



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MECHATRONIKA, OPTIKA ÉS GÉPÉSZETI INFORMATIKA TANSZÉK

# Tézisfüzet

## Súrlódási hatások a mechanikai rendszerek dinamikájában és szabályozásában

BUDAI CSABA

*Témavezetők:*

DR. KOVÁCS LÁSZLÓ  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
McGill Egyetem, Kanada

DR. KORONDI PÉTER  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Budapest, 2017. március



# Bevezetés

A gépészetben a súrlódás modellezése az egyik legbonyolultabb feladat. Ennek a disszipációs hatásnak erős befolyása lehet a rendszer dinamikájára, és komplex dinamikai viselkedést eredményezhet. A súrlódás fontos szerepet játszik az automatizálásban, elsősorban a pozicionálási problémák esetében. A pozíciószabályozási feladatok egyidejűleg nagy pontosságot és gyors működést követelnek meg, aminek a megvalósítását a száraz súrlódás hatása dinamikára gyakorolt hatása jelentősen korlátozhatja. Ennek fő oka egyrészt az hogy a súrlódás maradó pozicionálási hibát eredményez, másrészt az, hogy az alkalmazott mozgásszabályozók digitális jellege miatt stabilitási problémák jelentkezhetnek.

Jelen kutatást, egyfelől a korábban említett jelenségek dinamikai rendszerekre való kölcsönös egymásra hatásának felismerése, másfelől pedig a később bemutatott kísérleti eredmények motiválták. A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy ezen rendszerben különleges, nem várt rezgések jelenhetnek meg. A kutatómunka középpontjában ezekhez a rezgésekhez kötődő dinamikai viselkedésnek az értelmezése és megértése áll. Jelen értekezés a súrlódás hatását a szabályozott mechanikai rendszerek dinamikájához kapcsolódóan vizsgálja. A kutatás fő célja a súrlódásnak a mechanikai rendszerek digitális pozicionálására gyakorolt hatásának megértése.

## Az értekezés áttekintése, összefoglalása

Annak érdekében, hogy a súrlódási jelenségek és a szabályozott mechanikai rendszer dinamikája közötti kölcsönhatása elemezhető legyen, egy kísérleti berendezést terveztem és építettem. A kísérleti összeállítás modellezését a 2. fejezet mutatja be, amely részletes leírást ad a mechanikai, az elektromos, és a szabályozási elemekről. A mérés során egy speciális, konkáv burkológörbéjű rezgésalakot figyeltem meg. A 2. fejezet főként ennek a különlegesen csillapított mozgásnak a karakterisztikájára összpontosít, a legegyszerűbb reprezentatív dinamikai modell meghatározása mellett. A továbbiakban a disszertáció ezt a modellt az ún. mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer modelljeként tárgyalja.

A 3. fejezet a fent említett mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer dinamikájának a vizsgálatát mutatja be. A száraz súrlódás hatásának megértéséhez először egy referencia modellt vizsgáltam a száraz súrlódás elhanyagolásával. Ezt a követi a súrlódás mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer dinamikájára gyakorolt hatásának elemzése. Elsőként a szakirodalomban használt passzivitáselemzésen alapuló eredmények kerültek bemutatásra. Ezt energetikai megfontolások

kövezték a klasszikus leírófüggvények analízisével kiegészítve, annak érdekében, hogy egy továbbfejlesztett stabilitási feltételt határozzak meg. A fejezet végén a mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer stabilitási tulajdonságainak további elemzése történik. A vizsgálat fontos eleme a szabályozott mozgás domináns rezgési frekvenciájának meghatározása. A közölt stabilitási eredmények megmutatják, hogy a száraz súrlódás hogyan tudja stabilizálni az egyébként digitálisan szabályozott instabil mozgást.

A 4. fejezet egy folytonos idejű, egyenértékű modell elemzését tárgyalja, amely a mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer stabilitási tulajdonságainak elemzésére is felhasználható. A vizsgálat középpontjában egy olyan dinamikailag instabil lengőrendszer áll, ahol a viszkózus csillapítási tényező értéke negatív.

Végezetül, az 5. fejezetben a mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer modellje kibővítésre kerül a viszkózus csillapítással és a száraz súrlódással. Ez lehetővé teszi, hogy a két fő fizikai disszipációs mechanizmus stabilizáló hatása együttesen is vizsgálható legyen.

