tartás konvergencia sebességének meghatározásával zárjuk.

1. fejezet

Sűrűségmátrixok információgeometriája

A fejezet célja, hogy az olvasót célorientált módon bevezesse a kvantum információgeometria alapvető módszereibe és biztosítsa azt az alapvető fogalmi keretet, melyre a többi fejezetet építjük majd fel.

A fejezet első felében kvantumlogikai hálóelméleti megalapozásából kiindulva definiáljuk a kvantummechanikai állapotteret és a fizikai mennyiségeket. Megmutatjuk, hogy egy véges dimenziós Hilbert-térrel modellezhető kvantummechanikai rendszer állapottere sima sokaság struktúrával látható el és jellemezzük ezen sokaság érintőtereit. A téma fizikai vonatkozásait illetően a [43, 64, 82] művekre és az [50] cikkekre utalunk.

A fejezet második felében definiáljuk a különböző kvantummechanikai állapotterek közötti sztochasztikus leképezéseket és az ún. monoton metrikákat, melyek a klasszikus Fisher-féle információ kvantumos általánosításának tekinthetők. Röviden összefoglaljuk az operátor monoton függvényekkel és a belőlük származó közepekkel kapcsolatos alapvető ismereteket és kimondjuk Petz híres osztályozási tételét, amely kapcsolatot teremt a monoton metrika családok és bizonyos operátormonoton függvények között. A témában további tájékoztató alapként és további tanulmányozásra a [2, 8, 9, 42, 58, 59] és [32] műveket ajánljuk.

1.1. Kvantum valószínűségszámítási alapok

A kvantumos és klasszikus események leírásában a háló mint algebrai struktúra és a hálók reprezentációi központi szerepet játszanak. Többek között ez indokolja, hogy a tárgyalást egy rövid hálóelméleti bevezetővel indítsuk.

1.1.1. Definíció. *Egy (\mathcal{L}, \leq) részben rendezett halmazt (azaz „ \leq ” $\subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus reláció) σ -hálónak nevezünk, ha az \mathcal{L} halmaz megszámlálható részhalmazainak létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja a \mathcal{L} halmazban.*

Ha (\mathcal{L}, \leq) σ -háló, akkor tetszőleges $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ megszámlálhatóan végtelen sok hálólelem legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját szokásos módon rendre a $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n$ illetve a $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n$ szimbólumok jelölik. Ha pedig $a, b \in \mathcal{L}$, akkor az $\{a, b\}$ halmaz legkisebb felső korlátját $a \vee b$, legnagyobb alsó korlátját pedig $a \wedge b$ jelöli.

1.1.2. Definíció. Az $(\mathcal{L}, \leq, \perp, 0, 1)$ ötöst ortokomplementumos σ -hálónak hívjuk, ha $(\mathcal{L}, \leq, 0, 1)$ korlátos σ -háló 0 és 1 alsó és felső korláttal, azaz

$$I. \forall a \in \mathcal{L} : 0 \leq a \text{ és}$$

$$II. \forall a \in \mathcal{L} : a \leq 1 \text{ teljesül.}$$

Az $\perp: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ ortokomplementációnak nevezett művelet pedig a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$i. \forall a \in \mathcal{L} : (a^\perp)^\perp = a$$

$$ii. \forall a, b \in \mathcal{L} : a \leq b \Rightarrow b^\perp \leq a^\perp$$

$$iii. \forall a \in \mathcal{L} : a \vee a^\perp = 1 \text{ és } a \wedge a^\perp = 0.$$

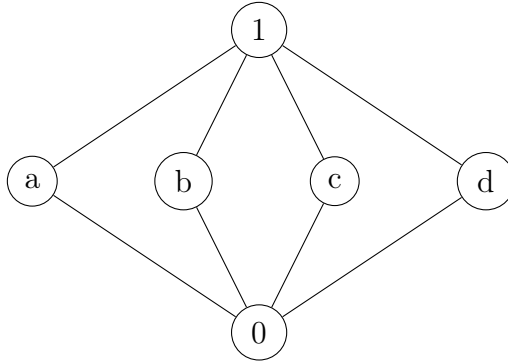
Az $(\mathcal{L}, \leq, \perp, 0, 1)$ ortokomplementumos σ -hálót ortomodulárisnak mondjuk, ha minden $a, b \in \mathcal{L}$ elemre, ha $a \leq b$ teljesül akkor fennáll az

$$b = a \vee (b \wedge a^\perp) \quad (1.1)$$

egyenlőség is. Disztributivitásról pedig akkor beszélünk, ha tetszőleges $a, b, c \in \mathcal{L}$ hálóelemekre

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (1.2)$$

teljesül. A $c = a^\perp$ választással az (1.2) egyenletben az ortokomplementáció *iii.* tulajdonságát és az 1 hálóelem felső korlát voltát kihasználva az (1.1) egyenlőséget kapjuk. Tehát a disztributivitásból az ortomodularitás következik. Megmutatható viszont, hogy a disztributivitás az ortomodularitáshoz képest valódi megszorítást jelent. Erről a következő példán keresztül győződhetünk meg. Tekintsük az 1.1. ábrán látható ún. Hasse-féle diagrammal adott hálót. Az ortokomplementációt ezen a hálón $0^\perp = 1$, $a^\perp = b$ és $c^\perp = d$



1.1. ábra. Egy ortomoduláris háló, amely nem disztributív.

egyenlőségekkel definiáljuk. Az (1.1) egyenlőség triviálisan fennáll, hiszen $a = 0$ vagy $b = 1$, illetve $a = b$ választás mellett azonosságot kapunk. Másféle módon pedig nem tudunk egymással rendezési relációban álló elemeket venni ebből a hálóból. A disztributivitás nem teljesülése pedig az $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ és $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$ számolásból következik. Ezek után az ortomoduláris σ -hálókat *eseményalgebrának* fogjuk nevezni, a hálóelemeket pedig eseményeknek hívjuk. Amikor eseményalgebrákról beszélünk a továbbiakban – ha félreértést nem okoz – csak az alaphalmazt (\mathcal{L}) írjuk ki. Az $a, b \in \mathcal{L}$ események kizárók, ha $a \wedge b = 0$.

1.1.3. Definíció. Az \mathcal{L} eseményalgebrán egy $\mathbb{P} : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ leképezést állapotnak hívunk, ha

i. $\mathbb{P}(1) = 1$ és

ii. ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ megszámlálhatóan végtelen sok egymást páronként kizáró esemény, akkor

$$\mathbb{P} \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(a_n).$$

Ha $a \in \mathcal{L}$, akkor a $\mathbb{P}(a)$ mennyiséget az a esemény valószínűségének nevezzük.

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus Kolmogorov-féle valószínűségi mező, akkor az \mathcal{F} σ -algebra a „ \subseteq ” tartalmazásra mint rendezési relációra nézve disztributív σ -háló, a \mathbb{P} valószínűségi mérték pedig egy állapot ezen a hálón. Ezen észrevétel megfordításának tekinthető az az eset, amikor \mathcal{L} egy véges sok elemet tartalmazó disztributív eseményalgebra. Ekkor ugyanis \mathcal{L} Boole-algebra és Stone-tétele szerint \mathcal{L} mint háló izomorf valamely Ω véges halmaz $\mathcal{P}(\Omega)$ -val jelölt hatványhalmazával, amely a „ \subseteq ” tartalmazással mint rendezéssel disztributív háló. Ebben az esetben az \mathcal{L} eseményalgebra állapotainak bijektíven megfeleltethetők az Ω feletti diszkrét valószínűségi eloszlások.

A klasszikus fizikai jelenségek modellezésére a disztributív eseményalgebrák elégségesnek bizonyultak, a kvantummechanika számára viszont a disztributivitás túlságosan nagy megszorítást jelent, ezért a disztributív hálók körén túl kell lépni és a kvantummechanika matematikai modelljét egy sokkal általánosabb, nem disztributív eseményalgebrára kell felépíteni [64].

1.1.4. Definíció. Legyen \mathcal{H} Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátorok C^* -algebráját. Egy $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ elemet projekciónak nevezünk, ha $P = P^* = P^2$ teljesül.

Egy \mathcal{H} Hilbert-tér projekciói és zárt alterei közt a $P \mapsto \text{Ran}(P)$ megfeleltetés bijekciót határoz meg. A \mathcal{H} Hilbert-tér projekcióinak halmazán bevezethetünk egy rendezést a következő módon: P és Q projekciók esetén akkor mondjuk, hogy $P \leq Q$, ha $\text{Ran}(P) \subseteq \text{Ran}(Q)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a \mathcal{H} Hilbert-tér projekcióinak $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -val jelölt halmaza az imént bevezetett rendezésre nézve a $P \mapsto P^\perp := I - P$ művelettel mint ortokomplementációval ellátva ortomoduláris σ -háló, melyben $0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ és $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ legnagyobb, illetve legkisebb elem.

A továbbiakban ennél a példánál maradunk és arra az esetre szorítkozunk, amikor a \mathcal{H} Hilbert-tér véges dimenziós. Ezt a matematikai formalizmust használják például spinnel rendelkező részecskék spin részének leírására nem-relativisztikus esetben [29, 43, 85, 84]. A véges dimenziós esetben az $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kvantum eseményalgebra állapotait a következő Gleason-tól származó tétel jellemzi.

1.1.1. Tétel (Gleason tétele). Legyen \mathcal{H} (véges dimenziós) valós vagy komplex Hilbert-tér. Ha $\dim(\mathcal{H}) \neq 2$, akkor tetszőleges, a \mathcal{H} Hilbert-tér $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -val jelölt projekcióján értelmezett $\mathbb{P} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$ állapothoz egyértelműen megadható egy $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egységnyomú pozitív operátor, melyre

$$\forall P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \mathbb{P}(P) = \text{tr}(\rho P)$$

teljesül. Továbbá igaz az is, hogy $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ minden ρ pozitív, egységnyomú eleme a $P \mapsto \text{tr}(\rho P)$ hozzárendelésen keresztül egy $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$ állapotot határoz meg.

A fenti tétel révén a kvantummechanikai állapottér azonosul a pozitív mátrixok kúpjának és az egységnyomú mátrixok hipersíkjának a metszetével, ezért ezentúl az n -dimenziós Hilbert-térrel leírt kvantummechanikai rendszer állapottere alatt

$$\overline{\mathcal{D}}_n = \{D \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid D \geq 0, \text{tr}(D) = 1\} \quad (1.3)$$

halmazt fogjuk érteni. A $\overline{\mathcal{D}}_n$ halmaz elemeit sűrűségmátrixoknak nevezzük. Ha ki szeretnénk hangsúlyozni, hogy mely számtest felett tekintjük az $n \times n$ -es sűrűségmátrixok terét, akkor $\overline{\mathcal{D}}_{n, \mathbb{K}}$ -t írunk, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Könnyen látható, hogy a $\overline{\mathcal{D}}_{n, \mathbb{K}}$ halmaz azonosítható az $\mathbb{R}^{n + \binom{n}{2}d}$ lineáris tér egy konvex zárt részhalmazával, ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$. A belső szorzás folytonosságából adódóan a $\overline{\mathcal{D}}_n$ halmaz \mathcal{D}_n -el jelölt belsejét a szigorúan pozitív sűrűségoperátorok alkotják.

1.1.5. Definíció. Egy $\rho \in \overline{\mathcal{D}}_n$ állapotot akkor hívunk tiszta állapotnak, ha $\text{rk}(\rho) = 1$. A nem tiszta állapotokat kevert állapotnak nevezzük.

Az, hogy a $\rho \in \overline{\mathcal{D}}_n$ állapot tiszta azzal ekvivalens, hogy $\rho = v \otimes v$ alakba írható, ahol v a \mathcal{H} Hilbert-tér egységvektora, ezért a tiszta állapotokat *vektorállapotnak* is szokás hívni. Vegyük észre, hogy a v és $e^{i\theta}v$, $\theta \in [0, 2\pi)$ egységvektorok ugyanazt $\rho = v \otimes v$ állapotot határozzák meg. Fordítva, ha a v és w egységvektorokhoz ugyanaz a tiszta állapot tartozik, akkor a v és w vektorok egy egységnyi abszolút értékű konstans szorzóban különböznek. Ez az észrevétel vezet el oda, hogy a tiszta állapotok azonosíthatók a $P(\mathcal{H}) = \mathbb{C}P^{\dim(\mathcal{H})-1}$ komplex projektív tér pontjaival.

Világos, hogy az állapottér \mathcal{D}_n -el jelölt belsejét csupa kevert állapot alkotja. Az viszont – a kétdimenziós Hilbert-térrel modellezett kvantummechanikai rendszer esetét leszámítva – nem igaz, hogy az állapottér $\partial\overline{\mathcal{D}}_n$ peremét csupa tiszta állapot alkotná. Triviális ellenpéldaként adódik a

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \partial\mathcal{D}_3$$

sűrűségmátrix, melynek rangja 2, így nem reprezentálhat tiszta állapotot.

1.1.6. Definíció. Azokat az állapotokat, melyeket diagonális sűrűségmátrix reprezentál klasszikus állapotok nevezzük.

Az alábbi példában a legegyszerűbb, még éppen nem triviális kvantummechanikai állapotteret elemezzük.

1.1.1. Példa (Bloch-gömb). Legyen $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ és tekintsük a $\overline{\mathcal{D}}_{2, \mathbb{C}}$ állapotteret. Az A.1.1 Megjegyzés szerint a $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ Pauli mátrixok alkotta rendszer bázis a 2×2 -es önadjungált mátrixok vektorterében, ezért minden $\rho \in \overline{\mathcal{D}}_{2, \mathbb{C}}$ állapot

$$\rho = \frac{1}{2} (I + x \cdot \underline{\sigma}) \quad (1.4)$$

alakba írható, ahol $x \in \mathbb{R}^3$ és $x \cdot \underline{\sigma} = \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j$. Megmutatható, hogy az (1.4) formulával definiált ρ mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1$, így a $\overline{\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}}$ állapotter pontjai a $\overline{\mathbb{B}_1(\mathbb{R}^3)}$ zárt egységgömb pontjainak bijektíven megfeleltethetők. A $\overline{\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}}$ állapotter elemeit qubiteknek hívjuk, az (1.4) előállítását Bloch-reprezentációnak nevezzük, a Bloch-reprezentáció x vektorát Bloch-vektor, a Bloch-vektorok végpontjai által lefedett alakzatot pedig Bloch-gömb névvel illetjük. A Bloch-vektor $\|x\|$ hossza a Bloch-sugár. Az (1.4) előállítását szokás még Stokes-paraméterezésnek is nevezni.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ha $x \in \overline{\mathbb{B}_1(\mathbb{R}^3)}$, akkor a $P_{\pm} = \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{x}{\|x\|} \cdot \underline{\sigma} \right)$ mátrixok ortogonális projekciókat határoznak meg, melyre $P_+ P_- = P_- P_+ = 0$ és $P_+ + P_- = I$ teljesül más szóval a $\{P_+, P_-\}$ egy teljes eseményrendszer a $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ kvantum eseményalgebrában, ezért az (1.4) formulával adott ρ állapot

$$\rho = \frac{1 + \|x\|}{2} \frac{1}{2} \left(I + \frac{x}{\|x\|} \cdot \underline{\sigma} \right) + \frac{1 - \|x\|}{2} \frac{1}{2} \left(I - \frac{x}{\|x\|} \cdot \underline{\sigma} \right) \quad (1.5)$$

alakban írható fel, ami az x Bloch-vektorral adott qubit spektrálfelbontása is egyben.

Magasabb dimenzióban a kvantummechanikai állapotter meglehetősen bonyolult alakzat lehet erre vonatkozóan egy rövid elemzés a [2] dolgozat 104–105. oldalán található.

1.1.2. Tétel. A $\overline{\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}}$ állapotter $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ -val jelölt belseje közönséges sima sokaság struktúrával látható el.

Bizonyítás. Az állapotter belsejét egyetlen térképpel fogjuk lefedni. A koordinátázást komplex állapotokra mutatjuk meg, a valós állapotok koordinátázása hasonlóképpen történik.

Legyen $\{e_i\}_{i=1}^n$ az n -dimenziós \mathcal{H} Hilbert-tér egy ortonormált bázisa és vezessük be az

$$e_k \vee e_l = e_k \otimes e_l + e_l \otimes e_k \quad \text{és} \quad e_k \wedge e_l = -i(e_k \otimes e_l - e_l \otimes e_k) \quad (1.6)$$

($1 \leq k < l \leq n$) operátorkokat és a $d_k = e_k \otimes e_k - e_n \otimes e_n$ operátorcsaládot, ahol $k = 1, 2, \dots, n-1$. Tekintsük a

$$\phi : \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2-1} \quad \rho \mapsto \phi(\rho) := \begin{pmatrix} \text{tr}(\rho(e_1 \vee e_2)) \\ \vdots \\ \text{tr}(\rho(e_{n-1} \vee e_n)) \\ \vdots \\ \text{tr}(\rho(e_1 \wedge e_2)) \\ \vdots \\ \text{tr}(\rho(e_{n-1} \wedge e_n)) \\ \vdots \\ \text{tr}(\rho d_1) \\ \vdots \\ \text{tr}(\rho d_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

leképezést. Ellenőrizhető, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű és inverzével együtt folytonos, tehát homeomorfizmus az $\mathcal{D}_{n,\mathbb{C}}$ állapotter és \mathbb{R}^{n^2-1} egy összefüggő nyílt halmaza

köztött. Az állapottér ezen térképezését *kanonikus koordinátázásnak* hívják. Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{R}}$ sokaság térképezése ϕ térképezéstől annyiban tér el, hogy nem szerepelnek a $e_k \wedge e_l$ operátorokhoz tartozó komponensek. Tehát a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ halmaz $n + \binom{n}{2}d - 1$ -dimenziós sima sokaság, ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$. \square

A határozatlansági relációkkal kapcsolatos vizsgálódásaink és az állapottér érintőtereinek jellemzése nem nélkülözheti a fizikai mennyiség és a fizikai mennyiség várható értékének a fogalmát. A fizikai mennyiségek absztrakt hálómorfizmusokon keresztül történő értelmezése megtalálható a [82] jegyzetben. Itt – terjedelmi korlátok miatt – meg kell elégednünk a következő definícióval.

1.1.7. Definíció. *Egy n -dimenziós Hilbert-térrel modellezett kvantummechanikai rendszer fizikai mennyiségei (más néven obeszervábilisei) az $n \times n$ -es önadjungált mátrixok. Az $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiség várható értékét a $\rho \in \overline{\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}}$ állapotban*

$$\mathbb{E}_{\rho}(A) = \text{tr}(\rho A)$$

módon definiáljuk.

Ha $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiség, akkor léteznek P_1, \dots, P_n páronként ortogonális projekciók, melyek összege I (azaz P_1, \dots, P_n teljes eseményrendszer), hogy

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \quad (1.8)$$

teljesül valamilyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valós számoknak, melyeket az A fizikai mennyiség *lehetséges értékeinek* hívunk. A fenti spektrálfelbontásból az A fizikai mennyiség várható értékére az

$$\mathbb{E}_{\rho}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{P}_{\rho}(P_i) \quad (1.9)$$

összeg előállítását kapjuk. A következő tétel a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sokaság érintőtereit írja le.

1.1.3. Tétel. *A $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sima sokaság tetszőleges $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ pont feletti $T_{\rho}\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőtere izomorf a zérusnyomú fizikai mennyiségek ($\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$) valós számtest feletti vektorterével.*

Bizonyítás. A bizonyításban a sima sokaság érintőtérének azon ekvivalens meghatározását vesszük alapul, amely az érintővektorokat a sokaságban haladó sima görbék ekvivalencia osztályaiként definiálja, ahol az ekvivalencia reláció az elsőrendű érintkezés.

Legyen $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sima görbe, melyre $\gamma(0) = \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$. A tr művelet lineáris funkcionál, ezért

$$\text{tr}(\dot{\gamma}(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{tr}(\gamma(t) - \gamma(0)) = 0$$

teljesül, azaz $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$. Tehát a $T_{\rho}\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőtér vektorai $(\rho, \dot{\gamma}(0))$ alakú párokkal reprezentálhatók és minden ilyen párra igaz, hogy a második elem zérusnyomú fizikai mennyiség, ezért rögzített $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ esetén a $T_{\rho}\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőtér beágyazható a $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$ vektortérbe.

Annak belátására, hogy ez a megfeleltetés szürjekció, legyen A tetszőleges zérusnyomú fizikai mennyiség és tekintsük a $t \mapsto \gamma(t) := \rho + tA$ sima görbét és a ϕ (1.7) térképezést.

A $\phi(\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2-1}$ halmaz nyílt, a γ függvény pedig folytonos. Ebből következik, hogy $\exists \varepsilon > 0$, melyre a γ görbe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumra történő megszorítása teljes egészében az $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sokaságban halad. A $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ affín leképezés, ezért sima, $\gamma(0) = \rho$ és $\dot{\gamma}(0) = A$. Az $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$ lineáris tér tehát nemcsak beágyazható a $T_\rho \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőtérbe, hanem izomorf is vele. \square

A $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sokaságot egyetlen térképpel fedtük, amely felett az érintőnyaláb triviális. Világos tehát, hogy $T\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőnyaláb mint vektornyaláb a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$ szorzat sokasággal izomorf. Más szóval a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sokaság párhuzamosítható.

1.2. Operátormonoton függvények és monoton metrikák

Most, hogy az állapotteret sima sokaság struktúrával láttuk el és jellemeztük az így előálló sokaság érintőtereit a következő lépés, hogy információelméleti szempontból releváns Riemann-metrikákat definiáljunk rajta és ezeket jellemezzük. Más területeken is történtek sikeres próbálkozások az állapottéren értelmezett Riemann-metrikák alkalmazására. Balian [12] és Streater [80] a statisztikus fizikában, Tanaka [83] pedig az átlagter elméletben alkalmazta őket sikerrel.

Rögtön adódik a kérdés, hogy mit nevezünk információelméleti szempontból relevánsnak? Olyan metrikákat keresünk, melyekkel az állapotteret ellátva a kapott Riemann-sokaság geometriai jellemzőinek vizsgálatán keresztül kvantum információelméleti kérdéseket tudunk megválaszolni. Ha a metrikából származó geodetikus távolságot az egyes állapotok információs távolságával – bármit is jelentsen ez – szeretnénk kapcsolatba hozni, akkor logikus megkövetelni azt, hogy ha két kvantummechanikai állapottér között bizonyos speciális tulajdonságú leképezésekkel kapcsolatot létesítünk, akkor a képterről visszahúzott metrika a kiinduló terünk állapotait közelebbinek mutassa, mint annak saját metrikája. Először is tisztázni kell, hogy milyen leképezésekre gondolunk.

1.2.1. Definíció. Egy $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ lineáris leképezést pozitívnak nevezünk, ha pozitív elemnek pozitív elemet feleltet meg, azaz $T(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)^+) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)^+$. Akkor mondjuk, hogy a T leképezés k -pozitív ($k \in \mathbb{N}$), ha az

$$\text{id}_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^k)} \otimes T : \mathcal{B}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$$

leképezés pozitív. Ha a T leképezés minden k természetes számra k -pozitív, akkor teljesen pozitívnak mondjuk. A teljesen pozitív nyomtartó leképezéseket pedig sztochasztikus leképezéseknek nevezzük.

Sztochasztikus leképezéseket – másnéven kvantum csatornákat – a 4. fejezetben tárgyaljuk majd részletesen.

1.2.2. Definíció. A $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ metrika családot monoton metrika családnak nevezzük, ha g_n Riemann metrika a \mathcal{D}_n állapottéren minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, továbbá minden $T : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{D}_m$ sztochasztikus leképezésre, minden $\rho \in \mathcal{D}_n$ állapotra és minden $A \in T_\rho \mathcal{D}_n$ érintőtérbeli vektorra

$$(T^* g_m)(\rho)(A, A) = g_m(T(\rho))(T(A), T(A)) \leq g_n(\rho)(A, A)$$

teljesül.

Ha \mathcal{H} Hilbert-tér, akkor a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ önadjungált elemein a $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ pozitív kúp parciális rendezést definiál az alábbi módon

$$A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+ \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}. \quad (1.10)$$

A monoton metrika családok a klasszikus információelméletben definiált Fisher-féle információ kvantumos általánosításai, ezért gyakran *kvantum Fisher-információnak* hívják őket. A klasszikus Fisher-információról és a kvantumos esetre történő általánosítással kapcsolatos kérdésekről a [2] dolgozatban olvashatunk bővebben.

1.2.3. Definíció. Az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -monoton, ha megtartja $\mathcal{M}_{n, \mathbb{C}}^{sa}$ elemein a fent módon definiált parciális rendezést, vagyis

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{C}}^{sa}$$

teljesül. Akkor mondjuk, hogy az f függvény operátormonoton, ha minden n pozitív egészre n -monoton.

Egy $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ operátormonoton függvényt szimmetrikusnak nevezünk, ha $\forall x \in \mathbb{R}^+$ esetén fennáll az

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

egyenlőség. Egy f operátormonoton függvény normált, ha az $x = 0$ pontra folytonosan kiterjeszthető és $f(1) = 1$ teljesül.

A szimmetrikus, normált operátormonoton függvények összességét \mathcal{F}_{op} -al jelöljük. Az \mathcal{F}_{op} halmaz két fontos részhalma

$$\mathcal{F}_{\text{op}}^r = \{f \in \mathcal{F}_{\text{op}} \mid f(0) \neq 0\} \text{ és } \mathcal{F}_{\text{op}}^n = \{f \in \mathcal{F}_{\text{op}} \mid f(0) = 0\}.$$

Számos monoton növekvő függvényről kiderül, hogy nem operátormonoton. Az $x \mapsto x^2$ függvény például mégcsak nem is 2-monoton. Ennek bizonyítása példával együtt megtalálható a [16] könyvben. Az $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ exponenciális függvény szintén nem operátormonoton, sőt Wu azt is megmutatta, hogy egy \mathcal{A} C^* -algebra \mathcal{A}^+ pozitív kúpján az exponenciális függvény pontosan akkor monoton, ha az \mathcal{A} algebra kommutatív [86].

1.2.1. Példa. Az alábbi függvények mindegyike szimmetrikus, normált operátormonoton függvény.

$$\begin{aligned} f_{SM}(x) &= \frac{1+x}{2} \\ f_{LA}(x) &= \frac{2x}{1+x} \\ f_{GM}(x) &= \sqrt{x} \\ f_{KM}(x) &= \frac{x-1}{\log(x)} \\ f_{WY}(x) &= \frac{1}{4}(\sqrt{x}+1)^2 \\ f_{WYD}(x) &= \frac{1-\alpha^2}{4} \frac{(x-1)^2}{(1-x^{\frac{1-\alpha}{2}})(1-x^{\frac{1+\alpha}{2}})} \end{aligned}$$

Ezek után kimondhatjuk Petz híres osztályozási tételét, ami a monoton metrika családok pontos karakterizációját adja.

1.2.1. Tétel (Petz, 1996). *A monoton metrikacsaládok és a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ilyen bijekciót például a következő módon lehet megadni.*

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{\text{op}}) \quad (g_f)_n : \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \times \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \rightarrow \mathbb{K} \quad (\rho, A, B) \mapsto (g_f)_n(\rho)(A, B) \quad (1.11)$$

$$(g_f)_n(\rho)(A, B) = \text{tr} \left(A \left(R_{\rho}^{\frac{1}{2}} f(L_{\rho} R_{\rho}^{-1}) R_{\rho}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (B) \right), \quad (1.12)$$

ahol L_{ρ} és R_{ρ} ún. szuper operátorok (Bővebben lásd: az A.3. Függelékben). Az így definiált megfeleltetés egy adott f operátormonoton függvényhez egy jól meghatározott $((g_f)_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ monoton metrika családot rendel és minden monoton metrikacsalád előállítható ezen a módon egy alkalmas $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátormonoton függvény segítségével.

Bizonyítás. A tétel bizonyítással együtt az [59] cikkben található meg. □

Az A.3. Függelékben található (A.2) azonosítás révén a folytonos függvényszámítás algebra morfizmus voltát felhasználva a $(g_f)_n$ Riemann-metrika a

$$(g_f)_n(\rho)(A, B) = \text{tr} (A(G_f)_n(\rho)(B)) \quad A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$$

ekvivalens alakra írható át, ahol

$$(G_f)_n(\rho) = (I \otimes \rho^{-1/2}) \left(\frac{1}{f} \right) (\rho \otimes \rho^{-1}) (I \otimes \rho^{-1/2})$$

és amiről a tr ciklikusságát kihasználva a metrika

$$(g_f)_n(U\rho U^*)(UAU^*, UBU^*) = (g_f)_n(\rho)(A, B) \quad U \in U(n)$$

unitér invarianciája azonnal leolvasható.

Rátérünk a $(g_f)_n$ metrika mátrixának a kiszámítására a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ sokaság az 1.1.2. tételben bemutatott kanonikus koordinátázása mellett. A metrika imént belátott unitér invarianciája miatt egy fix $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ ponthoz választhatunk úgy $\{e_k\}_{k=1\dots n}$ ortonormált bázist, hogy $\rho = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \otimes e_k$ alakú legyen, ahol $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. A $\{e_k \otimes e_l\}_{k,l=1\dots n}$ szorzat bázisban a

$$(G_f)_n(\rho) = (I \otimes \rho^{-1/2}) \left(\frac{1}{f} \right) (\rho \otimes \rho^{-1}) (I \otimes \rho^{-1/2}) = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{\mu_l f \left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)} (e_k \otimes e_l) \otimes (e_k \otimes e_l) \quad (1.13)$$

spektrálfelbontást kapjuk.

1.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapot az $\{e_k\}_{k=1\dots n}$ ortonormált bázisban $\rho = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \otimes e_k$ alakú, ahol $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Ekkor a (1.12) formulával definiált*

$(g_f)_n$ monoton metrika „mátrixa” $T_\rho \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \cong \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$ 1.1.2. tételben definiált $\{e_k \vee e_l, e_k \wedge e_l\}_{1 \leq k < l \leq n} \cup \{d_k\}_{k=1,2,\dots,n-1}$ bázisára vonatkozólag

$$\begin{aligned} (g_f)_n(\rho)(e_k \vee e_l, e_k \vee e_l) &= \frac{2}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} \\ (g_f)_n(\rho)(e_k \wedge e_l, e_k \wedge e_l) &= \frac{2}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} \\ (g_f)_n(\rho)(d_k, d_l) &= \frac{1}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_k} \delta_{k,l}, \end{aligned}$$

ahol minden más kombinációban a báziselemek $(g_f)_n(\rho)$ által definiált belső szorzata nulla. A fizikusok által kedvelt „ívelem-négyzetes” felírásban a metrika

$$ds^2 = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \left(\frac{2}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} ((de_k \wedge e_l)^2 + (de_k \vee e_l)^2) + \frac{1}{\mu_n} (dd_k)(dd_l) \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} (dd_k)^2$$

alakba írható.

Bizonyítás. Az (1.13) formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (G_f)_n(e_k \vee e_l) &= \frac{1}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} e_k \vee e_l \\ (G_f)_n(e_k \wedge e_l) &= \frac{1}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} e_k \wedge e_l \\ (G_f)_n(d_k) &= \frac{1}{\mu_k} e_k \otimes e_k - \frac{1}{\mu_n} e_n \otimes e_n, \end{aligned}$$

ahol $(G_f)_n(e_k \vee e_l)$ és $(G_f)_n(e_k \wedge e_l)$ számolásánál az f operátormonotonfüggvény szimmetriáját, $(G_f)_n(d_k)$ kiszámításánál pedig az f normáltságát használtuk. Ebből a metrika bilinearitását és $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fent említett bázisának ortogonalitását felhasználva rövid számolás után kapjuk az állítást. \square

1.2.1. Következmény. *A metrika unitér invarianciájából és az 1.2.2 tételből az A.1.4 lemma felhasználásával következik, hogy ha $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, akkor $(\mathcal{D}_n, (g_f)_n)$ Riemann-sokaság térfogati formája a $\rho \in \mathcal{D}_n$ pontban*

$$\sqrt{\det((g_f)_n(\rho))} = \frac{1}{\sqrt{\det(\rho)}} \prod_{0 \leq k < l \leq n} \left(\frac{2}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} \right)^{\frac{d}{2}}, \quad (1.14)$$

ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$.

Szükséges még két fontos unitér-invariáns metrikát megemlítenünk az állapotterén. Az egyik a Hilbert–Schmidt-metrika vagy más néven lapos metrika, melyet a

$$g_{HS}(\rho)(A, B) = \text{tr}(AB) \quad (1.15)$$

formula definiál. Ennek előnye, hogy könnyű vele számolni és szemléletes jelentéssel bír: $g_{HS}(\rho)(A, B)$ egyszerűen az $[A_{i,j}]$ és $[B_{i,j}]$ mátrixelemekből alkotott n^2 -dimenziós vektorok standard belső szorzata. Hátránya, hogy semmilyen információelméleti jelentéssel sem bír.

A normális eloszlás geometriájából származik a

$$g_{GM}(\rho)(A, B) = \text{tr}(A\rho^{-1}B\rho^{-1}) \quad \rho \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^{n \times n})^+ \quad (1.16)$$

Thompson-metrika, amire formálisan $g_{GM}(\rho)(A, B) = (g_{f_{GM}})_n(\rho^2)(A, B)$ teljesül. Ez a metrika számos kellemes tulajdonsággal bír. Például nemcsak unitér invariáns, de kongruencia invariáns is, ami azt jelenti, hogy tetszőleges $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrixra a

$$g_{GM}(S\rho S^*)(SAS^*, SBS^*) = g_{GM}(\rho)(A, B)$$

egyenlőség teljesül. Ennek fontos következménye, hogy a g_{GM} metrikából származó geodetikus távolság is kongruencia invariáns. Hátránya, hogy a $\mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{K}^{n \times n})^+$ 1-kodimenziós részsokaság nem totálgeodetikus részsokaság erre a metrikára nézve, ami azonnal látható, ha tudjuk, hogy az $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^{n \times n})^+$ pontokat összeköző geodetikus a

$$[0, 1] \ni t \mapsto A \#_t B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^t A^{1/2} \quad (1.17)$$

görbe, a g_{GM} metrikából származó geodetikus távolság pedig

$$\delta(A, B) = \sqrt{\text{tr}(\log^2(A^{-1/2} B A^{-1/2}))}, \quad (1.18)$$

amiről megmutatható, hogy szintén kongruencia-invariáns.

Előrebocsátjuk, hogy a Thompson-metrikára nézve az $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^{n \times n})^+$ pontokat összekötő geodetikus felezőpontja az A és B mátrixok geometriai közepe. A g_{GM} metrikáról további információ a [32] könyv 5.1. alfejezetében található. A fenti két metrika egyike sem monoton metrika, így nem származtathatók szimmetrikus, normált operátormonoton függvényekből. A kvantummechanikai állapotterétfogatát a Hilbert–Schmidt-metrikából származó térfogatra nézve Andai [1] és Życzkowski határozták meg [37].

Jogosan vetődhet fel a kérdés az Olvasóban, hogy eddig miért csak az állapotteré belsejével foglalkoztunk és az állapotteré pereméről, valamint a tiszta állapotokról nem mondtunk semmit sem. A helyzet az, hogy a $\overline{\mathcal{D}}_n$ állapotteré peremes sokaság struktúrával látható el, a tiszta állapotok $\partial \overline{\mathcal{D}}_n$ peremen helyezkednek el. A monoton metrika családok állapotteré peremére történő radiális kiterjeszthezőségét Petz és Sudár vizsgálták [59]. Azt találták, hogy egy $(g_f)_n$ monoton metrika pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha a metrikát indexelő f szimmetrikus, normált operátor monoton függvény reguláris, azaz $f(0) \neq 0$. Megmutatható az is, hogy a kiterjesztett metrika a tiszta állapotokon a $\mathbb{C}P^{\dim(\mathcal{H})-1}$ komplex projektív térről visszahúzott Fubini–Study metrika számszorosa lesz.

A fejezet hátralevő részében operátor monoton függvényekből származtatható operátorközepekkel, operátor monoton függvények integrál reprezentációival és egyéb, későbbiekben hasznos operátor monoton függvényekkel kapcsolatos tételekkel foglalkozunk.

1.2.4. Definíció. Egy $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ függvénycsaládot mátrixközépnek hívunk, ha

$$m_n : (\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ \times (\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ \rightarrow (\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

leképezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa} \quad m_n(A, A) = A,$
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa} \quad m_n(A, B) = m_n(B, A),$
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa} \quad A \leq B \Rightarrow A \leq m_n(A, B) \leq B,$
4. $\forall S \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa} \quad S m_n(A, B) S^* \leq (S A S^*, S B S^*).$

Az $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ függvénycsaládtól megköveteljük továbbá, hogy teljesítse az

$$\forall \lambda, \mu > 0 : \quad m_n(\lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n}, \mu \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n}) = m_1(\lambda, \mu) \quad n \in \mathbb{N}^+$$

konzisztencia feltételt.

Megállapodunk, hogy a továbbiakban a mátrixközépek indexelését elhagyjuk, azaz az $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ függvénycsalád minden tagját egységesen m -el jelöljük. Ando és Kubo japán matematikusok megmutatták, hogy az alfejezet elején bevezetett operátor monoton függvények és a fent definiált mátrixközépek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető [42].

1.2.3. Tétel (Ando, Kubo). *Tetszőleges m mátrixközéphez egyértelműen megadható olyan $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ operátormonoton függvény, melyre $\forall t \in \mathbb{R}^+$ esetén*

$$f(t)I = m(I, tI) \quad (t > 0)$$

teljesül, továbbá $0 < A$ és $0 \leq B$ mátrixok esetén az

$$m(A, B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2} = f(B A^{-1}) A$$

egyenlőség áll fenn.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása a [32] könyv 198–199. oldalán található. □

Az f operátor monoton függvényhez asszociált mátrixközépet m_f -el jelöljük. Ha egy pillantást vetünk a monoton metrikák Petz-tételben szereplő (1.12) alakjára, akkor felfedezhetjük, hogy a statisztikai sokaság „görbültségéért” felelős $(G_f)_n(\rho)$ szuperoperátor

$$(G_f)_n(\rho) = m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} \tag{1.19}$$

alakba írható. Ez motiválja, hogy bevezessük a $c_f = m_f^{-1}$ ún. Cenzov–Morozova függvényt, ami a későbbiekben nagyban egyszerűsíti jelöléseinket. Az elnevezés a monoton metrikákkal kapcsolatos Cenzov–Morozova-tételből ered, amiről bővebben a [2] dolgozat 114. oldalán olvashatunk.

