BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Tézisfüzet

a Gépészeti Tudományok PhD programban benyújtott

Két ponton gördülő testek dinamikája

című doktori disszertációhoz

Szerző:

Antali Máté

Témavezető:

Dr. Stépán Gábor
egyetemi tanár
Műszaki Mechanikai Tanszék

Budapest, 2017

A disszertáció áttekintése

Amikor egy merev test két merev felülettel érintkezik, mindkét érintkezési pontban létrejöhet gördülés vagy csúszás. Ebből az elrendezésből négy kinematikai eset jöhet létre: két ponton gördülés, két ponton csúszás és két vegyes gördülő-csúszó eset. Két ponton gördülés esetén az érintkezési pontokban előírt gördülési kényszerek nem függetlenek, emiatt az érintkezési erőket nem lehet egyértelműen meghatározni. Így a megcsúszás Coulomb modellből adódó dinamikai feltétele nem határozható meg.

Ez a határozatlanság elkerülhető a rendszer dinamikáját leíró szakadásos vektormező vizsgálatával. Síkbeli érintkezési feladatokban a Coulomb súrlódási modell nem-sima Filippov-típusú dinamikai rendszerekhez vezet. Viszont a három dimenziós érintkezés Coulomb súrlódás jelenlétében már kívül esik a Filippov rendszerek hatáskörén, mert izolált 2 kodimenziós szakadási halmaz jelenik meg a fázistérben. Az ilyen rendszerek modellezésére a *kiterjesztett Filippov rendszerek* fogalma kerül bevezetésre. A csúszó és áthaladó tartományok a Filippov rendszerekhez hasonlóan definiálhatók, és a csúszó dinamika származtatása is bemutatásra kerül (2. tézis).

A kiterjesztett Filippov-rendszerek fogalma alkalmazható a két ponton gördülő test esetén, így kiküszöbölhető az érintkezési erők határozatlansága. Ez a mechanikai rendszer a fázistérben két darab 2 kodimenziós szakadási halmazt tartalmaz és a két ponton gördülés ezen halmazok metszetében helyezkedik el. Ezen részhalmaz közelében a vektormező vizsgálatából feltételek kaphatók annak eldöntésére, hogy van-e lehetőség a megcsúszásra egyik vagy mindkét érintkezési pontban (3. tézis).

A kifejlesztett analitikus módszerek két gépészeti alkalmazáson keresztül kerülnek bemutatásra. Az egyik alkalmazás az egyenes pályán állandó sebességgel haladó vasúti kerékpár dinamikája. A szokásosan használt nemlineáris kúszási modell helyett az érintkezési erők Coulomb súrlódással becsülhetők. A nem-sima dinamikai rendszerből a kerékpár megcsúszásának feltételei meghatározhatóak. A megcsúszás nélkül elérhető legnagyobb amplitúdójú rezgés is meghatározható (5. tézis). A két ponton gördülés esetén bemutatásra kerül a kinematikai rezgések amplitúdójának hatása a rezgések saját-körfrekvenciájára (1. tézis).

A másik alkalmazás egy különleges áramlásmérő, ahol a folyadékáram egy a folyadék által hajtott golyó mozgásából határozható meg. Rendes működés közben a golyó két ponton gördülő kapcsolatban van egy hengeres edény aljával és oldalával. A nem-sima rendszer vizsgálata azt mutatja, hogy a folyadékáram növekedésével bekövetkezik a golyó megcsúszása egyik vagy mindkét érintkezési pontban. A paraméterek változtatásával többféle bifurkáció jelenik meg a rendszerben (4. tézis).

