MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Szinuszillesztő algoritmusok numerikus problémái

Doktori (PhD) értekezés tézisfüzete

Szerző

Renczes Balázs

Témavezető

Kollár István, DSc

2017

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

1117 Budapest, Magyar Tudósok körútja 2.

Email: renczes@mit.bme.hu

1 Előzmények és célkitűzések

Az értekezés szinuszillesztő algoritmusok lebegőpontos aritmetika alkalmazásával történő megvalósításának numerikus problémáival foglalkozik. Szinuszillesztő algoritmusokat a villamosmérnöki tudomány számos területén alkalmaznak. Szinuszos jellel lehet jellemezni például a villamosenergia-rendszer szolgáltatási minőségét, illetve a szinuszjel-illesztés lehetőséget ad egy impedancia abszolút értékének és fázisának meghatározására is. Egyike a legfontosabb alkalmazási területeknek az analóg-digitális átalakítók, illetve a digitalizáló hullámforma-felvevő egységek tesztelése, melyeket az IEEE 1241-es, illetve 1057-es szabványa szabályoz [1][2].

Egy általános illesztett szinuszjel tetszőleges kezdőfázissal és ofszettel négy paraméterrel adható meg, az alábbi egyenlet szerint:

$$y_k = A \cdot \cos(2\pi f t_k) + B \cdot \sin(2\pi f t_k) + \mathrm{C} \ , \tag{T.1}$$

ahol A, B és C rendre a koszinuszos, szinuszos és ofszet (DC) összetevőket jelölik, míg y_k a k-dik minta az illesztett szinuszban. A jelfrekvenciát f jelöli, míg t_k az az időpont, amelyben y_k kiértékelésre kerül. Az értekezésben egyenletes mintavételezést feltételezek, mely során a mintavételi időpontok a

$$t_k = k/f_s\,, \qquad k = 1, \dots, N \tag{T.2}$$

képlettel számíthatók, ahol f_s a mintavételi frekvencia, N pedig a minták száma. Továbbá feltételezem, hogy minden mintát felhasználunk az illesztéshez. Egyenletes mintavételezéssel a szinuszjel leírása az alábbiak szerint módosítható:

$$\begin{gathered} y_k = A \cdot \cos(\vartheta k) + B \cdot \sin(\vartheta k) + \mathrm{C} \\ \vartheta = 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{\omega}{f_s} \end{gathered} \tag{T.3}$$

ahol ω a jel körfrekvenciája, valamint ϑ jelöli a (mintavételi frekvenciához képest) relatív körfrekvenciát.

A legelterjedtebben használt szinuszillesztő módszer a legkisebb négyzetes (least squares, LS) illesztés, mely az illesztett és a mért szinusz közötti négyzetes hibát minimalizálja. Ezt a módszert írja elő [1] és [2]. Az LS-módszer költségfüggvénye az alábbi:

$$\mathrm{CF_{LS}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - y_k)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\boldsymbol{T}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ , \tag{T.4}$$

ahol **x** a mért, **y** pedig az illesztett szinuszhullám.

Amennyiben ϑ paraméter ismert, csak *A*, *B*, és *C* paraméterek meghatározása szükséges. Ez a háromparaméteres LS-illesztés (3PLS). Amennyiben azonban ϑ értéke ismeretlen, mind a négy paramétert becsülni kell a négyparaméteres LS-eljárással (4PLS). Míg a 3PLS-eljárás paramétereiben lineáris, és egy lépésben megoldható, addig a 4PLS-eljárás nemlineáris ϑ-ban. Ennek következtében a 4PLS-probléma megoldásához iteratív módszer szükséges.

Mind a három- mind a négyparaméteres LS-illesztés számításához a Moore-Penrose-féle pszeudo-inverz kiértékelése szükséges [3]:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}^{+}\mathbf{x} \ , \tag{T.5}$$

ahol $\boldsymbol{\theta}$ a becsült paramétervektor, **D** a három- vagy négyparaméteres illesztés rendszermátrixa, '+' pedig a pszeudoinverz-képzés operátora. Mivel a 3PLS egy lépésben megoldható, így ezen eljárás rendszermátrixát $\mathbf{D_0}$-lal jelöljük. Ezzel szemben a 4PLS-eljárás iteratív. Ezen módszer rendszermátrixát az *i*-edik lépésben $\mathbf{D}_i$ jelöli. A Moore-Penrose pszeudo-inverz közvetlenül számítható a

$$\mathbf{D}^{+} = (\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \tag{T.6}$$

képlet segítségével, azonban ez a számítási mód numerikus szempontból instabil lehet, amennyiben **D** mátrix kondíciószáma nagy ($> 10^4$ egyszeres pontosságú (single precision), $> 10^8$ duplapontosságú (double precision) számábrázolás esetén). A kondíciószám a rendszermátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének aránya. Ez az érték felülről korlátozza a lineáris egyenletrendszer megoldásának perturbációkra való érzékenységét. Az illesztés során a