A következő példa mutatja, hogy sok közismert, pozitív számpárokra értelmezett közép igazából valamilyen mátrixközép speciális esete.

1.2.2. Példa. Az 1.2.1 Példában bemutatott f_{SM} , f_{GM} és f_{LA} operátor monoton függvények rendre a számtani, mértani és harmonikus középnek megfelelő mátrixközepeket indukálják, melyekre az alábbi jelöléseket vezetjük be

$$\begin{aligned} (\forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ : \quad A \nabla B &:= m_{f_{SM}}(A, B) = \frac{1}{2}(A + B) \\ (\forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ : \quad A \# B &:= m_{f_{GM}}(A, B) = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\ (\forall A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa})^+ : \quad A!B &:= m_{f_{LA}}(A, B) = 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Ando és Kubo igazolták azt is, hogy csakúgy mint a pozitív számpárokon értelmezett közepeknél a mátrixok számtani közepe a legnagyobb és a mátrixok harmonikus közepe a legkisebb, azaz

$$A \leq A!B \leq m(A, B) \leq A \nabla B \quad 0 \leq A \leq B$$

teljesül minden m mátrixközépre. Érdekes még itt megemlíteni az $A \# B$ geometriai közép további két figyelemre méltó tulajdonságát. Ha A és B pozitív szemidefinit mátrixok, A pedig invertálható, akkor a pozitív mátrixok kúpja által definiált részbenrendezésre nézve a legnagyobb X pozitív mátrix, melyre az

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix}$$

mátrix pozitív éppen az A és B mátrixok $A \# B$ geometriai közepe. A geometriai közép ezen karakterizációjából levezethető, hogy ha P, Q projekciók valamely \mathcal{H} véges dimenziós Hilbert-téren, akkor a \mathcal{H} projekció hálóban az általunk korábban geometriai úton értelmezett $P \wedge Q$ mennyiség

$$P \wedge Q = P \# Q$$

alakot ölt. További sok érdekes, mátrixközepekkel kapcsolatos tételről a [32] könyv 5.1. fejezetében olvashatunk.

1.2.4. Tétel. Az $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}^r$ reguláris operátor monoton függvényhez

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left((1+x) - (1-x)^2 \frac{f(0)}{f(x)} \right),$$

összefüggés által rendelt \tilde{f} függvény operátor monoton, az $f \mapsto \tilde{f}$ hozzárendelés pedig bijekció az $\mathcal{F}_{\text{op}}^r$ és $\mathcal{F}_{\text{op}}^n$ halmazok között. Minden $g \in \mathcal{F}_{\text{op}}^n$ operátor monoton függvényhez egyértelműen létezik olyan μ_g valószínűségi mérték a $[0, 1]$ intervallumon, hogy a g függvény

$$\frac{x}{g(x)} = \int_0^1 \frac{1+t}{2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{1+tx} \right) d\mu_g(t) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

integrál integrál alakban áll elő, továbbá az

$$\frac{1}{f_g(x)} = \frac{\int_0^1 \frac{t}{1+t} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{1+tx} \right) d\mu_g(t)}{\int_0^1 \frac{t}{1+t} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t} \right) d\mu_g(t)}$$

integrállal definiált f_g függvény reguláris operátor monoton függvény, melyre $\tilde{f}_g = g$ teljesül.

Bizonyítás. A bizonyítás a [23] cikkben található meg. \square

1.2.1. Megjegyzés. *Az szimmetrikus, normált operátor monoton függvények pontonkénti rendezésére nézve az $\frac{f(0)}{f(x)} \mapsto \tilde{f}(x)$ hozzárendelés rendezés fordító, ezért a $\frac{f(0)}{\tilde{f}(x)}$ mennyiség az $f = f_{SM}$ operátor monoton függvény esetén maximális.*

A szimmetrikus normált operátor monoton függvények és a $[0, 1]$ intervallum Borel σ -algebráján értelmezett valószínűségi mértékek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Erről szól a következő tétel.

1.2.5. Tétel. *Tetszőleges $g \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényhez egyértelműen létezik μ valószínűségi mérték a $[0, 1]$ intervallumon, melyre a g függvény reciproka*

$$\frac{1}{g(x)} = \int_{[0,1]} \frac{1+t}{2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{1+tx} \right) d\mu(t) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

integrál alakban áll elő.

Bizonyítás. A bizonyítás a [11] és [30] cikkekben található meg. \square

1.3. Összefoglalás

A fejezet a dolgozat megértéséhez nélkülözhetetlen kvantum információ geometriai ismereteket tartalmazza.

1. A kvantum valószínűségszámítás hálóelméleti vonatkozásaiból kiindulva bevezettük kvantum információ geometria alapvető objektumát, a kvantummechanikai állapotteret.
2. Megmutattuk, hogy a véges dimenziós Hilbert-terekkel leírt kvantum mechanikai rendszerek állapotterének belseje sima sokaság struktúrával látható el, továbbá ezen sokaság érintőterei a zérus nyomú fizikai mennyiségek vektorterével azonosíthatók.
3. Definiáltuk a sztochasztikus leképezéseket és monoton metrikákat.
4. Bevezettük a szimmetrikus, normált operátor monoton függvények családját és ki-mondtuk Petz híres osztályozási tételét, amely kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít ezen függvénycsalád és a monoton metrika családok között.
5. Végezetül a fejezet végén az operátor monoton függvényekkel és a hozzájuk asszociált mátrix közepekkel kapcsolatos alapvető ismereteket foglaltuk össze.

2. fejezet

Határozatlansági relációk

A Kolmogorov-féle klasszikus valószínűségszámítás egy X valószínűségi változó szórásnégyzetét a $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ formulával értelmezi. Ez minden további nehézség nélkül átvihető kvantumos esetre.

2.0.1. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiség szórásnégyzetét – más szóval varianciáját – a $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotban

$$\mathbb{D}_\rho^2(A) = \mathbb{E}_\rho(A^2) - \mathbb{E}_\rho(A)^2 = \text{tr}(\rho A^2) - \text{tr}(\rho A)^2 \quad (2.1)$$

módon értelmezzük.

A klasszikus kovariancia fogalom kvantumos általánosítása ennél jóval nehezebb feladat. Klasszikus esetben az X és Y valószínűségi változók kovarianciája $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ennek formális általánosítása kvantumos esetre

$$\text{Cov}_\rho(A, B) = \mathbb{E}_\rho(AB) - \mathbb{E}_\rho(A)\mathbb{E}_\rho(B) \quad A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \quad \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$$

lenne, ami egymással nem felcserélhető A, B fizikai mennyiségek esetén két problémát is felvet. Az egyik az, hogy $[A, B] \neq 0$ esetén AB nem önadjungált, azaz nem fizikai mennyiség, következésképpen $\mathbb{E}_\rho(AB)$ modellünkben nézve értelmezhetetlen. A másik probléma az, hogy ha A és B nem felcserélhetők, akkor a fenti formális általánosítás változóiban egy nem szimmetrikus kovariancia függvényt definiál. Ezen problémák feloldása céljából Schrödinger 1930-ban bevezette a

$$\text{Cov}_\rho(A, B) = \mathbb{E}_\rho \left(\frac{1}{2}(AB + BA) \right) - \mathbb{E}_\rho(A)\mathbb{E}_\rho(B) \quad A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \quad \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \quad (2.2)$$

kvantum kovarianciát [67], amely kvantum valószínűségszámítás keretei között jól definiált, változóiban már szimmetrikus mennyiség.

A Schrödinger által bevezetett kovarianciáról kiderül, hogy a nem felcserélhető fizikai mennyiségek kovarianciája – több mennyiség esetén pedig a kovariancia mátrix determinánsa – alulról becsülhető olyan mennyiségekkel, melyek a tekintett fizikai mennyiségek és a rendszert leíró állapot felcserélhetőségét mérik. Az ilyen típusú egyenlőtlenségeket összefoglaló néven *határozatlansági relációknak* nevezzük. A határozatlansági relációk létezése tipikusan nemkommutatív jelenség, mely klasszikus esetben arra a triviális tényre

redukálódik, hogy a klasszikus valószínűségi változók kovariancia mátrixa pozitív szemidefinit.

A fejezetben a határozatlansági relációk egy speciális típusát az ún. *dinamikai határozatlansági relációkat* tanulmányozzuk. Ezek közös vonása, hogy a kvantum kovariancia mátrix determinánsát alulról becslő mennyiség világos információgeometriai interpretációval bír, ugyanakkor maga a kvantum kovariancia mátrix geometriai jelentése ezidáig tisztázatlan volt. A klasszikus kovariancia különböző lehetséges kvantumos általánosításait vizsgálva bevezetjük az ún. *szimmetrikus kovariancia* családot, melynek tagja többek között a Schrödinger-féle (2.2) kvantum kovariancia is. A szimmetrikus kovariancia család tagjai a tekintett statisztikai sokaság geometriájából származtathatók, és a belőlük származó kovariancia mátrixok determinánsai a dinamikai határozatlansági relációkhoz hasonló, azoknál általánosabb egyenlőtlenségeket elégítenek ki. A fejezetet ezen egyenlőtlenségek tanulmányozásának szenteljük. Az itt bemutatott eredményeinket az [5] és [4] közleményekben jelentettük meg.

2.1. Történeti áttekintés

Werner Heisenberg a róla elnevezett, azóta híressé vált kvantummechanikai határozatlansági *elvet* gondolatkísérletekből és a kvantummechanika Bohr-féle posztulátumából származtatta 1927-ben heurisztikus megfontolások segítségével [31]. A Heisenberg-féle határozatlansági-elv eredeti formájában kimondja, hogy egy részecske helyét és impulzusát egyszerre nem lehet tetszőleges pontossággal megmérni. Amennyiben Δx [m] jelöli a hely mérés bizonytalanságát, Δp [$\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$] pedig az impulzus mérés bizonytalanságát, akkor

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h, \quad (2.3)$$

ahol $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ a Planck-állandó. Fontos kihangsúlyozni, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági-elv ebben a formájában csupán egy fizikai *elv* és nem precíz matematikai tétel.

A Heisenberg határozatlansági-elvet még ugyanebben az évben Kennard és Weyl fogalmazta meg korrektül és bizonyította be [39]. A Kennard és Weyl által bizonyított változat (2.4) a hely és impulzus szórásának (σ_x , illetve σ_p) szorzatára szolgáltat alsó becslést.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (2.4)$$

Kennard és Weyl becslését 1929-ben Robertson általánosította tetszőleges fizikai mennyiségekre [60]. A Robertson-féle általánosítás az A és B fizikai mennyiség szórásainak szorzatára a

$$\mathbb{D}_\rho^2(A)\mathbb{D}_\rho^2(B) \geq \frac{1}{4} |\mathbb{E}_\rho(i[A, B])|^2$$

becslést adja. A Robertson-féle határozatlansági relációt Schrödinger 1930-ban a következőképpen élesítette [67].

2.1.1. Tétel (Schrödinger). *Az $A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa}$ fizikai mennyiségek tetszőleges $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotban eleget tesznek a*

$$\mathbb{D}_\rho^2(A)\mathbb{D}_\rho^2(B) - \text{Cov}_\rho(A, B)^2 \geq \frac{1}{4} |\mathbb{E}_\rho(i[A, B])|^2$$

egyenlőségnek, ahol Cov a (2.2) formulával definiált kvantum kovariancia.

Bizonyítás. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ tetszőleges fizikai mennyiség, $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ pedig tetszőleges állapot. Az A, B fizikai mennyiségek

$$\begin{aligned} A_0 &= A - \mathbb{E}_\rho(A)I \\ B_0 &= B - \mathbb{E}_\rho(B)I \end{aligned}$$

centráljtaira a

$$|\text{tr}(\rho A_0 B_0)|^2 \leq \mathbb{D}_\rho^2(A) \mathbb{D}_\rho^2(B) \quad (2.5)$$

Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség teljesül, hiszen az $(A, B) \mapsto \text{tr}(\rho A^* B)$ hozzárendelés belső szorzást definiál a $T_\rho \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ érintőtéren. Az kapott egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget kifejtve a

$$|\text{tr}(\rho A_0 B_0)|^2 = \text{Cov}_\rho(A, B)^2 + \frac{1}{4} |\mathbb{E}_\rho(i[A, B])|^2$$

alakot kapjuk, amit visszaírva a (2.5) egyenlőtlenségbe és átrendezve azt a

$$\mathbb{D}_\rho^2(A) \mathbb{D}_\rho^2(B) - \text{Cov}_\rho(A, B)^2 \geq \frac{1}{4} |\mathbb{E}_\rho(i[A, B])|^2$$

bizonyítandó egyenlőtlenséget nyerjük. □

A Schrödinger által bizonyított élesebb határozatlansági reláció

$$\det \begin{pmatrix} \text{Cov}_\rho(A, A) & \text{Cov}_\rho(A, B) \\ \text{Cov}_\rho(B, A) & \text{Cov}_\rho(B, B) \end{pmatrix} \geq \det \begin{pmatrix} \mathbb{E}_\rho\left(\frac{i}{2}[A, A]\right) & \mathbb{E}_\rho\left(\frac{i}{2}[A, B]\right) \\ \mathbb{E}_\rho\left(\frac{i}{2}[B, A]\right) & \mathbb{E}_\rho\left(\frac{i}{2}[B, B]\right) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

átfogalmazásában a bal oldalon az A és B fizikai mennyiségek kovariancia mátrixának determinánsa jelenik meg. Ezt a megfigyelést felhasználva 1934-ben Robertson a Schödinger-féle határozatlansági relációt tetszőleges számú fizikai mennyiségre általánosította [61].

2.1.2. Tétel (Robertson). *Fizikai mennyiségek tetszőleges $(A_k)_{k=1, \dots, N} \subset \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ rendszerére fennáll a*

$$\det \left([\text{Cov}_\rho(A_k, A_l)]_{k, l=1, \dots, N} \right) \geq \det \left(\left[\mathbb{E}_\rho \left(\frac{i}{2} [A_k, A_l] \right) \right]_{k, l=1, \dots, N} \right) \quad \rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \quad (2.7)$$

determináns egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A bizonyítás Robertson [61] cikkében található meg. □

A Robertson-féle határozatlansági reláció szembeötlő hátránya, hogy páratlan számú fizikai mennyiséget véve a (2.7) egyenlőtlenség jobb oldalán nulla szerepel, azaz semmivel sem kapunk többet, mint klasszikus esetben.

Gibilisco és Isola 2006-ban publikálta sejtését [26], miszerint fizikai mennyiségek tetszőleges $(A_k)_{k=1,\dots,N} \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ rendszere teljesíti a

$$\det \left([\text{Cov}_\rho(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N} \right) \geq \det \left(\left[\frac{f(0)}{2} (g_f)_n(\rho)(i[\rho, A_k], i[\rho, A_l]) \right]_{k,l=1,\dots,N} \right) \quad \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \quad (2.8)$$

determináns egyenlőtlenséget, ahol $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény. A (2.8) egyenlőtlenséget először $N = 1$ -re és néhány speciális operátor monoton függvényre vizsgálták. Az $N = 1$ és $f = f_{SM}$ valamint $f = f_{WY}$ eseteket (a függvényeket illetően lásd: 1.2.1. Példa) Luo bizonyította [45, 46]. Az $N = 1$ esetet általános indexelő operátor monoton függvény mellett Hansen bizonyította be [30]. Röviddel ezt követően – Hansentől függetlenül – Gibilisco, Imperato és Isola is bizonyították a sejtést ugyancsak az $N = 1$ esetre, de lényegesen különböző technikát használva [25]. Két fizikai mennyiség esetére az $f = f_{WY}$ függvényből származó Wigner–Yanase-metrika mellett a sejtést Luo, Q. Zhang és Z. Zhang igazolta [47, 48, 49]. Ugyancsak két fizikai mennyiségre, de az $f_\beta(x) = \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta-1)(x^{1-\beta}-1)}$ ($\beta \in [-1, 2] \setminus \{0, 1\}$) Wigner–Yanase–Dyson operátor monoton függvényből származó metrikával ellátott állapotterre egymástól függetlenül Kosaki [41] és a Yanagi, Furuichi, Kuriyama [88] hármas bizonyította a sejtést. Két fizikai mennyiség esetére általános monoton metrikával ellátott állapotter mellett Gibilisco, Imperato és Isola bizonyította a sejtést [25, 26]. Gibilisco és Isola (2.8) sejtését az eredeti formájában, tetszőleges számú fizikai mennyiségre Andainak sikerült bizonyítani [3]. A (2.8) egyenlőtlenséget az irodalomban gyakran *dinamikai határozatlansági reláció* névvel illetik [24], mert az egyenlőtlenség jobb oldala úgy interpretálható, mint az $A_k(t) = e^{it\rho} A_k e^{-it\rho}$ $k = 1, 2, \dots, n$ időfüggő fizikai mennyiségek $t = 0$ időponthoz tartozó érintővektorai által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Gibilisco, Hiai és Petz tanulmányozták először a klasszikus kovariancia Schrödinger-által bevezetett kvantum kovarianciától eltérő lehetséges általánosításait statisztikai sokaságok esetére. Megkövetelték, hogy a fizikai mennyiségek közti kvantum kovariancia sztochasztikus leképezések hatására monoton módon változzon és az állapottól simán függjön. Ilyen erős megszorítások mellett kovariancia gyanánt az alábbi, monoton metrikákhoz hasonló módon definiált

$$\text{Cov}^f(\rho)(A, B) = \text{tr}(A f(L_\rho, R_\rho^{-1}) R_\rho(B)) \quad f \in \mathcal{F}_{\text{op}} \quad \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \quad A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \quad (2.9)$$

mennyiségek jöhetnek csak szóba [57], melyeket Petz-féle f -kovarianciáknak fogunk nevezni. Ezekre a kovarianciákra a

$$\det \left([\text{Cov}^{f_1}(\rho)(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N} \right) \geq \det \left([f_1(0)f_2(0)(g_{f_2})_n(\rho)(i[\rho, A_k], i[\rho, A_l])]_{k,l=1,\dots,N} \right)$$

$\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ határozatlansági reláció teljesül minden $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{op}}^r$ operátor monoton függvényre és zérusnyomú fizikai mennyiségek tetszőleges $(A_k)_{k=1,\dots,N} \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$ rendszerére [24]. A legélesebb egyenlőtlenséget pedig az $f_1(x) = \frac{1+x}{2}$ választás mellett kapjuk. Mi egy, a fentitől eltérő általánosítást mutatunk, ahol a határozatlansági reláció bal oldalán álló kovariancia determinánsa mátrix a jobb oldalon szereplő mennyiséghez hasonló geometriai interpretációval bír.

2.2. Kapcsolat az állapotér geometriájával

A kvantummechanikai állapottereken unitér invariáns metrikák egy tágabb osztályát definiáljuk, melynek a Petz által bevezetett monoton metrikák valódi részét képezik, a belőlük származtatott különféle kvantum kovarianciák pedig dinamikai típusú határozatlansági relációkat elégítenek ki.

2.2.1. Definíció. Egy $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ szimmetrikus függvényt Cenzov–Morozova-függvénynek nevezünk, ha $[0, 1]^2 \subset \mathbb{C}^2$ egy nyílt környezetére mindkét változójában holomorf függvényként terjeszthető ki. A Cenzov–Morozova-függvények halmazát \mathcal{CM} jelöli.

2.2.1. Tétel. Tetszőleges $c \in \mathcal{CM}$ Cenzov–Morozova-függvény unitér invariáns Riemann metrikát indukál a $\mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapottereken a

$$g_c(\rho)(A, B) = \text{tr}(A c(L_\rho, R_\rho)(B)) \quad A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \quad \rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$$

hozzárendelésen keresztül, ahol a $c(L_\rho, R_\rho) : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ szuperoperátort a Riesz–Dunford holomorf függvénykalkulust felhasználva, a

$$c(L_\rho, R_\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} c(\xi, \eta) (\xi I - L_\rho)^{-1} \circ (\eta I - R_\rho)^{-1} d\xi d\eta$$

formulával értelmezzük. Itt $\Gamma \subset \mathbb{C}$ olyan folytonosan differenciálható görbét jelöl, melyre $\text{Ran}(\Gamma) \times \text{Ran}(\Gamma)$ a c függvény holomorf kiterjesztésének értelmezési tartományába esik és Γ minden $\sigma(\rho)$ -beli pontot pozitív körüljárással pontosan egyszer kerül meg. Ha a ρ állapot egy $\{e_k\}_{k=1, \dots, n}$ ortonormált bázisban diagonális $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ sajátértékekkel, akkor a metrika

$$g_c(\rho)(A, B) = \sum_{k, l=1}^n A_{kl} B_{kl} c(\mu_k, \mu_l) \quad (2.10)$$

alakot ölt.

Bizonyítás. Legyen $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ rögzített. A $\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \ni B \mapsto c(L_\rho, R_\rho)(B)$ leképezés lineáritása a

$$c(L_\rho, R_\rho)(B) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} c(\xi, \eta) (\xi I - \rho)^{-1} B (\eta I - \rho)^{-1} d\xi d\eta$$

egyenlőségről azonnal leolvasható. Ebből rögtön következik, hogy a $g_c(\rho)$ leképezés bilineáris formamezőt határoz meg a $\mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotteren. Ezen formamező simasága a

$$g_c(\rho)(A, B) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} c(\xi, \eta) \text{tr}(A(\xi I - \rho)^{-1} B(\eta I - \rho)^{-1}) d\xi d\eta \quad (2.11)$$

alakról látható leginkább. Ugyancsak a (2.11) egyenlet mutatja a g_c bilineáris formamező unitér invarianciáját, amihez persze a nyomképzés ciklikus tulajdonságát is fel kell használni.

Legyen $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ ortonormált bázis, melyben a $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapot diagonális $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ sajátértékekkel, azaz $\rho = \sum_{k=1}^n e_k \otimes e_k$. A (2.11) egyenlőségbe az $\{E_{kl} = e_k \otimes e_l\}_{k,l=1,\dots,n}$ mátrix egységeket írva a

$$\begin{aligned} g_c(\rho)(e_i \otimes e_j, e_p \otimes e_q) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \sum_{k,l=1}^n \frac{c(\xi, \eta)}{(\xi - \mu_k)(\eta - \mu_l)} \operatorname{tr}(E_{ij} E_{kk} E_{pq} E_{ll}) d\xi d\eta \\ &= \delta_{i,p} \delta_{j,q} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \frac{c(\xi, \eta)}{(\xi - \mu_i)(\eta - \mu_j)} d\xi d\eta = c(\mu_i, \mu_j) \delta_{i,p} \delta_{j,q} \end{aligned}$$

formulát kapjuk, amiből a $g_c(\rho)$ forma bilinearitását használva a (2.10) bizonyítandó egyenlőséget nyerjük. Rögzített $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotban mindig megadható olyan bázis, melyben a metrika (2.10) alakba írható, amiről a c függvény pozitivitását figyelembe véve látszik, hogy pozitív definit bilineáris formát határoz meg. \square

2.2.2. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{sa}$ fizikai mennyiség $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotbeli centráltján az

$$A_0 = A - \mathbb{E}_{\rho}(A)I$$

fizikai mennyiséget értjük, ami zérusnyomú fizikai mennyiség s így a $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{sa}(0) \cong T_{\rho}\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ érintőtér elemének tekinthető.

A dinamikai határozatlansági relációk egytől egyig a következő megfigyelésre vezethetők vissza. A Cenzov–Morozova-függvények között a szokásos pontonkénti rendezés az ezen függvényekhez asszociált metrikák Gram-mátrixainak determinánsai közt ugyanilyen irányú egyenlőtlenséget indukál. Erről szól az alábbi tétel.

2.2.2. Tétel. Legyen $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ rögzített állapot, $c_1, c_2 \in \mathcal{CM}$ pedig Cenzov–Morozova-függvények, melyekre a $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ pontban a

$$c_1(\mu_i, \mu_j) \geq c_2(\mu_i, \mu_j) \quad \forall \mu_i, \mu_j \in \sigma(\rho) \quad (2.12)$$

egyenlőtlenség teljesül. Fizikai mennyiségek tetszőleges $(A_k)_{k=1,\dots,N}$ rendszerére definiáljuk a

$$(C_k)_{ij} = g_{c_k}(\rho)((A_i)_0, (A_j)_0) \quad k = 1, 2$$

$N \times N$ -es Gram-mátrixokat. Ilyen feltételek mellett a C_1 és C_2 Gram-mátrixok determinánsaira a

$$\det(C_1) \geq \det(C_2) + \det(C_1 - C_2) + R(\rho, c_1, c_2, N) \quad (2.13)$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol

$$R(\rho, c_1, c_2, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \det(C_1)^{\frac{k}{N}} \det(C_1 - C_2)^{\frac{N-k}{N}}.$$

Bizonyítás. A 2.2.1. tételben beláttuk, hogy a Cenzov–Morozova-függvényekből származó metrikák unitér invariánsak, ezért feltehető, hogy a $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapot diagonális. A C_1

és C_2 mátrixok értelmezésükből fakadóan valós elemű szimmetrikus mátrixok. A következő rövid számolás mutatja, hogy a $C_1 - C_2$ mátrix pozitív szemidefinit. Legyen $x \in \mathbb{C}^n$ tetszőleges és $X = \sum_{j=1}^N x_j (A_j)_0$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle (C_1 - C_2)x, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^N \bar{x}_i x_j (c_1(\rho)((A_i)_0, (A_j)_0) - c_2(\rho)((A_i)_0, (A_j)_0)) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \sum_{k,l=1}^n (c_1(\rho)(\mu_k, \mu_l) - c_2(\rho)(\mu_k, \mu_l)) \bar{x}_i x_j [(A_i)_0]_{kl} [(A_j)_0]_{kl} \\ &= \sum_{k,l=1}^n (c_1(\rho)(\mu_k, \mu_l) - c_2(\rho)(\mu_k, \mu_l)) \left(\sum_{i=1}^N x_i [(A_i)_0]_{kl} \right) \left(\sum_{j=1}^N x_j [(A_j)_0]_{kl} \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n (c_1(\rho)(\mu_k, \mu_l) - c_2(\rho)(\mu_k, \mu_l)) |X_{kl}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ugyanis a (2.12) egyenlőtlenség értelmében az összeadandók nemnegatívak. Hasonló számolással mutatható ki a C_1 és C_2 mátrixok pozitív szemidefinitisége is.

Ezek után az A.2.5 Brunn–Minkowski determináns egyenlőtlenséget a C_2 és $C_1 - C_2$ valós elemű, pozitív szemidefinit mátrixokra alkalmazva a bizonyítandó egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$\det(C_2 + (C_1 - C_2))^{\frac{1}{N}} \geq \det(C_2)^{\frac{1}{N}} + \det(C_1 - C_2)^{\frac{1}{N}}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. □

2.2.1. Megjegyzés. A 2.2.2. tétel egy gyengített változatát kapjuk, ha a (2.13) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő $R(\rho, c_1, c_2, N)$ tagot elhagyjuk. A későbbiekben többnyire ezzel az alakkal fogunk dolgozni.

2.3. Szimmetrikus és antiszimmetrikus kvantum kovarianciák

Az alábbi definíción keresztül bevezetjük az ún. szimmetrikus és antiszimmetrikus f -kovarianciákat. Antiszimmetrikus kovarianciákkal már eddig is találkozhattunk a (2.8) dinamikai határozatlansági reláció jobb oldalán, csak eddig nem neveztük őket így. A szimmetrikus kovariancia ezzel szemben teljesen új, általunk bevezetett kovariancia típus.

2.3.1. Definíció. Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény, $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ pedig egy rögzített állapot. Az $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ obszervábilisek ρ pontbeli szimmetrikus és antiszimmetrikus f -kovarianciáját rendre a

$$\begin{aligned} \text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} (g_f)_n(\{\rho, A_0\}, \{\rho, B_0\}) \\ \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} (g_f)_n(i[\rho, A_0], i[\rho, B_0]) \end{aligned}$$

mennyiségekkel definiáljuk, ahol A_0 és B_0 az A és B fizikai mennyiségek ρ állapotbeli centráltjai, $\{\rho, A_0\} = \rho A_0 + A_0 \rho$ pedig az antikommutátor.

Mindkét fent definiált kovariancia család világos geometriai tartalommal bír. Az antiszimmetrikus kovarianciák és a belőlük származtatott kovariancia mátrixok geometriai jelentését a határozatlansági relációk történeti áttekintésének végén már tisztáztuk. A szimmetrikus kovarianciákhoz analóg geometriai jelentés társítható. A $\text{Cov}_f^s(\rho)(A, B)$ szimmetrikus f -kovariancia az $A(t) = e^{t\rho} A_0 e^{t\rho}$ és $B(t) = e^{t\rho} B_0 e^{t\rho}$ időfüggő fizikai mennyiségek $t = 0$ időponthoz tartozó érintővektorai által kifeszített paralelogramma területe. Ha az $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény szinguláris, azaz $f(0) = 0$, akkor a $\text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) = \text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) = 0$ triviális esetet kapjuk.

2.3.1. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény, $A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiségek, $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ pedig állapot, melyről feltesszük, hogy diagonális. Ekkor az A és B fizikai mennyiségek szimmetrikus és antiszimmetrikus f -kovarianciái*

$$\begin{aligned}\text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n \frac{(\mu_k + \mu_l)^2}{m_f(\mu_k, \mu_l)} [A_0]_{lk} [B_0]_{kl} \\ \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n \frac{(\mu_k - \mu_l)^2}{m_f(\mu_k, \mu_l)} [A_0]_{lk} [B_0]_{kl}\end{aligned}$$

alakba írhatók, ahol $\sigma(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, m_f pedig az f függvényhez asszociált mátrixközép.

Bizonyítás. A Cenzov–Morozova-függvény által indukált metrikák (2.10) lokális formájába az f függvényhez asszociált c_f Cenzov–Morozova-függvényt írva kapjuk hogy

$$\begin{aligned}\text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} (g_f)_n(\{\rho, A_0\}, \{\rho, B_0\}) = \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n c_f(\mu_k, \mu_l) \{\rho, A_0\}_{kl} \{\rho, B_0\}_{kl} \\ &= \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n c_f(\mu_k, \mu_l) (\mu_k + \mu_l)^2 [A_0]_{kl} [B_0]_{kl} = \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n \frac{(\mu_k + \mu_l)^2}{m_f(\mu_k, \mu_l)} [A_0]_{kl} [B_0]_{kl}\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\text{Cov}_f^{as}(\rho)(A, B) &= \frac{f(0)}{2} (g_f)_n(i[\rho, A_0], i[\rho, B_0]) = \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n c_f(\mu_k, \mu_l) [\rho, A_0]_{kl} [\rho, B_0]_{kl} \\ &= \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n c_f(\mu_k, \mu_l) (\mu_k - \mu_l)^2 [A_0]_{kl} [B_0]_{kl} = \frac{f(0)}{2} \sum_{k, l=1}^n \frac{(\mu_k - \mu_l)^2}{m_f(\mu_k, \mu_l)} [A_0]_{kl} [B_0]_{kl}\end{aligned}$$

ami épp a bizonyítandó volt. □

A fenti lokális alak felhasználásával ellenőrizhetjük, hogy az $f_{SM}(x) = \frac{1+x}{2}$ operátor monoton függvény éppen a Schrödinger által bevezetett (2.2) kvantum kovarianciát adja a szimmetrikus esetben, azaz a

$$\text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) = \text{Cov}_\rho(A, B) \quad A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}} \quad \rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$$

egyenlőség áll fenn. Tehát a Schrödinger-féle kvantum kovariancia a szimmetrikus kovarianciák családjába sorolható be.

2.3.2. Definíció. Egy $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényhez definiáljuk az

$$f_{as}(x) = \frac{f(0)(1-x)^2}{2f(x)} \quad \text{és} \quad f_s(x) = \frac{f(0)(1+x)^2}{2f(x)}$$

függvényeket, melyekből a

$$c_f^{as}(x, y) = \frac{f(0)(x-y)^2}{2m_f(x, y)} \quad \text{és} \quad c_f^s(x, y) = \frac{f(0)(x+y)^2}{2m_f(x, y)}$$

Cenzov–Morozova típusú függvények

$$c_f^{as}(x, y) = x f_{as}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{és} \quad c_f^s(x, y) = x f_s\left(\frac{y}{x}\right)$$

módon származtathatók.

A 2.3.1. és a 2.2.1. tételeket egymással kombinálva és a fent bevezetett segédfüggvényeket felhasználva az alábbi érdekes következményhez jutunk.

2.3.1. Következmény. Tetszőleges $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényre és $A, B \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiségre minden $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotban fennáll az

$$\begin{aligned} \text{Cov}^f(\rho)(A, B) &= g_{m_f}(\rho)(A, B) \\ \text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) &= g_{c_f^s}(\rho)(A, B) \\ \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A, B) &= g_{c_f^{as}}(\rho)(A, B) \end{aligned}$$

egyenlőség, mely jobb oldalán a megfelelő Cenzov–Morozova-függvény által indexelt metrika áll, m_f pedig az f függvényhez tartozó közép.

2.4. Dinamikai határozatlansági relációk

Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ egy rögzített operátor monoton függvény, $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ pedig tetszőleges állapot. Fizikai mennyiségek egy $A = (A_k)_{k=1, \dots, N} \subset \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ rendszerének szimmetrikus és antiszimmetrikus f -kovarianciáját a

$$\begin{aligned} [\text{Cov}_f^s(\rho)(A)]_{ij} &= \text{Cov}_f^s(\rho)(A_i, A_j) \\ [\text{Cov}_f^{as}(\rho)(A)]_{ij} &= \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A_i, A_j) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$N \times N$ -es kovariancia mátrixokkal definiáljuk.

A 2.3.1. következményt és a 2.2.2. tételt felhasználva az alábbi, kovariancia mátrixok determinánsai közti egyenlőtlenségekkel kapcsolatos tételt kapjuk, ami a (2.8) dinamikai határozatlansági reláció általánosításának tekinthető.

2.4.1. Tétel. Legyenek $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvények, melyekre az

$$\frac{f_1(0)}{f_1(t)} \geq \frac{f_2(0)}{f_2(t)} \quad t \in [0, \infty) \tag{2.15}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ekkor fizikai mennyiségek tetszőleges $A = (A_k)_{k=1,\dots,N} \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{sa}$ rendszerének kovariancia mátrixaira minden $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotban teljesülnek a

$$\begin{aligned} \det(\text{Cov}_{f_k}^s(\rho)(A)) &\geq \det(\text{Cov}_{f_k}^{as}(\rho)(A)) & k = 1, 2 \\ \det(\text{Cov}_{f_1}^s(\rho)(A)) &\geq \det(\text{Cov}_{f_2}^s(\rho)(A)) \\ \det(\text{Cov}_{f_1}^{as}(\rho)(A)) &\geq \det(\text{Cov}_{f_2}^{as}(\rho)(A)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

determináns egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. Az f_1 és f_2 függvényekre megkövetelt (2.15) pontonkénti majorizáció a $c_{f_k}^s$ és $c_{f_k}^{as}$, $k = 1, 2$ Cenzov–Morozova-függvények között a

$$\begin{aligned} c_{f_k}^s(x, y) &\geq c_{f_k}^{as}(x, y) & k = 1, 2 \\ c_{f_1}^s(x, y) &\geq c_{f_2}^s(x, y) \\ c_{f_1}^{as}(x, y) &\geq c_{f_2}^{as}(x, y) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket indukálja, ahol $x, y \in [0, 1]$.

A 2.2.2. tétel gyengített változatát (lásd: 2.2.1. megjegyzés) a fenti Cenzov–Morozova-függvényekkel indexelt metrikákra alkalmazva és a 2.3.1 következményt figyelembe véve a bizonyítandó állítást kapjuk. \square

2.4.1. Következmény. Az 1.2.1. megjegyzés értelmében az $t \mapsto \frac{f(0)}{f(t)}$ hányados, ahol $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ pontosan akkor maximális a szokásos pontonkénti rendezésre nézve, ha $f = f_{SM}$ a számtani középnek megfelelő operátor monoton függvény. Ezt a 2.4.1. tétellel kombinálva a

$$\det(\text{Cov}_{f_{SM}}^s(\rho)(A)) \geq \det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A)) \geq \det(\text{Cov}_f^{as}(\rho)(A)) \quad f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$$

egyenlőtlenséget nyerjük, melynek csupán elejét és végét tekintve a bevezetőben említett (2.8) Gibilisco-féle dinamikai határozatlansági relációt kapjuk vissza.

A fenti következmény szerint egy fix $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényhez tartozó szimmetrikus kovarianciából származó kovariancia mátrix determinánsa mindig majorálja az ugyanazon függvénynek megfelelő antiszimmetrikus kovarianciából származó kovarianciamátrix determinánsát. A szóban forgó determinánsok közti hézag az f_{LA} harmonikus középhez tartozó operátor monoton függvényhez tartozó Petz-féle kovariancia kovariancia mátrixának determinánsával becsülhető. Erről szól az alábbi tétel.

2.4.2. Tétel. Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ rögzített operátor monoton függvény. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{sa}$ fizikai mennyiségekre minden $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotban érvényes a

$$2f(0)\text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0, B_0) \leq \text{Cov}_f^s(\rho)(A, B) - \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A, B) \leq \text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0, B_0) \quad (2.17)$$

becslés, továbbá fizikai mennyiségek tetszőleges $A = (A_k)_{k=1,\dots,N}$ rendszerét véve az

$$\det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A)) - \det(\text{Cov}_f^{as}(\rho)(A)) \geq (2f(0))^N \det(\text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0)) \quad (2.18)$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol $\text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0)$ azt a kovariancia mátrixot jelöli, melynek i_j eleme

$$[\text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0)]_{ij} = \text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)((A_i)_0, (A_j)_0).$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\# : \mathcal{F}_{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{op}}$ $f(x) \mapsto f^\#(x) = \frac{x}{f(x)}$ involúciót (bővebben lásd: [11] 2.5 Definíció). Tetszőleges $g \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényre teljesül, hogy $f_{LA}(x) = \frac{2x}{1+x} \leq g(x)$, ezért azt kapjuk, hogy

$$f_s(x) - f_{as}(x) = \frac{2f(0)x}{f(x)} = 2f(0)f^\#(x) \geq 2f(0)f_{LA}(x),$$

amiből a bizonyítandó (2.17) egyenlőtlenségbeli alsó korlátot nyerjük. Az 1.2.4. tételt követő 1.2.1 Megjegyzés szerint a

$$\frac{2f(0)x}{f(x)} \leq \frac{2x}{1+x} = f_{LA}(x)$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből a bizonyítandó (2.17) egyenlőtlenségbeli felső korlátot kapjuk.

