Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Algebra Tanszék

Reprezentáció elméleti kérdések vizsgálata véges csoportokon

Mélység, Eltünő tulajdonságok, Expanzivitás

PhD tézisfüzet

Petényi Franciska

Témavezető: Dr. Horváth Erzsébet

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

1.1. Mélység . . . 2

1.2. Irreducibilis karakterek eltűnő tulajdonságai . . . 3

1.3. Expanzivitás . . . 3

2. Mélység **4**

2.1. Mélység a Suzuki-csoportokban . . . 5

2.2. Mélység a Ree-csoportokban . . . 6

3. Karakterek eltűnő tulajdonságai **7**

3.1. Becslések szimmetrikus csoportokra . . . 10

3.2. Becslések Suzuki-csoportokra . . . 11

3.3. Becslések Ree-csoportokra . . . 12

4. Expanzivitás **15**

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Mélység

A mélység fogalmát eredetileg Neumann-algebrákra vezették be. Később a Hopf- és a Frobenius-algebrák mélyéségét is vizsgálni kezdték. A féligegyszerű (komplex) algebra-tartalmazások mélységével kapcsolatban pedig 2008 óta folynak kutatások. Kezdetben csak az egy illetve kettő mélység volt definiálva (lásd [6] és [5]), amely a következőket jelenti. Legyen $H \leqslant G$. Ekkor a $\mathbb{C}H$ csoportalgebra *mélysége* $\mathbb{C}G$-ben 1 ($d(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G) = 1$), ha $\mathbb{C}G$ direktösszeadandója $\mathbb{C}H - \mathbb{C}H$-bimodulusként a $\mathbb{C}H$ egy direkt hatványának. Továbbá a $\mathbb{C}H$ csoportalgebra mélysége $\mathbb{C}G$-ben 2, ha $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}G$ direktösszeadandója $\mathbb{C}G - \mathbb{C}H$-bimodulusként a $\mathbb{C}G$ egy direkt hatványának. A definíció tetszőleges n mélységre megtalálható a 2 fejezetben. A későbbiekben a $\mathbb{C}H \subseteq \mathbb{C}G$ csoportalgebra tartalmazás mélységét hívták a $H \leqslant G$ csoport tartalmazás *közönséges mélységé*nek ($d(H, G)$). Érdekes módon a kettő mélységű részcsoportok pontosan a normálosztók.
A kombinatorikus mélységet, $d_c(H, G)$-t [4]-ben definiálták először. Ugyanebben a cikkben a szerzők azt is megmutatták, hogy tetszőleges $H \leqslant G$ véges csoport és R nemtriviális kommutatív gyűrű esetén $d(RH, RG) \leq d_c(H, G) \leq 2[G : N_H(H)]$, azaz a kombinatorikus mélység (véges G csoport esetén) mindig véges és felső becslése a közönséges mélységnek. A téma intenzíven kutatott terület mind a csoportalgebrák, mind általános algebrák esetén, lásd [4], [5], [6], [8], [7], [10], [13], [14], [15], [20], [27], [28] és [29]. A következőkben azt fogjuk vizsgálni, hogy egy rögzített csoport-osztályban bizonyos részcsoportok mélysége lehet-e korlátos a csoport rendjétől függetlenül. Boltje, Danz és Külshammer cikkében a következő példát található, annak megmutatására, hogy egyik mélység fogalom sem tranzitív tulajdonságú ([4, 5.4 Kérdés, 5.5 Példa, 5.6 Probléma, 5.7 Megjegyzés]). A példa $C_2 \wr C_p$ bizonyos részcsoportjaira vonatkozik, azaz

$$d_c(\times^{p-1}C_2\ ,\ C_2 \wr C_p) = d(\times^{p-1}C_2\ ,\ C_2 \wr C_p) = 2p - 1$$