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x} \tag{T.7}$$

egyenletrendszert kell LS-értelemben megoldani. **D** mátrix kondíciószáma az alábbi felső korlátot adja a megoldás hibájára [3]:

$$\frac{\|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon} - \boldsymbol{\theta}\|_2}{\|\boldsymbol{\theta}\|_2} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\|\mathbf{D}_{\varepsilon}\|_2 - \|\mathbf{D}\|_2}{\|\mathbf{D}\|_2} + \frac{\|\mathbf{x}_{\varepsilon} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \right\} + O(\varepsilon^2) \tag{T.8}$$

ahol $\mathbf{D}_{\varepsilon}$ mátrixot **D** mátrix perturbációjával kapjuk, $\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon}$ pedig **D** és **x** perturbációjának hatására kapott hibás megoldás. A kondíciószám legrosszabb esetben felnagyítja ezen perturbációk értékét, melyek például kerekítési hibákból származhatnak. Lebegőpontos számábrázolás esetén a perturbáció mértékét (ε) a számábrázolás relatív hibája (*eps*) adja.

A közvetlen pszeudo-inverz kiértékelés azért válhat numerikusan instabillá, mert a kiértékelés során az algoritmushoz rendelhető kondíciószám **D** mátrix kondíciószámának négyzete. Ennek eredményeként előfordulhat, hogy a 4PLS-illesztés nem konvergál. A probléma megoldásához dekompozíciós eljárások, például szinguláris érték dekompozíció (SVD), vagy QR-dekompozíció alkalmazhatók [3]. Ezzel szemben amennyiben **D** mátrix kondíciószáma kicsi (<10), a direkt pszeudoinverz-kiértékelés numerikus problémák nélkül számítható. Ezen módszer előnye, hogy számítási igénye kisebb, mint a dekompozíciós eljárásoké.

A mintaszám növelése esetén a 3PLS-eljárás (mely a koszinuszos, szinuszos, valamint ofszet-összetevőket becsüli) jól kondicionált marad, míg a jelfrekvenciát is becslő 4PLS-illesztéshez rendelhető kondíciószám a minták számával arányosan növekszik. A kutatási területen korábban végzett kutatások megmutatták, hogy megfelelő skálázással, bizonyos feltételek betartása esetén a 4PLS-hez rendelhető kondíciószám 15 alá csökkenthető [6]. Azonban pontos felső korlátok sem a három- sem a négyparaméteres eljárás kondíciószámára nem álltak rendelkezésre.

A számítógépekben a számításokat többnyire lebegőpontos aritmetika segítségével végezzük el [4]. Ez a számábrázolás a számokat

$$Sign \cdot M \cdot 2^{E} \tag{T.9}$$

formában ábrázolja, ahol *Sign* az előjel, *M* a mantissza és *E* az exponens. A lebegőpontos számábrázolás ábrázolható tartománya jóval szélesebb, mint a fixpontos számábrázolásé, emellett a relatív számábrázolási hiba közelítőleg független a szám abszolút értékétől. Ennek következtében azonban minél nagyobb az ábrázolandó abszolút értéke szám, annál nagyobb a számábrázolás abszolút hibája.

Az értekezés az alábbi célokat tűzte maga elé:

- A legkisebb négyzetes szinuszillesztő algoritmusok lebegőpontos számábrázoláshoz kapcsolódó, numerikus szempontból gyenge pontjainak felderítése. Javaslattétel módszerekre, melyek segítségével ezen numerikus pontatlanságok jelentősen csökkenthetők.
- A három- és négyparaméteres LS-illesztésekhez rendelhető kondíciószámok felső korlátjának meghatározása. Javaslattétel módszerekre, melyek biztosítják, hogy ezen kondíciószámok kis értékűek maradnak, melynek következtében a közvetlen pszeudoinverz-számítás során fellépő numerikus pontatlanságok csökkenthetők.