A 2.2.2. tételt a $c_1(x, y) = c_f^s(x, y)$, $c_2(x, y) = c_f^{as}(x, y)$ és a $c_1(x, y) = c_f^s(x, y) - c_f^{as}(x, y)$, $c_2(x, y) = 2f(0)m_{f_{LA}}(x, y)$ függvénypárookra alkalmazva a

$$\begin{aligned} \det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A)) - \det(\text{Cov}_f^{as}(\rho)(A)) &\geq \det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A) - \text{Cov}_f^{as}(\rho)(A)) \\ &\geq (2f(0))^N \det(\text{Cov}^{f_{LA}}(\rho)(A_0)) \end{aligned}$$

bizonyítandó (2.18) egyenlőtlenséget kapjuk. \square

A 2.4.1. következményben szereplő egyenlőtlenség elejét és végét tekintve látható, hogy az $f = f_{SM}$ operátor monoton függvény globális felső korlátot szolgáltat minden antiszimmetrikus kovarianciához. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy létezik-e más olyan $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény, melyre

$$\det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A)) \geq \det(\text{Cov}_h^{as}(\rho)(A)) \quad \forall h \in \mathcal{F}_{\text{op}} \quad (2.19)$$

teljesül minden $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotban és fizikai mennyiségek tetszőleges $A = (A_k)_{k=1, \dots, N}$ rendszerére. Megmutatjuk, hogy létezik ilyen függvény és megadjuk azt az f függvényt, melyre (2.19) globális felső korlát optimális.

A 2.4.1. tétel értelmében elég találnunk olyan $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}^r$ operátor monoton függvényt, melyre az

$$\frac{f(0)(1+x)^2}{2f(x)} \geq \frac{(1-x)^2}{2(1+x)} \quad (2.20)$$

egyenlőtlenség teljesül. Az 1.2.1 Megjegyzés szerint ez a feltétel az

$$\tilde{f}(x) \leq \frac{2x}{1+x} \left[1 + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \right] \quad (2.21)$$

ekvivalens alakra írható át.

2.4.1. Lemma. Jelölje μ azt a valószínűségi Borel-mértéket a $[0, 1]$ intervallumon, melyre a $g \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény reciproka

$$\frac{1}{g(x)} = \int_{[0,1]} \frac{1+t}{2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{1+tx} \right) d\mu(t) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

integrál alakban áll elő (lásd: 1.2.5. tétel). Ekkor ha $\mu(\{0\}) < \frac{1}{2}$, akkor létezik $x > 0$, hogy

$$\frac{1}{g(x)} < \frac{1+x}{2x} \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $\mu(\{0\}) < \frac{1}{2}$, akkor válasszunk olyan $\varepsilon > 0$ számot, hogy $\mu([0, \varepsilon]) < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség teljesüljön és tekintsük az alábbi becslést

$$\frac{1}{g(x)} = \int_{[0,1]} \frac{1+t}{2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{1+tx} \right) d\mu(t) \leq \frac{1+x}{2x} \mu([0, \varepsilon]) + \mu((\varepsilon, 1]) \frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}.$$

A $]0, \infty[\ni x \mapsto \frac{1+x}{2x} \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$ függvény értékkészlete alulról korlátos $\frac{1}{2}$ alsó korláttal, amiből

$$\frac{1+x}{2x} \mu([0, \varepsilon]) + \mu(] \varepsilon, 1]) \frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon} < \frac{1+x}{2x} \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

egyenlőtlenség következik, ha x elég kicsi. \square

Legyen μ olyan valószínűségi mérték a $[0, 1]$ intervallumon, melyre $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ teljesül. A μ mértékkel előállított $g \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény reciproka

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2x} + \frac{2}{x+1} \right).$$

Ha $x > 0$, akkor

$$\frac{2x}{1+x} \left[1 + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \right] - g(x) = \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} > 0,$$

ami azt jelenti, hogy a $g(x)$ függvényt \tilde{f} -nek választva a (2.21) egyenlőtlenségben és az inverziós formulát (lásd: [23] 6.1. Állítás) alkalmazva az

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{2} + \frac{2x}{1+x} \right)$$

függvényt kapjuk, melyre a (2.20) egyenlőtlenség biztosan teljesül.

Másrészt az így konstruált f függvény a (2.19) egyenlőtlenségben optimális felső korlátot szolgáltat, hiszen a 2.4.1 Lemma szerint ahhoz, hogy a felső korlát globális legyen a μ valószínűségi mértékre $\mu(\{0\}) \geq \frac{1}{2}$ kell, hogy teljesüljön, a kapott felső korlát pedig akkor lesz a legkisebb s egyben optimális, ha $\mu(\{1\})$ maximális. Eredményeinket az alábbi tételben foglaljuk össze.

2.4.3. Tétel. *Akkor és csak akkor áll fenn fizikai mennyiségek tetszőleges $A = (A_k)_{k=1, \dots, N}$ rendszerére minden $\rho \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotban a*

$$\det(\text{Cov}_f^s(\rho)(A)) \geq \det(\text{Cov}_h^{as}(\rho)(A)) \quad \forall h \in \mathcal{F}_{\text{op}}$$

egyenlőtlenség, ha az $f(t) \geq f_{\text{opt}}(t)$ $t \in [0, \infty)$ feltétel teljesül, ahol

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{2} + \frac{2x}{1+x} \right).$$

Az $f = f_{opt}$ választás mellett a (2.20) egyenlőtlenség bal és jobb oldala közötti különbség

$$q(x) = \frac{f_{opt}(0)(1+x)^2}{2f_{opt}(x)} - \frac{(1-x)^2}{2(1+x)} = \frac{8x^2}{x^3 + 7x^2 + 7x + 1},$$

melyre $q'(0) = 0$ teljesül s ezért semmilyen operátor monoton függvényvel sem becsülhető alulról.

2.5. Összefoglalás

Ebben a fejezetben kvantum mechanikai határozatlansági relációkat vizsgáltunk információgeometriai eszközökkel. A fejezetet egy rövid történeti áttekintéssel kezdtük, ezután saját eredményeink ismertetésére tértünk rá.

1. Megmutattuk, hogy a határozatlansági relációk egy igen tág családja lényegében a kvantummechanikai állapotterén értelmezett különböző Riemann-metrikák (és az ezeket indukáló operátormonoton függvények) közötti rendezésre vezethető vissza.
2. Bevezettük az antiszimmetrikus és a szimmetrikus kvantum kovarianciákat és megmutattuk, hogy a közönséges –már Schrödinger által is vizsgált– kvantum kovariancia ezen utóbbi kovariancia családba sorolható.
3. Bizonyítottuk, hogy egy szimmetrikus f -kovariancia segítségével definiált kovariancia mátrix determinánsa mindig felülről becsüli a megfelelő antiszimmetrikus f -kovarianciához tartozó kovariancia mátrix determinánsát.
4. Megmutattuk, hogy a számtani középhez és a harmonikus középhez tartozó operátormonoton függvények számtani közepe által indukált monoton metrika szolgáltatja a lehető legélesebb dinamikai határozatlansági relációt.

3. fejezet

Összetett kvantummechanikai rendszerek

A kvantummechanikai rendszerek egyesítése és az összetett rendszerek részekre bontása a kvantumelmélet szempontjából lényeges kérdés [64, 82]. Ezen témakör tárgyalása során mindenekelőtt az alábbi három kérdésre kell választ adnunk.

1. A különböző Hilbert-terekkel leírt kvantummechanikai rendszerek egyesítettjéhez milyen Hilbert-teret rendeljünk?
2. Az összetett rendszer állapotának ismeretében a részrendszerek állpota hogyan határozható meg?
3. A komponens-rendszerek miként ágyazhatók be az összetett rendszerbe?

A kvantummechanika összetett rendszer képzésre vonatkozó posztulátuma (lásd: [58] könyv, 9. oldal) kimondja, hogy tetszőleges összetett kvantummechanikai rendszert az alkotó részrendszerek Hilbert-tereinek tenzorszorzataként előálló Hilbert-tér ír le. Ha ρ egy $n \in \mathbb{N}$ komponensből álló összetett rendszer állapota, akkor a k . részrendszer állapotát definíció szerint a $\text{tr}_k(\rho)$ parciális nyommal kaphatjuk meg. Ha ρ_k a k . részrendszer egy állapota, akkor a

$$\rho_k \mapsto \rho := \frac{I_1 \otimes \dots \otimes I_{k-1} \otimes \rho_k \otimes I_{k+1} \otimes \dots \otimes I_n}{\prod_{j=1, j \neq k}^n \dim(\mathcal{H}_j)}$$

hozzárendelés az összetett rendszer egy olyan állapotát határozza meg, melyre

$$\text{tr}_1 \circ \dots \circ \widehat{\text{tr}_k} \circ \dots \circ \text{tr}_n(\rho) = \rho_k \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

teljesül. Ez a hozzárendelés a k . részrendszer egy lehetséges beágyazását szolgáltatja az összetett rendszerbe.

Ellenőrizhető, hogy ha $\rho_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ $k \in \{1, \dots, n\}$ a részrendszerek sűrűségmátrixainak egy tetszőleges rendszere, akkor a $\rho = \bigotimes_{k=1}^n \rho_k$ tenzorszorzat az összetett rendszer egy állapota lesz. Az állapottér konvex halmaz, ezért az ilyen, szorzat alakban előálló sűrűségmátrixok konvex kombinációja ugyancsak állapot az összetett rendszerben. Az viszont

nem igaz, hogy az összetett rendszer minden állapota szorzat állapotok konvex kombinációjaként állna elő. Ez a kvantum összefonódás jelensége, melyet Einstein, Podolsky és Rosen fedezett fel [20]. A szorzat állapotok konvex kombinációiként előálló állapotokat szeparábilis, más szóval klasszikusan korrelált állapotoknak nevezzük. Azokat az állapotokat, melyek nem állnak elő ilyen alakban összefonódott állapotoknak hívjuk. Erwin Schrödinger a kvantum összefonódás információelméleti lényegét a következőképpen ragadta meg: *"Best possible knowledge of the whole does not include the best possible knowledge of its parts."*, vagyis az összetett rendszer lehető legteljesebb ismerete nem jelenti egyben a részek lehető legteljesebb ismeretét [66].

A kvantum összefonódás jelensége teszi lehetővé, hogy bizonyos kvantuminformaticai algoritmusok (például sűrű kódolás, kvantum teleportáció) nagyobb hatékonysággal működjenek, mintha csupán klasszikusan korrelált állapotok állnának rendelkezésre [14, 15, 58]. Többek között ez motiválja az összefonódott állapotok geometriájának tanulmányozását, amely a kvantum információelméleten belül önálló kutatási terület és a témával kapcsolatban csak az utóbbi öt évben több száz közlemény jelent meg. Pusztán annak eldöntése, hogy egy kvantumállapot összefonódott vagy szeparábilis bizonyítottan NP-nehéz feladat még akkor is, ha a vizsgált összetett kvantummechanikai rendszer mindössze két komponensből épül fel [28, 38].

Az összetett rendszer állapotterét egy μ véges Borel-mértékkel ellátva értelmezhető az összefonott állapotok

$$\mathcal{P}_{ent,\mu} = \frac{\text{Vol}_\mu(\text{Összefonódott állapotok})}{\text{Vol}_\mu(\text{Teljes állapottér})}$$

μ mértékre vonatkozó geometriai valószínűsége, melyre vonatkozóan a $\mathcal{P}_{sep,\mu} = 1 - \mathcal{P}_{ent,\mu}$ szeparabilitási valószínűség komplementer mennyiség. A $\mathcal{P}_{ent,\mu}$ mennyiséget a $\mu = \lambda$ Lebesgue-mérték választás mellett Życzkowski, Horodecki, Sanpera és Lewenstein vizsgálta először [35, 36]. Az imént elsőként idézett, 1998-ban megjelent cikkben a szerzők úgy fogalmazzák, hogy a szeparabilitási valószínűség tanulmányozása filozófiai, gyakorlati és fizikai jelentőséggel bír. A szeparabilitási valószínűség filozófiai jelentőségét a [36] cikk szerzői a

"Is the world more classical or more quantum?"

kérdéssel ragadták meg, mellyel jelen dolgozat írója csak részben ért egyet, hiszen a kvantummechanikai állapottéren nincs kitüntetett mérték. Különösen indokolatlan volna a Lebesgue-mértéket annak tekinteni, melyet csupán a vele való számolás viszonylagos egyszerűsége tüntet ki. A szeparabilitási valószínűség gyakorlati haszna abban rejlik, hogy kvantum összefonódással kapcsolatos kérdéseket sok esetben Monte–Carlo szimulációkkal vizsgálunk, ahol fontos tudni, hogy átlagosan a generált véletlen állapotok hányad része szeparábilis illetve összefonódott. A kérdés fizikai jelentősége pedig abból fakad, hogy az összetett rendszerek szeparábilis állapotait a részleges időmegfordítás fizikai jelentéssel bíró állapotba képzi [34, 55, 65].

Általános jól kezelhető szeparabilitási kritérium hiányában a szeparabilitási valószínűség meghatározására irányuló próbálkozások köre a qubit-qubit és qubit-qutrit összetett rendszerek vizsgálatára korlátozódott. Mindazonáltal a szeparabilitási valószínűséget ezidáig senkinek sem sikerült még ezen egyszerű esetekben sem egzaktul kiszámítani.

A fejezetben igazoljuk Milz és Strunz szeparabilitási valószínűség invarianciájára vonatkozó sejtését [51], magát a szeparabilitási valószínűséget pedig egzaktul kiszámítjuk a valós 4×4 -es sűrűségmátrixokkal leírt összetett kvantummechanikai rendszerre. Eredményeinket általánosításaként megmutatjuk, hogy Milz és Strunz sejtése érvényben marad akkor is, ha a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapotteret az $f_{GM} \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény által indexelt monoton metrikával látjuk el. Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotter a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times \mathbb{B}_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ szorzat sokasággal diffeomorf, ahol

$$\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} =] - I, I[= \{A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \mid -I < A < I\}. \quad (3.1)$$

Ezen felbontás birtokában geometriailag jellemezzük a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotter ún. PPT állapotait, melyek az $n = 2$ esetben a klasszikusan korrelált állapotokkal esnek egybe, $n > 2$ esetén pedig valódi részalmazhént tartalmazzák azokat. Kiszámítjuk a $(g_f)_n$ monoton metrika mátrixát és térfogati formáját a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times \mathbb{B}_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ felbontásra vonatkozóan és az $n = 2$ esetben az (1.16) Thompson-metrikát véve vizsgáljuk egy tetszőleges összefonott állapot távolságát a szeparábilis állapotoktól. Az itt bemutatott eredmények egy részét a [44] közleményben jelentettük meg.

3.1. Kvantum összefonódás

A kvantum összefonódás geometriájának megértéséhez vegyünk szemügyre egy két komponensből álló kvantummechanikai rendszert. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy egy \mathbb{K}^n és \mathbb{K}^m ($m, n \in \mathbb{N}$) Hilbert-terekkel leírt kvantummechanikai rendszer egyesítésével előálló összetett kvantummechanikai rendszerrel van dolgunk, melynek állapottere $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$, a modellező Hilbert-tér pedig $\mathbb{K}^{nm} \cong \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m$. Valós, illetve komplex számtest feletti vektorterekben az összeadásra és pozitív számmal történő szorzásra zárt halmazokat *pozitív kúpoknak* nevezzük. A \mathbb{K}^{nm} Hilbert-tér $\mathcal{B}(\mathbb{K}^{nm})^+$ pozitív operátorai ilyen pozitív kúpot alkotnak, de a $\mathcal{B}(\mathbb{K}^{nm}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{K}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}^m)$ felbontásnak köszönhetően természetesen adódik egy másik pozitív kúp is, nevezetesen az, amelyet a

$$\sum_{k=1}^N A_k \otimes B_k \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

alakú operátorok alkotnak, ahol $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^n)$ és $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^m)$ $k = 1, \dots, N$. Ezt a kúpot a $\mathcal{B}(\mathbb{K}^n)^+ \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}^m)^+$ szimbólummal fogjuk jelölni, ami voltaképpen csak jelölés, hiszen $\mathcal{B}(\mathbb{K}^n)^+$ és $\mathcal{B}(\mathbb{K}^m)^+$ nem vektorterek. Látható, hogy a $\mathcal{B}(\mathbb{K}^n)^+ \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}^m)^+ \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{K}^{nm})^+$ tartalmazás teljesül, ami az $n = 1$ vagy $m = 1$ triviális eseteket leszámítva valódi.

3.1.1. Definíció. A $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ halmaz elemeit, ahol $\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}} := \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} \cap \mathcal{B}(\mathbb{K}^n)^+ \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}^m)^+$ és $m, n > 1$ természetes számok szeparábilis állapotoknak hívjuk. A $\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{ent}} := \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} \setminus \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ halmaz elemeit pedig összefonódott állapotoknak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy $\rho \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ állapot pontosan akkor tiszta, ha szorzat állapot, azaz $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ alakú, ahol $\rho_1 \in \overline{\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}}$ és $\rho_2 \in \overline{\mathcal{D}_{m,\mathbb{K}}}$. A $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ halmaz konvex zárt halmaz, a $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}} \subseteq \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$ tartalmazásból és az állapotter kompaktságából fakadóan pedig kompakt. Ez az észrevétel vezet el bennünket a következő tételhez.

3.1.1. Tétel. *Ha $\rho \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{ent}}$ összefonódott állapot, akkor létezik olyan $W \in \mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiség és $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy*

$$\mathbb{E}_{\tilde{\rho}}(W) \geq \alpha$$

teljesül minden $\tilde{\rho} \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ klasszikusan korrelált állapotra, de $\mathbb{E}_{\rho}(W) < \alpha$. Az ilyen $W \in \mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiséget összefonódás tanúnak (entanglement witness) nevezzük.

Bizonyítás. A $\tilde{\rho} \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}$ szeparábilis állapotok konvex kompakt halmazt alkotnak a $\mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ vektortérben, a $\{\rho\} \subset \mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ halmaz pedig konvex és zárt. A Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja kimondja, hogy létezik olyan $\varphi \in (\mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}})^*$ lineáris funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, melyre

$$(\forall \tilde{\rho} \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sep}}}) \quad \varphi(\tilde{\rho}) \geq \alpha$$

és $\varphi(\rho) < \alpha$ teljesül. A φ funkcionálhoz pedig megadható olyan $W \in \mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ fizikai mennyiség, melyre $\varphi(A) = \text{tr}(AW)$ $A \in \mathcal{M}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ teljesül. Ellenőrizhető, hogy az így konstruált W fizikai mennyiség a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik. \square

A fenti tétel egy ekvivalens alakjára alternatív bizonyítást találhatunk az [58] könyv 57. oldalán, mely konstruktív abban az értelemben, hogy rögzített $\rho \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}$ összefonódott állapothoz explicit W fizikai mennyiséget definiál, melyről megmutatja, hogy valóban összefonódás tanú.

Jelölje $T : \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times m}$ a transzponálást és vezessük be az $I \otimes T : \mathbb{K}^{mn \times mn} \rightarrow \mathbb{K}^{mn \times mn}$ parciális transzponálás műveletet. Peres figyelte meg és írta le először [56], hogy a parciális transzponálás szeparábilis állapotot állapotba képez. Ez egyébként a (3.2) összeg alakról közvetlenül leolvasható. Peres úgy vélte, hogy a parciális transzponált pozitivitása nem csak szükséges, de elégséges feltétele is az állapot pozitivitásának. Peres ezen sejtése később a [33] cikkben ellenpéldán keresztül cáfolatot nyert. Az azonban – mint ahogyan azt a [33] cikkben is írják – megfigyelhető, hogy a szeparábilis állapotok a pozitív leképezéseket „nem érzik”, azaz tetszőleges $\Lambda : \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times m}$ pozitív leképezést véve az $I \otimes \Lambda : \mathbb{K}^{mn \times mn} \rightarrow \mathbb{K}^{mn \times mn}$ leképezés a szeparábilis állapotokhoz $\mathcal{B}(\mathbb{K}^{mn})^+$ -beli elemet rendel. A teljesen pozitív leképezések definíció szerint (lásd: 1.2.1 Definíció) ilyen tulajdonságúak, ezért nem tesznek különbséget szeparábilis és összefonódott állapotok között. A pozitív leképezések viszont már alkalmasak a szeparábilis állapotok karakterizációjára, erről szól az alábbi tétel.

3.1.2. Tétel. *A $\rho \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$ állapot pontosan akkor szeparábilis, ha tetszőleges $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{K}^m) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{K}^n)$ pozitív leképezést véve $(I \otimes \Lambda)\rho \geq 0$.*

Bizonyítás. A bizonyításról csak annyit említünk meg, hogy a [33] cikkben ezt a tételt úgy bizonyítják, hogy megmutatják azt, hogy ha $\rho \in \overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$ összefonódott állapot, akkor megadható olyan $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{K}^m) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{K}^n)$ pozitív leképezés, melyre $(I \otimes \Lambda)\rho \not\geq 0$ teljesül. Ilyen Λ pozitív leképezés konstruálásában pedig a 3.1.1. tételben bemutatott összefonódás tanúk segítenek. \square

Størmer és Woronowicz jellemezte a $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ és $\mathcal{B}(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ mátrix-algebrák közötti pozitív leképezéseket [79, 87]. Megmutatták, hogy ezek a leképezések egységesen

$$\Lambda = \Lambda_1^{CP} + \Lambda_2^{CP} \circ T \tag{3.3}$$

alakúak, ahol $\Lambda_k^{CP} : \mathcal{B}(\mathbb{C}^a) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^b)$ $k = 1, 2$ teljesen pozitív leképezések, $T : \mathcal{B}(\mathbb{C}^a) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^a)$ a transzponálás és $a = b = 2$ vagy $a = 2$ és $b = 3$. Ezt a 3.1.2. tétellel kombinálva a qubit-qubit és qubit-qutrit rendszerekre az alábbi szeparabilitási feltételt nyerjük, amit a positive partial transpose kifejezés után szokás PPT- vagy Peres–Horodecki-kritériumnak is hívni.

3.1.3. Tétel. *Egy $\rho \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^+$ vagy $\rho \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3)^+$ állapot pontosan akkor szeparabilis, ha a parciális transzponáltja pozitív.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy a parciális transzponált pozitivitása az állapot szeparabilitásának szükséges feltétele. Ha $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ vagy $\mathcal{B}(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ pozitív leképezés, akkor a (3.3) általános alakból és a Λ_k^{CP} $k = 1, 2$ leképezések teljes pozitivitásából következik, hogy ha $(I \otimes T)(\rho) \geq 0$, akkor $(I \otimes \Lambda)(\rho) \geq 0$ is teljesül tetszőleges Λ pozitív leképezésre. A 3.1.2. tételt felhasználva a bizonyítandó állítást kapjuk. \square

3.1.2. Definíció. *A $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$ állapotter PPT kritériumot kielégítő állapotait PPT állapotoknak nevezzük. A $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}}$ állapotter PPT állapotainak halmazára a $\overline{\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}^{\text{PPT}}}$ jelölést használjuk.*

3.2. Szeparabilitási valószínűség a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapottéren

A $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapotter klasszikusan korrelált állapotai a PPT állapotokkal esnek egyben. Egy általános $\rho \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapot mátrixa

$$\rho = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ mátrix, D_1 és D_2 pedig 2×2 -es önadjungált mátrixok, melyekre $\text{tr}(D_1 + D_2) = 1$ teljesül. A PPT-kritérium a ρ állapotra nézve azt jelenti, hogy a ρ állapot pontosan akkor szeparabilis, ha a

$$(I \otimes T)(\rho) = \begin{pmatrix} D_1^T & C^T \\ (C^*)^T & D_2^T \end{pmatrix}$$

mátrix pozitív definit.

A szeparabilitás kvázi egyszerű tesztelhetősége azt sugallja, hogy a Życzkowski által feltett szeparabilitási valószínűségre vonatkozó kérdés a Hilbert–Schmidt-metrikából származó mérték¹ mellett a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ állapottereken egyszerűen kiszámolható. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez közel sincs így. A témában publikáló kutatók közül ki kell emelnünk P. Slater nevét, aki [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76] cikkeiben sokat foglalkozott a rebit-rebit², qubit-qubit és quaterbit-quaterbit rendszerekben a Lebesgue-mértékre vonatkozó szeparabilitási valószínűség kérdésével és a szeparabilitási valószínűség numerikus meghatározásával. Slater a [72] cikkében eloszlás-rekonstrukciós és kombinatorikus

¹Ez lényegében a Lebesgue-mérték konstansszorososa, ezért a szeparabilitási valószínűség kapcsán lényegében mindegy, hogy Hilbert–Schmidt-metrikából származó mértékről vagy Lebesgue-mértékről beszélünk.

²A qubit mintájára a $\overline{\mathcal{D}_{2,\mathbb{R}}}$ állapotter elemeit rebiteknek nevezzük. A kvaternió elemű 2×2 -es sűrűségmátrixokat pedig az irodalom gyakran quaterbit néven említi.

eszközökkel egy hipergeometrikus függvényeket tartalmazó paraméteres formulához jut el, amelyről sejtí, hogy a paraméter megválasztásától függően rendre a rebit-rebit, qubit-qubit és quaterbit-quaterbit szeparabilitási valószínűségeket adja. Slater formulája a rebit-rebit rendszerre $\frac{29}{64}$ -et, a qubit-qubit esetre pedig $\frac{8}{33}$ -et ad. A formula által szolgáltatott értékek helyességét Fei és Joynt [22] valamint Slater és Dunkl [77, 78] numerikus szimulációkkal támasztotta alá. Itt azonban meg kell jegyeznünk, hogy Slater formulája nem tekinthető a szeparabilitási valószínűség egzakt meghatározásának, hiszen lényegében csak egy 7501 momentumot felhasználó eloszlás rekonstrukcióról van szó, ahol a sorozat véges sok tagjának ismeretében az általános tag képzési szabályát a *Mathematica* FindSequence parancsával keresték meg.

A szeparabilitási valószínűséggel kapcsolatban a számunkra kulcsfontosságú előrelépést Milz és Strunz sejtése jelentette [51]. Milz és Strunz $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ állapotokat véve a

$$\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D) = \{\rho \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \mid \text{tr}_2(\rho) = D\} \quad (3.4)$$

halmazokon vizsgálták a szeparabilitási valószínűséget. Milz és Strunz azt sejtette, hogy a Hilbert–Schmidt metrikából származó térfogatra vonatkozó szeparabilitási valószínűség a $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ állapot választásától független, a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ halmazba eső klasszikusan korrelált állapotok térfogata pedig a D állapot Bloch-sugarának egyszerű polinomiális kifejezése. Milz és Strunz sejtésüket ún. X állapotokra egzaktul bebizonyították, az általános esetben pedig állításukat meggyőző numerikus szimulációval támasztották alá.

3.2.1. Milz és Strunz sejtésének bizonyítása

Az alábbiakban bevezetett $\chi_d, \eta_d : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $d = 1, 2$ függvények kulcsszerepet játszanak a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) állapotterén a Hilbert–Schmidt-metrika és a $g_{f_{GM}}$ monoton metrika által meghatározott térfogatra vonatkozó szeparabilitási valószínűség kiszámításában.

3.2.1. Definíció. A $\chi_d, \eta_d : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvényeket az alábbi integrálokkal definiáljuk

$$\chi_d(\varepsilon) = \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \mathbf{1}_{\|V_\varepsilon^{-1} X V_\varepsilon\| < 1} d\lambda_{4d}(X), \quad (3.5)$$

$$\eta_d(\varepsilon) = \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \det(I - X X^*)^{-\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\|V_\varepsilon^{-1} X V_\varepsilon\| < 1} d\lambda_{4d}(X), \quad (3.6)$$

ahol $V_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ és $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$.

Világos, hogy a χ_d és η_d függvények inverzióra nézve szimmetrikusak, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $\chi_d(1/\varepsilon) = \chi_d(\varepsilon)$ és $\eta_d(1/\varepsilon) = \eta_d(\varepsilon)$ teljesül. A $\tilde{\chi}_d(\varepsilon) = \chi_d(\varepsilon)/\chi_d(1)$ normált χ_d függvény azt méri, hogy egy $\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})$ gömbben egyenletes eloszlású pontot a $V_\varepsilon^{-1}(\cdot)V_\varepsilon$ hasonlósági transzformáció milyen valószínűséggel képez a $\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})$ operátornorma egységsgömb belsejébe. A $\tilde{\eta}_d$ normált η_d függvény hasonló valószínűségi interpretációval bír, de később látni fogjuk, hogy $\eta_d(1) = \infty$, ezért $\tilde{\eta}_d(\varepsilon) = \eta_d(\varepsilon)/\eta_d(1)$ naív definíció helyett egy határértéken keresztül kell definiálni a normált η_d függvényt. A $\tilde{\chi}_d$ és $\tilde{\eta}_d$ függvények

egyfajta geometriai entrópiaként a $(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})$ valószínűségi eloszlás rendezetlenségét méri. Ezek a függvények a $(0, 1]$ intervallumon monoton növekvő, nullában nullát, egyben pedig egyet vesznek fel értékül.

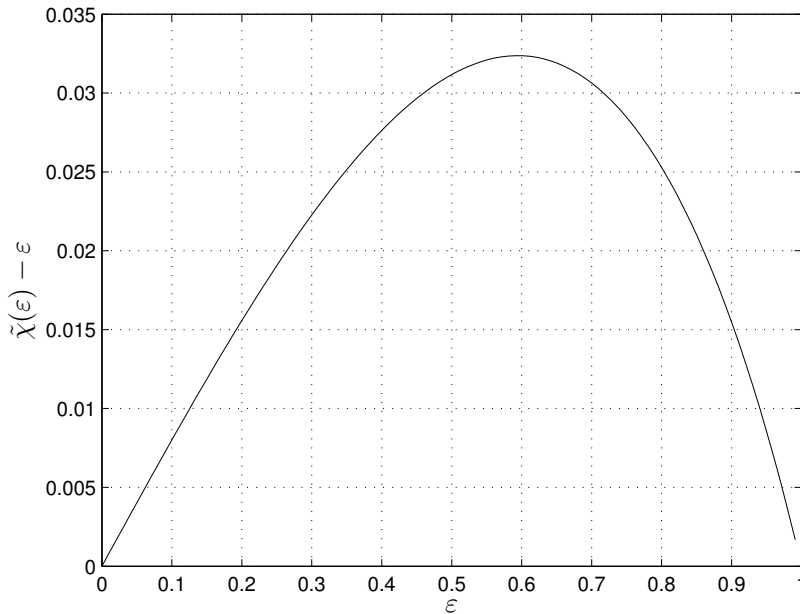
3.2.1. Lemma. A $\tilde{\chi}_1(\varepsilon) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény a

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \int_{\varepsilon}^1 \left(s + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)^2 \log \left(\frac{1+s}{1-s} \right) \right) \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\varepsilon} \left(s + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)^2 \log \left(\frac{1+s}{1-s} \right) \right) \frac{1}{s} ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

integrál alakra írható át.

Bizonyítás. Ez a lemma a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{R}}$ állapotterén a szeparabilitási valószínűség meghatározásához szükséges, bizonyítása viszonylag hosszú és túlzottan technikai jellegű ahhoz, hogy itt közöljük. A lemma bizonyításával a Függelék C.1 pontja foglalkozik. \square

Egyébként a $\tilde{\chi}_1(\varepsilon)$ függvényértéket szolgáltató (3.7) integrál a B.0.2. Definícióban szereplő polilogaritmus függvények felhasználásával zárt alakra hozható. A 3.1. ábrán a $\varepsilon \mapsto \tilde{\chi}_1(\varepsilon) - \varepsilon$ függvényt ábrázoltuk. Látható, hogy a $\varepsilon \mapsto \tilde{\chi}_1(\varepsilon)$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon az identitás függvény igen jól közelíti.



3.1. ábra. Az $\varepsilon \mapsto \tilde{\chi}_1(\varepsilon) - \varepsilon$ függvény grafikonja.

A következő rövid szakaszban paraméterezéseket vezetünk be a 2×2 -es valós és komplex, valós és komplex önadjungált mátrixokon, illetve a rebitek és qubitek állapotterén. A $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ Pauli mátrixok (lásd: A.1.2. Definíció) az I identitásmátrixszal együtt a

2×2 -es önadjungált mátrixok vektorterének egy ortogonális bázisát alkotják a Hilbert–Schmidt belső szorzásra nézve (lásd: A.1.1. Megjegyzés). Tekintsük a $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}$ és $\mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}}$ vektorterek

$$R(\theta, x, y) = \frac{x+y}{2}I + \frac{x-y}{2}(\cos(\theta)\sigma_1 + \sin(\theta)\sigma_3), \quad (3.8)$$

$$0 < \theta < 2\pi, x, y \in \mathbb{R}$$

$$R(\theta, \phi, x, y) = \frac{x+y}{2}I + \frac{x-y}{2}(\cos(\theta)\sin(\phi)\sigma_1 + \sin(\theta)\sin(\phi)\sigma_2 + \cos(\phi)\sigma_3), \quad (3.9)$$

$$0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi, x, y \in \mathbb{R}$$

koordinátázásait. Ez később azért lesz kényelmes, mert az $R(\theta, x, y)$ és $R(\theta, \phi, x, y)$ mátrixok sajátértékei a (3.8) és (3.9) alakokról közvetlenül leolvashatók. Jelölje $O(\phi)$ a standard 2×2 -es forgatás mátrixot, amely a sík vektorait az origó körül óramutató járással ellentétesen, ϕ szöggel forgatja el, továbbá legyen $\Lambda(x, y) = \text{diag}(x, y)$.

Tekintsük az $U(2)$ unitér csoport Mirman [52] könyvének 284–285. oldalán található

$$U(\Theta, \Phi, \omega, \tau) = e^{i\Theta} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{i(\omega+\tau)}{2}} \cos \frac{\Phi}{2} & i e^{\frac{i(\omega-\tau)}{2}} \sin \frac{\Phi}{2} \\ i e^{-\frac{i(\omega-\tau)}{2}} \sin \frac{\Phi}{2} & e^{-\frac{i(\omega+\tau)}{2}} \cos \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$0 < \Phi < \pi, 0 < \Theta < 2\pi, 0 < \omega, \tau < 4\pi$$

paraméterezését. A 2×2 -es komplex mátrixok terét a poláris felbontás segítségével paraméterezzük.

A 2×2 -es valós és komplex sűrűségmátrixok terének paraméterezésére a

$$D(\theta, r) = \frac{1}{2}(I + r(\cos(\theta)\sigma_1 + \sin(\theta)\sigma_3)), \quad (3.11)$$

$$0 < \theta < 2\pi, 0 < r < 1$$

$$D(\theta, \phi, r) = \frac{1}{2}(I + r(\cos(\theta)\sin(\phi)\sigma_1 + \sin(\theta)\sin(\phi)\sigma_2 + \cos(\phi)\sigma_3)), \quad (3.12)$$

$$0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi, 0 < r < 1$$

Bloch-paraméterezést vezetjük be.

A 3.1. táblázatban a $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}$, $\mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}}$, $\mathcal{D}_{2,\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ sokaságok paraméterezéseit és a paraméterezésekhez tartozó térfogati formákat rendszereztük.

A 3.2. Táblázatban pedig a χ_d és η_d , $d = 1, 2$ függvények normalizációs konstansait gyűjtöttük össze.

3.2.1. Példa. A χ_2 függvényhez tartozó $\chi_2(1)$ normalizációs konstans meghatározásához tekintsük a

$$\chi_2(1) = \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \mathbf{1}_{\|V_1^{-1}X\| < 1} \underbrace{V_1}_{=id_{\mathbb{C}^2}} d\lambda_{4d}(X) = \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} 1 d\lambda_{4d}(X)$$

Sokaság	Paraméterezés	Térfogati forma
$\mathbb{R}^{2 \times 2}$	$O(\phi)\Lambda(x, y)O(\theta),$ $0 < \phi, \theta < 2\pi, 0 < x, y$	$\frac{ x^2 - y^2 }{2}$
$\mathbb{C}^{2 \times 2}$	$R(\theta, \phi, x, y)U(\Theta, \Phi, \omega, \tau),$ ahol $0 < x, y$ (lásd: (3.9) és (3.10).)	$\frac{xy(x^2 - y^2)^2}{64} \sin \phi \sin \Phi$
$\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}$	$R(\theta, x, y)$ (lásd: (3.8))	$\frac{ x - y }{\sqrt{2}}$
$\mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}}$	$R(\theta, \phi, x, y)$ (lásd: (3.9).)	$\frac{(x - y)^2}{2} \sin \phi$
$\mathcal{D}_{2,\mathbb{R}}$	$D(\theta, r)$ (lásd: (3.11).)	$\frac{r}{2}$
$\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$	$R(\theta, \phi, x, y)$ (lásd: (3.12).)	$\frac{r^2 \sin \phi}{2\sqrt{2}}$

3.1. táblázat. A $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}$, $\mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}}$ sokaságok paraméterezései a hozzájuk tartozó térfogati formákkal.

	$d = 1$	$d = 2$
$\chi_d(1) =$	$\frac{2}{3}\pi^2$	$\frac{\pi^4}{6}$
$\eta_d(1) =$	∞	∞

3.2. táblázat. Normalizációs konstans a χ_d és η_d $d = 1, 2$ függvényekhez.

integrált. A $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ sokaság 3.1 táblázatban szereplő paraméterezését véve írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\chi_2(1) &= \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} 1 \, d\lambda_{4d}(X) \\
&= 4^3 \pi^4 \times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{xy(x^2 - y^2)^2}{64} \sin \phi \sin \Phi \, d\phi \, d\Phi \, dy \, dx \\
&= 4\pi^4 \times \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx = \frac{\pi^4}{6},
\end{aligned}$$

ahol használtuk azt, hogy $x, y > 0$ esetén az $R(\theta, \phi, x, y)U(\Theta, \Phi, \omega, \tau)$ mátrix normája $\max(x, y)$.