tetszőleges p prím esetén, másrészt $d_c(\times^{p-1}C_2\ ,\ \times^p C_2) = d(\times^{p-1}C_2\ ,\ \times^p C_2) = 1$ és $d_c(\times^p C_2\ ,\ C_2 \wr C_p) = d(\times^p C_2\ ,\ C_2 \wr C_p) = 2$. Ebben a példában bizonyos maximális részcsoportok mélysége a csoport rendjétől független konstanssal felülről becsülhető, a fent említett nem maximálisoké pedig nem. Azonban, több csoportban is előfordulnak nem maximális részcsoportok a csoport rendjétől független korláttal. Például ha $H \in Syl(G)$ és Abel, akkor Brodkey egy eredménye szerint létezik olyan $g \in G$, melyre $Core_G(H) = H \cap H^g$. Ekkor a 2.1 Tétel értelmében $d(H, G) \leq 4$. További példák a normálosztók (2 mélyégűek) illetve a TI részcsoportok (3 mélységűek).
A következő megfigyelésünk, hogy nem minden csoport-osztály maximális részcsoportjai korlátos mélységűek. Például S_n maximális S_{n+1}-ben, továbbá a [4, 5.1 Áll.] Állítás értelmében $d_c(S_n, S_{n+1}) = d(S_n, S_{n+1}) = 2n - 1$.
Nemrég Fritzsche bebizonyította, hogy a $PSL_2(q)$ maximális részcsoportjainak mélysége legfeljebb 5. Feit eredménye szerint páros q esetén kétféle Zassenhaus-csoport létezik a $PSL_2(q)$ és az $Sz(q)$ Suzuki-csoportok. Ezért természetesen adódott, hogy a Suzuki-csoportok részcsoportjainak mélységét is érdemes megvizsgálni. A disszertációnkban megmutattuk, hogy a maximális részcsoportok kombinatorikus illetve közönséges mélysége minden $Sz(q)$ Suzuki-csoportban legfeljebb 5 (2.4 Tétel és 2.5 Következmény). A Zassenhaus-csoportok definícióját gyengítve eljutunk egy tágabb csoportosztályhoz. Ezeket Ree-típusú csoportoknak nevezik. Ez az osztály tartalmazza a ${}^2G_2(q)$ Ree-csoportokat. Az előző esethez hasonlóan

meghatároztuk a Ree-csoportok minden maximális részcsoportjának közönséges illetve kombinatorikus mélységét is. Ez az érték ismét független a q paramétertől és legfeljebb 6 (2.7 Tétel).

1.2. Irreducibilis karakterek eltűnő tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy egy irreducibilis karakter eltűnik egy csoportelemen vagy egy konjugáltosztályon, ha a karakter nulla értéket vesz fel rajta. A szakirodalomban az irreducibilis karakterek nullhelyeit többen is vizsgálták ([1], [3], [9], [11], [12], [26], [16], [17], [25], [34], [38], [39], [40], [43], [48], [49], [50], [51] és [52]).

A célunk az volt, hogy összehasonlítsuk Gallagher (3.1 Tétel), Chillag (3.3 Tétel) és Wilde (3.7 Tétel) eredményeit. Mivel egyes becslések eltűnő konjugáltosztályok számára, mások pedig eltűnő csoportelemek számára vonatkoztak, ezért megfogalmaztuk mindhárom becslésnek konjugáltosztályokra illetve csoportelemekre vonatkozó $3-3$ változatát. Ezen becslések felső indexe $\mathfrak{G}$ vagy $\mathfrak{C}$ attól függően, hogy a becslés az eltűnő csoportelemekre vagy az eltűnő konjugáltosztályokra vonatkozik. Az alsó index pedig Ga, Ch, W-ből választjuk annak megfelelően, hogy mely szerző a tételéből készítettük az adott becslést. Bebizonytottuk, hogy mind az elemekre vonatkozó becslések $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}$, $E^{\mathfrak{G}}_{Ch}$és $E^{\mathfrak{G}}_{W}$ illetve mind a konjugáltosztályokra vonatkozó becslések $E^{\mathfrak{C}}_{Ga}$, $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}$és $E^{\mathfrak{C}}_{W}$ esetén teljesül, hogy a becslésekből alkotott minden rendezett párra létezik csoport, melynek egy karakterére a második becslés jobb, mint az első. A 3.9 Tételben meghatároztuk a legkisebb ilyen csoportokat.