Bár az értekezésben található analízisek a LS-illesztés esetét vizsgálják, megmutatható, hogy az eredmények alkalmazhatók a maximum likelihood szinuszillesztés során is [5].

2 Vizsgálati módszerek

A disszertáció fő célkitűzése a lebegőpontos aritmetikával implementált szinuszillesztő algoritmusok numerikus szempontból gyenge pontjainak meghatározása, valamint hatékony, numerikus pontosságot növelő algoritmusok kidolgozása.

2.1 Fázisszámítás hibája

A számítógépekben a számítások elvégzéséhez legelterjedtebben lebegőpontos számábrázolást alkalmaznak. Ezen számábrázolás tulajdonsága, hogy relatív hibája korlátozott, azonban abszolút hibája a szám abszolút értékének növekedésével növekszik. A szinuszillesztő algoritmusok kiértékeléséhez a mintavételi időpontokban ki kell számítani a pillanatnyi fázis értékét:

$$\varphi_k = \vartheta k = 2\pi \frac{f}{f_s} k \ . \tag{T.10}$$

Ez az érték k növekedésével szintén növekszik, ennek következtében a mintavételezett regisztrátum végén az illesztett szinusz pillanatnyi fázisához tartozó kerekítési hiba maximális értéke jóval nagyobb, mint a regisztrátum elején, amennyiben a mintavételezett periódusok száma (J) nagy értéket vesz fel ($J > 10$).

A kerekítési hibák kumulálódása miatt az egyes költségfüggvény-minimalizáló algoritmusok eredményében a számábrázolás hibájánál jóval nagyobb eltérések mutatkozhatnak, melyek következtében a költségfüggvény várható értéke nő, valamint az optimum közelében a költségfüggvény értékek úgy viselkednek, mintha additív zaj terhelné őket.

A disszertációban megmutatom, hogy a pontatlan fáziskiértékelés következtében a számítógépes számábrázolás kerekítési hibájánál jóval (akár 4-5 nagyságrenddel) nagyobb hibák is előfordulhatnak a feldolgozás során. A kerekítési hibákat fehér zajnak feltételeztem, mely a $(-LSB/2\,; LSB/2]$ tartományban egyenletesen oszlik el, ahol LSB a számábrázolás legkisebb helyiértékű bitje, vagyis a számábrázolás felbontása. Bebizonyítom, hogy a feltételezések érvényességi tartományán belül mind a költségfüggvény várható értéke, mind a varianciája megnő a pontatlan fáziskiértékelés következtében. Megmutatom, hogy a várható érték és a variancia növekedése arányos a minták számával, valamint négyzetesen arányos J-vel, illetve a számábrázolás relatív számábrázolási hibájával (eps). Vagyis a minták számának és a periódusok számának növelése, valamint a számábrázolás pontosságának csökkentése megnöveli a költségfüggvény várható értékét és varianciáját.

A probléma forrásának feltárása mellett hatékony javítási módszert is adok, melynek segítségével a fáziskiértékelés numerikus pontossága növelhető. Az algoritmus futása során kihasználom, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvények periodikusak, vagyis

$$\sin(\varphi_k) = \sin(2\pi n + \varphi_k) \quad n \in \mathbb{Z} \ . \tag{T.11}$$

Ennek következtében a fázisinformáció meghatározásához elegendő a fázis törtrészének kiszámítása (T.10)-ből. A javasolt módszer szerint a fázisinformációt a $2\pi \left\langle \frac{f}{fs} k \right\rangle$ képlettel számoljuk, ahol $\langle \cdot \rangle$ a legközelebbi egész szám felé való kerekítés után maradó törtrészt jelöli. A számítás során $\frac{f}{f_s} k$, valamint $\left\langle \frac{f}{fs} k \right\rangle$ megnövelt pontossággal kerül kiértékelésre, majd a törtrész kiértékelése után az eredményt az eredeti korlátozott pontosságon tároljuk. A megnövelt pontosságú kiértékelésre azért van szükség, mert $\frac{f}{f_s} k$ standard módon való kiszámítása esetén az eredmény tárolásakor a fellépő kerekítési hibák miatt elvesztenénk a pontos fázisinformációt. A megnövelt pontosságú fáziskiértékelés felhasználásával $\left\langle \frac{f}{fs} k \right\rangle$-t a $(-0.5; 0.5]$ tartományra képezzük. Ily módon a fázis értékét is korlátozzuk a $(-\pi; \pi]$ tartományra. Mivel a lebegőpontos számábrázolás kerekítési hibája közelítőleg arányos az ábrázolt szám abszolút értékével, ezen korlátozással a kerekítési hiba értékét jelentősen lecsökkentettük. A módszer előnye, hogy csak a törtrész kiértékelése történik megnövelt pontossággal, vagyis csak az algoritmus numerikus szempontból gyenge pontján történik beavatkozás – a módszer többi része az eredeti korlátozott pontossággal végrehajtható.