Most pedig rátérünk a normalizált η_d függvény kiszámítására. Definiáljuk az $\tilde{\eta}_d$ függvényt az alábbi határértékkel

$$\tilde{\eta}_d(\varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow 1-0} \frac{\int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \det(I - XX^*)^{-\left(\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}\right)\delta} \mathbf{1}_{\|V_\varepsilon^{-1}XV_\varepsilon\| < 1} \, d\lambda_{4d}(X)}{\int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \det(I - XX^*)^{-\left(\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}\right)\delta} \, d\lambda_{4d}(X)}.$$

Ez a határérték azért létezik, mert a

$$\frac{\int_0^1 \int_0^1 ((1-x^2)(1-y^2))^{-\frac{5\delta}{4}} |x^2 - y^2| d\lambda_2(x, y)}{\int_0^1 \int_0^1 ((1-t^2)(1-s^2))^{-\frac{5\delta}{4}} |t^2 - s^2| d\lambda_2(t, s)}$$

$$\frac{\int_0^1 \int_0^1 ((1-x^2)(1-y^2))^{-2\delta} xy(x^2 - y^2)^2 d\lambda_2(x, y)}{\int_0^1 \int_0^1 ((1-t^2)(1-s^2))^{-2\delta} st(s^2 - t^2)^2 d\lambda_2(t, s)}$$

$[0, 1]^2$ Borel σ -algebráján definiált valószínűségi mértékek a gyenge- $*$ topológiában az egységnyezet $\{(x, y) \in [0, 1] \mid x = 1 \vee y = 1\}$ peremére koncentrált valószínűségi mértékekhez tartanak midőn $\delta \rightarrow 1 - 0$.

A $\tilde{\eta}_d(\varepsilon)$ mennyiséget definiáló határértékben szereplő integrálok unitér transzformációra nézve invariánsak, ezért kijelenthetjük, hogy a

$$\frac{\det(I - XX^*)^{-\left(\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}\right)\delta}}{\int_{B_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \det(I - XX^*)^{-\left(\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}\right)\delta} d\lambda_{4d}(X)} d\lambda_{4d}(X)$$

valószínűségi mérték által meghatározott eloszlás gyengén konvergál a $\partial B_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})$ operátornorma egységgyömb felszínén vett egyenletes eloszláshoz, amint $\delta \rightarrow 1 - 0$.

Az alábbi lemma nem kevesebbet állít, mint hogy az imént körülményes módon definiált $\tilde{\eta}_1$ függvény a $\tilde{\chi}_1$ függvénnyel egyezik meg. Sejtjük, hogy a $\tilde{\chi}_2 = \tilde{\eta}_2$ egyenlőség is teljesül, de ezt ezidáig nem sikerült egzaktul bebizonyítanunk.

3.2.2. Lemma. *A $\tilde{\chi}_1$ és $\tilde{\eta}_1$ függvények egymással megegyeznek, vagyis a*

$$\tilde{\chi}_1(\varepsilon) = \tilde{\eta}_1(\varepsilon) \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

egyenlőség teljesül.

Bizonyítás. A lemma bizonyításával a Függelék C.2. pontja foglalkozik. \square

A rebit-rebit és qubit-qubit rendszerekben a szeperabilitási valószínűség kiszámításához tekintsük a $\mathcal{D}_{4, \mathbb{K}}$ állapotér

$$\rho(D_1, D_2, C) = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$$

paraméterezését, ahol $D_1, D_2 > 0$ pozitív mátrixok, $D_1 + D_2 \in \mathcal{D}_{2, \mathbb{K}}$ állapot és $C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$. Ezen paraméterezés mellett a $\rho(D_1, D_2, C)$ állapot második részrendszerre vonatkozó parciális nyoma

$$\text{tr}_2(\rho(D_1, D_2, C)) = D_1 + D_2 \tag{3.13}$$

módon kapható meg.

Vezessük be a

$$\rho(D_1, D_2, C) \mapsto \bar{T}(\rho(D_1, D_2, C)) = \rho(D_1, D_2, C^*) \tag{3.14}$$

involúciót, ami lényegében a második részrendszerre vonatkozó parciális transzponálás és az elemenkénti konjugálás kompozíciója. Az elemenkénti konjugálás egy $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ pozitív és nyomtartó leképezés, ezért a tárgyalt 4×4 -es esetben a szeparabilitás szükséges és elégséges feltételét jelentő PPT kritériummal ekvivalens annak megkövetelése, hogy egy állapot \bar{T} leképezés általi képe állapot legyen. Ebből kifolyólag a 4×4 -es klasszikusan korrelált állapotok a

$$\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}} = \bar{T}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) \cap \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \quad (3.15)$$

metszatként állanak elő.

Mielőtt kimondanánk a tételünket emlékeztetjük az Olvasót a Milz és Strunz által vizsgált $\mathcal{D}_{d,\mathbb{K}}(D)$ halmaz (3.4) definíciójára. A $(D_1, D_2, C) \mapsto \rho(D_1, D_2, C)$ paraméterezést véve a $\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}(D)$ halmaz azon sűrűségmátrixokból áll, melyekre $D_1 + D_2 = D$ teljesül. Vezessük be a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D) = \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}} \cap \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ halmazt. Most már minden technikai kellék rendelkezésünkre áll, ami a legfőbb eredményünk bizonyításához szükséges.

3.2.1. Tétel. *Legyen $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ egy rögzített sűrűségmátrix. A $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)$ halmaz térfogata a Lebesgue-mértékre vonatkozólag*

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) &= \frac{\det(D)^{4d - \frac{d^2}{2}}}{2^{6d}} \\ &\times \int_{]-I, I[} \det(I - Y^2)^d \times \chi_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I - Y}{I + Y}} \right) d\lambda_{d+2}(Y), \end{aligned} \quad (3.16)$$

ahol $]-I, I[= \{A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \mid -I < A < I\}$ operátor intervallum, $\sigma(A)$ pedig az A invertálható mátrix szinguláris érték hányadosa (lásd: A.1.2. Lemma).

A szeparabilis állapotok $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}$ halmazának Lebesgue-mértékre vonatkozó térfogata pedig

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) = \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) d\lambda_{d+1}(D) \quad (3.17)$$

módon fejezhető ki, ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) = 1, 2$.

Bizonyítás. Rögzített $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ mátrixokat véve legyen

$$\mathcal{C}(D_1, D_2) = \{C \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \mid \rho(D_1, D_2, C) > 0 \ \& \ \rho(D_1, D_2, C^*) > 0\}.$$

A Fubini-tétel szerint írható, hogy

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) &= \lambda_{6d+3}(\bar{T}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) \cap \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) \\ &= \int_{\substack{D_1, D_2 > 0 \\ \text{tr}(D_1 + D_2) = 1}} \int_{C \in \mathcal{C}(D_1, D_2)} 1 d\lambda_{4d}(C) d\lambda_{2d+3}(D_1, D_2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

A (3.15) metszet formula szerint tetszőleges $D_1, D_2 > 0$ 2×2 -es önadjungált mátrixokat véve, melyere $\text{tr}(D_1 + D_2) = 1$ teljesül egy $C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ mátrix pontosan akkor eleme

a $\mathcal{C}(D_1, D_2)$ halmaznak, ha a $\begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} > 0$ és $\begin{pmatrix} D_1 & C^* \\ C & D_2 \end{pmatrix} > 0$ relációk szimultán teljesülnek. Az A.2.3. Lemma szerint ez a feltételrendszer az alábbi ekvivalens alakra írható át

$$\begin{aligned} I > \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \right)^* D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} &\Leftrightarrow \|D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\| < 1 \\ I > \left(D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} \right)^* D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} &\Leftrightarrow \|D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2}\| < 1, \end{aligned}$$

ahol $\|\cdot\|$ a közönséges operátornormát jelöli.

A belső integrál kiszámításához végezzük el a

$$X = D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} = \left(L_{D_1^{-1/2}} \circ R_{D_2^{-1/2}} \right) (C)$$

helyettesítést. A függelék A.3. pontjában foglaltakat figyelembe véve kapjuk, hogy a fenti integrál transzformáció Jacobi determinánsa $\det \left(L_{D_1^{-1/2}} \circ R_{D_2^{-1/2}} \right)^{-1} = \det(D_1)^d \det(D_2)^d$. Ezt felhasználva a (3.18) integrál belső integrálja

$$\int_{C \in \mathcal{C}(D_1, D_2)} 1 \, d\lambda_{4d}(C) = \det(D_1 D_2)^d \int_{B_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \mathbf{1}_{\|(V^*)^{-1} X V\| < 1} \, d\lambda_{4d}(X)$$

alakra írható át, ahol $V = D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$. Vegyük észre, hogy a kapott integrál csak a $\sigma(V)$ szinguláris érték hányadostól függ. Ha feltesszük, hogy a V mátrix szinguláris érték felbontása $V = U_1 \Sigma U_2$, akkor az operátornorma unitér invarianciáját használva írhatjuk, hogy $\|(V^*)^{-1} X V\| = \|U_1 \Sigma^{-1} U_2 X U_1 \Sigma U_2\| = \|\Sigma^{-1} U_2 X U_1 \Sigma\|$. Továbbá vegyük figyelembe azt is, hogy az $X \mapsto U_2 X U_1$ leképezés izometria a Hilbert–Schmidt-normára nézve. Az alfejezet elején tanulmányozott χ_d függvény itt lép színre, hiszen az előző gondolatmenetből következik, hogy a

$$\chi_d(\sigma(V)) = \int_{B_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \mathbf{1}_{\|(V^*)^{-1} X V\| < 1} \, d\lambda_{4d}(X)$$

egyenlőség teljesül. Az A.1.2. Lemma szerint a 2×2 -es V mátrix szinguláris érték hányadosa

$$\sigma(V) = e^{-\cosh^{-1} \left(\frac{\|V\|_{HS}^2}{2|\det(V)|} \right)} = e^{-\cosh^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\det(D_1)}{\det(D_2)}} \operatorname{tr}(D_2 D_1^{-1}) \right)}$$

módon fejezhető ki. Mindezt a (3.18) integrálba írva a szeparábilis állapotok térfogatára a

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\mathcal{D}_{4, \mathbb{K}}^{\text{sep}}) &= \int_{\substack{D_1, D_2 > 0 \\ \operatorname{tr}(D_1 + D_2) = 1}} \det(D_1 D_2)^d f(D_2 D_1^{-1}) \, d\lambda_{2d+3}(D_1, D_2) \end{aligned}$$

kifejezést nyerjük, ahol $f(D_2 D_1^{-1}) = \chi_d \circ \exp \left(-\cosh^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\det(D_1)}{\det(D_2)}} \operatorname{tr}(D_2 D_1^{-1}) \right) \right)$.

Tekintsük az integrációs tartomány alábbi paraméterezését

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2}(D + A) \\ D_2 &= \frac{1}{2}(D - A), \end{aligned} \tag{3.19}$$

ahol D a $\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ állapottéren veszi fel értékét, A pedig a $-D < A < D$ egyenlőtlenségnek eleget tevő önadjungált 2×2 mátrixok terét futja be³. Ez a paraméterezés azért kézenfekvő, mert a (3.13) formula szerint a $\rho(D_1, D_2, C)$ állapot parciális nyoma éppen D lesz és ezért a belső integrálban éppen a Milz és Strunz által tanulmányozott mennyiséget kapjuk meg.

Mátrixok szorzatának nyoma a tényezők ciklikus permutációira nézve invariáns, ezért az előző integrál

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) = \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) \, d\lambda_{d+1}(D)$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) &= \frac{\det(D)^{2d}}{2^{6d}} \times \\ &\times \int_{]-D, D[} \det(I - (D^{-1/2}AD^{-1/2})^2)^d f\left(\frac{I - D^{-1/2}AD^{-1/2}}{I + D^{-1/2}AD^{-1/2}}\right) \, d\lambda_{d+2}(A). \end{aligned}$$

A fenti integrálban végezzük el az $Y = D^{-1/2}AD^{-1/2} = (L_{D^{-1/2}} \circ R_{D^{-1/2}})(A)$ helyettesítést. Az A.3.1. lemmát követő megjegyzés szerint az ezen helyettesítéshez tartozó Jacobi-determináns

$$\det(L_{D^{-1/2}} \circ R_{D^{-1/2}})^{-1} = \det(D)^{2d-d^2/2}$$

lesz. Az $f\left(\frac{I-Y}{I+Y}\right) = \chi_d \circ \sigma\left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}}\right)$ egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) = \frac{\det(D)^{4d-\frac{d^2}{2}}}{2^{6d}} \int_{]-I, I[} \det(I - Y^2)^d \chi_d \circ \sigma\left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}}\right) \, d\lambda_{d+2}(Y).$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

Az alábbi következményben igazoljuk Milz és Strunz sejtését (lásd: [51] cikk (23) egyenlet) a $\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{C}}^{\text{sep}}(D))$ mennyiség D redukált állapottól való függésére vonatkozólag.

3.2.1. Következmény. *A komplex esetben a $\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{C}}^{\text{sep}}(D))$ mennyiség*

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{C}}^{\text{sep}}(D)) = K_1 \times \det(D)^6 = K_2 \times (1 - r^2)^6$$

módon fejezhető ki a $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ redukált állapot r Bloch-sugarával, ahol K_1 és K_2 D állapottól független konstans.

³Erre a halmazra a $]-D, D[$ operátor intervallum jelölést használjuk.

Bizonyítás. A (3.16) kifejezés $d = 2$ paraméter választás mellett adja az első egyenlőséget. A $\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ állapottér (3.12) paraméterezését használva pedig kapjuk, hogy $\det(D) = \frac{1}{4}(1-r^2)$, ami $K_2 = \frac{K_1}{4^6}$ választás mellett a második egyenlőséget adja. \square

3.2.2. Következmény. Legyen $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ rögzített sűrűségmátrix. A $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapottéren a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ halmazra vonatkozó, Lebesgue-mérték szerint vett feltételes szeparabilitási valószínűség a

$$\int_{]-I,I[} \tilde{\chi}_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right) d\mu_{d+2}(Y)$$

integrállal fejezhető ki, ahol a μ_{d+2} a λ_{d+2} Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték

$$d\mu_{d+2}(Y) = \frac{\det(I - Y^2)^d}{\int_{]-I,I[} \det(I - Z^2)^d d\lambda_{d+2}(Z)} d\lambda_{d+2}(Y).$$

Világos, hogy a szóban forgó feltételes szeparabilitási valószínűség a $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ redukált állapottól független, ami egyrészt igazolja Milz és Strunz feltételes szeparabilitási valószínűség invarianciájára vonatkozó sejtését [51]. Másrészt pedig lehetővé teszi, hogy a $\mathcal{P}_{\text{sep}}(\mathbb{K})$ szeparabilitási valószínűséget a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapottéren

$$\mathcal{P}_{\text{sep}}(\mathbb{K}) = \int_{]-I,I[} \tilde{\chi}_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right) d\mu_{d+2}(Y) \quad (3.20)$$

alakban fejezzük ki.

Bizonyítás. A 3.2.1. tétel bizonyításában bemutatott utat végigkövetve kiszámíthatjuk a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ halmaz térfogatát, ami

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)) = \chi_d(1) \frac{\det(D)^{4d - \frac{d^2}{2}}}{2^{6d}} \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^d d\lambda_{d+2}(Y).$$

Ebből pedig a szeparabilitási valószínűséget a

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D))}{\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D))} = \frac{\int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^d \chi_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right) d\lambda_{d+2}(Y)}{\chi_d(1) \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^d d\lambda_{d+2}(Y)}$$

hányadost véve kapjuk. Ezzel a bizonyítás teljes. \square

A μ_{d+2} mérték és a $\sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right)$ szinguláris érték hányados ortogonális (komplex esetben unitér) transzformációkra nézve invariáns. Ezt figyelembe véve a (3.20) integrál nagy mértékben egyszerűsíthető. A $\tilde{\chi}$ függvény 3.2.1. Lemmában közölt alakját felhasználva meghatározhatjuk a rebit-rebit rendszerben a szeparabilitási valószínűséget a Lebesgue-mértékre vonatkozólag, ami a Slater által megjósolt $\frac{29}{64}$ értékkel esik egybe.

3.2.2. Tétel. *A rebit-rebit rendszerben a Hilbert–Schmidt-metrikából származó mértékre vonatkozó szeparabilitási valószínűség*

$$\mathcal{P}_{\text{sep}}(\mathbb{R}) = \frac{29}{64}.$$

Bizonyítás. A fent említett unitér invarianciát felhasználva a (3.20) kifejezésben szereplő integrál

$$\mathcal{P}_{\text{sep}}(\mathbb{R}) = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^x \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} / \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \right) (1-x^2)(1-y^2)(x-y) dy dx}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^x (1-x^2)(1-y^2)(x-y) dy dx}$$

egyszerűbb alakba írható, ahol a nevező $\frac{16}{35}$. A számlálóban végezzük el az $u = \frac{1-x}{1+x}$, $v = \frac{1-y}{1+y}$ helyettesítést, melynek Jacobi determinánsa $\frac{4}{(1+u)^2(1+v)^2}$. Vegyük figyelembe, hogy a $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ involutív leképezés a $] -1, 1[$ intervallumot a $]0, \infty[$ intervallumra képezi le. A helyettesítés elvégzése után a számláló

$$\int_0^\infty \int_0^v \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right) \frac{128uv(v-u)}{(1+u)^5(1+v)^5} du dv$$

alakú lesz. Ismét helyettesítünk, ezúttal legyen $u = ts$ és $v = \frac{s}{t}$. Az integráltranszformáció Jacobi determinánsa $\frac{2s}{t}$, az új integrációs tartomány pedig $0 < s < \infty$, $0 < t < 1$ lesz. A helyettesítés elvégzése után az

$$\int_0^\infty \int_0^v \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right) \frac{128uv(v-u)}{(1+u)^5(1+v)^5} du dv = \int_0^\infty \int_0^1 \tilde{\chi}_1(t) \frac{256s^4t^3(1-t^2)}{(s+t)^5(1+st)^5} dt ds$$

alakot nyerjük. A belső integrálban parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \tilde{\chi}_1(t) \frac{256s^4t^3(1-t^2)}{(s+t)^5(1+st)^5} dt = \frac{64s^3}{(s+1)^8} - \int_0^1 \frac{64s^3t^4 (\tilde{\chi}_1)'(t)}{(s+t)^4(1+st)^4} dt.$$

Ezt beírva a számlálóra kapott kifejezésbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{64s^3}{(s+1)^8} ds - \int_0^1 \int_0^\infty \frac{64s^3t^4 (\tilde{\chi}_1)'(t)}{(s+t)^4(1+st)^4} ds dt \\ &= \frac{16}{35} - \\ & - \frac{64}{3} \int_0^1 \frac{11(1-t^6) + 27t^2(1-t^2) + 6(1+t^2)(1+8t^2+t^4) \log(t)}{(t^2-1)^7} (\tilde{\chi}_1)'(t) dt, \end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban az integrálok sorrendjét felcseréltük.

A kapott integrál polilogaritmus függvények felhasználásával az alábbi zárt alakba írható

$$\begin{aligned} & \frac{64}{3} \int \frac{11(1-t^6) + 27t^2(1-t^2) + 6(1+t^2)(1+8t^2+t^4) \log(t)}{(t^2-1)^7} (\tilde{\chi}_1)'(t) dt = \\ & = -\frac{1}{9\pi^2 (t^2-1)^6} \left[9(t^2-1)^6 \operatorname{Li}_2(1-t) + 9(t^2-1)^6 \operatorname{Li}_2(-t) + \right. \\ & + 96(t^2+1)(t^4+28t^2+1)(t^2-1)^3 \tanh^{-1}(t) + \\ & + 9(t^8-132t^6-378t^4-132t^2+1)(t^2-1)^2 \log(t) \log(t+1) + \\ & + 2t(-57t^{10}-1211t^8+78t^6-78t^4+1211t^2) + \\ & + 6t((-3t^{10}+401t^8+882t^6+882t^4+401t^2+192+ \\ & \left. + (t^9+t^7-4t^5+t^3+t) \log(1-t) - 3) \log(t) + 57) \right] + \text{const}, \end{aligned}$$

ahol a $\tilde{\chi}$ függvény 3.2.1. Lemmában szereplő alakját alkalmaztuk. Ebből a számlálóra kapjuk, hogy

$$\frac{64}{3} \int_0^1 \frac{11(1-t^6) + 27t^2(1-t^2) + 6(1+t^2)(1+8t^2+t^4) \log(t)}{(t^2-1)^7} (\tilde{\chi}_1)'(t) dt = \frac{1}{4},$$

amiből a szeperabilitási valószínűségre

$$\mathcal{P}_{\text{sep}}(\mathbb{R}) = \frac{\frac{16}{35} - \frac{1}{4}}{\frac{16}{35}} = \frac{29}{64}$$

adódik, amivel a bizonyítás teljes. □

3.2.2. Általánosítás a $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaságra

Az 1.2.1 Követlezményben láthattuk, hogy egy $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_f)$ statisztikus sokaság térfogati formája

$$\sqrt{\det(g_f(\rho))} = \frac{1}{\sqrt{\det(\rho)}} \left(2^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} c_f(\mu_i, \mu_j) \right)^{d/2} \quad (3.21)$$

alakba írható, ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$, μ_1, \dots, μ_n a ρ sűrűségmátrix sajátértékei, $c_f(x, y) = \frac{1}{y f(x/y)}$ pedig az $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátormonoton függvényhez asszociált Cenzov–Morozova-függvény v.ö. az (1.14) formulával. Esetünkben $n = 4$ és $f(x) = \sqrt{x}$, amiből a térfogati formára a

$$\sqrt{\det(g_f(\rho))} = \frac{2^{3d}}{\det(\rho)^{\frac{3d}{4} + \frac{1}{2}}} \quad d = 1, 2 \quad (3.22)$$

kifejezést nyerjük. A (3.22) térfogati forma különleges tulajdonsága, hogy a ρ állapottól csak annak determinánsán keresztül függ. Ez tesz lehetővé, hogy a 3.2.1. tétel bizonyításának kismértékű módosítása árán bebizonyítsuk az alábbi tételt.

3.2.3. Tétel. *Legyen $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ rögzített sűrűségmátrix. A $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D), g_{f_{GM}})$ sokaság térfogata formálisan*

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) = 4 \det(D)^{\frac{5}{2}d - \frac{d^2}{2} - 1} \int_{]-I, I[} \det(I - Y^2)^{\frac{d-2}{4}} \eta_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I - Y}{I + Y}} \right) d\lambda_{d+2}(Y)$$

alakba írható, a klasszikusan korrelált állapotok $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}, g_{\sqrt{x}})$ terének térfogatára pedig formálisan

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) = \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) d\lambda_{d+1}(D)$$

adódik, ahol $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) = 1, 2$.

Bizonyítás. A $\det(\rho(D_1, D_2, C)) = \det(D_1 D_2) \det(I - D_1^{-1/2} C D_2^{-1} C^* D_1^{-1/2})$ szorzat alakból kifolyólag írható, hogy

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) &= 2^{3d} \int_{\substack{D_1, D_2 > 0 \\ \text{tr}(D_1 + D_2) = 1}} \det(D_1 D_2)^{-\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}} \\ &\times \int_{C \in \mathcal{C}(D_1, D_2)} \det(I - D_1^{-1/2} C D_2^{-1} C^* D_1^{-1/2})^{-\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}} d\lambda_{4d}(C) d\lambda_{2d+3}(D_1, D_2), \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{C}(D_1, D_2)$ a 3.2.1. tétel bizonyítása során definiált halmaz. A $X = D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}$ helyettesítést elvégezve a belső integrál

$$\det(D_1 D_2)^d \int_{\mathbf{B}_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})} \det(I - X X^*)^{-\frac{3d}{4} - \frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\|(V^*)^{-1} X V\| < 1} d\lambda_{4d}(X)$$

alakot ölt, ahol $V = D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$. A 3.2.1. tétel bizonyítása során alkalmazott érvelést megismételve kapjuk, hogy a fenti kifejezésben szereplő második tényező csak a V mátrix szinguláris érték hányadosától függ és $\eta_d \circ \sigma(V)$ alakba írható. Ebből a szeparábilis állapotok térfogatára a

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) = \int_{\substack{D_1, D_2 > 0 \\ \text{tr}(D_1 + D_2) = 1}} 2^{3d} \det(D_1 D_2)^{\frac{d-2}{4}} \eta_d \circ \sigma(D_2^{1/2} D_1^{-1/2}) d\lambda_{2d+3}(D_1, D_2)$$

kifejezést kapjuk. A (3.19) paraméterezést alkalmazva az $Y = D^{-1/2} A D^{-1/2}$ helyettesítéssel a

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}) = \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) d\lambda_{d+1}(D)$$

integrálhoz jutunk, ahol

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D)) = 4 \det(D)^{\frac{5}{2}d - \frac{d^2}{2} - 1} \int_{]-I, I[} \det(I - Y^2)^{\frac{d-2}{4}} \eta_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I - Y}{I + Y}} \right) d\lambda_{d+2}(Y).$$

□

3.2.3. Következmény. Tetszőleges $D \in (\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ sűrűségmátrixot véve a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ halmazon a (3.22) térfogati formához rendelt valószínűségi mértékre vonatkozó feltételes szeparabilitási valószínűség az

$$\int_{]-I,I[} \tilde{\eta}_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right) d\nu_{d+2}(Y) \quad (3.23)$$

integrállal fejezhető ki, ahol ν_{d+2} a λ_{d+2} Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték:

$$d\nu_{d+2}(Y) = \frac{\det(I - Y^2)^{\frac{d-2}{4}}}{\int_{]-I,I[} \det(I - Z^2)^{\frac{d-2}{4}} d\lambda_{d+2}(Z)} d\lambda_{d+2}(Y).$$

Rögtön szembetűnik, hogy – csakúgy mint a Hilbert–Schmidt-metrikából származó mérték esetén – itt is igaz, hogy a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ alakú halmazokon a szeparabilitási valószínűség a D redukált állapottól független. Ez egyrészt azt jelenti, hogy Milz és Strunz szeparabilitási valószínűség invarianciájára vonatkozó sejtése $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaságon is érvényben marad, másfelől pedig $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaságon a szeparabilitási valószínűség a

$$\mathcal{P}_{\text{sep}, g_{f_{GM}}}(\mathbb{K}) = \int_{]-I,I[} \tilde{\eta}_d \circ \sigma \left(\sqrt{\frac{I-Y}{I+Y}} \right) d\nu_{d+2}(Y). \quad (3.24)$$

integrállal egyezik meg.

Bizonyítás. A 3.2.3. tételt bizonyításában vázolt számolással analóg módon kiszámítható a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)$ térfogata a $g_{f_{GM}}$ monoton metrikára vonatkozóan, amire végül is

$$\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)) = 4\eta_d(1) \det(D)^{\frac{5}{2}d - \frac{d^2}{2} - 1} \times \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^{\frac{d-2}{4}} d\lambda_{d+2}(Y) \quad (3.25)$$

adódik. Ezután a $\mathcal{P}_{\text{sep}, g_{f_{GM}}}(\mathbb{K}) = \frac{\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\text{sep}}(D))}{\text{Vol}_{g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D))}$ hányadost véve a bizonyítandó összefüggést kapjuk. \square

A 3.2.2. Lemmában bizonyított $\tilde{\chi}_1 = \tilde{\eta}_1$ egyenlőség és a $\tilde{\chi}_1$ függvény (3.7) explicit alakja lehetővé teszi, hogy meghatározzuk a $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{R}}, g_{f_{GM}})$ statisztikai sokaságon a szeparabilitási valószínűséget. Ez a Hilbert–Schmidt metrikára vonatkozó szeparabilitási valószínűség ismereténél annyiban érdekesebb, hogy míg a $g_{f_{GM}}$ monoton metrikának világos információgeometriai jelentése van, addig az (1.15) Hilbert–Schmidt metrikához nem társul információgeometriai kép.

3.2.4. Tétel. A $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{R}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaságon a szeparabilitási valószínűség

$$\mathcal{P}_{\text{sep}, g_{f_{GM}}}(\mathbb{R}) = \int_0^1 \frac{8 \left(8(t^4 + t^2) E\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) - (t^2 + 3)(3t^2 + 1) K\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right)}{\pi \sqrt{t} (t^2 - 1)^3} \tilde{\chi}_1(t) dt$$

$$\approx 0.26223.$$

Bizonyítás. A $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\chi}_1$ egyenlőséget (lásd: 3.2.2. Lemma és a függelék C.2. pontja) valamint a (3.24) integrál unitér invarianciáját felhasználva írhatjuk, hogy

$$\mathcal{P}_{\text{sep},g_{f_{GM}}}(\mathbb{R}) = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^x \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} / \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \right) (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} (1-y^2)^{-\frac{1}{4}} (x-y) dy dx}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^x (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} (1-y^2)^{-\frac{1}{4}} (x-y) dy dx},$$

ahol a nevező $\frac{2\pi}{3}$. A számláló kiszámításához a Hilbert–Schmidt eset számolásához használt stratégiát követjük. Az első helyettesítés után a számláló az alábbi alakot nyeri

$$\int_0^\infty \int_0^v \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right) \frac{4(v-u)}{(uv)^{\frac{1}{4}} (1+u)^{\frac{5}{2}} (1+v)^{\frac{5}{2}}} du dv.$$

A második helyettesítés után pedig azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty \int_0^v \tilde{\chi}_1 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right) \frac{4(v-u)}{(uv)^{\frac{1}{4}} (1+u)^{\frac{5}{2}} (1+v)^{\frac{5}{2}}} du dv = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{8s^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} (1-t^2) \tilde{\chi}_1(t)}{(s+t)^{\frac{5}{2}} (1+ts)^{\frac{5}{2}}} dt ds.$$

Az integrálok sorrendjét felcserélve az

$$\int_0^1 \frac{16 \left(8(t^4 + t^2) E\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) - (t^2 + 3)(3t^2 + 1) K\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right)}{3\sqrt{t} (t^2 - 1)^3} \tilde{\chi}_1(t) dt \approx 0.549213$$

integrálhoz jutunk, melynek értékét numerikusan tudjuk csak kiszámítani. Itt K és E a teljes első- és másodfajú teljes elliptikus integrált jelöli (lásd: B.0.3. Definíció).

A nevezővel történő osztás után a szeparabilitási valószínűsége a bizonyítandó

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{sep},g_{f_{GM}}}(\mathbb{R}) &= \int_0^1 \frac{8 \left(8(t^4 + t^2) E\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) - (t^2 + 3)(3t^2 + 1) K\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right)}{\pi \sqrt{t} (t^2 - 1)^3} \tilde{\chi}_1(t) dt \\ &\approx 0.26223 \end{aligned}$$

értéket nyerjük. □

3.2.3. Ellenőrző számítások

Ellenőrzésképpen kiszámítjuk a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapotter térfogatót a Lebesgue-mértékre nézve és a kapott eredményeket összevetjük az Andai [1] és Życzkowski [37] által kapottakkal. A 3.2.2. Következmény bizonyításában már találkozhattunk a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ állapotter térfogatónak

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)) d\lambda_{d+1}(D) \quad (3.26)$$

alakú kifejezésével, ami

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = \frac{\chi_d(1)}{2^{6d}} \times \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \det(D)^{4d-\frac{d^2}{2}} d\lambda_{d+1}(D) \times \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^d d\lambda_{d+2}(Y) \quad (3.27)$$

módon bomlik szorzattá.

A fenti felbontás tényezői a valós esetben:

$$\begin{aligned} \chi_1(1) &= \frac{2}{3}\pi^2 \\ \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{R}}} \det(D)^{\frac{7}{2}} d\lambda_2(D) &= \frac{\pi}{2^7 3^2} \\ \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2) d\lambda_3(Y) &= \frac{2^5 \sqrt{2}\pi}{35}. \end{aligned}$$

A komplex esetben a

$$\begin{aligned} \chi_2(1) &= \frac{\pi^4}{6} \\ \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}} \det(D)^6 d\lambda_3(D) &= \frac{\pi}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \sqrt{2}} \\ \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^2 d\lambda_4(Y) &= \frac{2^{10}\pi}{3^2 \times 5^2 \times 7} \end{aligned}$$

tényezőket kapjuk.

A kapottakat a (3.27) szorzat felbontásba beírva a 4×4 -es valós illetve komplex állapotterérfogatára a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{R}}) &= \frac{\pi^4}{\sqrt{2} \times 2^6 \times 3^3 \times 35} \\ \text{Vol}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{C}}) &= \frac{\pi^6}{\sqrt{2} \times 2^{14} \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13} \end{aligned}$$

értékeket nyerjük, ami egy kettőhatvány szorzótól eltekintve megegyezik a Życzkowski [37] és Andai (lásd: [1] dolgozat 1. és 2. tétele) kapottakkal. A kettőhatvány faktor eltérés az állapotterén Hilbert–Schmidt metrika általunk figyelembe nem vett kettőhatvány alakú konstans térfogati formájából fakad.

Az Andai által tanulmányozott 2×2 -es esettel ellentétben (lásd: [1] dolgozat 1. Következmény) a $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaság térfogata mind a valós mind a komplex esetben végtelen, hiszen $d = 1, 2$ esetén $\eta_d(1) = \infty$ (lásd: 3.2. táblázat) és a $(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}, g_{f_{GM}})$ statisztikus sokaság térfogata

$$\text{Vol}_{f_{GM}}(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = 4\eta_d(1) \times \int_{\mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}} \det(D)^{\frac{5}{2}d-\frac{d^2}{2}-1} d\lambda_{d+1}(D) \times \int_{]-I,I[} \det(I - Y^2)^{\frac{d-2}{4}} d\lambda_{d+2}(Y) \quad (3.28)$$

módon bomlik szorzattá.

3.3. A $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterek geometriája

A $2n$ -dimenziós Hilbert-terekkel leírt kvantummechanikai rendszerekre a $\mathbb{K}^{2n} \cong \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^2$ izomorfizmus révén gondolhatunk úgy is, mint összetett rendszerekre, melyek egy n -dimenziós Hilbert-térrel leírt kvantummechanikai rendszerből és egy kétdimenziós Hilbert-térrel leírt rendszerből épülnek fel. Ilyen rendszernek tekinthető az egy fotonból és egy véges szabadsági fokú kvantummechanikai rendszerből álló összetett rendszer vagy több qubit együttese, amely egy véges sok qubittel dolgozó kvantumszámítógép kvantum regiszterének is felfogható. Korábban szó volt arról, hogy a kvantum összefonódás a kvantumos algoritmusok szempontjából bizonyos értelemben erőforrásnak tekinthető, ami indokolja, hogy a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterek és ezen belül a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}^{\text{sep}}$ klasszikusan korrelált állapotok geometriáját tanulmányozzuk.

3.3.1. A $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterek szorzat struktúrája

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapottér diffeomorf a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ szorzat sokasággal, ahol $\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}$ a \mathbb{K} test feletti $n \times n$ -es önadjungált mátrixok alkotta (3.1) operátor intervallumot jelöli. Megmutatjuk, hogy a fenti szorzat előállításban az állapotok második komponensre vonatkozó parciális nyoma az első komponensre történő projekcióval fejezhető ki, továbbá meghatározzuk tetszőleges g_f monoton metrika alakját ezen szorzat felbontásra vonatkozóan.

3.3.1. Definíció. Az $A \otimes B = (A^{1/2} B A^{1/2})^{1/2}$ mátrixot az A és B pozitív definit mátrixok szemiszimmetrikus szorzatának nevezzük.

Legyen $D \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapot, $Z \in \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}$ és $X \in B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ kontrakció. Vezessük be a

$$\phi_n(D, Z, X) = S_n(D, Z) \begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix} S_n(D, Z) \quad (3.29)$$

leképezést, ahol

$$S_n(D, Z) = \begin{bmatrix} D \otimes \frac{I+Z}{2} & 0 \\ 0 & D \otimes \frac{I-Z}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

valamint a

$$\Pi_{n,\mathbb{K}} = \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$$

jelölést. Megállapodunk abban, hogy a ϕ és S leképezések indexét nem írjuk ki, ha ez nem vezet félreértésre.

3.3.1. Tétel. A $\phi : \Pi_{n,\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}(D, Z, X) \mapsto \phi(D, Z, X)$ leképezés diffeomorfizmus, a

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}} \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \text{tr}_2 \\ & & \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \end{array} \quad (3.31)$$

diagramm pedig kommutatív, ahol $\text{tr}_2 : \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ a második részrendszerre vonatkozó parciális nyom, pr_1 pedig a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapottérre vonatkozó projekciót jelöli.

Bizonyítás. A (3.29) alakban a mátrix szorzásokat elvégezve

$$\phi(D, Z, X) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} D^{1/2}(I+Z)D^{1/2} & (D \otimes (I+Z))X(D \otimes (I-Z)) \\ (D \otimes (I-Z))X^*(D \otimes (I+Z)) & D^{1/2}(I-Z)D^{1/2} \end{bmatrix},$$

adódik, amiből az

$$(\text{tr}_2 \circ \phi)(D, Z, X) = \frac{1}{2} (D^{1/2}(I+Z)D^{1/2} + D^{1/2}(I-Z)D^{1/2}) = D = \text{pr}_1(D, Z, X)$$

egyenlőséget kapjuk tetszőleges $D \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$, $Z \in \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}$ és $X \in B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ esetén. Ez igazolja a (3.31) diagramm kommutativitását.