1. Tézis

Tekintsük egy egyenes vágányon állandó v sebességgel mozgó vasúti jármű modelljét, ahol a jármű egy kiválasztott kerékpárjának mozgását az y laterális elmozdulás és a ψ fordulási szög írja le. A kerekek és a sínek között gördülést feltételezünk.

i) A kerék kinematikai rezgéseinek nemlineáris dinamikáját

$$\dot{y} = a_{01}\psi + a_{03}\psi^3 + a_{21}y^2\psi + O^5(y,\psi),$$
$$\dot{\psi} = b_{10}y + b_{30}y^3 + b_{12}y\psi^2 + O^5(y,\psi)$$

alakú differenciálegyenletek írják le, ahol $O^n()$ jelöli n-ed vagy magasabb fokú tagokat és az a_{ij}, b_{ij} együtthatókat a felületek geometriája valamint a jármű v sebessége határozza meg.

ii) Véges $\bar{y}$ amplitúdójú kinematikai rezgések esetén a saját-körfrekvenciát az

$$\omega_N(\bar{y}) = \omega_L \cdot \left(1 + \beta\bar{y}^2 + O^4(\bar{y})\right)$$

összefüggés adja meg, ahol $\omega_L = \sqrt{-a_{01}b_{10}}$ a kis amplitúdójú rezgések saját-körfrekvenciája, és a β nemlinearitási tényező a

$$\beta = \frac{1}{8}\left(\frac{3b_{30}}{b_{10}} + \frac{a_{21}}{a_{01}} - \frac{b_{12}}{a_{01}} - \frac{3a_{03}b_{10}}{a_{01}^2}\right)$$

képlettel számítható.

Jelölje az érintkezési pontok távolságát b, a kerék névleges sugarát r és a kerék kúposságát h. A kerék- és sínprofilok görbületi sugarait jelölje R_w és R_r, és a görbületi sugarak változását a kerék tengelye mentén a R'_w,R''_w, ... és R'_r,R''_r, ... deriváltak írják le.

iii) A kis amplitúdójú kinematikai rezgések saját-körfrekvenciáját az

$$\omega_L = v\sqrt{\frac{h}{br} \cdot \frac{R_w}{R_w - R_r} \cdot \left(1 + \frac{R_r h}{b\sqrt{1+h^2}}\right)}$$

összefüggés adja meg. Vagyis a Meijaard által közölt képlet változó görbületű profilokra is érvényes marad.

iv)A β nemlinearitási tényezőre a kerék- és a sínprofil a görbületek második deriváltjáig bezárólag van hatással. Kis h kúposság esetén a nemlinearitási tényező közelítő értéke

$$\beta \approx \frac{R'_w(R_w - R_r) + 3R_r(R'_w - R'_r)}{16h(R_w - R_r)^3}.$$

A nevezőben megjelentő kis h érték jelzi, hogy a profilok változó görbülete jelentős hatással van a rezgések frekvenciájának növekvő amplitúdók miatti megváltozására.

Kapcsolódó publikációk: [1], [2], [3], [4].

2. Tézis

A *kiterjesztett Filippov-rendszerek* bevezetésével a szokásos Filippov-rendszerek fogalma általánosítható olyan vektormezőkre, melyeknek izolált 2 kodimenziós sokaságon van szakadásuk. Ezekben a rendszerekben a szakadási halmaznál a vektormezőnek folytonosan sok irány menti határértéke van. A létrejövő *határ-vektormezőből* a szakadási halmaz csúszó és áthaladó tartományai definiálhatók a *határ-trajektóriák segítségével.* A csúszó tartományban a csúszó dinamika a határ-vektormező konvex kombinációjából definiálható.

Kapcsolódó publikációk: [5], [6].

3. Tézis

Tekintsünk egy merev testet, mely két merev felülettel érintkezik, és az érintkezést Coulomb-súrlódási modell írja le. Mindkét érintkezési pontban előfordulhat csúszás és gördülés, így a testnek négy kinematikai állapota lehet: két ponton gördülés, két ponton csúszás és két vegyes gördülési-csúszási eset. Két pontos gördülés esetén a két érintkezési pontra felírható gördülési kényszerek nem függetlenek. Ezért az érintkezési erők nem meghatározhatóak a merevtest-dinamika hatáskörén belül, és így a megcsúszás feltétele nem állapítható meg az érintkezési erőkből.

i) Két ponton csúszás esetén a test dinamikája kiterjesztett Filippov-rendszerrel írható le, mely két egymást metsző 2 kodimenziós szakadási sokaságot tartalmaz. A két vegyes gördülési-csúszási esetben a dinamika Filippov-rendszerrel írható le az egyes szakadási halmazokon. Két ponton gördülés esetén a dinamika a két szakadási halmaz metszetében jön létre.