Továbbá vizsgáltuk Wilde egy sejtését (3.6 Sejtés), mely szerint ha egy $g \in G$ elem rendje nem osztja $|G|/\chi(1)$-et valamely $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ karakterre, akkor $\chi(g) = 0$. Sejtését igazolta feloldható csoportokra, továbbá megemlítette, hogy szimmetrikus illetve p-csoportokra is igaz. A dolgozatban bebizonyítottuk Wilde sejtését szimmetrikus csoportokra illetve Suzuki- és Ree-csoportokra (3.21 és 3.23 Tétel). A sejtés segítségével bevezettük az $E^{\mathfrak{C}}_{Co}$és az $E^{\mathfrak{G}}_{Co}$becsléseket. Megjegyezzük, hogy a sejtés megfordítása is igaz Suzuki-csoportokra, de a Ree-csoportokra már nem. Ennek következményeként kaptuk, hogy a Suzuki-csoportokra a sejtésből származtatott becslések pontosak. Mivel a sejtésből származtatott becslések jobbak, mint Wilde becslései, ezért a szimmetrikus, Suzuki- és Ree-csoportokon a $E^{\mathfrak{C}}_{Ga}$, a $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}$és a $E^{\mathfrak{C}}_{Co}$ illetve a $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}$, a $E^{\mathfrak{G}}_{Ch}$és a $E^{\mathfrak{G}}_{Co}$ becsléseket hasonlítottuk össze. Arra a kérdésre kerestük a választ, hogy a becslések minden (azonos típusú) rendezett párjára létezik-e végtelen sok csoport az adott csoport-osztályban, melynek legalább egy karakterére a második becslés jobb, mint az első. Szimmetrikus csoportokra a fő eredmény a 3.18 és 3.19 Tételben olvasható. A Suzuki- és a Ree-csoportoknál Mathematica ([36]) programok segítségével megmutattuk, hogy $E^{\mathfrak{C}}_{Co} \geq E^{\mathfrak{C}}_{Ga} \geq E^{\mathfrak{C}}_{Ch}$ illetve $E^{\mathfrak{G}}_{Co} \geq E^{\mathfrak{G}}_{Ga} \geq E^{\mathfrak{G}}_{Ch}$ teljesül a csoport minden irreducibilis karakterére.

1.3. Expanzivitás

A G csoport (konjugáltosztály) expanzívnak nevezzük, ha minden normális S részhalmaz és minden C konjugáltosztály esetén az SC normális halmaz legalább annyi konjugáltosztályát tartalmazza G-nek, mint S. Halasi, Maróti, Sidki és Bezerra megmutatta, hogy egy csoport pontosan akkor konjugáltosztály expanzív, ha direkt szorzata abel és konjugáltosztály expanzív egyszerű csoportoknak. Ennek analógiájára egy G csoportot *karakter expanzív*nak nevezzük, ha minden α karaktere és χ irreducibilis karaktere esetén az $\alpha\chi$ karakter (különböző) irreducibilis karaktereinek a száma legalább annyi, mint α karakternek. A teljes problémát nem tudtuk megoldani, de tettünk néhány lépést a karakter expanzív csoportok leírására. Azt sejtjük, hogy egy csoport pontosan akkor karakter expanzív, ha Abel és karakter expanzív egyszerű csoportok direkt szorzata. Az egyszerűbb irány, azaz egy ilyen direkt szorzat karakter expanzívsága következik a 4.3 Tételből. Továbbá megmutattuk, hogy a másik irányra egy minimális ellenpélda egyetlen minimális normálosztót tartalmaz, amely Abel, de nem centrális (4.5 Tétel). A 4.1 Tétel következményeként kaptuk, hogy a szimmetrikus csoportok, S_n ($n > 4$ esetén) nem karakter expanzívak. Továbbá Mathematica programok segítségével megmutattuk, hogy a Suzuki- és a Ree-csoportok karakter expanzívak. A pontos program kódok megtalálhatóak a [41] oldalon.