Most pedig a ϕ leképezés diffeomorfizmus voltának bizonyítására térünk rá. Először megmutatjuk, hogy ϕ szürjektív és meghatározzuk az inverzét. Legyen $P : \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}^n$ az első n koordinátára, $Q : \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}^n$ pedig az utolsó n koordinátára történő vetítés, azaz

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{2n} \ni (x_1, \dots, x_{2n})^T &\mapsto P((x_1, \dots, x_{2n})^T) = (x_1, \dots, x_n)^T \\ \mathbb{K}^{2n} \ni (x_1, \dots, x_{2n})^T &\mapsto Q((x_1, \dots, x_{2n})^T) = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})^T. \end{aligned}$$

Egy tetszőleges $\rho \in \mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapot

$$\rho = \begin{pmatrix} P\rho P^* & P\rho Q^* \\ Q\rho P^* & Q\rho Q^* \end{pmatrix}$$

blokk mátrix alakban írható fel. Erről és $\phi(D, Z, X)$ alakjából leolvasható, hogy a

$$\begin{aligned} D &= \text{tr}_2(\rho) \\ Z &= D^{-1/2} (P\rho P^* - Q\rho Q^*) D^{-1/2} = \text{tr}_2(\rho)^{-1/2} (P\rho P^* - Q\rho Q^*) \text{tr}_2(\rho)^{-1/2} \\ X &= \left(D \otimes \frac{I+Z}{2} \right)^{-1} P\rho Q^* \left(D \otimes \frac{I-Z}{2} \right)^{-1} = (P\rho P^*)^{-1/2} P\rho Q^* (Q\rho Q^*)^{-1/2} \end{aligned}$$

egyenlőségeknek kell teljesülni, amiből a ϕ leképezés inverzére a

$$\phi^{-1}(\rho) = (\text{tr}_2(\rho), \text{tr}_2(\rho)^{-1/2} (P\rho P^* - Q\rho Q^*) \text{tr}_2(\rho)^{-1/2}, (P\rho P^*)^{-1/2} P\rho Q^* (Q\rho Q^*)^{-1/2}) \quad (3.32)$$

alakot kapjuk. Amint ρ befutja a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ nyílt állapotteret, $\text{tr}_2(\rho)$ a $\mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapotteret futja be. A $\rho \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^{2n})^+$ pozitivitás miatt $P\rho P^* > 0$ és $Q\rho Q^* > 0$ egyszerre teljesül, ami Z -re a $I+Z > 0$ és $I-Z > 0$ egyenlőtlenségeket adja, ebből pedig $-I < Z < I$ következik. Az A.2.3. Lemmában foglalt pozitivitás feltétel szerint a

$$Q\rho Q^* - Q\rho P^* (P\rho P^*)^{-1} P\rho Q^* > 0$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülni, ami az $X^*X < I$ feltétellel ekvivalens. Ez utóbbi feltétel pedig az A.2.4. Lemma szerint $\|X\| < 1$ alakba írható át. Tehát ϕ bijekció a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapottér és a $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ sokaság között. A ϕ és ϕ^{-1} leképezések lineáris és bilinéris leképezések, valamint az $A \mapsto A^{-1}$ invertálás és az $A \mapsto A^{1/2}$ operátor négyzetgyök alkalmas kompozícióiként állnak elő. Ezek a leképezések pedig az értelmezési tartományukon differenciálhatók, így kompozíciójuk is az. Ezzel beláttuk, hogy a ϕ és ϕ^{-1} leképezések differenciálhatók. Tehát ϕ tényleg diffeomorfizmus a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ és $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ sokaságok között. \square

A ϕ_n és ϕ_m diffeomorfizmusok segítségével tetszőleges $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{2m, \mathbb{K}}$ leképezés redukált állapotokra való megszorítása könnyedén előállítható. Ha pedig egy tetszőleges $\mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{m, \mathbb{K}}$, $\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{E}_{m, \mathbb{K}}$ és $B_1(\mathbb{K}^{n \times n}) \rightarrow B_1(\mathbb{K}^{m \times m})$ leképezés hármast adunk meg, akkor ezek segítségével $\Pi_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \Pi_{m, \mathbb{K}}$ leképezéseket definiálhatunk, melyek a ϕ_n és ϕ_m diffeomorfizmusok révén leképezéseket indukálnak a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ és $\mathcal{D}_{2m, \mathbb{K}}$ állapotterek között. Ezzel a technikával rengeteg nem triviális $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{2m, \mathbb{K}}$ leképezés adható meg.

3.3.1. Következmény. *Tekintsünk egy n darab kvantum bitből (rebit, ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ és qubit, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) álló összetett kvantummechanikai rendszert, melyhez a $\overline{\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}}$ állapottér tartozik. A 3.3.1. tétel n -szeri alkalmazásával kapjuk, hogy a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapottér belső a*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathcal{E}_{2^k, \mathbb{K}} \times B_1 \left(\mathbb{K}^{2^k \times 2^k} \right) \right)$$

szorzat sokasággal diffeomorf.

A $\Pi_{n, \mathbb{K}} = \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}} \times B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ szorzat sokaság érintőtere tetszőleges $(D, Z, X) \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}} \times B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ pontban a

$$T_D \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \times T_Z \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}} \times T_X B_1(\mathbb{K}^{n \times n}) \cong \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \times \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}} \times \mathbb{K}^{n \times n}$$

direkt szorzattal izomorf. Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény, g_f pedig a neki megfelelő monoton metrika a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapottéren. Vizsgáljuk a g_f metrika ϕ leképezés általi $\phi^* g_f$ visszahúzottját.

Legyen $U \in \mathcal{U}(\mathbb{K}^{2n})$ unitér mátrix és definiáljuk a $\beta_U : \mathbb{K}^{2n \times 2n} \rightarrow \mathbb{K}^{2n \times 2n}$ $\beta_U(A) = U^* A U$ unitér konjugálást. Ezzel a jelöléssel a g_f monoton metrika unitér invarianciája $g_f = \beta_U^* g_f$ ekvivalens alakban írható fel. Ebből kapjuk, hogy

$$g_f = \beta_U^* g_f \Leftrightarrow \phi^* g_f = \phi^* \beta_U^* g_f = \alpha_U^* \phi^* g_f, \quad (3.33)$$

ahol $\alpha_U = \phi^{-1} \circ \beta_U \circ \phi$. A $\phi^* g_f = \alpha_U^* \phi^* g_f$ egyenlőség értelmében $\phi^* g_f$ kiszámításánál feltehető, hogy a tekintett pontot a ϕ leképezés diagonális állapotba viszi. Ezzel ekvivalens, hogy a $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ sokaság tekintett pontja $(D, Z, 0)$ alakú, ahol D és Z diagonális.

A most következő gondolatmenetben feltesszük, hogy $D \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ és $Z \in \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}$ diagonális mátrixok, továbbá $D_0, D'_0 \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0)$, $Z_0, Z'_0 \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ és $X_0, X'_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$. A $\phi_n : \Pi_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ leképezés $(D, Z, 0) \in \Pi_{n, \mathbb{K}}$ pontbeli deriváltja

$$\begin{aligned} d\phi(D, Z, 0)(D_0, Z_0, X_0) &= S(D, Z) \begin{bmatrix} 0 & X_0 \\ X_0^* & 0 \end{bmatrix} S(D, Z) \\ &+ dS(D, Z)(D_0, Z_0) S(D, Z) + S(D, Z) dS(D, Z)(D_0, Z_0) \\ &= (dS^2)(D, Z)(D_0, Z_0) + S(D, Z) \begin{bmatrix} 0 & X_0 \\ X_0^* & 0 \end{bmatrix} S(D, Z), \end{aligned} \quad (3.34)$$

ahol $S^2(D, Z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} D^{1/2}(I+Z)D^{1/2} & 0 \\ 0 & D^{1/2}(I-Z)D^{1/2} \end{bmatrix}$, melynek deriváltja

$$(dS^2)(D, Z)(D_0, Z_0) = \begin{bmatrix} \frac{D^{1/2} \frac{I+Z \boxplus I}{2} D^{1/2}}{D^{1/2} \boxplus I}(D_0) + D^{1/2} \otimes D^{1/2}(Z_0) & 0 \\ 0 & \frac{D^{1/2} \frac{I-Z \boxplus I}{2} D^{1/2}}{D^{1/2} \boxminus I}(D_0) - D^{1/2} \otimes D^{1/2}(Z_0) \end{bmatrix}.$$

Itt $A \boxplus B$ az A és B mátrixok $A \otimes B + B \otimes A$ Kroenecker-összegét jelöli, mellyel az operátor négyzetgyök A_0 önadjungált mátrix irányú deriváltja egy A pozitív mátrix helyen

$$(\sqrt{A} \boxplus I)^{-1}(A_0) = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{A}} A_0 e^{-t\sqrt{A}} dt$$

módon fejezhető ki. Végül a D és Z mátrixok felcserélhetőségét felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d\phi(D, Z, 0)(D_0, Z_0, X_0) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \frac{D^{1/2}(I+Z) \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I}(D_0) + D^{1/2} \otimes D^{1/2}(Z_0) & D^{1/2}(I+Z)^{1/2} \otimes D^{1/2}(I-Z)^{1/2}(X_0) \\ D^{1/2}(I-Z)^{1/2} \otimes D^{1/2}(I+Z)^{1/2}(X_0^*) & \frac{D^{1/2}(I-Z) \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I}(D_0) - D^{1/2} \otimes D^{1/2}(Z_0) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A $\phi^* g_f$ visszahúzott metrika a $(D, Z, 0)$ pontban

$$\phi^* g_f(D, Z, 0)((D_0, Z_0, X_0), (D'_0, Z'_0, X'_0)) = \text{tr}((D_0, Z_0, X_0) \phi^* G_f(D, Z, 0) (D'_0, Z'_0, X'_0)^T)$$

alakba írható, ahol

$$\phi^* G_f(D, Z, 0) = (d\phi(D, Z, 0))^* G_f(\phi(D, Z, 0)) d\phi(D, Z, 0)$$

egy $[G_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ szuperoperátorokat tartalmazó 3×3 -as szimmetrikus hipermátrixszal adható meg, melynek zérustól különböző elemei

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{4} \left[c_f(L_{D^{I+Z}}, R_{D^{I+Z}}) \left(\frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 + c_f(L_{D^{I-Z}}, R_{D^{I-Z}}) \left(\frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 \right] \\ G_{12} &= \frac{1}{4} \left[c_f(L_{D^{I+Z}}, R_{D^{I+Z}}) \frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} - c_f(L_{D^{I-Z}}, R_{D^{I-Z}}) \frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right] D^{1/2} \otimes D^{1/2} \\ G_{22} &= \frac{1}{4} \left[c_f(L_{D^{I+Z}}, R_{D^{I+Z}}) + c_f(L_{D^{I-Z}}, R_{D^{I-Z}}) \right] D \otimes D \\ G_{33} &= \frac{1}{2} c_f(L_{D^{I+Z}}, R_{D^{I-Z}}) D(I+Z) \otimes D(I-Z), \end{aligned}$$

ahol c_f az $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvényhez asszociált Cenzov–Morozova-függvény.

3.3.2. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény. A $\phi^* g_f$ visszahúzott metrikával ellátott $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ sokaság térfogati formája egy olyan $(D, Z, 0) \in \Pi_{n, \mathbb{K}}$ pontban, melynek ϕ általi képe a $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{2n})$ diagonális állapot*

$$\sqrt{\det(\phi^* G_f(D, Z, 0))} = \frac{\det(D)^{\frac{d}{2}(3n-1)} \det(I-Z^2)^{\frac{nd-1}{2}}}{2^{\binom{2n}{2} \frac{d}{2} - \frac{1}{2}}} \prod_{0 \leq k < l \leq 2n} \left(\frac{2}{\mu_l f\left(\frac{\mu_k}{\mu_l}\right)} \right)^{\frac{d}{2}}.$$

Bizonyítás. A szóban forgó térfogati forma a $\det((d\phi(D, Z, 0))^* d\phi(D, Z, 0))$ determináns négyzetgyökének és a megfelelő (1.14) alakú térfogati formának a szorzataként áll elő. A $d\phi(D, Z, 0)^* d\phi(D, Z, 0) : \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \times \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}} \times \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}(0) \times \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}} \times \mathbb{K}^{n \times n}$

lineáris leképezéshez asszociált szuperoperátor elemű G szimmetrikus hipermátrix nem zérus elemei

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 + \left(\frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 \right] \\ G_{12} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} - \frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right] D^{1/2} \otimes D^{1/2} \\ G_{22} &= \frac{1}{2} D \otimes D \\ G_{33} &= \frac{1}{2} D(I+Z) \otimes D(I-Z). \end{aligned}$$

Ebből

$$\det((d\phi(D, Z, 0))^* d\phi(D, Z, 0)) = \det(G) = \det(G_{33}) \det(G_{22}) \det(G_{11} - G_{21} G_{22}^{-1} G_{12}),$$

ami

$$\begin{aligned} \det((d\phi(D, Z, 0))^* d\phi(D, Z, 0)) &= \\ &= \frac{\det(2D(I+Z) \otimes D(I-Z)) \det(2D \otimes D)}{4^{\dim(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}})}} \times \det \left[\left(\frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{(I+Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} - \frac{(I-Z)D^{1/2} \boxplus I}{D^{1/2} \boxplus I} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2^{\dim(\mathbb{K}^{n \times n}) + \dim(\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}})}}{4^{\dim(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}})}} \det(D(I+Z) \otimes D(I-Z)) \det(D \otimes D) \det(2I) \\ &= \frac{\det(D(I+Z) \otimes D(I-Z)) \det(D \otimes D)}{2^{\dim(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}})}} \end{aligned}$$

alakba írható át. Itt ügyelni kell arra, hogy a $D \otimes D$ tenzorszorzatot mint $\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}} \rightarrow \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{\text{sa}}$ szuperoperátort kell tekinteni, melynek így determinánsa $\det(D \otimes D) = \det(D)^{(n-1)d+2}$ lesz. A $D(I+Z) \otimes D(I-Z) : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ lineáris leképezés determinánsa pedig $\det(D(I+Z) \otimes D(I-Z)) = \det(D)^{2nd} \det(I-Z^2)^{nd}$ lesz.

Ebből kapjuk, hogy

$$\det((d\phi(D, Z, 0))^* d\phi(D, Z, 0)) = \frac{1}{2^{2n + \binom{2n}{2}d - 1}} \det(D)^{(3n-1)d+2} \det(I-Z^2)^{nd},$$

melynek négyzetgyökét a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ sokaság $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{2n})$ diagonális állapotbeli térfogati formájával összeszorozva kapjuk a bizonyítandó formulát. \square

3.3.2. Következmény. *A visszahúzott metrika térfogati formája a Hilbert–Schmidt-metrika és az $f_{GM} \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény által származtatott monoton metrika esetében a redukált állapot D és az $I - Z^2$ mátrix determinánsai alkalmas hatványainak szorzataként fejezhető ki. Rövid számolás után a Hilbert–Schmidt-metrika esetén a*

$$\sqrt{\det(\phi^* G_{HS}(D, Z, X))} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \det(D)^{(3n-1)\frac{d}{2}+1} \det(I-Z^2)^{\frac{nd}{2}}$$

térfogati formát kapjuk, az $f_{GM} \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ operátor monoton függvény által származtatott monoton metrika visszahúzottját véve alapul

$$\sqrt{\det(\phi^* G_{f_{GM}}(D, Z, X))} = \frac{\det(I - Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2} - \frac{1}{2}}}{2^{\binom{2n}{2}d - \frac{1}{2}} \det(D)^{(n-1)\frac{d}{2}} \det(I - XX^*)^{(n-1)\frac{d}{4} + \frac{1}{2}}}$$

adódik.

3.3.2. PPT állapotok a $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapottereken

A $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapotterén is érvényes az a megállapítás, hogy az állapotok mátrix elemenkénti konjugálása egy pozitív és nyomtartó leképezés, ennél fogva pedig a Peres–Horodecki-féle feltétellel ekvivalens annak megkövetelése, hogy egy állapot \bar{T} általi képe állapot legyen, ahol $T : \mathbb{K}^{2n \times 2n} \rightarrow \mathbb{K}^{2n \times 2n}$ a parciális transzponálás. A $\phi : \Pi_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ diffeomorfizmus általi ősképre vonatkozóan mindez azt jelenti, hogy egy $\phi(D, Z, X)$ állapot pontosan akkor PPT állapot, ha az $X \in B_1(\mathbb{K}^{n \times n})$ komponensre igaz, hogy

$$\|(V^*)^{-1} X V\| < 1 \quad (3.35)$$

ahol $V = (D \otimes \frac{I-Z}{2}) (D \otimes \frac{I+Z}{2})^{-1} = (D \otimes (I-Z)) (D \otimes (I+Z))^{-1}$. Az alábbi lemma fontos információt szolgáltat a V mátrix szinguláris érték felbontására vonatkozólag.

3.3.1. Lemma. *Legyen $D \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapot és $Z \in \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}$ tetszőleges mátrix, továbbá $V = (D \otimes (I-Z)) (D \otimes (I+Z))^{-1}$. Ekkor az $A = V^* V$ és $B = \frac{I-Z}{I+Z}$ önadjungált mátrixok unitér hasonlók.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy minden $k = 1, 2, \dots, n$ kitevőre a $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$ nyomok közti egyenlőség teljesül. Ebből következik, hogy az A és B pozitív mátrixok karakterisztikus polinomja egyenlő, ami maga után vonja, hogy az A és B mátrixok unitér hasonlók. A nyomképzés ciklikusságát felhasználva írható, hogy

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^k) &= \text{tr} \left[\left((D \otimes (I+Z))^{-1} (D \otimes (I-Z))^2 (D \otimes (I+Z))^{-1} \right)^k \right] \\ &= \text{tr} \left[(D \otimes (I+Z))^{-1} \left(D^{1/2} \frac{I-Z}{I+Z} D^{-1/2} \right)^{k-1} (D \otimes (I-Z))^2 (D \otimes (I+Z))^{-1} \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(D^{1/2} \frac{I-Z}{I+Z} D^{-1/2} \right)^k \right] = \text{tr} \left[\left(\frac{I-Z}{I+Z} \right)^k \right] = \text{tr}(B^k) \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

□

A fenti lemma következménye, hogy minden $D \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ állapothoz és $Z \in \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}$ mátrixhoz megadhatók olyan $U_1(D, Z), U_2(D, Z) \in \mathcal{U}(\mathbb{K}^n)$ unitér mátrixok, hogy

$$V = (D \otimes (I-Z)) (D \otimes (I+Z))^{-1} = U_1(D, Z) \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) U_2(D, Z)$$

teljesül, ahol $\Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)$ diagonális mátrix, mely főátlójában az $\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} > 0$ mátrix sajátértékeit tartalmazza csökkenő sorrendben. Ezzel a (3.35) PPT-feltétel

$$\| (V^*)^{-1} X V \| = \left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} U_2(D, Z) X U_2(D, Z) \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1$$

alakot ölt.

3.3.2. Definíció. Vezessük be a $\Theta = \Theta_n : \Pi_{n, \mathbb{K}} \rightarrow \Pi_{n, \mathbb{K}}$

$$(D, Z, X) \mapsto \Theta(D, Z, X) = (D, Z, U_2(D, Z)^* X U_2(D, Z)^*)$$

leképezést, amely a $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ sokaság diffeomorfizmusa.

A fenti gondolatmenetet követve adódik, hogy egy $(D, Z, X) \in \Pi_{n, \mathbb{K}}$ pont $\phi_n \circ \Theta_n : \Pi_n \rightarrow \mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ leképezés általi képe pontosan akkor PPT állapot, ha teljesül, hogy

$$\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1. \quad (3.36)$$

Ezzel a $\Pi_{n, \mathbb{K}}$ szorzat sokaság $\phi_n \circ \Theta_n$ diffeomorfizmus által PPT állapotoknak megfelelő pontjait lényegében jellemeztük. Eredményeinket az alábbi tételben foglaljuk össze.

3.3.3. Tétel. Legyen $\Pi_{n, \mathbb{K}}^{\text{PPT}} = (\phi_n \circ \Theta_n)^{-1}(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}^{\text{PPT}}) \subset \Pi_{n, \mathbb{K}}$. Ekkor

$$\Pi_{n, \mathbb{K}}^{\text{PPT}} = \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}} \times \left\{ (Z, X) \in \mathcal{E}_{n, \mathbb{K}} \times B_1(\mathbb{K}^{n \times n}) \mid 1 > \left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| \right\}$$

teljesül.

3.3.3. Következmény. A fenti tétel egyik következménye, hogy egy $\rho \in \mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapot teljesíti-e a Peres–Horodecki-féle parciális transzponálási feltételt, nem függ attól, hogy mi a szóban állapot $\mathcal{D}_{2, \mathbb{K}}$ részrendszerre vonatkozó $\text{tr}_2(\rho)$ parciális nyoma. Ez a megfigyelés jelentős mértékben általánosítja Milz és Strunz 4×4 -es PPT állapotokra vonatkozó [51] cikkben közölt sejtését.

A (3.36) feltétel bal oldala csupán az $\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}}$ pozitív mátrix sajátértékeinek egymáshoz viszonyított arányától függ, nem függ azok sorrendjétől és összegétől. Ez az észrevétel motiválja az $r : \Delta_{n-1, \geq} \times \partial B_1(\mathbb{K}^{n \times n}) \rightarrow [0, 1]$

$$r(p, X) = \min \left\{ 1, \frac{1}{\| \text{diag}(p)^{-1} X \text{diag}(p) \|} \right\} \quad (3.37)$$

függvény bevezetését, ahol $\Delta_{n-1, \geq} = \{(p_1, \dots, p_n) \mid p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 0, \sum_{k=1}^n p_k = 1\}$ a rendezett $(n-1)$ -szimplex.

3.3.4. Tétel. A $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}^{\text{PPT}} \subset \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ részsokaság diffeomorf egy $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times Fl_{n,\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^+$ -nyalábbal, melynek bázis sokasága az $r : \Delta_{n-1,\geq} \times \partial B_1(\mathbb{K}^{n \times n}) \rightarrow [0, 1]$ függvény nyílt epigráfja. Itt $Fl_{n,\mathbb{K}} = \mathcal{U}(\mathbb{K}^n)/\mathcal{U}(\mathbb{K})^n$ az ún. zászló sokaság (flag manifold).

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a 3.3.3. tételből és a $\Pi_{n,\mathbb{K}}^{\text{PPT}} \subset \Pi_{n,\mathbb{K}}$ részsokaság

$$\Pi_{n,\mathbb{K}}^{\text{PPT}} = \left\{ \left(D, U \frac{I - \alpha^2 \cdot \text{diag}(p)^2}{I + \alpha^2 \cdot \text{diag}(p)^2} U^*, \beta X \right) \mid \begin{array}{l} D \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}, \quad U \in Fl_{n,\mathbb{K}}, \quad \alpha > 0 \\ \beta \in (0, r(p, x)), \quad p \in \Delta_{n-1,\geq}, \quad X \in \partial B_1(K^{n \times n}) \end{array} \right\}$$

paraméterezéséből. \square

A 3.3.2. következményben foglaltakat a PPT-állapotok 3.3.3 tételbeli jellemzésével kombinálva megkaphatjuk a PPT-állapotok geometriai valószínűségét tetszőleges páros dimenziós kvantummechanikai állapotterén a Hilbert–Schmidt-metrikából és a $g_{f_{GM}}$ monoton metrikából származó térfogatra vonatkozóan egyaránt. Ez általánosítja a 3.2.2 és 3.2.3 következményekben tett megállapításokat. A 3.1.3. tételben megfogalmazott Peres–Horodecki-kritérium értelmében az $n = 3$ esetben $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a rebit-retrit⁴, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén pedig a qubit-qutrit szeparabilitási valószínűségekre kapunk explicit formulát. A $\mathcal{D}_{6,\mathbb{K}}$ állapottereken a szeparabilitási valószínűség szintén intenzíven kutatott kérdés, melynek Slater kvázi-Monte–Carlo szimulációk segítségével tanulmányozott [68, 69].

3.3.5. Tétel. A PPT állapotok geometriai valószínűsége a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterén a Hilbert–Schmidt-metrikából származó térfogatra vonatkozóan a

$$\mathcal{P}_{PPT, g_{HS}}(\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}) = \int_{\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}} f(Z) d\mu(Z)$$

formulával fejezhető ki ahol $d\mu(Z) = \frac{(I-Z^2)^{\frac{nd}{2}}}{\int_{\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}} \det(I-Z^2)^{\frac{nd}{2}} d\lambda_{n+\binom{n}{2}_d}(Z)}$ valószínűségi

mérték az $\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{sa}$ operátor intervallumon és

$$f(Z) = \frac{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} \mathbf{1}_{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1} d\lambda_{n^2_d}(X)}{\text{Vol}(B_1(\mathbb{K}^{n \times n}))}.$$

A $g_{f_{GM}}$ monoton metrika esetén pedig a

$$\mathcal{P}_{PPT, g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}) = \int_{\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}} h(Z) d\nu(Z)$$

formulát kapjuk, ahol $d\nu(Z) = \frac{\det(I-Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}}{\int_{\mathcal{E}_{n,\mathbb{K}}} \det(I-Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} d\lambda_{n+\binom{n}{2}_d}(Z)}$ és

$$h(Z) = \frac{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} (I - XX^*)^{-(n-1)\frac{d}{4}-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1} d\lambda_{n^2_d}(X)}{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} (I - XX^*)^{-(n-1)\frac{d}{4}-\frac{1}{2}} d\lambda_{n^2_d}(X)}.$$

⁴A 2×2 -es sűrűségmátrixokkal leírt kvantummechanikai rendszerekre használt elnevezésének analógjaiként bevezetjük a 3×3 -as valós és komplex állapotokkal jellemezhető rendszerekre a „retrit” illetve „qutrit” elnevezéseket.

Bizonyítás. A PPT állapotok geometriai valószínűsége egy g unitér invariáns metrikával ellátott $\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}$ állapotteren a

$$\mathcal{P}_{PPT, g}(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}) = \frac{\text{Vol}_g(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}^{\text{PPT}})}{\text{Vol}_g(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}})} = \frac{\text{Vol}_{(\phi \circ \Theta)^* g}(\Pi_{n, \mathbb{K}}^{\text{PPT}})}{\text{Vol}_{(\phi \circ \Theta)^* g}(\Pi_{n, \mathbb{K}})}$$

formulával kapható meg.

A 3.3.2. következményben kapott térfogati formát felhasználva a $g = g_{HS}$ Hilbert–Schmidt-metrika esetén kapjuk, hogy

$$\mathcal{P}_{PPT, g_{HS}}(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}) = \frac{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{\frac{nd}{2}} f(Z) d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)}{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{\frac{nd}{2}} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)} = \int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} f(Z) d\mu(Z),$$

ahol $d\mu(Z) = \frac{\det(I - Z^2)^{\frac{nd}{2}}}{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{\frac{nd}{2}} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)$ és

$$f(Z) = \frac{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} \mathbf{1}_{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1} d\lambda_{n^2d}(X)}{\text{Vol}(B_1(\mathbb{K}^{n \times n}))}.$$

A $g_{f_{GM}}$ monoton metrika választás mellett pedig azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{P}_{PPT, g_{f_{GM}}}(\mathcal{D}_{2n, \mathbb{K}}) = \frac{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2} - \frac{1}{2}} h(Z) d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)}{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2} - \frac{1}{2}} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)} = \int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} h(Z) d\nu(Z),$$

ahol $d\nu(Z) = \frac{\det(I - Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2} - \frac{1}{2}}}{\int_{\mathcal{E}_{n, \mathbb{K}}} \det(I - Z^2)^{(3n-1)\frac{d}{2} - \frac{1}{2}} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)} d\lambda_{n + \binom{n}{2}d}(Z)$ és

$$h(Z) = \frac{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} (I - XX^*)^{-(n-1)\frac{d}{4} - \frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\| < 1} d\lambda_{n^2d}(X)}{\int_{B_1(\mathbb{K}^{n \times n})} (I - XX^*)^{-(n-1)\frac{d}{4} - \frac{1}{2}} d\lambda_{n^2d}(X)}.$$

□

Ha például az $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esethez tartozó qubit-qutrit szeparabilitási valószínűséget szeretnénk meghatározni, akkor – az $n = 2$ esethez hasonlóan – a fenti integrálok unitér invarianciáját felhasználva elég egy „csupán” 21-dimenziós sokaságon integrálni az eredeti 35-dimenziós $\mathcal{D}_{6, \mathbb{K}}$ állapotter helyett. Nyilvánvaló, hogy az f és h függvények csak a beléjük írt mátrixok sajátértékeinek egymáshoz viszonyított arányaitól függenek, és lényegében a $\tilde{\chi}_{1,2}$ és $\tilde{\eta}_{1,2}$ függvények többdimenziós általánosításainak felelnek meg. Ezekre a függvényekre egyfajta „geometriai entrópiaként” lehet gondolni, hiszen azt méri, hogy a hasonlósági transzformációval deformált $B_1(\mathbb{K}^{2 \times 2})$ egységgömbnek mekkora hányada közös a deformálatlan gömbbel. Szemléletesen mondhatjuk azt, hogy minél

rendezetlenebb a deformáló pozitív mátrix sajátértékeiből képzett valószínűségi eloszlás, annál nagyobb lesz a szóban forgó közös rész térfogata. A legrendezetlenebb eset az identitás pozitív számszorosaival történő hasonlósági transzformációhoz tartozik és valóban $f(\lambda.I) = h(\lambda.I) = 1$ $\lambda > 0$ esetén. Mindez egybevág azzal az intuitív képpel, hogy egy $\phi(D, Z, X)$ alakú állapot pontosan akkor szeparábilis, ha $\|X\|$ elég „kicsi”. Azt pedig, hogy mennyire kell kicsinek lenni $\|X\|$ -nek ahhoz, hogy $\phi(D, Z, X)$ klasszikusan korrelált legyen Z mondja meg. Minél nagyobb entrópiájú a $\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} / \text{tr} \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)$ sűrűségmátrix spektruma, annál nagyobbra választható $\|X\|$.

A qubit-qutrit példára vonatkozólag ez azt jelentené, hogy az eredeti „35-ös integrál” hármas integrállá redukálható. Mindazonáltal a kutatás jelenlegi fázisában még a $\tilde{\chi}_2$ függvényre sem rendelkezünk kezelhető formulával. A $\tilde{\chi}_2$ függvény meghatározására irányuló próbálkozásainkat a függelék D. pontjában gyűjtöttük össze.

3.3.3. Összefonódottság mérése a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ és $\mathcal{D}_{6,\mathbb{K}}$ állapotterken

Egy összefonódott állapot szeparabilitásának mértékét az állapot szeparábilis állapotoktól mért távolságával jellemezhetjük. Attól függően, hogy milyen távolság fogalommal dolgozunk, különböző összefonódottságot mérő mennyiségeket (angolul *entanglement measures*) kapunk. Mi most ebben a pontban egy lehetséges, természetes módon adódó, összefonódottságot mérő mennyiséget definiálunk.

Tekintsünk egy $\phi(D, Z, X) \in \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ alakú állapotot, ahol $(D, Z, X) \in \Pi_{n,\mathbb{K}}$ és vezessük be a $P_\alpha : \Pi_{n,\mathbb{K}} \rightarrow \Pi_{n,\mathbb{K}}$ $P_\alpha(D, Z, X) = (D, Z, \alpha X)$ $\alpha \in [0, 1]$ leképezést, ami a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapotterén a

$$\begin{bmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} D_1 & \alpha C \\ \alpha C^* & D_2 \end{bmatrix} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (3.38)$$

részleges pinching-nek felel meg. Tetszőleges összefonódott állapotot reprezentáló $(D, Z, X) \in \Pi_{n,\mathbb{K}}$ pontot véve az $\alpha \mapsto P_\alpha(D, Z, X)$ $\alpha \in [0, 1]$ folytonos görbe összeköti egymással a (D, Z, X) és a szeparált állapotnak megfelelő $(D, Z, 0)$ pontokat. Léteznie kell tehát egy olyan $\alpha_{opt} \in (0, 1)$ paraméter értéknek, melyre $\phi(P_{\alpha_{opt}}(D, Z, X)) \in \partial \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}^{\text{sep}}$ teljesül. A $\phi(D, Z, X)$ állapot összefonódottságát a $\phi(D, Z, X)$ és $\phi(P_{\alpha_{opt}}(D, Z, X))$ pozitív mátrixok (1.18) Thompson-féle távolságával is jellemezhetjük.

3.3.3. Definíció. Egy $\rho \in \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}^{\text{ent}}$ összefonódott kvantumállapot Thompson-féle összefonódási mértéke alatt a

$$TME(\rho) = \delta(\phi \circ P_{\alpha_{opt}} \circ \phi^{-1}(\rho), \rho)$$

mennyiséget értjük, ahol δ az (1.16) formulával definiált Thompson-távolság.

A a $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ és $\mathcal{D}_{6,\mathbb{K}}$ állapotterken a PPT-feltétel teljesülése a szeparabilitással ekvivalens, ezért a PPT állapotok előző pontban kapott geometria jellemzését felhasználva a Thompson-féle összefonódási mértékre a következő eredmény adódik.

3.3.6. Tétel. Egy $\rho = \phi(D, Z, X)$ alakú állapot Thompson-féle összefonódási mértéke

$$TME(\rho) = \left[\text{tr} \left(\log^2 \left(\frac{I + \alpha_{opt}|X|}{I + |X|} \right) \right) + \text{tr} \left(\log^2 \left(\frac{I - \alpha_{opt}|X|}{I - |X|} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

alakba írható, ahol $\alpha_{opt} = \min \left\{ 1, \frac{1}{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\|} \right\}$.

Bizonyítás. A Thompson-metrika kongruencia invarianciájából fakadóan tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ esetén a $\rho = \phi(D, Z, X)$ és a $\phi \circ P_\alpha(D, Z, X)$ állapotok Thompson-távolsága a $\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} I & \alpha X \\ \alpha X^* & I \end{bmatrix}$ pozitív mátrixok Thompson-távolságával egyezik meg, ami

$$\begin{aligned} \delta \left(\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & \alpha X \\ \alpha X^* & I \end{bmatrix} \right) &= \left\| \log \left(\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} I & \alpha X \\ \alpha X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \right) \right\|_{HS} \\ &= \left\| \log \circ q \left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix} \right) \right\|_{HS} \end{aligned}$$

módon fejezhető ki, ahol $q : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ $q(x) = \frac{1+\alpha x}{1+x}$, $\|\cdot\|_{HS}$ pedig a mátrixok Hilbert–Schmidt-normáját jelöli. A $\begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}$ mátrix spektruma az $|X|$ és $-|X|$ mátrixok spektrumainak egyesítéseként áll elő, ezért

$$\text{tr} \left(\log^2 \circ q \left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{tr} \left(\log^2 \left(\frac{I + \alpha|X|}{I + |X|} \right) \right) + \text{tr} \left(\log^2 \left(\frac{I - \alpha|X|}{I - |X|} \right) \right)$$

írható.

A PPT tulajdonság (3.36) jellemzését felhasználva kapjuk, hogy

$$\alpha_{opt} = \min \left\{ 1, \frac{1}{\left\| \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right)^{-1} X \Sigma \left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} \right) \right\|} \right\}.$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

3.4. Összefoglalás

Ebben a fejezetben összetett kvantum mechanikai rendszereket tanulmányoztunk.

1. Meghatároztuk a 4×4 -es valós elemű sűrűségmátrixok alkotta kvantummechanikai állapottéren a szeparabilitási valószínűséget.
2. Bizonyítottuk Milz és Strunz szeparabilitási valószínűség redukált állapottól való függetlenségére vonatkozó sejtését.
3. Eredményeinket általánosítottuk arra az információgeometriai szempontból releváns esetre is, amikor az állapottér a négyzetgyök függvény által származtatott monoton metrikával van ellátva.
4. Megmutattuk, hogy a $2n \times 2n$ -es sűrűségmátrixok alkotta állapottér diffeomorf az $n \times n$ -es sűrűségmátrixok alkotta állapottér, az $n \times n$ -es önadjungált mátrixokból álló $] - I, I[$ operátor intervallum és az $n \times n$ -es mátrixok operátornormára vonatkozó egységgömbjének a direkt szorzatával.

5. Ezt a szorzat sokaság reprezentációt használtuk fel arra, hogy geometriai leírását adjam a 4×4 -es szeparábilis állapotoknak. Kiderül, hogy a 4×4 -es szeparábilis kvantumállapotok pereme egy, a 2×2 -es mátrixok egységgömbjén értelmezett függvény grafikonjaként előálló sokaság feletti triviális nyálábként áll elő.
6. Végezetül bevezettünk egy kongruencia transzformációkra nézve invariáns távolságfogalmat az állapottéren, amire nézve meghatároztuk egy tetszőleges összefonódott állapot távolságát a szeparábilis állapotoktól.

4. fejezet

Kvantum csatornák

A monoton metrikák kapcsán már definiáltuk a teljesen pozitív lineáris leképezéseket. A nyomtartó teljesen pozitív leképezések állapotteret állapotterbe visznek. Az ilyen hozzárendeléseket sztochasztikus leképezésnek hívtuk. A sztochasztikus leképezés szinonímája a kvantum csatorna. Ez az elnevezés a következő fizikai képből ered.

A kvantummechanika zárt rendszer időfejlődésére vonatkozó posztulátumának (lásd: [58] könyv 12–13. oldal) véges dimenziós Hilbert-terekkel modellezett rendszerekre vonatkozó megfogalmazása kimondja, hogy ha a rendszeren egy $I \subset \mathbb{R}$ időintervallumban nem végzünk mérést, akkor a rendszer időfejlődését leíró $(\rho_t)_{t \in I}$ statisztikus operátorsereg különböző tagjai között a

$$\rho_t = U(t, s)\rho_s U(t, s)^* \quad (t, s \in I)$$

összefüggés áll fenn, ahol $U(t, s)$ az ún. *unitér propagátor*. Az unitér propagátor unitér mátrixok egy családja, melynek tagjaira a

$$(1) \quad \forall t, r, s \in I \quad U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$$

$$(2) \quad \text{„a } (t, s) \mapsto U(t, s) \text{ leképezés folytonos minden } (t, s) \in I \times I \text{ pontban”}$$

feltételek teljesülnek.

A nyílt kvantummechanikai rendszerek időfejlődését leírhatjuk oly módon, hogy a rendszer és környezete által alkotott zárt, összetett kvantummechanikai rendszer időfejlődésének eredményeként adódó állapotot a vizsgált nyílt kvantummechanikai rendszer állapotterére vetítjük. Ez a gyakorlatban egy \mathcal{H} Hilbert-térrel leírt kvantummechanikai rendszerre nézve a következőt jelenti:

1. A $\rho_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ kezdeti állapotot a $\rho_0 \mapsto \rho := \frac{\rho_0 \otimes \text{id}_{\mathcal{H}_E}}{\dim(\mathcal{H}_E)}$ hozzárendeléssel a rendszer és környezete által alkotott zárt, összetett kvantummechanikai rendszer egy állapotának feleltetik meg, ahol \mathcal{H}_E Hilbert-térrel a környezetet modellezzük.
2. A zárt rendszer időfejlődését leíró posztulátum értelmében az időfejlődés eredményeként egy olyan állapotot kapunk, ami $U\rho U^*$ alakba írható, ahol $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E)$ unitér operátor.
3. Végül az időfejlődés eredményeként adódó $\rho_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ állapotot a $\rho_1 = \text{tr}_2(U\rho U^*)$ parciális nyomképzéssel kapjuk meg.

Világos, hogy ha $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E)$ unitér operátor, akkor a $\rho_0 \mapsto \rho_1$ hozzárendelés egy $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ sztochasztikus leképezést határoz meg. Ennek fordítottja is igaz, ezt általánosítja az alábbi tétel.