Az illesztés hibáját eredményezheti az összegzés naiv megközelítése is, mely során egy növekvő összeghez adjuk hozzá a következő tagot. Ezen hiba hatása a költségfüggvényre jóval kisebb, mint a fáziskiértékelésé, azonban amennyiben szükséges, mértéke jelentősen csökkenthető páros összegzés (pairwise summation) alkalmazásával [7].

2.2 Kondíciószámok felső korlátja

A disszertációban meghatározom a három- és négyparaméteres LS-illesztéshez rendelhető kondíciószámok felső korlátját. Bebizonyítom, hogy bizonyos feltételezések teljesülése esetén ezen kondíciószámok kis értékűre csökkenthetők (< 10), melynek következtében a közvetlen pszeudoinverz-számítás numerikus problémák nélkül alkalmazhatóvá válik.

Bebizonyítom, hogy a 3PLS-eljáráshoz rendelhető kondíciószám durván fordítottan arányos a mintavételezett periódusok számával. Ehhez a sajátértékekre vonatkozó perturbáció-elméletet alkalmazom [8]. A 3PLS kondíciószámát meghatározó mátrix $(\mathbf{D}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_0)$ az alábbi diagonális mátrixszal közelíthető:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} N/2 & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}. \tag{T.12}$$

A hibatagokat **E** mátrix reprezentálja. Ezen **E** mátrix elemeire felső korlátot adok a disszertációban. A sajátértékekre vonatkozó perturbáció-elmélet alkalmazásával

$$|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq \|\mathbf{E}_b\|_F \ , \tag{T.13}$$

ahol $\mathbf{E}_b$ korlátokat tartalmaz **E** mátrix elemeire, $\|\cdot\|_F$ a Frobenius-normát jelöli, λ_i **H** mátrix i-dik sajátértéke, $\tilde{\lambda}_i$ pedig $\mathbf{D}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_0$ i-dik sajátértéke. Az értekezésben bebizonyítom, hogy ugyanez a felső korlát adható meg a szinguláris értékekre is:

$$|s_i - \tilde{s}_i| \leq \|\mathbf{E}_b\|_F \ , \tag{T.14}$$

ahol s_i **H** mátrix i-dik szinguláris értéke, $\tilde{s}_i$ pedig $\mathbf{D}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_0$ i-dik szinguláris értéke. Bebizonyítom, hogy amennyiben

$$J/N \leq 1/4 \tag{T.15}$$

egyenlőtlenség fennáll, vagyis legalább négy mintát veszünk egy periódusból, akkor a 3PLS-hez rendelhető kondíciószámra felső korlát adható: kisebb, mint 11, ha $J > 2$, továbbá J-t 4 fölé növelve a kondíciószám 3,8 alá csökken. A meghatározott felső korlát durván fordítottan arányos a mintavételezett periódusok számával.

Egy egyszerű módosítás alkalmazásával a 4PLS-módszer kondíciószámát meghatározó mátrix $\left(\mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i\right)$ is közelítőleg diagonálissá tehető. A vizsgált illesztési algoritmusok futtatása során általában azt feltételezzük, hogy a mérés $t = 0$ időpontban kezdődött, azonban mivel az adatok feldolgozása a teljes mintavételezés lezajlása után történik, $t = 0$ időpontnak nincs fizikai jelentése, így szabadon megválasztható. Az időtengely-paraméterek módosításával $t = 0$ időpontot úgy állítottam be, hogy az a mintavételezett regisztrátum közepére essen, vagyis a minták mintavételi időpontjai ezen középpontra szimmetrikusan helyezkednek el. Formálisan egy ofszetet vonok ki a minták sorszámából (k-ból). A szükséges ofszet (l) a következő képlettel számítható:

$$l = (N+1)/2 \ , \tag{T.16}$$

az új pillanatnyi fázis pedig

$$\varphi_{k-l} = \vartheta(k-l) \ . \tag{T.17}$$

Jóllehet ez a módosítás megváltoztatja a becsülendő paramétereket, azonban nincs hatása az illesztett szinuszra, mint időtartománybeli jelre. A módszer közelítőleg diagonálissá teszi a módosított 4PLS-mátrixot, $\left(\mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i\right)'$-t. A közelítő mátrix az alábbi:

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} N/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 S_1 \end{pmatrix} \qquad S_1 = \frac{N^3 - N}{24} \ . \tag{T.18}$$

Bebizonyítom, hogy amennyiben a módosított 4PLS-rendszermátrix ($\mathbf{D}_i'$) harmadik oszlopát $\sqrt{2}$-vel, negyedik oszlopát $R\sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$-vel skálázzuk (osztjuk), úgy J növelésével a skálázott $\left(\mathbf{D}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i\right)'$ mátrix kondíciószáma aszimptotikusan eléri elvi minimumát (R a vizsgált szinuszjel aggregált amplitúdója, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$).

Az időtengely-paramétereket a 3PLS-eljárásban is módosítani lehet. Ekkor bebizonyítom, hogy amennyiben a rendszermátrix harmadik oszlopát $\sqrt{2}$-vel skálázzuk, a 3PLS kondíciószámának elvi minimuma szintén aszimptotikusan elérhető.

3 Új tudományos állítások – Tézisek

1. Tézis – Megmutattam, hogy a lebegőpontos számábrázolásból adódóan az illesztett szinusz pillanatnyi fázisának kiértékelését a minta sorszámával növekvő kerekítési hiba terheli, mely növeli a legkisebb négyzetes (LS) algoritmus költségfüggvényének várható értékét és varianciáját. Kiszámítottam a variancia és a várható érték növekedését az alábbi feltételezésekkel: a kerekítési hibák függetlenek és egyenletes eloszlásúak, a szinuszhullámot befolyásoló, additív zajként modellezett hatások függetlenek és egyenletes vagy Gauss-eloszlásúak.

1.1 Megmutattam, hogy az LS költségfüggvény variancianövekedésének gyakorlati alkalmazásokban előforduló domináns tagja, valamint az LS költségfüggvény várható értékének növekedése a lebegőpontos számábrázolás kerekítési hibájánál több nagyságrenddel nagyobb lehet. A feltételezések érvényességi tartományán belül ezen értékek közelítőleg arányosak a mintavételi regisztrátum hosszával, valamint közelítőleg négyzetesen arányosak a mintavételezett periódusok számával, valamint a lebegőpontos számábrázolás relatív számábrázolási pontosságával.

1.2 Hatékony algoritmust adtam a fáziskiértékelés pontosságának növelésére. Ezen algoritmus megnövelt pontossággal számítja a pillanatnyi fázist, amelyet a számítás után a szinusz és koszinusz függvények periodicitását felhasználva a $(-\pi;\pi]$ intervallumba képez. A módszer korlátozza a fázisinformáció véges számábrázolási pontosságon történő reprezentációjakor fellépő kerekítési hiba maximális értékét.

Kapcsolódó saját publikációk: [RB1], [RB3], [RB4].

2. Tézis – Felső korlátokat határoztam meg a három- és négyparaméteres legkisebb négyzetes (LS) szinuszillesztő algoritmusokhoz rendelhető kondíciószámokra.

2.1 Bebizonyítottam, hogy egyenletes mintavételezést alkalmazva, egy periódusból legalább négy mintát véve, az illesztéshez minden mintát felhasználva a standard módon felírt háromparaméteres LS szinuszillesztő algoritmushoz rendelhető kondíciószám felső korlátja

$$\frac{1+\frac{0.75}{J}}{0.5-\frac{0.75}{J}}\ ,\ J > 1.5\ ,$$

ahol J a mintavételezett periódusok száma. (A standard módon felírt feladatban a mintavételi időpontok számítása a

$$t_k = \frac{k}{f_s} \qquad k = 1 \dots N$$

képlettel történt, ahol f_s a mintavételi frekvencia.)