2. fejezet

Mélység

Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{C}H \subseteq \mathbb{C}G$ csoportalgebra tartalmazás *mélysége* $2n$, ha $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \cdots \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}G$ ($n+1$-szeres tenzorszorzata $\mathbb{C}G$-nek) direktösszeadandója a $\oplus^a \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \cdots \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}G$ (n-szeres tenzorszorzata $\mathbb{C}G$-nek) direktösszegnek, mint $\mathbb{C}G - \mathbb{C}H$-bimodulus valamely pozitív a számra. Továbbá $\mathbb{C}H$ mélysége $2n+1$ in $\mathbb{C}G$-ben ha a fenti direktösszeadandóság $\mathbb{C}H - \mathbb{C}H$-bimodulusként teljesül. Végül a $\mathbb{C}H$ mélysége 1 $\mathbb{C}G$ csoportalgebrában, ha $\mathbb{C}G$ direktösszeadandója a $\oplus^a \mathbb{C}H$ direktösszegnek, mint $\mathbb{C}H - \mathbb{C}H$ bimodulus.
A mélység felszálló tulajdonságú, azaz ha a $\mathbb{C}H \leqslant \mathbb{C}G$ csoportalgebra mélysége n, akkor $n+1$, $n+2$, ... mélységű is. Általában az irodalomban a mélységet azonosítják a minimális mélységgel és a továbbiakban mi is ezt az értelmezést fogjuk használni.
A $\mathbb{C}H \subseteq \mathbb{C}G$ csoportalgebra mélységét a H G-beli részcsoport *közönséges mélységének* nevezzük és $d(H,G)$-vel jelöljük.

A következő tétel egyik következménye, hogy a TI részcsoportok mélysége 3.

2.1. Tétel. *[8, 6.9 Tétel] Tegyük fel, hogy H részcsoportja a G véges csoportnak és $N = Core_G(H)$ előáll H m darab konjugáltjának a metszeteként. Ekkor a H részcsoport közönséges mélysége legfeljebb $2m$ G-ben. Ha $N \leq Z(G)$ akkor $d(H,G) \leq 2m-1$ is teljesül.*

A [4] cikk foglalkozott először a *kombinatorikus mélység* fogalmával. A definíció felelevenítése előtt néhány információ a bihalmaz struktúrákról.

Legyenek J, K, L véges csoportok, továbbá legyen X egy (J,K)-bihalmaz és Y egy (K,L)-bihalmaz. Ekkor $X \times Y$ egy (J,L)-bihalmaz lesz, amelyen a K csoport a következő módon hat: $k \cdot (x,y) := (xk^{-1}, ky)$ minden $x \in X, y \in Y, k \in K$. Ezen hatás K orbitjait jelöli $X \times_K Y$. Ez a halmaz örököl egy (J,L)-bihalmaz struktúrát. Legyen $\Theta_1(H,G) = G$ mint (G,G)-bihalmaz és legyen $\Theta_{i+1}(H,G) := \Theta_i(H,G) \times_H G$ tetszőleges $i \geq 1$ esetén. Jelölje $\Theta'_i(H,G)$ a $\Theta_i(H,G)$ halmazt, mint (H,H)-bihalmazt. Hasonlóan, jelölje $\Theta^l_i(H,G)$ valamint $\Theta^r_i(H,G)$ a $\Theta_i(H,G)$ halmazt, mint (H,G)-bihalmazt illetve mint (G,H)-bihalmazt. Továbbá legyen $\Theta'_0(H,G) := H$, mint (H,H)-bihalmaz. A H részcsoport kombinatorikus mélysége $2i$ G-ben valamely $i \geq 1$-re, ha léteznek a_1, a_2 természetes számok, hogy $\Theta^r_{i+1}(H,G)$ direktösszeadandója $a_1 \cdot \Theta^r_i(H,G)$-nek és $\Theta^l_{i+1}(H,G)$ direktösszeadandója $a_2 \cdot \Theta^l_i(H,G)$-nek. Továbbá H kombinatorikus mélysége $2i+1$, ha ${\Theta^{'}}_{i+1}(H,G)$ direktösszeadandója $a \cdot {\Theta^{'}}_i(H,G)$-nek valamely a számra. A továbbiakban kombinatorikus mélység ($d_c(H,G)$) alatt a minimális kombinatorikus mélységet fogjuk érteni, ez jól definiált.

Mind a közönséges és a kombinatorikus mélységére teljesül, hogy $d_c(H,G) \leq 2$ (vagy $d(H,G) \leq 2$) pontosan akkor, ha H normálosztó G-ben. A [4, 4.5 Megjegyzés] eredménye alapján, a közönséges mélység értéke nem változik meg, ha a komplex számtestet lecseréljük tetszőleges nulla karakterisztikájú testre, és a $d(H,G)$ közönséges mélységet felülről becsülhetjük a $d_c(H,G)$ kombinatorikus mélységgel.