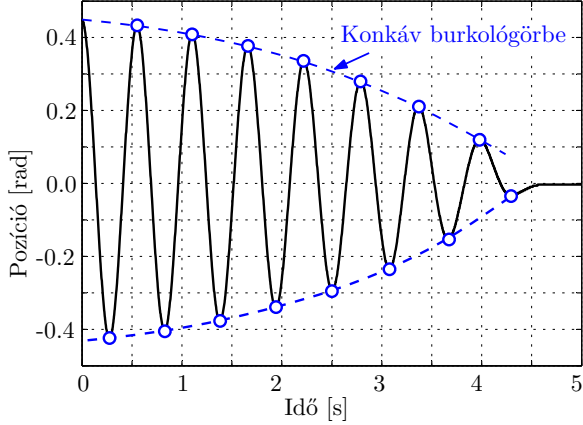
## 1. tézis

Pozicionálási kísérletek során az alábbi ábrán látható speciális, konkáv burkológörbájű rezgést azonosítottam, amely a klasszikus folytonos idejű viszkózus és/vagy száraz súrlódással csillapított rendszerekhez képest eltérő amplitúdó csökkenést mutat. Részletes modellezési megfontolások és elemzések alapján meghatároztam a minimális számú reprezentatív rendszer paramétereit, amelyek a kísérleti úton megfigyelt jelenség szimuláció segítségével történő reprodukálásához szükségesek.

**Konkáv burkológörbájű rezgés azokban a mintavételes lineáris rendszerekben jön létre, amelyekben a mintavételezés okozta instabilitást a Coulomb súrlódás stabilizálja. A megfigyelt konkáv burkológörbájű rezgés az ún. mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer modelljével írható le**

$$m\ddot{x}(t) + f_C \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) = -k_p x_j, \quad t \in [t_j, t_j + t_s), \quad t_j = jt_s, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol  $x$  jelöli a modellezett szabadsági fokhoz tartozó általánosított koordinátát a  $t$  idő függvényében,  $m$  jelöli az általánosított tömeget és  $f_C$  az általánosított Coulomb súrlódási erő nagyságát. Az arányos erősítési tényezőt  $k_p$ , a  $j$ -edik mintavételezési időpillanatot  $t_j$ , a mintavételezési időt  $t_s$  és a  $j$ -edik mintavételezési periódus elején mért pozíció értékét  $x_j$  jelöli.



- Kapcsolódó publikációk: [1], [2], [3], [4]

## 2. tézis

A mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer kezdeti érték problémája az alábbi lépésekből álló, zárt alakú diszkrét szimulátorral oldható meg. A szimulátor által alkalmazott egzakt megoldási módszer, a nem-sima dinamikai egyenletek numerikus integrálása nélkül, numerikus stabilitás vizsgálathoz is felhasználható.

Tekintsük a mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer diszkrét idejű modelljét a  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{W}(t_s)\mathbf{z}_j - \mathbf{w}(t_s) \operatorname{sgn}(\dot{x}(t))$  formában az alábbi definíciókkal

$$\mathbf{W}(t_s) = \begin{bmatrix} 1 - p/2 & t_s \\ -p/t_s & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(t_s) = \begin{bmatrix} \psi/2 \\ \psi/t_s \end{bmatrix}, \quad \text{és } p = \frac{k_p t_s^2}{m}, \quad \psi = \frac{f_C t_s^2}{m},$$

ahol  $x_j$  és  $v_j$  jelöli a mintavételezett pozíciót és sebességet.

A stabilitásvizsgálati módszer főbb lépései:

1. **Tegyünk  $n_1$  lépést a  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{W}(t_s)\mathbf{z}_j - \mathbf{w}(t_s) \operatorname{sgn}(v_j)$  összefüggés szerint a kritikus  $\mathbf{z}_k$  állapotváltozó eléréséig, mielőtt rezgéscsúcs jelentkezik. A  $v_j = 0$  speciális esetben, amikor  $\operatorname{sgn}(v_j)$  nem alkalmazható, az első lépést a következő egyenlet szerint végezzük  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{W}(t_s)\mathbf{z}_j + \mathbf{w}(t_s) \operatorname{sgn}(x_j)$ .**
2. **Vezessük be a  $\delta_k$  kapcsolási paramétert, amelyet zárt alakban az**