2.2 Bebizonyítottam, hogy egyenletes mintavételezést alkalmazva, egy periódusból legalább négy mintát véve, az illesztéshez minden mintát felhasználva, az időtengely paraméterek 0-ra szimmetrikus beállításával, valamint a rendszermátrix DC-komponensének $\sqrt{2}$-vel való skálázásával a háromparaméteres LS szinuszillesztő algoritmushoz rendelhető kondíciószám felső korlátja

$$\frac{0.5 + \frac{0.4}{J}}{0.5 - \frac{0.4}{J}} \ , \ J > 0.8 \ ,$$

ahol J a mintavételezett periódusok száma. Ezáltal bebizonyítottam, hogy J növelésével a kondíciószám elvi minimuma aszimptotikusan elérhető. (Az időtengely-paraméterek 0-ra szimmetrikus beállításával a mintavételi időpontok számítása a

$$t_k = \frac{k - l}{f_s} \ , \quad k = 1 \dots N \ , \qquad l = \frac{N + 1}{2}$$

képlettel történt, ahol f_s a mintavételi frekvencia.)

2.3 Bebizonyítottam, hogy egyenletes mintavételezést alkalmazva, egy periódusból legalább négy mintát véve, az illesztéshez minden mintát felhasználva, az időtengely paraméterek 0-ra szimmetrikus beállításával, valamint a rendszermátrix DC-komponensének $\sqrt{2}$-vel, relatív körfrekvencia-komponensének $R\sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$-vel való skálázásával a négyparaméteres LS szinuszillesztő algoritmushoz rendelhető kondíciószám felső korlátja

$$\frac{0.5 + \frac{0.98}{J}}{0.5 - \frac{0.98}{J}} \ , \ J \geq 4 \ ,$$

ahol R a regisztrátum amplitúdója, N a minták száma és J a mintavételezett periódusok száma. Ezáltal bebizonyítottam, hogy J növelésével a kondíciószám elvi minimuma aszimptotikusan elérhető. A relatív körfrekvencia a

$$\vartheta = \frac{\omega}{f_s}$$

képlettel számítható, ahol ω a jel körfrekvenciája. (Az időtengely-paraméterek 0-ra szimmetrikus beállításával a mintavételi időpontok számítása a

$$t_k = \frac{k-l}{f_s} \ , \quad k = 1 \dots N \ , \qquad l = \frac{N+1}{2}$$

képlettel történt, ahol f_s a mintavételi frekvencia.)

Kapcsolódó saját publikációk: [RB2].

4 Az eredmények hasznosíthatósága és kitekintés

A disszertációban megmutatom, hogy a pontatlan fázisszámítás, valamint a rosszul kondicionált egyenletrendszerek jelentős mértékben csökkenthetik a három- és négyparaméteres least squares algoritmusok numerikus pontosságát. Olyan módszereket javaslok, melyek segítségével mindkét hibaforrás hatása jelentősen csökkenthető.

A javasolt módszerek alkalmazásával a felhasználó számára garantálható, hogy az eredményeket nem befolyásolja a pontatlan fázisszámításból származó hiba, valamint hogy bizonyos feltételek teljesítése esetén az algoritmushoz rendelhető kondíciószám kis értékű marad. Ennek következtében a vizsgált algoritmusok akár egyszeres pontossággal is numerikus szempontból robusztusan programozhatók, így az illesztést végrehajtó eszköz költsége jelentősen csökkenthető.

Az értekezés eredményei általánosíthatók lineáris és nemlineáris LS feladatok megoldása során. Bár a polinomillesztés esetére – mely a lineáris illesztési feladatok közül a legismertebb – a paraméterek 0-ra szimmetrikus beállítása a szakirodalomban ismert [9], az eredmények alkalmazhatók azon nemlineáris LS feladatok megoldásához, melyekben a nemlinearitást transzcendens függvény okozza – ez történik a 4PLS-illesztésnél is. Ilyen feladatra példa az exponenciális növekedés

$$f(z_1, z_2, t) = z_1 \cdot e^{z_2 t} \ , \tag{T.19}$$

ahol $z_1 > 0$ és $z_2 > 0$ az exponenciális növekedés paraméterei, és t jelöli az időt. Exponenciális növekedéssel lehet modellezni például egy populáció növekedését. Az illesztendő görbe az

$$y_k = f(z_1, z_2, t_k) = z_1 \cdot e^{z_2 t_k} \quad \text{(T.20)}$$

egyenlettel írható le. Amennyiben t_k értékek mind pozitívak, a rendszermátrix z_1-hez és z_2-höz tartozó oszlopainak skaláris szorzata jelentősen csökkenthető, amennyiben egy ofszet levonásra kerül t_k-ból. Ezáltal megfelelő skálázás segítségével az algoritmushoz rendelhető kondíciószám szintén csökkenthető.