Vezessük be a következő jelöléseket $H^x := x^{-1}Hx$ és $H^{(x)} = H \cap H^x$, továbbá $H^{(x_1,\ldots,x_n)} := H \cap H^{x_1} \cap \ldots \cap H^{x_n}$ tetszőleges $x, x_1, \ldots, x_n \in G$ esetén. Legyen $\mathcal{U}_i := \mathcal{U}_i(H,G) := \{H^{(x_1,\ldots,x_i)} | x_1, \ldots, x_i \in G\}$ és $\mathcal{U}_\infty := \mathcal{U}_\infty(H,G) := \cup_{i \geq 0} \mathcal{U}_i$, ahol $\mathcal{U}_0 := \{H\}$. A [4] cikk a $d_c(H,G)$ kombinatorikus mélységre a következő jellemzést adja:

2.2. Tétel. *[4, 3.9 Tétel] Legyen H egy részcsoportja a G véges csoportnak.*

(i) Legyen $i \geq 1$. Ekkor: $d_c(H,G) \leq 2i \Leftrightarrow \mathcal{U}_{i-1} = \mathcal{U}_i \Leftrightarrow \mathcal{U}_{i-1} = \mathcal{U}_\infty \Leftrightarrow$ minden $x_1, \ldots, x_i \in G$ esetén létezik $y_1, \ldots, y_{i-1} \in G$ melyre $H^{(x_1,\ldots,x_i)} = H^{(y_1,\ldots,y_{i-1})}$.

(ii) Legyen $i > 1$. Ekkor $d_c(H,G) \leq 2i-1 \Leftrightarrow$ minden $x_1, \ldots, x_i \in G$ esetén létezik $y_1, \ldots, y_{i-1} \in G$ úgy hogy $H^{(x_1,\ldots,x_i)} = H^{(y_1,\ldots,y_{i-1})}$ és $x_1hx_1^{-1} = y_1hy_1^{-1}$ minden $h \in H^{(x_1,\ldots,x_i)}$ esetén.

(iii) $d_c(H,G) = 1 \Leftrightarrow$ minden $x \in G$-hez létezik olyan $y \in H$ melyre $xhx^{-1} = yhy^{-1}$ minden $h \in H$ esetén $\Leftrightarrow G = HC_G(H)$.

2.1. Mélység a Suzuki-csoportokban

Feit nevezetes eredménye ([23, XI. fejzet, 6.1 Tétel]) alapján, a Zassenhaus-csoportok foka q_1+1 alakban írható, ahol q_1 prímhatvány. Páros q_1 esetén két ilyen csoport sorozat van: $PSL(2,2^m)$ és $Sz(2^{2m+1})$. Suzuki megmutatta, hogy ez az összes Zassenhaus-csoport páros q_1 esetén ([44, 45]). A Suzuki-csoportokat definiálhatjuk a $GL(4,q)$ részcsoportjaiként is ([23, XI. fejezet, 182. oldal]). Ezen kívül minden $Sz(q)$ Suzuki-csoport Lie-típusú, csavart ${}^2B_2(q)$ csoport is, amely egyszerű ha $q \geq 8$. Egy Suzuki-csoport részcsoportjai a következők lehetnek.

2.3. Tétel (Suzuki)**.** *Legyen $G = Sz(q)$, ahol $q = 2^{2m+1}(= 2r^2)$ valamely m pozitív egész számra. Ekkor a G csoportnak a következő részcsoportjai lehetnek:*

1. *2-Sylow normalizátor: $N_G(F) = FH \in Hall_{q^2(q-1)}(G)$.*
2. *$B_0 = N_G(H)$: $2(q-1)$-ed rendű diéder csoport.*
3. *A_1, A_2: $q+2r+1$-ed és $q-2r+1$-ed rendű ciklikus Hall-csoportok.*
4. *$B_1 = N_G(A_1)$, $B_2 = N_G(A_2)$: $4|A_1|$ és $4|A_2|$-ed rendű Frobenius-csoportok.*
5. *$Sz(s)$-sel izomorf részcsoportok, ahol s páratlan 2-hatvány, $s \geq 8$, és $q = s^n$ valamely n számra. Továbbá, minden $s \geq 8$ páratlan kitevős 2-hatványra, ahol $s^n = q$ teljesül valamely n egészre, létezik $Sz(s)$-sel izomorf részcsoport.*
6. *Részcsoporjai (és konjugáltjai) a fenti csoportoknak.*

Állítások sorozatát bizonyítva meghatároztuk a Suzuki-csoport maximális részcsoportjainak kombinatorikus illetve közönséges mélységét.