4.0.1. Tétel. *Legyen $T : \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}^{sa} \rightarrow \mathcal{M}_{m,\mathbb{C}}^{sa}$ lineáris leképezés. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

1. T teljesen pozitív.
2. Léteznek olyan $K_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ $j = 1, \dots, r$ lineáris leképezések, melyekkel a T leképezés

$$T = \sum_{j=1}^r L_{K_j} \circ R_{K_j^*} = \sum_{j=1}^r K_j \otimes K_j$$

módon állítható elő. (Ez az ún. Kraus-reprezentáció.)

3. A T leképezés $T = \text{tr}_2 \circ L_U \circ R_{U^*}$ alakban áll elő, ahol egy $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^r$ lineáris leképezés. (Ezt Stinespring-reprezentációnak hívják.)

A fenti feltételek teljesülése mellett T pontosan akkor nyomtartó, ha $\sum_{j=1}^r K_j^* K_j = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$ teljesül. Ezzel ekvivalens az, hogy U izometria.

Bizonyítás. A bizonyítás az [53] jegyzet 5. oldalán található meg. □

A kvantum csatornák a kvantum információ feldolgozásban és továbbításban kulcsszerepet játszanak, hiszen minden qubiteken végezhető műveletnek kvantum csatornák felelthetők meg. Ezt a fejezetet véletlen qubit csatornák tanulmányozásának szenteljük. A fejezetben bemutatott eredmények egy részét a [6] és [7] dolgozatokban jelentettük meg. A véletlen qubit csatornák vizsgálata több szempontból is érdekes feladat. Egy kvantum algoritmus lényegében kvantum csatornák egy sorozata, ahol az egyes lépések hibái a végeredményben kumulálódva jelennek meg. Az egyes lépéseket terhelő hibákat véletlen kvantum csatornák segítségével modellezhetjük, ezen keresztül pedig az eredmény hibája kontrollálható. Ugyancsak véletlen kvantum csatornák segítségével modellezhető a kvantum regisztereket terhelő külső zaj is, mely végső soron dekoherenciához és a regiszterben tárolt információ elvesztéséhez vezet. Véletlen kvantum csatornákat alkalmaznak pszeudo-random kvantum áramkörök szimulációjára is [21, 17].

Véletlen kvantum csatornák spektrális jellemzőinek vizsgálatával Bruzda, Cappellini, Sommers és Życzkowski [18] foglalkozott. Igazolták a lineáris algebrából ismert Perron–Frobenius-tétel kvantumozott általánosítását és numerikusan vizsgálták speciális kvantum csatornák iteráltjainak hatását véletlen állapotokon.

4.1. Qubit csatornák reprezentációi

A kvantum csatornák az alábbi tétel értelmében egy kompakt sokaság pontjainak feleltethetők meg, ami lehetővé teszi, hogy információgeometriai eszközökkel vizsgáljuk őket.

4.1.1. Tétel (Choi). *Egy $T : \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}^{sa} \rightarrow \mathcal{M}_{m,\mathbb{C}}^{sa}$ pozitív leképezésre nézve ekvivalensek az alábbi kijelentések:*

1. T n -pozitív (lásd: 1.2.1. Definíció).

2. A \mathbb{C}^n vektortér tetszőleges $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ bázisát véve a

$$C_T = (\text{id}_{\mathbb{C}^{n \times n}} \otimes T) \left(\sum_{i,j=1}^n (e_j \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \right) \in \mathbb{C}^{n \times n} \otimes \mathbb{C}^{m \times m} \cong \mathbb{C}^{nm \times nm}$$

mátrix pozitív definit.

3. T teljesen pozitív.

Bizonyítás. A bizonyítás Choi [19] dolgozatában található meg. \square

A 4.1.1. tételben szereplő $C_T \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$ mátrixot a T leképezés Choi-mátrixának vagy Choi-representánsának nevezik. Ezek után kvantum csatornák tere alatt a lehetséges Choi-representánsok által alkotott kompakt sokaságot értjük.

4.1.1. Definíció. Egy $T : \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{m,\mathbb{C}}$ qubit-csatornát egységőrzőnek (más szóval unitálisnak) nevezünk, ha $T(\text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \text{id}_{\mathbb{C}^m}$ teljesül.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\text{id}_{\mathbb{C}^{nm}}$ mátrix egy $\pi_n : \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}}$ kvantum csatorna Choi-representánsának felel meg. A \mathbb{C}^n vektortér egy rögzített $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ bázisából nézve a π_n csatorna az állapotok diagonálison kívüli elemeit kinullázza, ezért a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{C}}$ állapotteret a Δ_{n-1} klasszikus állapotok terére vetíti le.

4.1.2. Definíció. Egy $T : \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{m,\mathbb{C}}$ kvantum csatorna klasszikus nyoma alatt a

$$P_T = \pi_m \circ T \circ \iota_n$$

hozzárendeléssel definiált $P_T : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_{m-1}$ klasszikus csatornát értjük, ahol $\iota_n : \Delta_{n-1} \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}}$ a klasszikus n pontra koncentrált diszkrét eloszlások diagonális beágyazása az állapotterbe.

A Choi reprezentáció egy $Q : \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ qubit csatornának egy olyan C_Q 4×4 -es mátrixot feleltet meg, ami

$$C_Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (4.1)$$

blokk mátrix alakba írható, ahol $Q_{ij} = Q(e_i \otimes e_j)$ $i, j = 1, 2$, $\{e_1, e_2\}$ pedig \mathbb{C}^2 egy rögzített bázisa. A C_Q mátrix pontosan akkor határoz meg qubit csatornát, ha $Q_{11}, Q_{22} \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$, $Q_{21} = Q_{12}^*$, $\text{tr} Q_{12} = 0$ és $C_Q \geq 0$. A mátrixelemekre vonatkozóan ezek a feltételek \mathbb{R}^{12} vektortér egy kompakt konvex részsokaságát jelölik ki, melyet \mathcal{Q} -val fogunk jelölni. Az unitális qubit csatornák Choi reprezentációi a $Q_{11} + Q_{22} = I$ feltételt is teljesítik, amiből következik, hogy az unitális qubit csatornák kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak az \mathbb{R}^9 vektortér egy kompakt konvex részsokaságával. Ezt a részsokaságot a \mathcal{Q}^1 szimbólummal jelöljük.

Közvetlen számolás útján meggyőződhetünk róla, hogy a (4.1) blokk mátrix alakban adott qubit csatorna klasszikus nyomának a

$$P = \begin{pmatrix} \text{diag}(Q_{11}) \\ \text{diag}(Q_{22}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Markov-lánc átmenetmátrix felel meg.

A Bloch-reprezentációt használva tetszőleges $Q : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ nyomtartó lineáris leképezés

$$Q \left(\frac{1}{2}(I + x \cdot \sigma) \right) = \frac{1}{2}(I + (v + Tx) \cdot \sigma) \quad (4.3)$$

alakba írható, ahol $v \in \mathbb{R}^3$ és T egy 3×3 -as valós mátrix. Ez az előállítás akkor lesz igazán hasznos számunkra, amikor qubitek véletlen csatornák általi képét vizsgáljuk. A (4.3) alakról általában nehéz eldönteni, hogy a szóban forgó nyomtartó leképezés teljesen pozitív-e. Ezt a kérdést Ruskai, Szarek és Werner tanulmányozta [63].

4.2. Eloszlás a klasszikus csatornák felett

A \mathcal{Q} és \mathcal{Q}^1 sokaságokat normált térfogati formákkal ellátva valószínűségi eloszlásokat adhatunk meg a qubit csatornák és unitális qubit csatornák terén. A Lebesgue-mérték alkalmas konstansszorosát véve az egyenletes eloszlást kapjuk. A következő lemma központi szerepet játszik az egyenletes eloszlású qubit csatornák klasszikus csatornák feletti eloszlásának a kiszámításában.

4.2.1. Lemma. *Legyen $T \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}^{sa}$ pozitív definit mátrix, $l \in \mathbb{R}$ és $\mu > 0$ valós számok. Továbbá legyen L egy m -dimenziós altere a \mathbb{K}^n vektortérnek, x pedig egy rögzített vektor. Jelölje az $M = T(L)$ altér ortogonális kiegészítőjére való projekciót P_{M^\perp} és definiáljuk a*

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x) &= \{y \in L \mid \langle x + y, T(x + y) \rangle < \mu\}, \quad T_{ij} \in \mathbb{R}; \\ E^{\mathbb{C}}(T, \mu, L, x) &= \{y \in L \mid \langle x + y, T(x + y) \rangle < \mu\}, \quad T_{ij} \in \mathbb{C}; \end{aligned}$$

integrációs tartományokat. Ekkor

$$\int_{E^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x)} (\mu - \langle x + y, T(x + y) \rangle)^l d\lambda_m(y) = \frac{F_{m-1} G_{m-1, l}}{\sqrt{\det(T|_L)}} (\mu - \|z_0\|^2)_+^{\frac{m}{2} + l}$$

és

$$\int_{E^{\mathbb{C}}(T, \mu, L, x)} (\mu - \langle x + y, T(x + y) \rangle)^l d\lambda_{2m}(y) = \frac{F_{2m-1} G_{2m-1, l}}{\det(T|_L)} (\mu - \|z_0\|^2)_+^{m+l},$$

ahol $T|_L$ a T lineáris leképezés L altérre történő megszorítása és $z_0 = P_{M^\perp} \sqrt{T}x$.

Bizonyítás. A lemmát csak a valós esetre bizonyítjuk, a komplex eset bizonyítása hasonlóan történik. A T mátrixról feltettük, hogy pozitív definit, ezért vehető az ő \sqrt{T} pozitív négyzetgyöke.

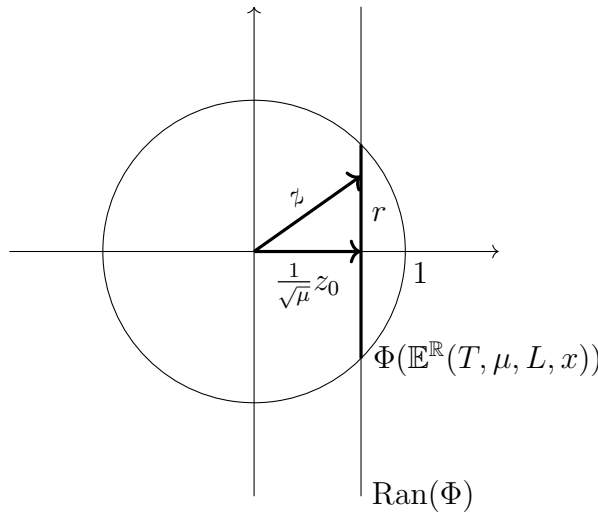
Tekintsük a $\Phi : L \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{T}(x + y)$ leképezést és válasszunk az L altéren egy tetszőleges e_1, \dots, e_m ortonormált bázist. A $\text{Ran}(\Phi)$ képtér egy lehetséges paraméterezése

$$z(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{T} \left(x + \sum_{i=1}^m y_i e_i \right),$$

a $\text{Ran}(\Phi)$ képtéren indukált metrika pedig $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial z}{\partial y_i}, \frac{\partial z}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{T} e_i, \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{T} e_j \right\rangle = \frac{1}{\mu} \langle e_i, T e_j \rangle$, amiből a Φ leképezés Jacobi determinánsának inverzére $\frac{\mu^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\det(T|_L)}}$ adódik. Írhatjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x)} (\mu - \langle x + y, T(x + y) \rangle)^l d\lambda_m(y) = \\ & = \frac{\mu^{\frac{m}{2}+l}}{\sqrt{\det(T|_L)}} \int_{\Phi(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x))} (1 - \|z\|^2)^l d\lambda_m(z). \end{aligned}$$

A $\Phi(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x))$ integrációs tartomány a $\text{Ran}(\Phi)$ affin altér és a $B_1(\mathbb{R}^n)$ origó középpontú golyó metszeteként áll elő (lásd: 4.1. ábra). A $\Phi(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}(T, \mu, L, x))$ halmaz pontosan akkor nem üres, ha a $\text{Ran}(\Phi)$ affin altér origótól mért távolsága nem nagyobb, mint 1, azaz $d^2 := \frac{1}{\mu} \|z_0\|^2 = \frac{1}{\mu} \|P_{M^\perp} \sqrt{T} x\|^2 < 1$. A kapott integrált gömbi koordinátarend-



4.1. ábra. Integrációs tartomány (vázlat).

szert bevezetve számítjuk ki. A szögek szerinti integrálásokat elvégezve kapjuk, hogy $F_{m-1}(1 - d^2)_+^{(m-1)/2}$, amiből a sugár irányú integrálra

$$\frac{\mu^{\frac{m}{2}+l}}{\sqrt{\det(T|_L)}} F_{m-1}(1 - d^2)_+^{\frac{m-1}{2}+l} \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \left(1 - \frac{r^2}{1-d^2}\right)^l \left(\frac{r}{\sqrt{1-d^2}}\right)^{m-1} dr$$

adódik. A $u = \frac{r}{\sqrt{1-d^2}}$ helyettesítést elvégezve a bizonyítandó alakot nyerjük. \square

4.2.1. Megjegyzés. Ha $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)^+$ egy $n \times n$ -es pozitív definit mátrix, $L \leq \mathbb{C}^n$ pedig egy altér és $M = \sqrt{A^{-1}}(L)$, akkor $M^\perp = \sqrt{A}(L^\perp)$ teljesül, ugyanis

$$M^\perp = (\sqrt{A^{-1}}L)^\perp = \ker(P_L \sqrt{A^{-1}}) = \sqrt{A}(L^\perp).$$

4.2.1. Általános qubit csatornák

Az általános és egységőrző qubit csatornák térfogatának meghatározásánál ugyanazt a stratégiát követjük. Először egy alkalmas unitér transzformációt választva a Choi reprezentánst számolási szempontból könnyebben kezelhető alakra transzformáljuk. Ezek után a paraméterteret alacsonyabb dimenziós részekre osztjuk, melyeken a 4.2.1. lemma felhasználásával integrálva kapjuk a kívánt eredményt.

Tekintsük a $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{12}$ sokaság alábbi paraméterezését

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{b} & 1-a & e & -c \\ \bar{c} & \bar{e} & f & g \\ \bar{d} & -\bar{c} & \bar{g} & 1-f \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

ahol $a, f \in [0, 1]$ és $Q > 0$. A fenti Q csatorna klasszikus nyoma a $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ f & 1-f \end{pmatrix}$ 2×2 -es Markov átmenet mátrixszal adható meg. Tekintsük az

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

unitér mátrixot és definiáljuk az A mátrixot mint a Q unitér konjugáltját

$$A = U^*QU = \begin{pmatrix} a & c & b & d \\ \bar{c} & f & e & g \\ \bar{b} & \bar{e} & 1-a & -c \\ \bar{d} & \bar{g} & -\bar{c} & 1-f \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

mely pontosan akkor pozitív definit, ha Q az, ezért A a \mathcal{Q} sokaság egy ekvivalens paraméterezését szolgáltatja.

4.2.2. Lemma. *Legyen A egy $n \times n$ -es pozitív definit mátrix, $T = \det(A)A^{-1}$, $L \leq \mathbb{C}^n$ egy altér, $x \in L^\perp$ és $M = \sqrt{T}L$. Ekkor ha $\dim(L^\perp) = 1$, akkor $\|P_{M^\perp}\sqrt{T}x\|^2 = \frac{\det(A)}{\langle x, Ax \rangle} \|x\|^4$.*

Bizonyítás. A 4.2.1. megjegyzés értelmében $M^\perp = \sqrt{A}(L^\perp)$. Ha $\dim(L^\perp) = 1$, akkor $\{b_1 = \|\sqrt{A}x\|^{-1}\sqrt{A}x\}$ az M^\perp altér egy ortonormált bázisa, amiből $P_{M^\perp} = b_1 \otimes b_1$ következik. Írhatjuk tehát, hogy

$$\|P_{M^\perp}\sqrt{T}x\|^2 = \det(A) \left| \langle b_1, \sqrt{A^{-1}}x \rangle \right|^2 = \frac{\det(A)}{\langle x, Ax \rangle} \|x\|^4.$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

4.2.1. Tétel. *Az általános qubit csatornák $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{12}$ terének térfogata a Lebesgue-mértékre vonatkozóan*

$$\text{Vol}(\mathcal{Q}) = \frac{2\pi^5}{4725}.$$

A térfogat eloszlását a klasszikus csatornák felett a

$$V(a, f) = \frac{2^7}{60} F_1 F_3^2 G_{3,0} G_{3,1} \times \begin{cases} a^3 f^3 [10((1-a)(1-f) - af)^2 + \\ 15af(1-a)(1-f) - 9a^2 f^2] & \text{if } a + f < 1 \\ (1-a)^3 (1-f)^3 [10((1-a)(1-f) - af)^2 + \\ 15af(1-a)(1-f) - 9(1-a)^2 (1-f)^2] & \text{if } a + f \geq 1. \end{cases}$$

függvény írja le.

Bizonyítás. A (4.4) paraméterezéshez tartozó térfogati forma $2^7 d\lambda_{12}$. Egy (4.6) alakban felírt mátrix pontosan akkor határoz meg csatornát, ha pozitív definit és $a, f \in [0, 1]$. Az A.2.1. lemma értelmében A pozitivitása a $\det(A_i) > 0$ $i = 1, 2, 3, 4$ bal felső sarokminor determinánsok pozitívításával ekvivalens. Tegyük fel, hogy a és f adottak.

Ha az A_3 bal felső 3×3 -as sarokminort rögzítjük, akkor a 4.2.1. és 4.2.2. lemmák felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(A_3) &= \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{C}}(T_3, (1-f) \det(A_3), L_3, x_3)} 2^7 d\lambda_4 \\ &= \frac{2^7 F_3 G_{3,0} \left((1-f) - \frac{|c|^2}{(1-a)} \right)_+^2 \det(A_3)^2}{\det(T_3|_{L_3})} \\ &= \frac{2^7 F_3 G_{3,0}}{(1-a)^3} \left((1-a)(1-f) - |c|^2 \right)_+^2 \det(A_3), \end{aligned}$$

ahol $L_3 = \text{Span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T\}$ és $x_3 = (0, 0, -c)^T$.

Ha A_2 rögzített, akkor

$$\begin{aligned} V(A_2) &= \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{C}}(T_2, (1-a) \det(A_2), \mathbb{C}^2, 0)} V(A_3) d\lambda_4 = \\ &= \frac{2^7 F_3 G_{3,0}}{(1-a)^3} \left((1-a)(1-f) - |c|^2 \right)_+^2 \\ &\times \int_{\mathbb{E}I^{\mathbb{C}}(T_2, (1-a) \det(A_2), \mathbb{C}^2, 0)} (1-a) \det(A_2) - \langle y, T_2 y \rangle d\lambda_4(y) \\ &= 2^7 F_3^2 G_{3,0} G_{3,1} \left((1-a)(1-f) - |c|^2 \right)_+^2 \det(A_2)^2 \end{aligned}$$

adódik.

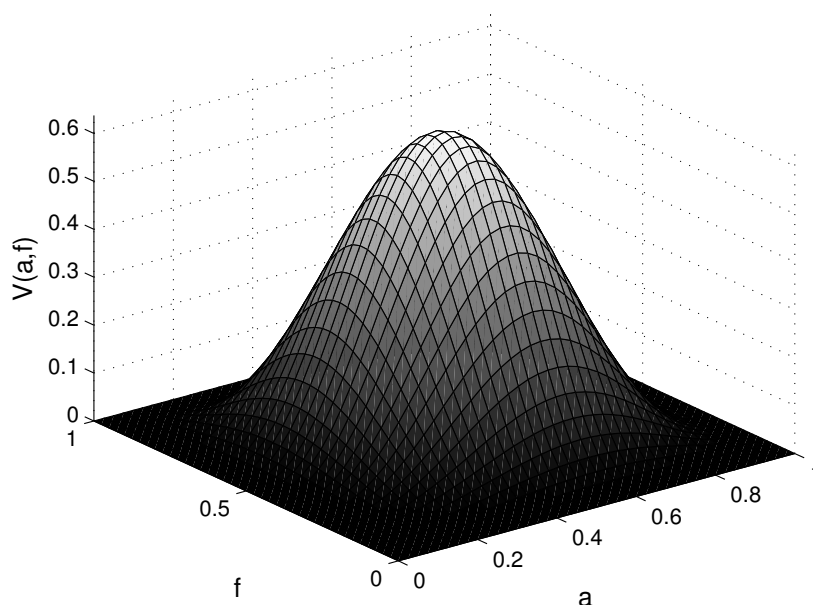
A $\det(A_2) > 0$ feltételből rögzített a és f mellett kapjuk, hogy

$$V(a, f) = \frac{2^7}{60} F_1 F_3^2 G_{3,0} G_{3,1} \times \begin{cases} a^3 f^3 [10((1-a)(1-f) - af)^2 + \\ 15af(1-a)(1-f) - 9a^2 f^2] & \text{if } a + f < 1 \\ (1-a)^3 (1-f)^3 [10((1-a)(1-f) - af)^2 + \\ 15af(1-a)(1-f) - 9(1-a)^2 (1-f)^2] & \text{if } a + f \geq 1 \end{cases}$$

(lásd: 4.2. ábra), amiből a \mathcal{Q} sokaság térfogatára kapjuk, hogy

$$V(\mathcal{Q}) = \int_{[0,1]^2} V(a, f) da df = \frac{2\pi^5}{4725} \approx 0.129532.$$

□



4.2. ábra. A $\text{Vol}(\mathcal{Q})$ térfogat eloszlása a klasszikus csatornák felett.

4.2.2. Egységőrző qubit csatornák

Tekintsük a $\mathcal{Q}^1 \subset \mathbb{R}^9$ sokaság alábbi paraméterezését

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{b} & 1-a & e & -c \\ \bar{c} & \bar{e} & 1-a & -b \\ \bar{d} & -\bar{c} & -\bar{b} & a \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

ahol $a \in [0, 1]$ és $Q > 0$. A fenti egységőrző qubit csatorna klasszikus nyoma a $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ duplán sztochasztikus mátrixszal adható meg.

Tekintsük az

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unitér mátrixot és definiáljuk az A mátrixot mint a Q unitér konjugáltját

$$A = U^*QU = \begin{pmatrix} 1-a & e & b & -c \\ \bar{e} & 1-a & c & -b \\ \bar{b} & \bar{c} & a & d \\ -\bar{c} & -\bar{b} & \bar{d} & a \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

mely pontosan akkor pozitív definit, ha Q az, ezért A a \mathcal{Q} sokaság egy ekvivalens paraméterezését szolgáltatja.

Ahhoz, hogy a 4.2.1. lemmát használni majd tudjuk szükségünk lesz az alábbi rész-eredményre.

4.2.3. Lemma. *Jelölje az A mátrix bal felső $k \times k$ -as részmátrixát A_k . Ekkor ha $L_3 = \text{Span}\{(0, 0, 1)^T\}$ és $M = \sqrt{A_3^{-1}}(L_3)$, akkor $\sqrt{A_3^{-1}}P_{M^\perp}\sqrt{A_3^{-1}} = \begin{pmatrix} A_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}$ teljesül.*

Bizonyítás. A 4.2.1. megjegyzés szerint $M^\perp = \sqrt{A}(L^\perp)$. Ha az u_1 és u_2 L_3^\perp -beli vektorok A_3 -ortogonálisak, azaz $\langle u_i, A_3 u_j \rangle = \delta_{ij}$ teljesül, akkor a $\{\sqrt{A_3}u_1, \sqrt{A_3}u_2\}$ rendszer az M^\perp altér ortonormált bázisa lesz. Írható tehát, hogy

$$P_{M^\perp} = \sqrt{A_3}u_1 \otimes \sqrt{A_3}u_1 + \sqrt{A_3}u_2 \otimes \sqrt{A_3}u_2 = \sqrt{A_3}(u_1 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_2)\sqrt{A_3},$$

amiből következik, hogy $\sqrt{A_3^{-1}}P_{M^\perp}\sqrt{A_3^{-1}} = u_1 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_2$. Vezessük be a $B = \begin{pmatrix} A_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. Könnyen látható, hogy $\langle x, By \rangle = \langle x, A_3 y \rangle$ teljesül minden $x, y \in L_3^\perp$ vektorra. Legyen $u_i = \sqrt{B^{-1}}e_i$, $i = 1, 2$, ahol $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ az L_3^\perp altér standard bázisa. Végül azt kapjuk, hogy $u_1 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_2 = \sqrt{B^{-1}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)\sqrt{B^{-1}} = \begin{pmatrix} A_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}$, mellyel a bizonyítás teljes. \square

4.2.2. Tétel. *Az egységőrző qubit csatornák $\mathcal{Q}^1 \subset \mathbb{R}^9$ terének térfogata a Lebesgue-mértékre vonatkozólag*

$$\text{Vol}(\mathcal{Q}^1) = \frac{2\pi^4}{315}.$$

A térfogat eloszlása a klasszikus egységőrző csatornák felett a

$$V(a) = 2^2\pi^4 a^4(1-a)^4$$

formulával fejezhető ki.

Bizonyítás. A \mathcal{Q}^1 sokaság (4.7) paraméterezéséhez tartozó térfogati forma $2^7 d\lambda_9$. Egy (4.8) alakban adott A mátrix pontosan akkor határoz meg unitális csatornát, ha pozitív definit. Az A mátrix pozitivitásából persze következik, hogy $a \in [0, 1]$. Az általános eset bizonyításához hasonlóan, a bal felső sarok minorokra vonatkozólag a $\det(A_i) > 0$ $i = 1, 2, 3, 4$ feltételek teljesülését követeljük meg. Legyen először $a \in [0, 1]$ rögzített.

Az A_3 sarok minort rögzítve a 4.2.1. és 4.2.3. lemmákat felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(A_3) &= \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{C}}(T_3, a \det(A_3), L_3, x_3)} 2^7 d\lambda_2 = \\ &= \frac{2^6 F_1}{\det(A_2)} \left(a - \left\langle x_3, \begin{pmatrix} A_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} x_3 \right\rangle \right)_+ \det(A_3), \end{aligned}$$

ahol $L_3 = \text{Span}\{(0, 0, 1)^T\}$ és $x_3 = (-c, -b, 0)^T$.

Igaz továbbá, hogy $\left\langle x_3, \begin{pmatrix} A_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} x_3 \right\rangle = \langle y, \sigma_1 A_2^{-1} \sigma_1 y \rangle$, ahol $y = (b, c)^T$.

Ha A_2 fix, akkor

$$\begin{aligned} V(A_2) &= \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{C}}(T_2, a \det(A_2), \mathbb{C}^2, 0)} V(A_3) d\lambda_4 = \\ &= 2^6 F_1 \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{C}}(T_2, a \det(A_2), \mathbb{C}^2, 0)} (a - \langle y, \sigma_1 A_2^{-1} \sigma_1 y \rangle)_+ (a - \langle y, A_2^{-1} y \rangle) d\lambda_4(y). \end{aligned}$$

Az $y = \sqrt{a} \sqrt{A_2} z$ helyettesítést elvégezve kapjuk, hogy

$$V(A_2) = 2^6 F_1 a^4 \det(A_2) \int_{\{z: \|z\| < 1\}} (1 - \langle z, Bz \rangle)_+ (1 - \|z\|^2) d\lambda_4(z),$$

ahol a $B = \sqrt{A_2} \sigma_1 A_2^{-1} \sigma_1 \sqrt{A_2}$ önadjungált mátrixra $\det(B) = 1$ teljesül. Az imént felírt integrálban a B mátrixot egy hozzá unitér hasonló mátrixszal helyettesítve az integrál értéke nem változik, ezért feltehető, hogy B diagonális. Ebből következik, hogy $V(A_2)$

$$\begin{aligned} V(A_2) &= 2^6 F_1 a^4 \det(A_2) \\ &\times \int_{\{z: \|z\| < 1\}} \left(1 - \lambda |z_1|^2 - \frac{1}{\lambda} |z_2|^2 \right)_+ (1 - |z_1|^2 - |z_2|^2) d\lambda_4(z) \end{aligned}$$

alakba írható, ahol μ a B mátrix nagyobbik sajátértékét jelöli.

A fenti integrálban az integrációs tartományt két egydimenziós polár koordinátarendszer Descartes-szorzatával paraméterezzük. A szögek szerinti integrálokból egy F_1^2 szorzó tényezőt kapunk, a sugár irányú integrál pedig

$$\begin{aligned} V(A_2) &= 2^6 F_1^3 a^4 \det(A_2) \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(1 - \mu r_1^2 - \frac{1}{\mu} r_2^2 \right)_+ (1 - r_1^2 - r_2^2)_+ r_1 r_2 dr_1 dr_2 \\ &= \frac{2^5 \pi^3}{3} a^4 \det(A_2) \frac{3\mu - 1}{\mu(1 + \mu)}. \end{aligned}$$

Elemi mátrixműveletek segítségével a B mátrix nagyobbik sajátértéke

$$\mu = 1 + \frac{2\Im(e)^2}{\det(A_2)} + \sqrt{\left(1 + \frac{2\Im(e)^2}{\det(A_2)} \right)^2 - 1}$$

alakban írható fel, amiből a

$$V(A_2) = \frac{2^5 \pi^3}{3} a^4 \det(A_2) \left(1 + \frac{2\Im(e)^2}{\det(A_2)} \left(\sqrt{\frac{\Im(e)^2}{\det(A_2) + \Im(e)^2}} - 1 \right) \right)$$

alakot nyerjük.

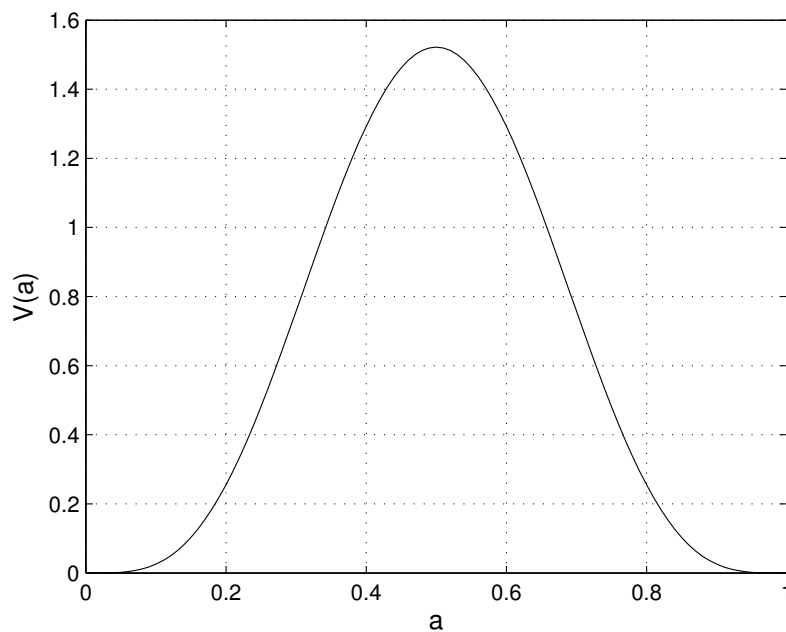
Ebből egy a térfogat klasszikus unitális csatornák feletti eloszlására a

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_{|e|^2 \leq (1-a)^2} V(A_2) d\lambda_2(e) \\ &= \frac{2^5 \pi^3}{3} a^4 (1-a)^4 \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2r^2 \sin^2 \phi}{1-r^2} \left(\sqrt{\frac{r^2 \sin^2 \phi}{1-r^2 \cos^2 \phi}} - 1 \right) \right) (1-r^2) r d\phi dr \\ &= 2^2 \pi^4 a^4 (1-a)^4 \end{aligned}$$

bizonyítandó alakot kapjuk (lásd: 4.3. ábra). A \mathcal{Q}^1 sokaság térfogatára pedig

$$V(\mathcal{Q}^1) = 2^2 \pi^4 \int_0^1 a^4 (1-a)^4 da = \frac{2\pi^4}{315} \approx 0.61847$$

adódik. □



4.3. ábra. A $\text{Vol}(\mathcal{Q}^1)$ térfogat eloszlása klasszikus csatornák felett.

Jogosan vetődhet fel a kérdés, hogy miért csak qubit-qubit csatornákat vizsgálunk. A választ a fellépő integrálok rohamosan emelkedő komplexitásában kell keresnünk. Ahhoz például, hogy módszerünkkel a $\mathcal{D}_{n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D}_{n,\mathbb{C}}$ unitális qubit csatornák terének térfogatát kiszámítsuk, elkerülhetetlen, hogy az $n \times n$ -es duplán sztochasztikus mátrixok terén integráljunk. A Birkhoff–von Neumann-tétel szerint az $n \times n$ -es duplán sztochasztikus mátrixok az $n \times n$ -es permutációmátrixok konvex kombinációiként állnak elő, ami egy sokdimenziós politóp, és amit Birkhoff-politópként tartanak számon. Az $n \times n$ -es duplán sztochasztikus mátrixok alkotta Birkhoff-politóp térfogata csupán $n = 1, 2, \dots, 10$ esetén ismert, általános n -re eddig csak asszimptotikus formulát publikáltak [54].

4.3. Véletlen qubit csatornák

A $V(a)$ és $V(a, f)$ függvények ismeretében lehetőség nyílik arra, hogy tetszőleges qubit véletlen, egyenletes eloszlású egységőrző vagy általános qubit csatorna általi képének radiális eloszlását kiszámítsuk a Bloch-gömb belsejében. Ehhez a qubit csatornák (4.3) Bloch-reprezentációját használjuk fel.

A (4.4) formulában szereplő Q Choi-mátrixszal adott qubit csatorna Bloch-reprezentációja

$$v = \begin{pmatrix} \Re(b+g) \\ -\Im(b+g) \\ a+f-1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \Re(d+e) & \Im(d+e) & \Re(b-g) \\ -\Im(d-e) & \Re(d-e) & -\Im(b-g) \\ 2\Re(c) & 2\Im(c) & a-f \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

amiről leolvasható, hogy egy $(0, 0, r)$ Bloch-vektorral adott qubit Q csatorna általi képének σ_3 -irányú komponense $(1+r)a + (1-r)f - 1$. Ha a csatorna egységőrző, akkor a σ_3 -irányú komponensre a $r(2a-1)$ értéket kapjuk.

Egy tetszőleges $O : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonális lineáris transzformáció qubit csatornát határoz meg a Stokes-paraméterezésen keresztül. Megállapodunk abban, hogy az ortogonális transzformáció és a belőle származó qubit csatorna között jelölésben nem teszünk különbséget.

4.3.1. Lemma. *Legyen $O \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tetszőleges ortogonális mátrix, $O \in \mathcal{Q}^1$ pedig a neki megfelelő qubit csatorna. Ekkor az $L_O, R_O : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ $L_O(Q) = O \circ Q$, $R_O(Q) = Q \circ O$ leképezések Jacobi determinánsa 1.*

Bizonyítás. A bizonyítás valójában egy Maple segítségével végzett számolás. A programkódot és a futási eredményt az E. függelékben közöltük. \square

A fenti lemma következménye, hogy ha Q akár a \mathcal{Q} , akár a \mathcal{Q}^1 halmazon egyenletes eloszlású qubit csatorna, akkor tetszőleges $\rho_0 \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ qubit-et véve a $Q(\rho_0)$ véletlen qubit Bloch-vektorának eloszlása gömbszimmetrikus.

4.3.1. Tétel. *Legyen Q a \mathcal{Q}^1 halmazon egyenletes eloszlású qubit csatorna. Ekkor egy tetszőleges qubit Q általi képének Bloch-sugara a*

$$\kappa(\rho, r) = \frac{\pi^4}{2^3 r \text{Vol}(\mathcal{Q}^1)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right)^3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \mathbf{1}_{(0,r)}(\rho)$$

sűrűségfüggvény szerinti eloszlást követi, ahol $r \in (0, 1)$ az eredeti Bloch-sugár.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a transzformációnak alávetett qubit Bloch-sugara $r \in (0, 1)$. A 4.3.1. lemma értelmében feltehető, hogy a kiinduló qubit Bloch-vektora $(0, 0, r)$. Korábbi megjegyzésünk értelmében a Q általi kép Bloch-vektorának harmadik komponense $r(2a - 1)$, ahol a a csatorna klasszikus nyomát paraméterezi a (4.7) felírásban. Ebből a $r(2a - 1)$ mennyiség eloszlására kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(r(2a - 1) < z) = \mathbb{P}\left(a < \frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} + 1\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq -r \\ \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q}^1)} \int_0^{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} + 1\right)} V(a) da, & \text{ha } z \in (-r, r) \\ 1, & \text{ha } z \geq r. \end{cases}$$

Innen a σ_3 irányú komponens sűrűségfüggvénye

$$f_{\sigma_3}(z) = \frac{d}{dz} \mathbb{P}(r(2a - 1) < z) = \begin{cases} \frac{\pi^4}{2^7 r \text{Vol}(\mathcal{Q}^1)} \left(1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^4, & \text{ha } z \in (-r, r) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ugyancsak a 4.3.1. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy a Q általi kép Bloch-vektora gömb-szimmetrikus eloszlású. A B.0.4. lemmát felhasználva a Q általi kép Bloch-sugarának sűrűségfüggvényére kapjuk, hogy

$$\kappa(\rho, r) = \frac{\pi^4}{2^3 r \text{Vol}(\mathcal{Q}^1)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right)^3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \mathbf{1}_{(0,r)}(\rho).$$

□

Legyen Q egyenletes eloszlású unitális qubit csatorna és X egy tetszőleges $r \in (0, 1)$ Bloch-sugarú qubit Q általi képe. Az $Y = (X/r)^2$ valószínűségi változót tekintve írható, hogy $\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X < r\sqrt{y})$, amiből Y sűrűségfüggvényére kapjuk, hogy

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} \mathbb{P}(Y < y) = \kappa(r\sqrt{y}, r) \frac{r}{2\sqrt{y}} = \frac{\pi^4}{2^4 \text{Vol}(\mathcal{Q}^1)} (1 - y)^3 y^{\frac{1}{2}}, \quad (4.10)$$

ami egy $\beta(\frac{3}{2}, 4)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Kaptuk tehát, hogy $X \sim r\sqrt{Y}$, ahol $Y \sim \beta(\frac{3}{2}, 4)$. A fenti gondolatmenetet iterálva az alábbi fontos következményt nyerjük.