alábbi összefüggéssel határozhatunk meg

$$\delta_k = \frac{mv_k}{t_s(k_p x_k + f_C \operatorname{sgn}(v_k))}.$$

3. Határozzuk meg a módosított rendszermátrixot  $\mathbf{W}(\delta_k t_s)$  és a módosított eltolási vektort  $\mathbf{w}(\delta_k t_s)$  a mintavételi idő hányadaként  $\delta_k t_s$ .
4. A rezgéscsúcs megtalálása érdekében, hajtsunk végre egy közbeni, kisebb időlépést az alábbi összefüggés szerint  $\mathbf{z}_{\text{peak}} = \mathbf{W}(\delta_k t_s) \mathbf{z}_k - \mathbf{w}(\delta_k t_s) \operatorname{sgn}(v_k)$ .
5. Az állandó mintavételezéssel történő megoldás előállításához, számítsuk ki a módosított rendszermátrixot  $\mathbf{W}((1 - \delta_k) t_s)$  és a módosított eltolási vektort  $\mathbf{w}((1 - \delta_k) t_s)$  a mintavételi idő  $(1 - \delta_k) t_s$  tört részét figyelembe véve.
6. A rezgéscsúcsról indulva, hajtsunk végre egy korrekciós lépést a következő leképezéssel  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{W}((1 - \delta_k) t_s) \mathbf{z}_{\text{peak}} + \mathbf{w}((1 - \delta_k) t_s) \operatorname{sgn}(v_k)$ .
7. Tegyük  $n_2$  lépést a  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{W}(t_s) \mathbf{z}_j + \mathbf{w}(t_s) \operatorname{sgn}(v_j)$  összefüggés szerint a  $j = k + 1$  mintavételi időpillanattól kezdve, amíg azokat a kritikus állapotváltozókat el nem érjük, ami után közvetlenül egy rezgéscsúcs következik. A  $v_j = 0$  speciális esetben, amikor  $\operatorname{sgn}(v_j)$  nem alkalmazható, az első lépést a  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{W}(t_s) \mathbf{z}_j - \mathbf{w}(t_s) \operatorname{sgn}(x_j)$  egyenlet szerint végezzük.
8. Ismételjük meg a második és harmadik lépést az új  $\mathbf{z}_{\text{peak}}$  állapotváltozók meghatározásához.
9. A stabilitás vagy instabilitás meghatározásához el kell dönteni azt, hogy a két egymást követő  $x_{\text{peak}} = \operatorname{abs}(\mathbf{z}_{\text{peak}})$  rezgéscsúcs nagysága egymáshoz képest csökken vagy nő.

- Kapcsolódó publikációk: [5]

### 3. tézis

A leíró függvények módszeréve meghatározott, sebességfüggő eredő viszkózus csillapítási tényezőt felhasználva, valamint feltételezve, hogy a csillapítás által eldisszipált energia és a mintavételezés következtében bevezetett energia egymással

egyensúlyban vannak, a kritikus rezgési sebesség amplitúdók meghatározhatóak. Ezek a kritikus sebesség amplitúdók leírják a megkívánt stabil pozíció véges vonzási tartományát.

**Zérus kezdeti pozíció esetén az instabil határciklushoz tartozó  $v_{0,\text{cr}}$  kritikus sebesség az alábbi alakban adható meg**

$$v_{0,\text{cr}} = \frac{8f_C}{\pi k_p} \frac{1}{t_s},$$

ahol  $f_C$  jelöli az általánosított száraz súrlódási erő nagyságát,  $k_p$  a proporcionális erősítési tényező, és  $t_s$  az alkalmazott proporcionális szabályzó mintavételi ideje.

Ha a mozgás  $v_0$  kezdeti sebességére teljesül az, hogy  $x_0 = 0$  helyen  $v_0 < v_{0,\text{cr}}$ , akkor a rendszer stabilan eléri a megkívánt pozíciót. Ellenkező esetben ( $v_0 > v_{0,\text{cr}}$ ) a rezgés amplitúdója növekszik.

- Kapcsolódó publikációk: [5]

## 4. tézis

Amikor a mintavételes száraz súrlódásos lengőrendszer mozgása nem zérus kezdeti pozícióból, de zérus kezdeti sebességgel indul, és a mintavételezés okozta felharmonikusok elhanyagolhatóak, a szabályozott rendszernek instabil periodikus mozgása (határciklusa) jön létre, ha a kritikus kezdeti pozíció

$$x_{0,\text{cr}} = \frac{\rho^{\pi/\vartheta} + 1}{\rho^{\pi/\vartheta} - 1} \frac{\psi}{p}, \quad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{\frac{p+2}{2}} \quad \text{és} \quad \tan(\vartheta) = \frac{\sqrt{p(16-p)}}{4-p}.$$

A fenti kifejezésekben  $p = k_p t_s^2 / m$  és  $\psi = f_C t_s^2 / m$  dimenziótlan paraméterek, amelyek a dinamikai és szabályozási paramétereket tartalmazzák.