A fáziskiértékeléshez kapcsolódó kerekítési hiba csökkentése alkalmazható a frekvenciatartománybeli rendszeridentifikáció területén [10], amennyiben az identifikációt multiszinuszos gerjesztéssel szeretnénk elvégezni. A kerekítési hibák hatása annál jelentősebb, minél több harmonikust generálunk, illetve minél hosszabb a gerjesztőjel. Az értekezésben javasolt módszerrel a multiszinusz digitális úton történő előállításakor – a generálás előtt biztosítva a fáziskiértékelés hibájából származó kerekítési hiba kiküszöbölését – a generált multiszinusz hibája csökkenthető.

Az értekezésben kihasználtam, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvények periodikusak, így a fázisinformáció 2π-re vonatkoztatott törtrésze elegendő a függvények kiértékeléséhez. Ezzel a módszerrel analóg módon komplex számok szorzásának, illetve hatványozásának aritmetikai pontossága is növelhető. Komplex számok szorzásakor abszolútértékük szorzódik, fázisuk összeadódik. Amennyiben a két fázis összege a $(-\pi; \pi]$ intervallumon kívül esik, úgy a fázisinformációt megnövelt pontossággal számítva, majd az eredményt a megadott intervallumba képezve a kerekítési hiba csökkenthető.

Az értekezés témája a Dr. Kollár István († 2016) által létrehozott kutatócsoport kutatásaihoz kapcsolódik [11], mely analóg-digitális átalakítók tesztelésére specializálódott. A kutatócsoport munkájának eredményeit beépítjük egy analóg-digitális átalakítók tesztelésére szolgáló MATLAB-toolboxba, melynek szolgáltatásai közé a jövőben tervezzük felvenni a fáziskiértékelés hibájának csökkentését, valamint a paraméterek skálázását.

A kutatócsoport kapcsolatban áll a Kassai Műszaki Egyetem, a Perugiai Egyetem, valamint a Brüsszeli Szabadegyetem (VUB) kutatóival, mely együttműködés eredményeként számos publikáció született [RB1],[RB3],[5],[12],[13]. A szinuszillesztés numerikus problémái mellett jelenleg is aktív kutatási terület a maximum likelihood szinuszillesztés varianciája alsó korlátjának (Cramér-Rao alsó korlát) meghatározása, valamint az integrális nemlinearitás (INL) hatékony paraméterezése ezen becslés paraméterterének redukálása céljából. A nemzetközi kapcsolatok fenntartásával a tématerület további kutatását tervezzük. Hosszú távon célunk, hogy kutatási eredményeink bővítsék az analóg-digitális átalakítók tesztelésére szolgáló IEEE

1241-es szabványt [1]. A további vizsgálatok során az értekezés alapgondolatai a következő irányokba mindenképpen továbbvihetők:

- A kondíciószám-analízis kiterjesztése nem-egyenletes mintavételezésre, amikor a minták között eltelt idő nem mindig ugyanakkora, például jitter hatására.
- Túlvezérlés, illetve adatvesztés hatásának vizsgálata a kondíciószámok alakulására. Ebben az esetben nem minden időpontban áll rendelkezésre illeszthető adat.
- Több harmonikus hatásának vizsgálata az eredményekre.
- A paraméterek skálázási tényezőinek meghatározása a maximum likelihood becslő esetére.

Köszönetnyilvánítás

Jelen disszertáció elkészültét az OTKA K-115820 pályázata, valamint a Pro Progressio Alapítvány támogatta.

Kutatásaimat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszékén, a Digitális Jelfeldolgozás Laboratórium tagjaként végeztem. Szeretnék köszönetet mondani a Tanszék munkatársainak és mindazoknak, akik segítették munkámat.

Mindenekelőtt hálásan köszönöm témavezetőm, Dr. Kollár István szakmai és emberi támogatását, melyekkel nemcsak végigkísért a doktori iskolán, de meg is szerettette velem a tudományos életet. Bár személyesen már nem tudom kifejezni Neki hálámat, értekezésemet az Ő emlékének ajánlom.