4.3.1. Következmény. *Legyen Q_1, Q_2, \dots független egyenletes eloszlású unitális qubit csatornák egy sorozata és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor egy $r \in (0, 1)$ Bloch-sugarú qubit $Q_1 \circ \dots \circ Q_n$ csatorna kompozíció-szorzat általi képének Bloch-sugara egy $r \prod_{k=1}^n \sqrt{Y_k}$ valószínűségi változóval megegyező eloszlású, ahol Y_1, Y_2, \dots független, azonos $\beta(\frac{3}{2}, 4)$ eloszlású valószínűségi változók sorozata.*

4.3.2. Tétel. *Legyen Q egy \mathcal{Q} halmazon egyenletes eloszlású qubit csatorna, $\rho_0 = \frac{1}{2}I \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{C}}$ pedig a teljesen kevert állapot. Ekkor a $Q(\rho_0)$ véletlen qubit Bloch-sugarának eloszlása az*

$$f(r) = 40r^2(r - 1)^6((r + 2)^3 - 6) \quad r \in [0, 1]$$

sűrűségfüggvénnyel adható meg.

Bizonyítás. A (4.9) Bloch-reprezentációról leolvasható, hogy a $Q(\rho_0)$ qubit Bloch-vektorának σ_3 irányú komponense $a + f - 1$. A σ_3 irányú komponens eloszlása szimmetrikus, ezért feltehető, hogy $z \in [0, 1]$. Ezek után a σ_3 irányú komponens sűrűségfüggvényét a

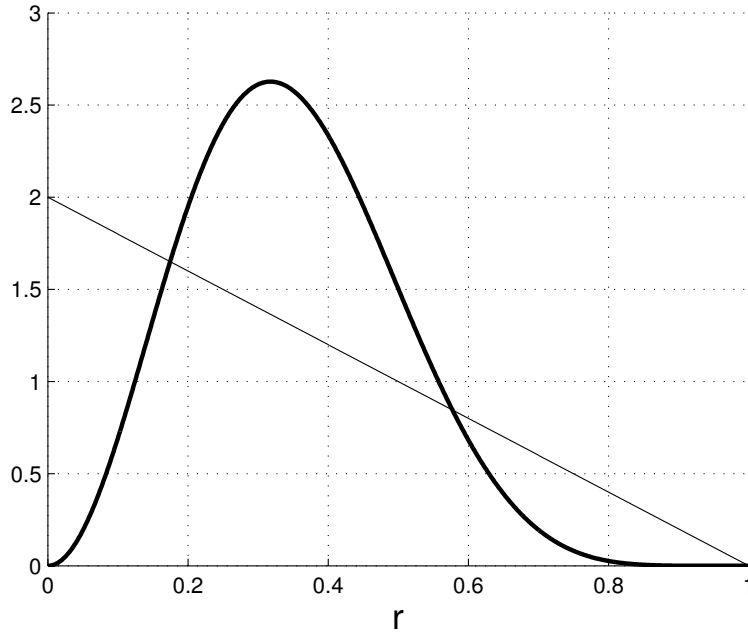
$$f_{\sigma_3}(z) = \frac{\int_0^1 V(a, z + 1 - a) da}{\int_0^1 V(a, z + 1 - a) da} = 2(z^4 + 7z^3 + 17z^2 + 7z + 1)(1 - z)^7$$

formulával fejezhetjük ki. Ebből a B.0.4. lemma révén a Bloch-sugár eloszlásának sűrűségfüggvényére a

$$f(r) = 40r^2(r - 1)^6((r + 2)^3 - 6) \quad r \in [0, 1]$$

bizonyítandó formulát nyerjük. □

Megfigyelhető, hogy a véletlen klasszikus csatornákkal ellentétben a véletlen qubit csatornák a teljesen kevert állapotot egy tipikus $r > 0$ sugárra képezik le (lásd: 4.4. ábra).



4.4. ábra. Teljesen kevert qubit kvantum állapot és véletlen qubit (vastag vonal) illetve klasszikus (vékony vonal) csatorna általi képe közti Hilbert–Schmidt-távolság eloszlása.

4.4. A zaj egy lehetséges modellje

Egy egyetlen qubitből álló hipotetikus kvantum regisztert terhelő egységnyi ideig tartó külső zaj hatása egy véletlen qubit csatornával modellezhető. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy a külső zaj milyen gyorsan rombolja le a qubitben tárolt információt. Az információvesztés mérésére a kvantum relatív entrópiát használjuk.

4.4.1. Definíció. Legyenek $\rho, \sigma \in \mathcal{D}_{n, \mathbb{K}}$ tetszőleges állapotok. A ρ állapot σ állapotra vonatkozó kvantum relatív entrópiája alatt az

$$S(\rho||\sigma) = \text{tr}(\rho \log(\rho)) - \text{tr}(\rho \log(\sigma))$$

mennyiséget értjük.

Szemléletesen szólva a $S(\rho||\sigma)$ mennyiség a ρ kvantum állapot információtöbbletét méri a σ állapothoz képest.

4.4.2. Definíció. Legyen Q_1, Q_2, \dots független, egyenletes eloszlású qubit csatornák sorozata és $\rho_n = Q_n \circ \dots \circ Q_1(\rho_0)$, ahol ρ_0 rögzített kiinduló qubit állapot. A ρ_n qubit maradék információját az $R(\rho_0, n) = S(\rho_n||\frac{1}{2}I)$ mennyiséggel mérjük, a ρ_0 állapothoz képesti információ veszteséget pedig $L(\rho_0, n) = S(\rho_0||\rho_n)$ módon definiáljuk.

Az (1.5) spektrálfelbontást felhasználva közvetlen számolással megmutatható, hogy

$$R(\rho_0, n) = \frac{1+r_n}{2} \log(1+r_n) + \frac{1-r_n}{2} \log(1-r_n) \quad (4.11)$$

$$L(\rho_0, n) = \frac{1+r_0}{2} \log\left(\frac{1+r_0}{2}\right) + \frac{1-r_0}{2} \log\left(\frac{1-r_0}{2}\right) - \frac{1+r_0 \cos(\alpha_n)}{2} \log\left(\frac{1+r_n}{2}\right) - \frac{1-r_0 \cos(\alpha_n)}{2} \log\left(\frac{1-r_n}{2}\right), \quad (4.12)$$

ahol $r_0, r_n \in [0, 1]$ a ρ_0 és ρ_n qubitek Bloch-sugara, α_n pedig a ρ_0 és ρ_n qubitek Bloch-vektorai által bezárt szög.

Legyen Q_1, Q_2, \dots független, egyenletes eloszlású unitális qubit csatornák egy sorozata. A $\log(x) \leq x - 1$, $x > 0$ egyenlőtlenségből következik az $R(\rho_0, n)$ mennyiségre érvényes $R(\rho_0, n) \leq r_n^2$ felső becslés. Ezt felhasználva írhatjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(R(\rho_0, n) \geq \frac{1}{n^3}\right) \leq \mathbb{P}\left(r_n^2 \geq \frac{1}{n^3}\right) \leq n^3 \mathbb{E}(r_n^2) = n^3 r_0^2 \mathbb{E}(Y)^n,$$

ahol $Y \sim \beta(\frac{3}{2}, 4)$ és $0 < \mathbb{E}(Y)^n < 1$. Ebből $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(R(\rho_0, n) \geq \frac{1}{n^3}\right) < \infty$ következik, ami a B.0.5. Borel–Cantelli-lemmával együtt azt adja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\rho_0, n) = 0 \quad \mathbb{P} - \text{m.b.}$$

Ebből az érvelésből persze következik az is, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ $\mathbb{P} - \text{m.b.}$, amiből pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\rho_0, n) = \frac{1+r_0}{2} \log(1+r_0) + \frac{1-r_0}{2} \log(1-r_0) \quad \mathbb{P} - \text{m.b.}$$

következik. A B.0.6. iterált logaritmus tétel segítségével a megbecsülhetjük a konvergencia sebességét is. A 4.3.1. következmény értelmében $r_n \sim r_0 \prod_{k=1}^n \sqrt{Y_k}$, ahol Y_1, Y_2, \dots független, azonos $\beta(\frac{3}{2}, 4)$ eloszlású valószínűségi változók sorozata. Írhatjuk, hogy

$$r_0 \prod_{k=1}^n \sqrt{Y_k} = r_0 e^{\frac{n}{2} \mathbb{E}(\log(Y))} e^{\frac{\mathbb{D}(\log(Y_k))}{2} \sqrt{2n \log \log(n)} \xi_n},$$

ahol $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2n \log \log(n)}} \sum_{k=1}^n \frac{\log(Y_k) - \mathbb{E}(\log(Y))}{\mathbb{D}(\log(Y_k))}$ és a B.0.6. iterált logaritmus tétel szerint majdnem biztosan igaz, hogy $\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -1$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1$. Közvetlen számolás után meggyőződhetünk róla, hogy az $R(\rho_0, n)$ függvényt a

$$R(\rho_0, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k(2k-1)}$$

$[0, 1]$ -on egyenletesen konvergens, pozitív tagú hatványsor állítja elő. Ebből nekünk most annyi kell, hogy $\frac{r_n^2}{2} \leq R(\rho_0, n) \leq r_n^2$. Ezt az iterált logaritmus tételes megfontolással kombinálva kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 1$ választás mellett $\mathbb{P} - m.b.$ véges sok n kivételével igaz az alábbi becslés

$$r_0^2 e^{n\mathbb{E}(\log(Y))} e^{-\mathbb{D}(\log(Y_k))\sqrt{2n \log \log(n)}\varepsilon} \leq R(\rho_0, n) \leq r_0^2 e^{n\mathbb{E}(\log(Y))} e^{\mathbb{D}(\log(Y_k))\sqrt{2n \log \log(n)}\varepsilon}.$$

A ρ_0 kiinduló állapothoz képesti információ veszteséget másodrendig Taylor-sorba fejtvé a

$$L(\rho_0, n) = \frac{1+r_0}{2} \log(1+r_0) + \frac{1-r_0}{2} \log(1-r_0) - r_n r_0 \cos(\alpha_n) + \frac{r_n^2}{2} + \mathcal{O}(r^3), \quad (4.13)$$

összefüggést nyerjük, amiről leolvasható, hogy a $L(\rho_0, n)$ mennyiség az alkalmazott véletlen csatornák számával \mathbb{P} -m.b. exponenciális sebességgel tart a $S(\rho_0 || \frac{1}{2}I)$ relatív entrópiához.

4.5. Összefoglalás

A fejezetben qubit-qubit kvantum csatornákat vizsgáltunk geometriai eszközökkel.

1. Bevezettük a qubit csatorna klasszikus nyomát mint a qubit csatorna klasszikus (diagonális) állapotokra történő megszorítottját.
2. Meghatároztuk egy, a qubit csatornák terén egyenletes eloszlású csatorna klasszikus nyomának az eloszlását és kiszámítottuk a qubit csatornák terének a térfogatát a Hilbert–Schmidt metrikára vonatkozólag.
3. Eredményeinket felhasználva független véletlen qubit csatorna sorozat qubitekre gyakorolt hatásával a dekoherenciát előidéző zajt modelleztük.
4. A dekoherencia utáni állapot információ tartalmát a teljesen kevert állapotra vonatkozó relatív entrópiával, a dekoherencia előtti állapothoz képesti információ veszteséget pedig a kezdeti állapot dekoherencia utáni állapotra vonatkozó relatív entrópiájával jellemeztük.
5. Végül meghatároztuk a teljesen kevert állapothoz való konvergencia rátáját.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék ezúttal köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának a BME TTK Analízis Tanszék egyetemi docensének, hogy közreműködésével megismerkedhettem a kvantum információgeometria alapvető módszereivel. Segítséget nyújtott a szakirodalom beszerzésében, igényeimnek megfelelően, folyamatosan ellátott tanácsokkal, útmutatásokkal, lektorálta a dolgozatomat (szakmai és irodalmi szempontból egyaránt). Kérdéseimre mindig örömmel és érthetően válaszolt, és mindig rendelkezésre állt, amikor szükségem volt a segítségére.

Szeretném megköszönni szüleimnek a tanulmányaim végzéséhez nyújtott anyagi és morális támogatást. Külön szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, aki születésemtől fogva példamutatásával a matematika szeretetére nevelt. Nem utolsó sorban pedig páromnak szeretném megköszönni, hogy a dolgozat megírásához szükséges nyugodt légkört a számomra megteremtette.

Irodalomjegyzék

- [1] Andai A.: Volume of the quantum mechanical state space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 39. évf. (2006), 13641–13657. p.
- [2] Andai A.: *Információgeometria a kvantummechanikában*. PhD értekezés (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem). Budapest, 2007.
- [3] Andai A.: Uncertainty principle with quantum Fisher information. *J. Math. Phys.*, 49. évf. (2008. JAN) 1. sz.
- [4] Andai A. – Lovas A.: On robertson-type uncertainty principles. In Václav Kratochvíl (szerk.): *Information Geometry and its Applications IV* (konferenciaanyag). Liblice, Czech Republic, 2016. June, 28–29. p.
URL <http://igaia.utia.cz/data/proceedings.pdf>.
- [5] Lovas A. – Andai A.: Refinement of robertson-type uncertainty principles with geometric interpretation. *International Journal of Quantum Information*, 14. évf. (2016) 02. sz., 1650013. p.
- [6] Lovas A. – Andai A.: Volume of the space of qubit channels and some new results about the distribution of the quantum dobrushin coefficient. *arXiv preprint arXiv:1607.01215*, 2016.
- [7] Lovas A. – Andai A.: Volume of the space of qubit channels and the distribution of some scalar quantities on it. In Václav Kratochvíl (szerk.): *Information Geometry and its Applications IV* (konferenciaanyag). Liblice, Czech Republic, 2016. June, 48–49. p. URL <http://igaia.utia.cz/data/proceedings.pdf>.
- [8] S. Amari: *Differential-geometrical methods in statistics*. Lecture Notes in Statistics sorozat, 28. köt. New York, 1985, Springer-Verlag, v+290. p. ISBN 3-540-96056-2.
- [9] S. Amari – H. Nagaoka: *Methods of information geometry*. Translations of Mathematical Monographs sorozat, 191. köt. Providence, RI, 2000, American Mathematical Society, x+206. p. ISBN 0-8218-0531-2. Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada.
- [10] G. E. Andrews – R. Askey – R. Roy: *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications sorozat. 1999, Cambridge University Press.
- [11] K. Audenaert – L. Cai – F. Hansen: Inequalities for quantum skew information. *Lett. Math. Phys.*, 85. évf. (2008) 2-3. sz., 135–146. p. ISSN 0377-9017.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11005-008-0269-0>.

- [12] R. Balian–Y. Alhassid–H. Reinhardt: Dissipation in many-body systems: a geometric approach based on information theory. *Phys. Rep.*, 131. évf. (1986) 1-2. sz., 1–146. p. ISSN 0370-1573.
- [13] E. F. Beckenbach–R. Bellman: *Inequalities*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge sorozat. 2012, Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783642649714.
- [14] C. H. Bennett–G. Brassard–C. Crépeau–R. Jozsa–A. Peres–W. K. Wootters: Teleporting an unknown quantum state via dual classical and epr channels, 1993.
- [15] C. H. Bennett–Wiesner S. J.: Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69. évf. (1992. Nov), 2881–2884. p. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2881>. 0 p.
- [16] R. Bhatia: *Matrix analysis*. Graduate Texts in Mathematics sorozat, 169. köt. New York, 1997, Springer-Verlag, xii+347. p. ISBN 0-387-94846-5.
- [17] W. G. Brown–Y. S. Weinstein–L. Viola: Quantum pseudorandomness from cluster-state quantum computation. *Phys. Rev. A*, 77. évf. (2008. Apr), 040303. p. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.040303>. 4 p.
- [18] W. Bruzda–V. Cappellini–H. J. Sommers–K. Życzkowski: Random quantum operations. *Physics Letters A*, 373. évf. (2009) 3. sz., 320–324. p.
- [19] M. D. Choi: Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and Appl.*, 10. évf. (1975), 285–290. p.
- [20] A. Einstein–B. Podolsky–N. Rosen: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47. évf. (1935) 10. sz., 777. p.
- [21] J. Emerson–E. Livine–S. Lloyd: Convergence conditions for random quantum circuits. *Phys. Rev. A*, 72. évf. (2005. Dec), 060302. p. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.060302>. 4 p.
- [22] J. Fei–R. Joynt: Numerical Computations of Separability Probabilities. *ArXiv e-prints*, 2014. szeptember.
- [23] P. Gibilisco–F. Hansen–T. Isola: On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions. *Linear Algebra Appl.*, 430. évf. (2009) 8-9. sz., 2225–2232. p. ISSN 0024-3795. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2008.11.022>.
- [24] P. Gibilisco–F. Hiai–D. Petz: Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 55. évf. (2009) 1. sz., 439–443. p. ISSN 0018-9448. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2008.2008142>.
- [25] P. Gibilisco–D. Imparato–T. Isola: Uncertainty principle and quantum Fisher information. ii. *J. Math. Phys.*, 48. évf. (2007) 7. sz., –. p. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/48/7/10.1063/1.2748210>.

- [26] P. Gibilisco–T. Isola: Uncertainty principle and quantum Fisher information. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 59. évf. (2007) 1. sz., 147–159. p. ISSN 0020-3157.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10463-006-0103-3>.
- [27] I. S. Gradshteyn–I. M. Ryzhik–A. Jeffrey–D. Zwillinger: *Tables of Integrals, Series, and Products*. San Diego, 2000, CA: Academic Press, 1066. p. ISBN 060-8628475769.
- [28] L. Gurvits: Classical deterministic complexity of edmonds' problem and quantum entanglement. In *Proceedings of the Thirty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '03 konferenciasorozat. New York, NY, USA, 2003, ACM, 10–19. p. ISBN 1-58113-674-9. URL <http://doi.acm.org/10.1145/780542.780545>. 10 p.
- [29] Marx Gy.: *Kvantummechanika*. Második, átdolgozott és bővített kiadás. sorozat. Budapest, 1964, Műszaki Könyvkiadó.
- [30] F. Hansen: Metric adjusted skew information. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105. évf. (2008) 29. sz., 9909–9916. p.
- [31] W. Heisenberg: Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Z. Phys.*, 43. évf. (1927) 3. sz., 172–198. p. ISSN 1434-6001. URL <http://dx.doi.org/10.1007/bf01397280>.
- [32] F. Hiai–D. Petz: *Introduction to matrix analysis and applications*. 2014, Springer Science & Business Media.
- [33] M. Horodecki–P. Horodecki–R. Horodecki: Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett., A*, 223. évf. (1996) 1-2. sz., 1–8. p. ISSN 0375-9601.
- [34] P. Horodecki: Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232. évf. (1997) 5. sz., 333–339. p.
- [35] K. Życzkowski: Volume of the set of separable states. ii. *Phys. Rev. A*, 60. évf. (1999. Nov), 3496–3507. p.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.3496>. 0 p.
- [36] K. Życzkowski–P. Horodecki–A. Sanpera–M. Lewenstein: Volume of the set of separable states. *Phys. Rev. A*, 58. évf. (1998. Aug), 883–892. p.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.883>. 0 p.
- [37] K. Życzkowski–H.-J. Sommers: Hilbert–Schmidt volume of the set of mixed quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36. évf. (2003) 39. sz., 10115. p. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/36/i=39/a=310>.
- [38] L. M. Ioannou: Computational complexity of the quantum separability problem. *Quantum Inf. Comput.*, 7. évf. (2007) 4. sz., 335–370. p. ISSN 1533-7146.
- [39] E .H. Kennard: Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen. *Z. für Phys.*, 44. évf. (1927) 4-5. sz., 326–352. p. ISSN 0044-3328.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01391200>.

- [40] A. Klenke: *Law of the Iterated Logarithm*. London, 2014, Springer London, 509–519. p. ISBN 978-1-4471-5361-0.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-5361-0_22.
- [41] H. Kosaki: Matrix trace inequalities related to uncertainty principle. *Int. J. Math.*, 16. évf. (2005) 06. sz., 629–645. p.
URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129167X0500303X>.
- [42] F. Kubo–T. Ando: Means of positive linear operators. *Math. Ann.*, 246. évf. (1979/80) 3. sz., 205–224. p. ISSN 0025-5831.
- [43] L. D. Landau–E. M. Lifsic: *Elméleti fizika III*. Budapest, 1981, Tankönyvkiadó.
- [44] A. Lovas–A. Andai: Invariance of separability probability over reduced states in 4×4 bipartite systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50. évf. (2017) 29. sz., 295303. p.
URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/50/i=29/a=295303>.
- [45] S. Luo: Quantum Fisher information and uncertainty relations. *Lett. Math. Phys.*, 53. évf. (2000) 3. sz., 243–251. p. ISSN 0377-9017.
- [46] S. Luo: Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.*, 91. évf. (2003. Oct), 180403. p.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.180403>. 4 p.
- [47] S. Luo–Q. Zhang: On skew information. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 50. évf. (2004) 8. sz., 1778–1782. p. ISSN 0018-9448.
- [48] S. Luo–Q. Zhang: Correction to on skew information. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 51. évf. (2005) 12. sz., 4432–4432. p. ISSN 0018-9448.
- [49] S. Luo–Z. Zhang: An informational characterization of Schrödinger’s uncertainty relations. *J. Stat. Phys.*, 114. évf. (2004) 5-6. sz., 1557–1576. p. ISSN 0022-4715.
URL <http://dx.doi.org/10.1023/B%3AJOSS.0000013971.75667.c8>.
- [50] Rédei M.–Summers S. J.: Quantum probability theory. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38. évf. (2007) 2. sz., 390–417. p. ISSN 1355-2198. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219807000342>.
Probabilities in quantum mechanics.
- [51] S. Milz–W. T. Strunz: Volumes of conditioned bipartite state spaces. *J. Phys. A*, 48. évf. (2015) 3. sz., 035306, 16. p. ISSN 1751-8113.
URL <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/48/3/035306>.
- [52] R. Mirman: *Group theory: An intuitive approach*. 1995, World Scientific, 284–285. p.
- [53] Vrana P.: Kvantum csatornák. 2015.
URL <http://math.bme.hu/~vranap/teaching/qchannels.pdf>. Kiadatlan kézirat.

- [54] I. Pak: Four questions on birkhoff polytope. *Annals of Combinatorics*, 4. évf. (2000) 1. sz., 83–90. p.
- [55] J. L. Pekka–P. Busch–P. Mittelstaedt: Some important classes of quantum measurements and their information gain. *Journal of Mathematical Physics*, 32. évf. (1991) 10. sz., 2770–2775. p.
- [56] A. Peres: Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77. évf. (1996. Aug), 1413–1415. p.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>. 0 p.
- [57] D. Petz: Covariance and Fisher information in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 35. évf. (2002) 4. sz., 929–939. p. ISSN 0305-4470.
URL <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/35/4/305>.
- [58] D. Petz: *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*. Berlin-Heidelberg, 2008, Springer.
- [59] D. Petz–Cs. Sudár: Geometries of quantum states. *J. Math. Phys.*, 37. évf. (1996) 6. sz., 2662–2673. p. ISSN 0022-2488; 1089-7658/e.
- [60] H. P. Robertson: The uncertainty principle. *Phys. Rev.*, 34. évf. (1929. Jul), 163–164. p. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.34.163>.
- [61] H. P. Robertson: An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation. *Phys. Rev.*, 46. évf. (1934. Nov), 794–801. p.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.46.794>.
- [62] J. Rotman: *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext sorozat. 2008, Springer New York. ISBN 9780387683249.
URL <https://books.google.hu/books?id=P2HV4f8gyCgC>.
- [63] M. B. Ruskai–S. Szarek–E. Werner: An analysis of completely positive trace-preserving maps on \mathcal{M}_2 . *Linear Algebra Appl.*, 347. évf. (2002), 159–187. p.
- [64] Erdélyi S. – Fényes I. – Hargittai Cs. – Nagy T. – Pataki Gy. – Székely S. – Szépfalusi P. – Vasvári B. – Zawadowski A.: Modern fizikai kisenciklopédia. Modern fizikai kisenciklopédia. Budapest, 1971.
- [65] A. Sanpera–R. Tarrach–G. Vidal: Quantum separability, time reversal and canonical decompositions. *arXiv preprint quant-ph/9707041*, 1997.
- [66] E. Schrödinger: Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31. évf. (1935) 4. sz., 555–563. p.
- [67] E. Schrödinger: About Heisenberg uncertainty relation (original annotation by A. Angelow and M.-C. Batoni). *Bulgar. J. Phys.*, 26. évf. (1999) 5-6. sz., 193–203 (2000). p. ISSN 1310-0157. Translation of Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect. 19 (1930), 296–303.

- [68] P. B. Slater: A priori probability that a qubit–qutrit pair is separable. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 5. évf. (2003) 6. sz., S651. p. URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/5/i=6/a=018>.
- [69] P. B. Slater: Qubit-qutrit separability-probability ratios. *Phys. Rev. A*, 71. évf. (2005. May), 052319. p. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052319>. 15 p.
- [70] P. B. Slater: Advances in delimiting the Hilbert–Schmidt separability probability of real two-qubit systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43. évf. (2010) 19. sz., 195302. p.
- [71] P. B. Slater: Bures and Hilbert–Schmidt 2×2 determinantal moments. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45. évf. (2012) 45. sz., 455303. p.
- [72] P. B. Slater: A concise formula for generalized two-qubit Hilbert–Schmidt separability probabilities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46. évf. (2013) 44. sz., 445302. p.
- [73] P. B. Slater: Invariance of bipartite separability and ppt-probabilities over casimir invariants of reduced states. *Quantum Information Processing*, 2016., 1–16. p.
- [74] P. B. Slater – C. F. Dunkl: Moment-based evidence for simple rational-valued Hilbert–Schmidt generic 2×2 separability probabilities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45. évf. (2012) 9. sz., 095305. p.
- [75] P. B. Slater – C. F. Dunkl: Formulas for rational-valued separability probabilities of random induced generalized two-qubit states. *Advances in Mathematical Physics*, 2015. évf. (2015).
- [76] P. B. Slater – C. F. Dunkl: Generalized two-qubit whole and half Hilbert–Schmidt separability probabilities. *Journal of Geometry and Physics*, 90. évf. (2015), 42–54. p.
- [77] P. B. Slater – C. F. Dunkl: Moment-based evidence for simple rational-valued Hilbert–Schmidt generic 2×2 separability probabilities. *J. Phys. A*, 45. évf. (2012) 9. sz., 095305, 33. p. ISSN 1751-8113. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/45/9/095305>.
- [78] P. B. Slater – C. F. Dunkl: Generalized two-qubit whole and half Hilbert–Schmidt separability probabilities. *J. Geom. Phys.*, 90. évf. (2015), 42–54. p. ISSN 0393-0440. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2015.01.006>.
- [79] E. Størmer: Positive linear maps of operator algebras. *Acta Math.*, 110. évf. (1963), 233–278. p. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02391860>.
- [80] R. F. Streater: Statistical dynamics and information geometry. In *Geometry and nature (Madeira, 1995)*. Contemp. Math. sorozat, 203. köt. Providence, RI, 1997, Amer. Math. Soc., 117–131. p.
- [81] J. Szenthe: *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*. Budapest, 2002, ELTE Eötvös Kiadó.

- [82] Matolcsi T.: Kvantumvalószínűség. 2015.
URL <http://szofi.elte.hu/~szaboa/MatolcsiKonyvek/>. Kiadatlan kézirat.
- [83] T. Tanaka: Information geometry of mean-field approximation. In *Advanced mean field methods (Birmingham, 1999)*. Neural Inf. Process. Ser. sorozat. Cambridge, MA, 2001, MIT Press, 259–273. p.
- [84] V. S. Varadarajan: *Geometry of quantum theory. Vol. I.* 1968, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, xiv+193. p. The University Series in Higher Mathematics.
- [85] V. S. Varadarajan: *Geometry of quantum theory. Vol. II.* New York, 1970, Van Nostrand Reinhold Co., xiv+255. p. The University Series in Higher Mathematics.
- [86] Wu W.: An order characterization of commutativity for C^* -algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129. évf. (2001), 983–987. p.
- [87] S. L. Woronowicz: Positive maps of low dimensional matrix algebras. *Reports on Mathematical Physics*, 10. évf. (1976) 2. sz., 165–183. p. ISSN 0034-4877. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034487776900380>.
- [88] K. Yanagi–S. Furuichi–K. Kuriyama: A generalized skew information and uncertainty relation. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 51. évf. (2005) 12. sz., 4401–4404. p. ISSN 0018-9448.
- [89] F. Zhang: *The Schur Complement and Its Applications*. New York, 2005, Springer. ISBN 0387242716 9780387242712 0387242732 9780387242736 1280337451 9781280337451.

A. függelék

Lineáris algebra

A.1. Mátrixok

A.1.1. Definíció. Legyen $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér és $x, y \in \mathcal{H}$. Jelölje $x \otimes y$ azt a $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris leképezést, melyet a $\mathcal{H} \ni z \mapsto x \otimes y(z) = \langle z, y \rangle x$ hozzárendelés értelmez.

A.1.1. Lemma. Tetszőleges $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix előállítható

$$V = U_1 \Sigma U_2, \quad (\text{A.1})$$

alakban, ahol $U_1, U_2 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitér mátrixok és $\Sigma \in \mathbb{K}^{n \times n}$ pedig nemnegatív elemű diagonális mátrix.

Bizonyítás. A fenti lineáris algebrában közismert felbontást szinguláris érték felbontásnak nevezik, a bizonyítás Bathia [16] könyvének 6. oldalán található meg. \square

Az (A.1) felbontásban szereplő Σ mátrix diagonálisának elemeit a V mátrix szinguláris értékeinek nevezzük. Az (A.1) alakból látható, hogy a V mátrix szinguláris értékei a $\sqrt{V^*V}$ mátrix sajátértékeivel egyeznek meg.

A.1.2. Lemma. Legyen A 2×2 -es invertálható mátrix $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ szinguláris értékekkel. Az A mátrix operátornormája és a $\sigma(A) = \sigma_2/\sigma_1$ módon definiált szinguláris érték hányadosa az

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{|\det(A)|} e^{\frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2} \|A\|_{HS}^2}{|\det(A)|} \right)} \\ \sigma(A) &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{-\cosh^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2} \|A\|_{HS}^2}{|\det(A)|} \right)} \end{aligned}$$

formulákkal fejezhető ki, ahol $\|\cdot\|_{HS}$ a közöséges Hilbert-Schmidt normát jelöli.

Bizonyítás. Ahogy azt korábban is írtuk, az A mátrix szinguláris értékei a $\sqrt{A^*A}$ mátrix sajátértékeiként kaphatók meg, ami

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \sqrt{|\det(A)|} \left(\frac{\|A\|_{HS}^2}{2|\det(A)|} \pm \sqrt{\left(\frac{\|A\|_{HS}^2}{2|\det(A)|} \right)^2 - 1} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{|\det(A)|} e^{\pm \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2} \|A\|_{HS}^2}{|\det(A)|} \right)}. \end{aligned}$$

Ebből pedig a kívánt formulákat kapjuk az operátornormára és a szinguláris érték hányadosra. \square

Jelölje az A $n \times n$ -es mátrix bal felső $i \times i$ -es részmátrixát A_i , ahol $i = 1, \dots, n$.

A.1.3. Lemma. *Legyen A $n \times n$ -es invertálható mátrix és $1 \leq k \leq n$ esetén $(A^{-1})_{k+1, \dots, n}$ jelölje az A^{-1} mátrixból az első k sor és oszlop törlésével előálló mátrixot. Az $(A^{-1})_{k+1, \dots, n}$ mátrix determinánása*

$$\det((A^{-1})_{k+1, \dots, n}) = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}.$$

Az előző lemma a Jacobi-tétel egy speciális esete (lásd: [27]). Az A.1.3. lemmát a következő ekvivalens alakban használjuk.

A.1.1. Következmény. *Ha A $n \times n$ -es invertálható mátrix, akkor a $T = \det(A)(A^{-1})$ mátrix determinánása*

$$\det((T)_{k+1, \dots, n}) = \det(A_k) \det(A)^{n-1-k}$$

módon fejezhető ki, ahol $1 \leq k \leq n$.

A.1.4. Lemma. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $u, v \in \mathbb{K}^n$. Ekkor az $A + u \otimes v$ mátrix determinánása*

$$\det(A + u \otimes v) = (1 + \langle v, Au \rangle) \det(A)$$

alakba írható.

Bizonyítás. A bizonyítás a [89] könyvben található meg. \square

A.1.2. Definíció. $A \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ és $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixokat Pauli-mátrixoknak nevezzük.

A.1.1. Megjegyzés. $A \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}I, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3 \right\}$ mátrixok az $\mathcal{M}_{2, \mathbb{C}}^{sa}$ altér egy ortonormált bázisát alkotják a Hilbert-Schmidt belső szorzásra nézve.

A.2. Pozitív definit mátrixok

A.2.1. Lemma (Sylvester-féle pozitivitási feltétel). *Egy A $n \times n$ -es önadjungált mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha sarok minorainak determinánása pozitív, azaz $\det(A_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n$.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történhet. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy minden n -nél kisebb méretű mátrixra igaz az állítás.

(\Rightarrow) Ez a könnyebbik irány. Legyen A tetszőleges $n \times n$ -es önadjungált pozitív definit mátrix. A pozitív definitésgből következik, hogy $\det(A) > 0$, a többi principális minor pozitivitása pedig az indukciós feltevésből adódik.

(\Leftarrow) Tegyük fel, hogy az A $n \times n$ -es hermitikus mátrix principális minorai pozitív determinánsúak. Az indukciós feltevés szerint a A_{n-1} sarokminor pozitív definit. Ha A nem

lenne pozitív definit, akkor a $\det(A) > 0$ feltétel értelmében lenne két negatív sajátértéke. Jelölje ezeket $\alpha > 0$ és $\beta < 0$, a hozzájuk tartozó sajátvektorokat pedig a és b . Az A önadjungáltóságából $a \perp b$ következik. Létezik tehát olyan $\tau \in \mathbb{K}$ konstans, melyre $v = a + \tau \cdot b$ vektor utolsó koordinátája zérus. Egyfelől $\langle v, Av \rangle = \alpha + |\tau|^2 \beta < 0$, másfelől pedig az A_{n-1} sarokminor pozitivitása miatt $\langle v, Av \rangle > 0$. \square

A.2.2. Lemma. *Legyen A az $n \times n$ -es önadjungált mátrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ elemekkel, az x vektor pedig álljon az A mátrix utolsó oszlopának első $n - 1$ eleméből, azaz $x = (a_{1,n}, \dots, a_{n-1,n})$. Ekkor az A mátrix determinánsa a*

$$\det(A) = a_{nn} \det(A_{n-1}) - \langle x, Tx \rangle$$

módon fejezhető ki, ahol $T = \det(A_{n-1})(A_{n-1})^{-1}$.

Bizonyítás. Az A mátrix determinánsát az utolsó sor szerint kifejtve a kívánt egyenlőséget kapjuk. \square

A.2.3. Lemma. *Az alábbi négyzetes blokkokból felépülő hermitikus blokkmátrix*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$$

pontosan akkor pozitív, ha $D_2 > 0$ és $D_1 - CD_2^{-1}C^ > 0$ vagy $D_1 > 0$ és $D_2 - C^*D_1^{-1}C > 0$.*

Bizonyítás. Ez az állítás nem más, mint a blokkmátrixok Schur-komplementtel megfogalmazott pozitivitási feltétele. A bizonyítás a [89] könyv 34. oldalán található. \square

A fenti lemmában megfogalmazott két feltétel – magától értetődő módon – csak egyszerre teljesülhet.

A.2.4. Lemma. *Ha X tetszőleges négyzetes mátrix, akkor X^*X pozitív szemidefinit és $X^*X < I$ pontosan akkor teljesül, ha $\|X\| < 1$.*

Bizonyítás. Az állítás első fele a $\forall v \in \mathbb{K}^n$ vektorra fennálló $\langle v, X^*Xv \rangle = \|Xv\|^2 \geq 0$ egyenlőtlenség egyszerű következménye. Az operátornorma definíciója értelmében pedig írhatjuk, hogy

$$\|X\|^2 = \sup \{ \|Xv\|^2 \mid v \in \mathbb{K}^n, \|v\| = 1 \} \leq 1$$

hiszen minden v egységvektorra teljesül az $\|Xv\|^2 = \langle v, X^*Xv \rangle \leq \|v\|^2 = 1$ egyenlőtlenség. \square

A.2.5. Lemma (Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség). *Tetszőleges A, B $n \times n$ -es pozitív definit mátrixokat véve a*

$$\det(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$$

determináns egyenlőtlenség teljesül.

Bizonyítás. A bizonyítás a [13] könyv 70. oldalán található. \square

A.3. Szuper operátorok

Egy $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix esetén tekinthetjük a D mátrixszal történő bal- és jobbszorzás operátorát (L_D és R_D) mint $L_D, R_D : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ lineáris operátorokat, melyek

$$\begin{aligned} A &\mapsto L_D(A) = DA \\ A &\mapsto R_D(A) = AD \end{aligned}$$

módon hatnak. Nyilvánvaló, hogy az L_D és R_D operátorok pontosan akkor invertálhatók, ha a D mátrix invertálható. Az L_D és R_D operátorokat összefoglaló néven szuper operátoroknak nevezzük. Közvetlen számolással az is igazolható, hogy a szuper operátorok determinánsaira a

$$\det(L_D) = \det(R_D) = \det(D)^n$$

egyenlőség teljesül. A $\mathbb{K}^{n \times n} \cong \text{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \cong (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n$ kanonikus azonosítást elvégezve látható, hogy az L_D és R_D operátorok

$$\begin{aligned} L_D &= D \otimes I \\ R_D &= I \otimes D^* \end{aligned} \tag{A.2}$$

alakban is felírhatók. Az L_D és R_D operátorok segítségével definiált integráltranszformációkban a D mátrixot az $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ azonosítással $2n \times 2n$ -es valós mátrixként kell kezelnünk, ezért az L_D és R_D integráltranszformációk Jacobi determinánsa komplex D esetén $\det(D)^{2n}$.