- Kapcsolódó publikációk: [5], [6]

## 5. tézis

A Coulomb súrlódással és a negatív viszkózus csillapítással rendelkező szabályozás nélküli másodrendű lengőrendszer általános mozgásegyenlete a következő

$$\ddot{x}(t) - 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \begin{cases} -f_0^+\omega_n^2, & \dot{x}(t) > 0 \\ f_0^-\omega_n^2, & \dot{x}(t) < 0 \end{cases},$$

ahol  $\omega_n$  a csillapítatlan saját-körfrekvencia és  $\zeta$  a relatív csillapítási tényező, amely a figyelembe vett negatív viszkózus csillapításnak felel meg, valamint az  $f_0^\pm = C^\pm/k$  paraméter a  $C$  fiktív terhelés okozta statikus deformációt reprezentálja, ahol  $k$  az általánosított merevség.

**A Coulomb súrlódással és negatív viszkózus csillapítással rendelkező másodrendű lengőrendszer kritikus kezdeti pozíciója, mely esetben instabil határciklus jön létre, az alábbi összefüggésél számítható**

$$x_{0,\text{cr}} = \frac{f_0^- \varepsilon + f_0^+}{\varepsilon - 1} \quad \text{vagy} \quad x_{1,\text{cr}} = -\frac{f_0^+ \varepsilon + f_0^-}{\varepsilon - 1},$$

ahol  $\varepsilon = \exp(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})$ . Ha  $f_0^- = f_0^+ = f_0$ , a Coulomb súrlódási modell szimmetrikus és  $x_{1,\text{cr}} = -x_{0,\text{cr}}$ , akkor a kritikus kezdeti pozíció

$$x_{0,\text{cr}} = f_0 \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = f_0 \coth\left(\frac{\pi}{2} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

- Kapcsolódó publikációk: [6]

## 6. tézis

A mintavételés száraz súrlódásos lengőrendszer, viszkózus csillapítással kiegészített modelljéhez tartozó stabilitási tulajdonságokat a mellékelt ábra mutatja. A modellhez tartozó karakterisztikus multiplikátorok az alábbiak

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon(1-P) - P\theta + 2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta} \quad \text{ahol} \quad \varepsilon = e^{-\theta} - 1$$

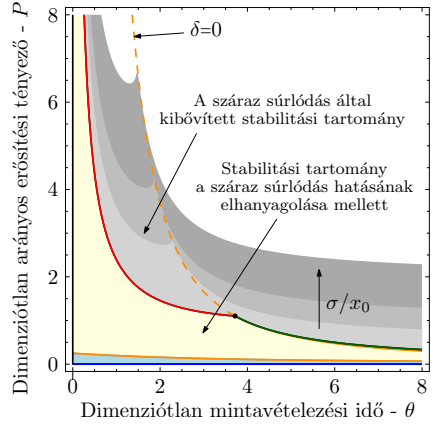
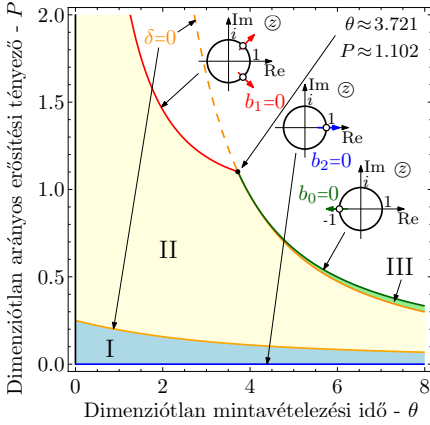
és

$$\delta = P^2(e^{-2\theta} - 2e^{-\theta} + 1 + 2\theta\varepsilon + \theta^2) + P(2\theta\varepsilon - 2(e^{-2\theta} - 2e^{-\theta} + 1)) + e^{-2\theta} - 2e^{-\theta} + 1.$$

A fenti kifejezésekben  $P = mk_p/b^2$  a dimenziótlan proporcionális erősítési tényező és  $\theta = bt_s/m$  a dimenziótlan mintavételezési idő, ahol  $m$  az általánosított tömeg,  $b$  az általánosított viszkózus csillapítási tényező,  $k_p$  a proporcionális erősítési tényező és  $t_s$  a mintavételezési idő.