Tegyük fel, hogy a négy kinematikai eset kompatibilis egymással abban az értelemben, hogy mindegyik alacsonyabb dimenziós halmazon lévő dinamika egybeesik a megfelelő magasabb dimenziós halmazon lévő dinamika által létrehozott csúszási dinamikával.

ii) A két szakadási halmaz metszetében a határ-trajektóriák vizsgálatával eldönthető, hogy a két ponton gördülő mozgásból lehetséges-e átmenet valamelyik csúszási esetbe. Így a megcsúszás feltétele a merevtest-dinamika hatókörén belül meghatározható az érintkezési erők kiszámítása nélkül.

Kapcsolódó publikációk: [7], [8], [9], [10], [11].

4. Tézis

Tekintsük a golyós áramlásmérő modelljét, amely egy függőleges tengelyű hengeres edény éle mentén mozgó golyót tartalmaz, melyet az edényben keringő közeg áramlása hajt körbe. Jelölje az edény és a golyó sugarainak különbségét d, a golyó dimenziótlan tehetetlenségi nyomatékát j. Tegyük fel, hogy a közeg sebessége állandó v_f nagyságú a kerület mentén, és a golyóra ható közegellenállást lineáris ellenálláserő írja le. A gravitációból és felhajtóerőből adódó eredő gyorsulást jelölje g. A golyó és az edény kapcsolatát Coulomb súrlódási modell írja le a statikus és a dinamikus esetre egyaránt érvényes μ súrlódási tényezővel.

i) A létrejövő kiterjesztett Filippov-rendszer vizsgálatából megmutatható, hogy $\mu < j$ esetén a két ponton gördülés egyensúlyi megoldása akkor létezik, ha

$$v_f < \sqrt{\frac{gd}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{\mu^2(\mu+1)}{\mu^2(j+1)+j-\mu}}$$

teljesül. Ellenkező esetben a golyó mindkét érintkezési pontban megcsúszik. A $\mu > j$ esetben a két pontos gördülés egyensúlyi megoldása akkor létezik, ha

$$v_f < \sqrt{\frac{gd}{j}}$$

teljesül. Ellenkező esetben a golyó megcsúszik az edény alján lévő érintkezési pontban.

A többi kinematikai esetben is kiszámíthatók az egyensúlyi megoldások, így létrehozhatók a rendszer bifurkációs diagramjai az v_f paraméter függvényében.

ii) A rendszerben nyereg-csomó bifurkáció és degenerált nemsima transzkritikus bifurkáció jön létre, ezen kívül a nemsima nyereg-csomó bifurkáció és a *persistence* bifurkáció 2 kodimenziós szakadáshoz tartozó változatai is megjelennek.

A bifurkációk vizsgálatából megállapítható, hogy az áramlásmérő alkalmazása jelentős korlátokba ütközik.

Kapcsolódó publikációk: [7], [8], [9].

5. Tézis

Tekintsük egy egyenes vágányon állandó v sebességgel mozgó vasúti jármű modelljét, ahol a jármű egy kiválasztott kerékpárjának mozgását az y laterális elmozdulás és a ψ fordulási szög írja le. Tegyük fel, hogy a kinematikai rezgések linearizált differenciálegyenlete $\dot{y} = \omega_L \eta b \cdot \psi$ and $\dot{\psi} = -\omega_L/(\eta b) \cdot y$ formában írható fel, ahol b az érintkezési pontok távolsága, η egy dimenziótlan geometriai paraméter és ω_L a kis amplitúdójú kinematikai rezgések saját-körfrekvenciája.