Szeretném megköszönni Dr. Péceli Gábornak az értekezés elkészültében, valamint a tudományos eredmények végső megfogalmazásában nyújtott hathatós segítségét.

Köszönetet szeretnék mondani közelebbi munkatársaimnak, Dr. Pálfi Vilmosnak és Virosztek Tamásnak a jó hangulatú közös munkáért.

Végezetül köszönöm családomnak, elsősorban feleségemnek, Klarinak, hogy munkám során mindvégig mellettem állt.

Az értekezéshez kapcsolódó publikációk

[RB1] B. Renczes, I. Kollár, A. Moschitta, P. Carbone, "Numerical Optimization Problems of Sine Wave Fitting Algorithms in the Presence of Roundoff Errors", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 65, no. 8., pp. 1785-1795, 2016, © IEEE, 2016
DOI: 10.1109/TIM.2016.2562218

[RB2] B. Renczes, I. Kollár, T. Dabóczi, "Efficient Implementation of Least Squares Sine Fitting Algorithms", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 65, no. 12., pp. 2717-2724, 2016, © IEEE, 2016
DOI: 10.1109/TIM.2016.2600998

[RB3] B. Renczes, I. Kollár, P. Carbone, A. Moschitta, V. Pálfi, T. Virosztek, "Analyzing Numerical Optimization Problems of Finite Resolution Sine Wave Fitting Algorithms", *Proceedings of IEEE International Instrum. Meas. Technology Conference*, pp. 1662-1667, Pisa, Italy 2015.
DOI: 10.1109/I2MTC.2015.7151529

[RB4] B. Renczes, I. Kollár, „ Roundoff Errors in the Evaluation of the Cost Function in Sine Wave Based ADC Testing", Proceedings of 20th IMEKO TC4 International Symposium and 18th International Workshop on ADC Modelling and Testing Research on Electric and Electronic Measurement for the Economic Upturn, Benevento, Italy, Sept. 15-17, 2014. pp. 248-252.

Hivatkozások

[1] Standard IEEE-1241-2010, "IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters", (2011)
DOI: 10.1109/IEEESTD.2011.5692956

[2] IEEE Standard-1057-2007, „Standard for Digitizing Waveform Recorders", 2007
DOI: 10.1109/IEEESTD.2008.4494996

[3] A. Grégoire, S. M. Kaber, "Numerical Linear Algebra", *Springer*, New York, USA, 2008.
DOI: 10.1007/978-0-387-68918-0

[4] IEEE Standard-754-2008, „IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic", 2008
DOI: 10.1109/IEEESTD.2008.4610935

[5] L. Balogh, I. Kollár, L. Michaeli, J. Šaliga, J. Buša, J. Lipták, " Full information from measured ADC test data using maximum likelihood estimation" *Measurement* Vol. 45, No. 2, pp. 164-169, Feb. 2012
DOI: 10.1016/j.measurement.2011.07.019

[6] K. Chen, Y. Xue, "Improving four-parameter sine wave fitting by normalization", *Computer Standards and Interfaces*, vol. 29, pp. 184-190, 2007.
DOI: 10.1016/j.csi.2006.05.005

[7] N. Higham, “The accuracy of floating point summation”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, no. 4: pp. 783–799, 1993.
DOI: 10.1137/0914050

[8] R. Li, "Relative perturbation theory: I. Eigenvalue and singular value variations." *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* vol. 19, No. 4, pp. 956-982, 1998
DOI: 10.1137/S089547989629849X

[9] S. Kay, “Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory”, *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, NJ, USA, 1993

[10] R. Pintelon, J. Schoukens, „System Identification: A Frequency Domain Approach”, *Wiley IEEE-Press*, Hoboken, NJ

[11] I. Kollár, V. Pálfi, B. Renczes, T. Virosztek, L. Balogh, J. Márkus, A. Sárhegyi, T. Bilau “ADCTest Project Site”
URL: http://www.mit.bme.hu/projects/adctest

[12] A. Moschitta, J. Schoukens, P. Carbone, “Parametric System Identification Using Quantized Data”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 8, pp. 2312-2322, Aug. 2015
DOI: 10.1109/TIM.2015.2390833

[13] P. Carbone, J. Schoukens, I. Kollár, A. Moschitta, “Accurate Sine-Wave Amplitude Measurements”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 12, pp. 3201-3208, Dec. 2015
DOI: 10.1109/TIM.2015.2463331