A modell karakterisztikus egyenletének részletes algebrai elemzése alapján meghatározható a szabályozási paraméterek stabilitási tartománya, amelyet a dimenziótlan  $\theta$  mintavételezési idő és a dimenziótlan  $P$  proporcionális erősítési tényező síkján ábrázolhatunk. A bal oldali ábrán a színes területek különböző stabilitási tartományokat jelölnek, ahol a  $z_{1,2}$  karakterisztikus multiplikátorok tulajdonságai a következők





- Az I jelű tartományban,  $z_{1,2} \in \mathbb{R}$ , és  $0 < \text{Re}(z_{1,2}) < 1$ . A rendszer elsőrendű dinamikai jelleget mutat: nem keletkezik rezgés és a stabilitási határon nyereg-csomó bifurkáció jelentkezik.
- A II jelű tartományban,  $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ , és  $\text{Im}(z_{1,2}) \neq 0$ . A rendszer hasonló rezgéseket mutat, mint az alul-csillapított másodrendű rendszer: a stabilitási határon Neimark-Sacker bifurkáció jelentkezik.
- A III jelű tartományban,  $z_{1,2} \in \mathbb{R}$  és  $-1 < \text{Re}(z_1) < 0$  vagy  $-1 < \text{Re}(z_2) < 0$ . A szabályozási erő alternál: a stabilitási határon periódus-kettőző bifurkáció jelentkezik.

A fenti, bal oldali stabilitási térképen  $\delta = 0$  jelöli a karakterisztikus multiplikatorkat elválasztó görbét. A különböző típusú stabilitási határokat az alábbi összefüggések definiálják

$$b_0 = 0 \iff P = \frac{2(e^\theta + 1)}{e^\theta(\theta - 2) + \theta + 2},$$

$$b_1 = 0 \iff P = \frac{e^\theta - 1}{-\theta + e^\theta - 1},$$

$$b_2 = 0 \iff P = 0.$$

A jobb oldali ábrán látható, hogy a rendszert a Coulomb súrlódás kétféle, a Neimark-Sacker és a periódus-kettőző bifurkációkhoz tartozó,

határ mentén is stabilizálja. Mindkét esetben, a kiterjesztett stabilitási tartomány határát az alábbi, kritikus dimenziótlan proporcionális erősítés definiálja

$$P_{\text{cr}} = \frac{\sigma}{x_0} \coth\left(\frac{\pi \ln(\rho)}{2 \vartheta}\right),$$

ahol  $\rho = \text{abs}(z_{1,2})$  és  $\tan(\vartheta) = \arg(z_1)$ . A kifejezésekben,  $\sigma = m f_C / b^2$  ahol  $f_C$  az általánosított száraz súrlódási erő nagysága, és  $x_0$  a kezdeti pozíció/zavarás zérus kezdeti sebesség mellett.

- Kapcsolódó publikációk: [7], [8], [9], [10]

# Hivatkozások

- [1] **Cs. Budai** and *L.L. Kovács*. Limitations caused by sampling and quantization in position control of a single axis robot. In *Proceedings of the XV. International PhD Workshop*, pages 466–471, Wisla, Poland, October 2013.
- [2] **Cs. Budai** and *L.L. Kovács*. Robotok pozíció szabályozásának kísérleti stabilitásvizsgálata. In *Proceedings of the Tavaszi Szél Konferencia*, pages 11–20, Debrecen, Hungary, March 21–23, 2014.
- [3] G. Gyebroszki, G. Csernák, and **Cs. Budai**. Experimental investigation of micro-chaos. In *Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference*, pages 1–6, Vienna, Austria, July 6–11, 2014. Paper ID: 476.
- [4] **Cs. Budai** and *L.L. Kovács*. Friction effects on stability of a digitally controlled pendulum. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 59(4):176–181, 2015.
- [5] **Cs. Budai**, *L.L. Kovács*, and J. Kövecses. Analysis of the effect of coulomb friction on haptic systems dynamics. In *Proceedings of the International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Charlotte, NC, USA, August 21–24, 2016. no. IDETC2016-59961.
- [6] **Cs. Budai**, *L.L. Kovács*, J. Kövecses, and G. Stépán. Effect of dry friction on vibrations of sampled-data mechatronic systems. *Nonlinear Dynamics*, 88(1):349–361, 2016.
- [7] **Cs. Budai** and B. Szilágyi. About a few elegant formulae in the matrix calculus. In *Proceedings of the Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XXXVII. Országos Konferenciája*, pages 25–30, Miskolc, Hungary, August 26–28, 2013.
- [8] **Cs. Budai** and B. Szilágyi. Matrix operations applying sum of matrices. In *Proceedings of the Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XXXVII. Országos Konferenciája*, pages 1–4, Miskolc, Hungary, August 26–28, 2013. in CD proceedings.
- [9] **Cs. Budai** and B. Szilágyi. Alternative method to determine the characteristic polynomial applying three-by-three matrices. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 59(1):59–63, 2015.

- [10] **Cs. Budai** and *L.L. Kovács*. On the stability of digital position control with viscous damping and coulomb friction. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, pages 1–6, 2017. Accepted.