A modellben a járműről a kerékpárra az F_{load} tengelyterhelés hat, és a és a laterális és forduló irányú felfüggesztéseket a k_y, k_ψ effektív rugómerevségek jellemzik. A kerékpár tömege m, tehetetlenségi nyomatéka a függőleges tengely körül J_ψ. A kerékpár és a sínek kapcsolatát Coulomb súrlódási modell írja le a statikus és a dinamikus esetre egyaránt érvényes μ súrlódási tényezővel.

i) A létrejövő kiterjesztett Filippov-rendszer vizsgálatából megmutatható, hogy a kerék kis kúpossága esetén a két ponton gördülés akkor valósul meg egy (y, ψ) állapotban, ha a

$$\left(\frac{k_y^2}{m^2} - \omega_L^2\right)^2 y^2 + \left(\frac{k_\psi^2}{J_\psi^2} - \omega_L^2\right)^2 \left(\frac{J_\psi}{m}\right)^2 \psi^2 < \left(\frac{\mu F_{\mathrm{load}}}{m}\right)^2$$

feltétel teljesül. Ellenkező esetben a kerékpár mindkét érintkezési pontban megcsúszik. Megmutatható, hogy nem jöhet létre megcsúszás kizárólag az egyik érintkezési pontban.

ii) A rezgések megcsúszás nélkül elérhető maximális amplitúdóját $\min(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ adja meg, ahol

$$\bar{y}_1 = \frac{\mu F_{\mathrm{load}}/m}{\left|k_y^2/m^2 - \omega_L^2\right|}, \qquad \bar{y}_2 = \frac{\eta \mu F_{\mathrm{load}}\, b^2/J_\psi}{\left|k_\psi^2/J_\psi^2 - \omega_L^2\right|}.$$

Kapcsolódó publikációk: [3], [10], [11].

Hivatkozások

[1] M. Antali, „Dynamics of rolling of railway wheelsets," Master's thesis, Budapest University of Technology and Economics, Department of Applied Mechanics, 2013.

[2] M. Antali and G. Stepan, „Nonlinear kinematic oscillations of railway wheelsets of general surface geometry," *Proc. Appl. Math. Mech.*, vol. 14, no. 1, pp. 303–304, 2014.

[3] M. Antali and G. Stepan, „On the nonlinear kinematic oscillations of railway wheelsets," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 11, no. 5, pp. 1–10, 2016.

[4] M. Antali, G. Stepan, and S. J. Hogan, „Kinematic oscillations of railway wheelsets," *Multibody System Dynamics*, vol. 34, no. 3, pp. 259–274, 2015.

[5] M. Antali and G. Stepan, „Nonsmooth analysis of a simple rolling-sliding mechanical system with coulomb friction," in *Investigating Dynamics in Engineering and Applied Science (IDEAS 2014), Budapest*, 2014. poster.

[6] M. Antali and G. Stepan, „Sliding dynamics on codimension-2 discontinuity surfaces," in *Research Perspectives CRM Barcelona – Nonsmooth Dynamics (ISBN: 978-3-319-55641-3)* (M. Jeffrey et al., ed.), pp. 1–4, Springer-Birkhauser, 2017.

[7] M. Antali and G. Stepan, „Nonlinear dynamics of a dual-point-contact ball," in *Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), CD-ROM volume (ISBN: 978-3-200-03433-4)* (H. Ecker et. al., ed.), pp. 1–2, Vienna University of Technology, 2014.

[8] M. Antali and G. Stepan, „Ket ponton gordulo golyo nem-folytonos dinamikaja (in Hungarian)," in *Proceedings of Twelft Hungarian Conference of Mechanics (MAMEK 2015) (ISBN:978-6-155-21674-9)* (A. Baksa, E. Bertoti, and S. Szirbik, eds.), pp. 1–8, 2015.

[9] M. Antali and G. Stepan, „Discontinuity-induced bifurcations of a dual-point contact ball," *Nonlinear Dynamics*, vol. 83, no. 1, pp. 685–702, 2016.

[10] M. Antali and G. Stepan, „Loss of stability in a nonsmooth model of dual-point rolling," in *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (ISBN: 978-1-138-02885-2)* (M. Rosenberger et. al., ed.), pp. 937–946, CRC Press, 2016.

[11] M. Antali and G. Stepan, „Oscillations of railway wheelsets with discontinuous model of the contact forces," in *6th International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer, Liege*, 2016. poster.