Az $n \times n$ -es mátrixok vektortere $\mathbb{K}^{n \times n} = \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \oplus \widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ módon direkt összegre bomlik, ahol $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ és $\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ rendre a \mathbb{K} test feletti önadjungált és anti-önadjungált mátrixok alterét jelöli. Figyeljük meg, hogy ha $D \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ önadjungált mátrix, akkor az $L_D \circ R_D$ leképezés a fenti direktösszeg felbontást megőrzi, azaz az $L_D \circ R_D (\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}) \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ és az $L_D \circ R_D (\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ tartalmazások teljesülnek. Ebből következik, hogy az $L_D \circ R_D$ operátor $L_D \circ R_D = (L_D \circ R_D)|_{\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}} \oplus (L_D \circ R_D)|_{\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}}$ direkt összeg alakban áll elő

$$\det(L_D \circ R_D) = \det\left((L_D \circ R_D)|_{\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}}\right) \times \det\left((L_D \circ R_D)|_{\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathbb{K}}^{\text{sa}}}\right). \tag{A.3}$$

A fenti gondolatmenet fontos következménye az alábbi lemma.

A.3.1. Lemma. *Ha $D \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}}$ tetszőleges pozitív definit mátrix, akkor a $(L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}}}$ megszorított lineáris leképezés determinánsa*

$$\det\left((L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}}}\right) = \det(D)^{2-\frac{d}{2}},$$

ahol $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 1, 2$.

Bizonyítás. Valós esetben a 2×2 -es anti-önadjungált mátrixok altere $\widetilde{\mathcal{M}}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Közvetlen számolással meggyőződhetünk róla, hogy

$$L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}}|_{\widetilde{\mathcal{M}}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}} = \det(D)^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

amiből

$$\begin{aligned} \det \left((L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}} \right) &= \frac{\det(L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})}{\det \left((L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\widetilde{\mathcal{M}}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}} \right)} \\ &= \frac{\det(D)^2}{\det(D)^{1/2}} = \det(D)^{3/2} \end{aligned}$$

következik. A komplex esetben pedig a $\widetilde{\mathcal{M}}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}} = i \cdot \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}^{\text{sa}}$ egyenlőség miatt írhatjuk, hogy

$$\det \left((L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}^{\text{sa}}} \right) = \sqrt{\det(L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})} = \det(D).$$

Ezzel a bizonyítás teljes. \square

Ahogy korábban azt már említettük, az

$$(L_{D^{1/2}} \circ R_{D^{1/2}})|_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}}} : \mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \rightarrow \mathcal{M}_{2,\mathbb{K}}^{\text{sa}} \quad (\text{A.4})$$

integrál transzformáció Jacobi determinánsa $\det(D)^{2d-d^2/2}$ lesz, mert a D leképezést 4×4 -es valós mátrixszal reprezentáljuk, mely a $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ vektortéren hat.

A.4. Tenzorszorzat és parciális nyom

Az egyszerűség kedvéért legyen $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ és $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ két véges dimenziós Hilbert-tér.

A.4.1. Tétel. *Izomorfizmus erejéig egyértelműen létezik olyan \mathcal{H} vektortér és $b : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$ bilineáris leképezés, hogy tetszőleges W vektorteret és $L : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow W$ bilineáris leképezést véve egyértelműen megadható olyan $q : \mathcal{H} \rightarrow W$ lineáris leképezés, mellyel a*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{b} & \mathcal{H} \\ & \searrow L & \downarrow \exists! q \\ & & W \end{array}$$

diagram kommutatív.

Bizonyítás. A tétel egy sokkal általánosabb alakjának a bizonyítása a [62] könyv 79. oldalán található meg. \square

A fenti tételben szereplő (\mathcal{H}, b) párt a \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 vektorterek tenzorszorzatának nevezük és – csupán az alaphalmaz jelét kiírva – a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ szimbólummal jelöljük. Tetszőleges $v \in \mathcal{H}_1$ és $w \in \mathcal{H}_2$ vektorokat véve a $b(v, w) \in \mathcal{H}$ vektort $v \otimes w$ szimbólummal jelöljük. A $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenzorszorzat tér $v \otimes w$ alakú elemeit, ahol $v \in \mathcal{H}_1$ és $w \in \mathcal{H}_2$ elemi tenzoroknak nevezzük. Tekintsük azt a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ szeszkvilineáris leképezést, amelyet az elemi tenzorokon a

$$\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

hozzárendeléssel értelmezzük. A $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$ szeszkvilineáris leképezéssel ellátott $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenzorszorzat tér Hilbert-tér. Ezt a Hilbert-teret a $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ és $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ Hilbert-terek tenzorszorzatának hívjuk.

Ha ρ a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-térrel leírt összetett rendszer egy állapota, akkor az

$$\begin{aligned} A &\mapsto \text{tr}((A \otimes \text{id}_{\mathcal{H}_2})\rho) \\ B &\mapsto \text{tr}((\text{id}_{\mathcal{H}_1} \otimes B)\rho) \end{aligned}$$

hozzárendelések folytonos lineáris funkcionálokat határoznak meg a komponens-rendszerek obszervábilisein, ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel értelmében egyértelműen léteznek $\text{tr}_2(\rho) \in \mathcal{D}_{\dim(\mathcal{H}_1)}$ és $\text{tr}_1(\rho) \in \mathcal{D}_{\dim(\mathcal{H}_2)}$ állapotok, melyekre a

$$\begin{aligned} \text{tr}((A \otimes \text{id}_{\mathcal{H}_2})\rho) &= \text{tr}(\text{tr}_2(\rho)A) & \forall A \in \mathcal{M}_{\dim(\mathcal{H}_1)}^{\text{sa}}, \\ \text{tr}((\text{id}_{\mathcal{H}_1} \otimes B)\rho) &= \text{tr}(\text{tr}_1(\rho)B) & \forall B \in \mathcal{M}_{\dim(\mathcal{H}_2)}^{\text{sa}}, \end{aligned}$$

egyenlőségek teljesülnek. A $\text{tr}_1(\rho)$ és $\text{tr}_2(\rho)$ ún. *redukált állapotokat* rendre az első, illetve második komponensre vett *parciális nyomnak* nevezzük. A parciális nyom a klasszikus valószínűségszámításbeli marginális eloszlás képzéssel rokon fogalom.

B. függelék

Valószínűségszámítás és speciális függvények

A következő két lemma a Γ -függvény és β -integrál elemi tulajdonságait foglalja össze. A Γ -függvényről és β -integrálról a [10] könyvben lehet részletesen olvasni.

B.0.1. Lemma. A $\Gamma :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ függvényt a

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

integrállal értelmezzük. A Γ függvény a

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! & \Gamma(1+z) &= z\Gamma(z) & \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(n+1/2) &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} & \Gamma(n/2) &= \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

azonosságoknak tesz eleget, ahol $n \in \mathbb{N}^+$ és $z \in \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. A $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ összefüggés egyszerű parciális integrálással kapható meg:

$$\Gamma(1+z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z),$$

a $\Gamma(1) = 1$ azonosság pedig látszik közvetlenül a Γ -függvény definíciójából. A $\Gamma(1/2)$ értékre vonatkozó összefüggés a Gauss-féle integrál ismeretében helyettesítéses integrálással határozható meg.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^\infty 2e^{-u^2} du$$

A további két összefüggés $\Gamma(1/2)$ és $\Gamma(1)$ ismeretében a $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ rekurziós összefüggést felhasználva teljes indukcióval igazolható. \square

B.0.2. Lemma. Az $a, b \in \mathbb{R}^+$ és $t \in \mathbb{R}^+$ paraméterekkel az

$$\begin{aligned} \int_0^t x^a (t-x)^b dx &= t^{1+a+b} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \\ G_{a,b} := \int_0^1 x^a (1-x^2)^b dx &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(b+1)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+b+\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

egyenlőségek teljesülnek.

Bizonyítás. Mindez egyszerű következménye a

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$$

β -integrálnak. □

B.0.1. Definíció. Az X valószínűségi változó $\beta(\alpha, \beta)$ eloszlású (jel: $X \sim \beta(\alpha, \beta)$), ahol $\alpha, \beta > 0$ valós paraméterek, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

B.0.3. Lemma. Az $\partial B_1(\mathbb{R}^n)$ egységgömb felszíne a

$$F_{n-1} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

formulával fejezhető ki.

Bizonyítás. Az r -sugarú $B_r(\mathbb{R}^n)$ golyó térfogata

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

amiből az $\partial B_1(\mathbb{R}^n)$ egységgömb felszíne $F_{n-1} = \left. \frac{dV_n(r)}{dr} \right|_{r=1}$ módon kapható meg. □

B.0.4. Lemma. Tegyük fel, hogy X gömbszimmetrikus eloszlású abszolút folytonos valószínűségi változó, továbbá $X \in \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$. Ekkor $\|X\|$ sűrűségfüggvénye a

$$f_{\|X\|}(r) = -2r f'_{X_3}(r) \quad r \in (0, 1)$$

formulával fejezhető ki, ahol f_{X_3} jelöli az X z -irányú komponensének sűrűségfüggvényét, melyről feltesszük, hogy $f_{X_3}(1) = f_{X_3}(-1) = 0$.

Bizonyítás. Az X valószínűségi változó gömbszimmetrikus eloszlású, ezért létezik $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, melyre $f_X = g(\|x\|)$ teljesül. Igaz tehát, hogy $f_{\|X\|}(r) = \frac{d}{dr} \mathbb{P}(\|X\| < r) = \frac{d}{dr} 4\pi \int_0^r g(s) s^2 ds = 4\pi g(r) r^2$, ahol $r \in (0, 1)$. Világos, hogy az X_3 komponens szimmetrikus eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumon, ezért elég kiszámítani $f_{X_3}(y)$ -at $y \in (0, 1)$ értékekre. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{X_3}(y) &= \frac{d}{dy} \mathbb{P}(X_3 < y) = -\frac{d}{dy} \mathbb{P}(X_3 \geq y) \\ &= -\frac{d}{dy} \int_0^{2\pi} \int_y^1 \int_0^{\arccos\left(\frac{y}{r}\right)} g(r) r^2 \sin(\phi) d\phi dr d\theta = 2\pi \int_y^1 g(r) r dr, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$f'_{X_3}(r) = -\frac{1}{2r} 4\pi g(r) r^2 = -\frac{1}{2r} f_{\|X\|}(r).$$

A bizonyítás ezzel teljes. □

B.0.5. Lemma (Borel–Cantelli I.). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(F_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ pedig tetszőleges események. Ekkor ha $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(F_k) < \infty$, akkor \mathbb{P} -m.b. csak véges sok F_k esemény következik be.*

Bizonyítás. Az, hogy végtelen sok F_k esemény következik be ekvivalens az $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} F_m$ esemény teljesülésével. Az $\left(\bigcup_{m \geq n} F_m \right)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó, a \mathbb{P} mérték véges, ezért írhatjuk, hogy

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} F_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{m \geq n} F_m \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(F_m) = 0$$

a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(F_k) < \infty$ feltétel miatt. Ezzel a bizonyítás teljes. \square

B.0.6. Lemma (Iterált logaritmus tétel). *Legyen $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ f.a.e. valószínűségi változó sorozat, melyre $\mathbb{E}(X_1) = 0$ és $\mathbb{D}^2(X_1) = 1$ teljesül. Ekkor \mathbb{P} -m.b. teljesülnek a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = -1 \quad \text{és} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1$$

egyenlőségek, ahol $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Bizonyítás. A bizonyítás a [40] könyv huszonkettedik fejezetében található meg. \square

B.0.2. Definíció. *Az $s \in \mathbb{C}$ indexű polilogaritmus függvényt a z komplex változó $|z| < 1$ értékeire a*

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}.$$

hatványsorral definiáljuk.

B.0.3. Definíció. *A $K, E : (-\infty, 1) \rightarrow]0, \infty[$ első és másodfajú teljes elliptikus integrálok a*

$$K(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - z \sin^2(\phi)}} d\phi \quad \text{és} \quad E(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z \sin^2(\phi)} d\phi$$

formulákkal definiáljuk.

C. függelék

A $\tilde{\chi}_1$ és $\tilde{\eta}_1$ függvények

C.1. A 3.2.1. Lemma bizonyítása

Legyen $\Lambda_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\delta} \end{pmatrix}$, ahol $\delta > 0$ és vezessük be a

$$\Delta(\delta) := \text{Vol}(B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2})) - \chi_1(e^{-\delta})$$

defekt függvényt, ami azt méri, hogy a Λ_δ mátrixszal való hasonlósági transzformáció a valós 2×2 -es mátrixok operátornorma egységgömbjének hányad részét képezi a gömbön kívülre. Ennek segítségével a 3.2.1. Lemma az alábbi ekvivalens alakban írható fel.

$$\Delta(\delta) = \frac{16}{3} \int_0^\delta \cosh t - \sinh^2 t \log \left(\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right) dt \quad \delta > 0$$

A fenti formula igazolásához legyen $\delta > 0$ rögzített és tekintsük az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sima sokaság

$$\mathcal{A} = \{X_\pm(r, t, \rho, \phi), X_\pm(r, t, \rho, \phi)\sigma_3\}, \quad (\text{C.1})$$

paraméterezését, ahol

$$\begin{aligned} X_\pm(r, t, \rho, \phi) &= rY_\pm(t, \rho, \phi) \\ Y_\pm(t, \rho, \phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \cos \phi & \pm \frac{\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1}{\sqrt{|\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1|}} e^t \\ \pm \sqrt{|\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1|} e^{-t} & \sqrt{\rho} \sin \phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$t \in \mathbb{R}$, $r, \rho > 0$ és $\phi \in [0, 2\pi)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Λ_δ mátrixszal való hasonlósági transzformáció a paramétertéren egyszerű eltolásként hat, azaz

$$(r, t, \rho, \phi) \xrightarrow{\Lambda_\delta^{-1}(\cdot)\Lambda_\delta} (r, t - \delta, \rho, \phi).$$

A metrikus tenzor 10 független komponense

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= \rho + 2 \cosh 2t \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right| & g_{rt} &= 2r \sinh 2t \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right| \\
g_{r\rho} &= \frac{r}{2} \left(1 + \sin 2\phi \cosh 2t \operatorname{sgn} \left(\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right) \right) & g_{r\phi} &= r\rho \cos 2\phi \cosh 2t \operatorname{sgn} \left(\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right) \\
g_{tt} &= 2r^2 \cosh 2t \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right| & g_{t\rho} &= \frac{r^2}{4} \sin 2\phi \cosh 2t \operatorname{sgn} \left(\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right) \\
g_{t\phi} &= -r^2 \rho \cos 2\phi \sinh 2t \operatorname{sgn} \left(\frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right) & g_{\rho\rho} &= \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\cosh 2t \sin^2 2\phi}{2 \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right|} \right) \\
g_{\rho\phi} &= \frac{r^2 \rho \cosh 2t \sin 4\phi}{8 \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right|} & g_{\phi\phi} &= r^2 \rho \left(1 + \frac{\rho \cosh 2t \cos^2 2\phi}{\left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right|} \right),
\end{aligned}$$

a térfogati forma pedig

$$\sqrt{\det(g(r, t, \rho, \phi))} = r^3.$$

Ezek után írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\chi_1(e^{-\delta}) &= \lambda_4 \left(\mathbf{B}_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}) \cap \Lambda_\delta^{-1} \mathbf{B}_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}) \Lambda_\delta \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{1}_{\{\|X\| < 1 \ \& \ \|\Lambda_\delta^{-1} X \Lambda_\delta\| < 1\}} d\lambda_4(X) \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{r < \min\left(\frac{1}{\|Y_+(t, \rho, \phi)\|}, \frac{1}{\|Y_+(t-\delta, \rho, \phi)\|}\right)} r^3 dr d\rho d\phi dt \\
&\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{r < \min\left(\frac{1}{\|Y_-(t, \rho, \phi)\|}, \frac{1}{\|Y_-(t-\delta, \rho, \phi)\|}\right)} r^3 dr d\rho d\phi dt.
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy $Y_\pm(t, \rho, \phi) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ és a A.1.2. Lemma értelmében

$$\|Y_\pm(t, \rho, \phi)\| = \exp \left(\frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_\pm(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right) \right)$$

írható, ahol

$$\|Y_\pm(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2 = 2 \left(\frac{\rho}{2} + \left| \frac{\rho}{2} \sin 2\phi - 1 \right| \cosh 2t \right),$$

amiből következik, hogy

$$\|Y_\pm(t - \delta, \rho, \phi)\|_{HS}^2 > \|Y_\pm(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2 \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad |t - \delta| > |t| \Leftrightarrow t < \delta/2.$$

Megfigyeléseinket felhasználva az előző integrálon az alábbi átalakításokat végezzük

el

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{1} \left(r < e^{-\frac{1}{2} \cosh^{-1} \max \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2}, \frac{\|Y_{\pm}(t-\delta, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} \right) 4r^3 dr d\rho d\phi dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \max \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2}, \frac{\|Y_{\pm}(t-\delta, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\delta}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_{\pm}(t-\delta, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt + \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt}_{\frac{1}{2} \text{Vol}(B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))} - \underbrace{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt}_{\frac{1}{2} \Delta(\delta)},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban megjelenő defekt függvény

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta(\delta) &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1} \left(\frac{\|Y_{\pm}(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2} \right)} d\rho d\phi dt \\
&= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + |\rho \sin \phi - 1| \cosh 2t)} d\rho d\phi dt \tag{C.3} \\
&= \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + |\rho \sin \phi - 1| \cosh t)} d\rho d\phi dt
\end{aligned}$$

alakba írható.

A belső integrált a felbontjuk az alábbi módon

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + |\rho \sin \phi - 1| \cosh t)} d\rho d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + (\rho \sin \phi + 1) \cosh t)} d\rho d\phi \\
&+ \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \phi}} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho - (\rho \sin \phi - 1) \cosh t)} d\rho + \int_{\frac{1}{\sin \phi}}^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + (\rho \sin \phi - 1) \cosh t)} d\rho \right) d\phi
\end{aligned}$$

és rövid számolás árán kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + |\rho \sin \phi - 1| \cosh t)} d\rho d\phi = \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cosh t \sin \phi} \int_t^\infty e^{-2u} \sinh u du \right) d\phi \\ & + \int_0^\pi \left(\frac{1}{1 - \cosh t \sin \phi} \int_t^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sin \phi}\right)} e^{-2u} \sinh u du + \frac{1}{1 + \cosh t \sin \phi} \int_{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sin \phi}\right)}^\infty e^{-2u} \sinh u du \right) d\phi \\ & = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-t} - \frac{e^{-3t}}{3} - \left(\tan \frac{\phi}{2} - \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\phi}{2} \right) \cosh t \sin \phi \right) \frac{1}{1 - \cosh^2 t \sin^2 \phi} d\phi, \end{aligned}$$

ahol is felhasználtuk az $\exp\left(-\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sin \phi}\right)\right) = \tan \frac{\phi}{2}$ összefüggést.

A $\tan \frac{\phi}{2} = e^{-s}$ helyettesítés elvégzése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{e^{-3t}}{3} - \left(e^{-s} - \frac{e^{-3s}}{3} \right) \frac{\cosh t}{\cosh s} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{\cosh t}{\cosh s}\right)^2} \frac{1}{\cosh s} ds \\ & = \frac{8}{3} \int_0^\infty e^{-t} \cosh s - \frac{\sinh^2 s}{\sinh(t+s)} ds = \frac{8}{3} \left(\cosh t - \sinh^2 t \log \left(\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right) \right). \end{aligned}$$

Ebből a defekt függvényre a bizonyítandó

$$\Delta(\delta) = \frac{16}{3} \int_0^\delta \cosh t - \sinh^2 t \log \left(\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right) dt \quad (\text{C.4})$$

alakot nyerjük. A bizonyítás ezzel teljes. \square

C.2. A 3.2.2. lemma bizonyítása

Tekintsük a $\partial B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ sokaság

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{Y_\pm(t, \rho, \phi)}{\|Y_\pm(t, \rho, \phi)\|}, \frac{Y_\pm(t, \rho, \phi)\sigma_3}{\|Y_\pm(t, \rho, \phi)\sigma_3\|} \right\} \quad (\text{C.5})$$

atlaszát, ahol $Y_\pm(r, t, \rho, \phi)$ a (C.2) formula által adott és $\|\cdot\|$ jelöli a közönséges operátornormát. A térfogat közvetlen számítása a fenti paraméterezésből túlságosan bonyolult lenne.

Az nyilvánvaló, hogy a metrikus tenzor ugyanolyan alakot ölt az \mathcal{A} atlasz minden elemén, ezért elég tekinteni a következő paraméterezést

$$X(t, \rho, \phi) = \frac{Y(t, \rho, \phi)}{\|Y(t, \rho, \phi)\|},$$

ahol $Y(t, \rho, \phi) := Y_+(t, \rho, \phi)$. Tudjuk, hogy $Y(t, \rho, \phi) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ és a A.1.2. Lemma szerint írható, hogy

$$X(t, \rho, \phi) = f(t, \rho, \phi)Y(t, \rho, \phi), \quad (\text{C.6})$$

ahol

$$f(t, \rho, \phi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{\|Y(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2}\right)\right). \quad (\text{C.7})$$

Az ezen paraméterezéshez tartozó g metrikus tenzor az alábbi alakba írható

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2} g_{ij} &= \frac{1}{f^2} \langle \partial_i X, \partial_j X \rangle = (\partial_i \log(f)) (\partial_j \log(f)) \|Y\|_{HS}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\partial_i \log(f)) (\partial_j \|Y\|_{HS}^2) + (\partial_j \log(f)) (\partial_i \|Y\|_{HS}^2)) + \langle \partial_i Y, \partial_j Y \rangle, \end{aligned}$$

ahol \langle, \rangle a közönséges Hilbert–Schmidt skalárszorzatot jelöli. A láncszabályt alkalmazva a metrikus tenzort az

$$g = f^2 \left(G + \left(\|Y\|_{HS}^2 (h'(\|Y\|_{HS}^2))^2 + h'(\|Y\|_{HS}^2) \right) \nabla (\|Y\|_{HS}^2) \nabla (\|Y\|_{HS}^2)^T \right) \quad (\text{C.8})$$

egyszerűbb alakban is fel tudjuk írni, ahol $G_{ij} = \langle \partial_i Y, \partial_j Y \rangle$ és $h(r) = -\frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{r}{2}\right)$.

A mátrix-determináns lemma A.1.4 értelmében írható, hogy

$$\begin{aligned} \det(g) &= f^6 \times \det(G) \\ &\times \left(1 + \left(\|Y\|_{HS}^2 (h'(\|Y\|_{HS}^2))^2 + h'(\|Y\|_{HS}^2) \right) \nabla (\|Y\|_{HS}^2)^T G^{-1} \nabla (\|Y\|_{HS}^2) \right) \end{aligned}$$

ahol már az egyes tényezők kiszámítása egyszerű feladat. A metrikus tenzor determinánására pedig a következőt kapjuk

$$\sqrt{\det(g)} = f^4 = \exp\left(-2 \cosh^{-1}\left(\frac{\|Y\|_{HS}^2}{2}\right)\right). \quad (\text{C.9})$$

Using the notations introduced in

Az Appendix C.1 pontban bevezetett jelöléseinket használva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1(e^{-\delta}) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2 \cosh^{-1}\left(\frac{\|Y(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2}\right)}}{\mathrm{Vol}(\partial B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))} \mathbf{1}_{\|Y(t-\delta, \rho, \phi)\| < \|Y(t, \rho, \phi)\|} d\rho d\phi dt \\ &= \frac{4}{\mathrm{Vol}(\partial B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}\left(\frac{\|Y(t, \rho, \phi)\|_{HS}^2}{2}\right)} d\rho d\phi dt \\ &= 1 - \underbrace{\frac{4}{\mathrm{Vol}(\partial B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \cosh^{-1}(\rho + |\rho \sin \phi - 1| \cosh t)} d\rho d\phi dt}_{\frac{1}{2} \Delta(\delta) \text{ (See (C.3).)}} \end{aligned}$$

ahol az alábbi összefüggéseket használtuk fel.

$$\begin{aligned} \Lambda_\delta^{-1} Y(t, \rho, \phi) \Lambda_\delta &= Y(t - \delta, \rho, \phi) \\ \|Y(t - \delta, \rho, \phi)\| < \|Y(t, \rho, \phi)\| &\Leftrightarrow t > \delta/2 \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\tilde{\eta}_1(\varepsilon) = 1 - \frac{2\text{Vol}(B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))}{\text{Vol}(\partial B_1(\mathbb{R}^{2 \times 2}))} (1 - \tilde{\chi}_1(\varepsilon)),$$

amiből következik, hogy $\tilde{\eta}_1(\varepsilon) = \tilde{\chi}_1(\varepsilon)$ teljesül $\varepsilon \in [0, 1]$ -re, hiszen $\tilde{\eta}_1(0) = \tilde{\chi}_1(0) = 0$ és $\tilde{\eta}_1(1) = \tilde{\chi}_1(1) = 1$. A bizonyítás ezzel teljes. \square

D. függelék

A $\tilde{\chi}_2$ függvény

A $\tilde{\chi}_1$ függvény meghatározásának útját követve a komplex esetre szintén definiálhatjuk a

$$\Delta(\delta) := \text{Vol}(\mathbb{B}_1(\mathbb{C}^{2 \times 2})) - \chi_2(e^{-\delta})$$

defektus függvényt. Legyen $\delta > 0$ rögzített és tekintsük a 2×2 -es komplex mátrixok

$$X(r, \xi, t, \tau, s, \rho, \mu, \nu) = r e^{i\xi} Y(t, \tau, s, \rho, \mu, \nu)$$

$$Y(t, \tau, s, \rho, \mu, \nu) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{s + \frac{\mu + \nu}{2} i} & \frac{\rho e^{\mu i} - 1}{\sqrt{|\rho e^{\mu i} - 1|}} e^{t + \tau i} \\ \sqrt{|\rho e^{\mu i} - 1|} e^{-t - \tau i} & \sqrt{\rho} e^{-s + \frac{\mu - \nu}{2} i} \end{pmatrix}$$

paraméterezését, ahol $t, s \in \mathbb{R}$, $r, \rho > 0$ és $\xi, \tau, \mu, \nu \in [0, 2\pi)$.

A fenti paraméterezés előnye, hogy – csakúgy mint a valós esetben – a Λ_δ mátrixszal végzett hasonlósági transzformáció a paraméterterén eltolásként jelenik meg, azaz

$$(r, \xi, t, \tau, s, \rho, \mu, \nu) \xrightarrow{\Lambda_\delta^{-1}(\cdot)\Lambda_\delta} (r, \xi, t - \delta, \tau, s, \rho, \mu, \nu).$$

A paraméterezéshez tartozó térfogati formát Maple komputer algebra rendszer segítségével számítottuk ki. Azt kaptuk, hogy $\sqrt{\det(g(r, \xi, t, \tau, s, \rho, \mu, \nu))} = 2\rho r^7$.

Írhatjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} \mu(\delta) &= \lambda_8(\mathbb{B}_1(\mathbb{C}^{2 \times 2}) \cap \Lambda_\delta^{-1} \mathbb{B}_1(\mathbb{C}^{2 \times 2}) \Lambda_\delta) \\ &= \int_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \mathbf{1}_{\{\|X\| < 1 \ \& \ \|\Lambda_\delta^{-1} X \Lambda_\delta\| < 1\}} d\lambda_8(X) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{]0, \infty[^2} \int_{[0, 2\pi)^4} \mathbf{1}_{r < \min\left(\frac{1}{\|Y\|}, \frac{1}{\|\Lambda_\delta^{-1} Y \Lambda_\delta\|}\right)} 2\rho r^7 d\lambda_4(\xi, \tau, \mu, \nu) d\lambda_2(r, \rho) d\lambda_2(t, s). \end{aligned}$$

Világos, hogy $Y(t, \tau, s, \rho, \mu, \nu) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ és az A.1.2. lemma értelmében $\|Y\| = \exp\left(\frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{\|Y\|_{HS}^2}{2}\right)\right)$, ahol

$$\|Y\|_{HS}^2 = 2(\rho \cosh 2s + |\rho e^{\mu i} - 1| \cosh 2t).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\|Y\|_{HS}^2 < \|\Lambda_\delta^{-1} Y \Lambda_\delta\|_{HS}^2$ pontosan akkor teljesül, ha a $|t - \delta| > |t| \Leftrightarrow t < \delta/2$ egyenlőtlenség áll fenn.

Eddigi észrevételeinket kiegészítve azzal, hogy az integrandus csupán r, ρ, s, t és μ függvénye, a fenti integrál

$$\begin{aligned} & 2\pi^3 \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/2, \delta/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-4 \cosh^{-1}(\rho \cosh 2s + |\rho e^{\mu i} - 1| \cosh 2t)} \rho \, d\mu \, d\rho \, ds \, dt = \\ & = \text{Vol}(B_1(\mathbb{C}^{2 \times 2})) - \Delta(\delta) \end{aligned}$$

alakra hozható, ahol a $\Delta(\delta)$ defekt függvény

$$\Delta(\delta) = 2\pi^3 \int_0^{\delta} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-4 \cosh^{-1}(\rho \cosh s + |\rho e^{\mu i} - 1| \cosh t)} \rho \, d\mu \, d\rho \, ds \, dt.$$

módon fejezhető ki.

E. függelék

A 4.3.1. lemma bizonyítása

```
> # Determinant of Quantum channel transformations.

> restart;

> with(LinearAlgebra):

> assume(x,real,y,real,z,real,a,real,b1,real,b2,real):
> assume(c1,real,c2,real,d1,real,d2,real,e1,real,e2,real):
> assume(f,real,g1,real,g2,real);

> # A parametric channel:
> A:=Matrix(4,4,[ [a,b1+I*b2,c1+I*c2,d1+I*d2], [b1-I*b2,1-a,e1+I*e2,-c1-I*
> c2],
> [c1-I*c2,e1-I*e2,f,g1+I*g2], [d1-I*d2,-c1+I*c2,g1-I*g2,1-f]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a^{\sim} & b1^{\sim} + b2^{\sim} I & c1^{\sim} + c2^{\sim} I & d1^{\sim} + d2^{\sim} I \\ b1^{\sim} - b2^{\sim} I & 1 - a^{\sim} & e1^{\sim} + e2^{\sim} I & -c1^{\sim} - c2^{\sim} I \\ c1^{\sim} - c2^{\sim} I & e1^{\sim} - e2^{\sim} I & f^{\sim} & g1^{\sim} + g2^{\sim} I \\ d1^{\sim} - d2^{\sim} I & -c1^{\sim} + c2^{\sim} I & g1^{\sim} - g2^{\sim} I & 1 - f^{\sim} \end{bmatrix}$$

```
> # And its submatrices:
> A11:=SubMatrix(A, 1 .. 2, 1 .. 2);
> A12:=SubMatrix(A, 1 .. 2, 3 .. 4);
> A21:=SubMatrix(A, 3 .. 4, 1 .. 2);
> A22:=SubMatrix(A, 3 .. 4, 3 .. 4);
```

$$A11 := \begin{bmatrix} a^{\sim} & b1^{\sim} + b2^{\sim} I \\ b1^{\sim} - b2^{\sim} I & 1 - a^{\sim} \end{bmatrix}$$

$$A12 := \begin{bmatrix} c1^{\sim} + c2^{\sim} I & d1^{\sim} + d2^{\sim} I \\ e1^{\sim} + e2^{\sim} I & -c1^{\sim} - c2^{\sim} I \end{bmatrix}$$

$$A21 := \begin{bmatrix} c1^{\sim} - c2^{\sim} I & e1^{\sim} - e2^{\sim} I \\ d1^{\sim} - d2^{\sim} I & -c1^{\sim} + c2^{\sim} I \end{bmatrix}$$

$$A22 := \begin{bmatrix} f^{\sim} & g1^{\sim} + g2^{\sim} I \\ g1^{\sim} - g2^{\sim} I & 1 - f^{\sim} \end{bmatrix}$$

```

> # Rotation matrices:
> Rotation[1]:=Matrix(3,3,[[cos(alpha),-sin(alpha),0],[sin(alpha),cos(alpha),0],[0,0,1]]);
> Rotation[2]:=Matrix(3,3,[[1,0,0],[0,cos(alpha),-sin(alpha)],[0,sin(alpha),cos(alpha)]]);
> Rotation[3]:=Matrix(3,3,[[cos(alpha),0,-sin(alpha)],[0,1,0],[sin(alpha),0,cos(alpha)]]);

```

$$Rotation_1 := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rotation_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$Rotation_3 := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```

> # Consider an arbitrary Bloch vector:
> Bv:=Vector(3,[x,y,z]);

```

$$Bv := \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

```

> # The after applying the quantum channel the Bloch vector changes:
> Qa:=1/2*((1+Bv[3])*A11+(1-Bv[3])*A22+(Bv[1]+I*Bv[2])*A12+(Bv[1]-I*Bv[2])*A21):
> xv:=expand(2*Re(Qa[1,2]));
> yv:=expand(2*Im(Qa[1,2]));
> zv:=expand(2*Qa[1,1]-1);
> ABv:=Vector(3,[xv,yv,zv]);

```

$$ABv := \begin{bmatrix} b1\tilde{z} + d1\tilde{x} - d2\tilde{y} + e1\tilde{x} - e2\tilde{y} - g1\tilde{z} + b1 + g1 \\ b2\tilde{z} + d1\tilde{y} + d2\tilde{x} - e1\tilde{y} - e2\tilde{x} - g2\tilde{z} + b2 + g2 \\ a\tilde{z} + 2c1\tilde{x} - 2c2\tilde{y} - f\tilde{z} + a + f - 1 \end{bmatrix}$$

```

> # Let us define the following transformation matrix and vector:
> T:=Transpose(Matrix(3,3,[[coeff(xv,x,1),coeff(yv,x,1),coeff(zv,x,1)],
> [coeff(xv,y,1),coeff(yv,y,1),coeff(zv,y,1)], [coeff(xv,z,1),coeff(yv,z,1),coeff(zv,z,1)]]));
> S:=Vector(3,[b1+g1, b2+g2, a+f-1]);

```

$$T := \begin{bmatrix} d1 + e1 & -d2 - e2 & b1 - g1 \\ d2 - e2 & d1 - e1 & b2 - g2 \\ 2c1 & -2c2 & a - f \end{bmatrix}$$

$$S := \begin{bmatrix} b1 + g1 \\ b2 + g2 \\ a + f - 1 \end{bmatrix}$$

```

> # Check that the channel acts like Bv -> T.Bv+S:
> simplify(T.Bv+S-ABv);

```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

> # CHANNEL' = ROTATION.CHANNEL
> # Applying the quantum channel after rotating the Bloch vector can be
> described by one new channel.
> # Original channel parameters
> l1list:=[a,f,b1,b2,c1,c2,d1,d2,e1,e2,g1,g2]:
> # New channel parameters
> l2list:=[av,fv,b1v,b2v,c1v,c2v,d1v,d2v,e1v,e2v,g1v,g2v]:
> for ee from 1 to 3 do
>   Tm[ee]:=Rotation[ee].T:
>   Sm[ee]:=Rotation[ee].S:
>   Tn:=Tm[ee]:
>   Sn:=Sm[ee]:
> # The parameters of the new channel are the following:
> av:=1/2*(Sn[3]+1+Tn[3, 3]):
> fv:=Sn[3]+1-av:
> b1v:=simplify((Tn[1,3]+Sn[1])*(1/2)):
> b2v:=simplify((Tn[2,3]+Sn[2])*(1/2)):
> c1v:=(1/2)*Tn[3,1]:
> c2v:=- (1/2)*Tn[3,2]:
> d1v:=simplify((Tn[1,1]+Tn[2,2])*(1/2)):
> d2v:=simplify((Tn[2,1]-Tn[1,2])*(1/2)):
> e1v:=simplify((Tn[1,1]-Tn[2,2])*(1/2)):
> e2v:=-simplify((Tn[1,2]+Tn[2,1])*(1/2)):
> g1v:=simplify((-Tn[1,3]+Sn[1])*(1/2)):
> g2v:=simplify((-Tn[2,3]+Sn[2])*(1/2)):
> # The transformation which describes the original channel -> new
> channel map:
> DM:=Matrix(12,12,0):
> for aa to 12 do
>   for bb to 12 do
>     DM[aa,bb]:=diff(l2list[aa],l1list[bb]):
>   end do:
> end do:
> # Let us compute the determenint of this map:
> print("Rotation:",ee," Determinant:",simplify(Determinant(DM))):
> end do:
    „Rotation:”, 1, „ Determinant:”, 1
    „Rotation:”, 2, „ Determinant:”, 1
    „Rotation:”, 3, „ Determinant:”, 1

```

```

> # CHANNEL' = CANNEL.ROTATION
> # Rotating the Bloch vector and after applying the quantum channel can
> be described by one new channel.
> # Original channel parameters
> l1list:=[a,f,b1,b2,c1,c2,d1,d2,e1,e2,g1,g2]:
> # New channel parameters
> l2list:=[av,fv,b1v,b2v,c1v,c2v,d1v,d2v,e1v,e2v,g1v,g2v]:
> for ee from 1 to 3 do
>   Tm[ee]:=T.Rotation[ee]:
>   Sm[ee]:=S:
>   Tn:=Tm[ee]:
>   Sn:=Sm[ee]:
>   # The parameters of the new channel are the following:
>   av:=1/2*(Sn[3]+1+Tn[3, 3]):
>   fv:=Sn[3]+1-av:
>   b1v:=simplify((Tn[1,3]+Sn[1])*(1/2)):
>   b2v:=simplify((Tn[2,3]+Sn[2])*(1/2)):
>   c1v:=(1/2)*Tn[3,1]:
>   c2v:=- (1/2)*Tn[3,2]:
>   d1v:=simplify((Tn[1,1]+Tn[2,2])*(1/2)):
>   d2v:=simplify((Tn[2,1]-Tn[1,2])*(1/2)):
>   e1v:=simplify((Tn[1,1]-Tn[2,2])*(1/2)):
>   e2v:=-simplify((Tn[1,2]+Tn[2,1])*(1/2)):
>   g1v:=simplify((-Tn[1,3]+Sn[1])*(1/2)):
>   g2v:=simplify((-Tn[2,3]+Sn[2])*(1/2)):
>   # The transformation which describes the original channel -> new
>   channel:
>   DM:=Matrix(12,12,0):
>   for aa to 12 do
>     for bb to 12 do
>       DM[aa,bb]:=diff(l2list[aa],l1list[bb]):
>     end do:
>   end do:
>   # Let us compute the determenint of this map:
>   print("Rotation:",ee,"   Determinant:",simplify(Determinant(DM))):
> end do:
      „Rotation:”, 1, „   Determinant:”, 1
      „Rotation:”, 2, „   Determinant:”, 1
      „Rotation:”, 3, „   Determinant:”, 1

```