2.4. Tétel (Héthelyi, Horváth, P [22, 4.1 Tétel])**.** *Tekintsük a maximális részcsoportok egy-egy reprezentánsát (konjugáltságra nézve) a $G = Sz(q)$ Suzuki csoportban. Suzuki eredményét használva (Tétel 2.3) ezek a következők:*

$N_G(F)$, $B_0 = N_G(H)$, $B_1 = N_G(A_1)$, $B_2 = N_G(A_2)$ és $G_1 \simeq Sz(s)$, úgy hogy létezik t prím, melyre $s^t = q$. A fenti részcsoportok kombinatorikus mélysége: $d_c(N_G(F),G) = 5$, $d_c(B_0,G) = 4$, $d_c(B_1,G) = 4$, $d_c(B_2,G) = 4$ és $d_c(G_1,G) = 4$.

2.5. Következmény (Héthelyi, Horváth, P [22, 5.1 Következmény])**.** *A $G = Sz(q)$ csoport 2.4 tételben említett részcsoportjainak közönséges mélysége 3, kivéve $d(N_G(F),G)$−t, melynek értéke 5.*

2.2. Mélység a Ree-csoportokban

Legyen $G = R(q)$ $q = 3^{2n+1} = 3m^2 > 3$ paraméterű Ree-csoport. $R(q) =^2 G_2(q)$ csavart, Lie-típusú egyszerű csoport. További információk a Ree-csoportokról a [23, XI 13.2], [30], [32],[33],[47] és [53] cikkekben találhatók. Itt csak a maximális részcsoportjait ismertetjük.

2.6. Tétel. *Legyen $G = R(q)$. Ekkor a maximális részcsoportjai a következők lesznek*

1. *egy* 3*-Sylow normalizátora: $N_G(P)$;*
2. *egy i involúció centralizátora: $C_G(i)$;*
3. *$M^{\pm 1} \in Hall_{q\pm 3m+1}$ Hall-részcsoportok normalizátorai: $N_G(M^{\pm 1})$*
4. *$M \in Hall_{(q+1)/4}$ Hall-részcsoport normalizátora: $N_G(M)$*
5. *q_0 paraméterű $R(q_0)$ Ree-részcsoportok, ahol $q_0^a = q$ és a prím;*
6. *a fenti részcsoportok konjugáltjai.*

Állítások és lemmák sorozatát bizonyítva meghatároztuk a fenti részcsoportok a kombinatorikus és közönséges mélységét.

2.7. Tétel (Héthelyi, Horváth, P [21])**.** *Legyen $G = R(q)$ egy $q = 3^{2n+1} > 3$ paraméterű Ree-csoport. Ekkor G maximális részcsoportjainak kombinatorikus illetve közönséges mélysége következő:*

- $d_c(N_G(P), G) = d(N_G(P), G) = 5$,
- $d_c(N_G(M^1), G) = d_c(N_G(M^{-1}), G) = 4$,
- $d(N_G(M^1), G) = d(N_G(M^{-1}), G) = 3$,
- $d_c(N_G(M), G) = d_c(C_G(i), G) = 6$,
- $d(N_G(M), G) = d(C_G(i), G) = 3$ *és*
- $d_c(G_0, G) = 4$, $d(G_0, G) = 3$.

3. fejezet

Karakterek eltűnő tulajdonságai

Legyen G egy véges csoport és χ a G csoport egy irreducibilis (komplex) karaktere. Azt mondjuk, hogy χ *eltűnik* g elemen, ha 0 értéket vesz fel rajta. Az első ismert eredmény a témában Burnside-tól származik ([24, Thm. 3.15]), mely szerint minden nem lineáris irreducibilis karakter eltűnik valamely elemen (konjugáltosztályon) a csoportban. A célunk, hogy alsó becsléseket készítsünk az eltűnő elemek illetve konjugáltosztályok számára, melyeket össze fogunk hasonlítani. Ehhez Gallagher (3.1 Tétel), Chillag (3.3 Tétel), és Wilde (3.7 Tétel) eredményeit fogjuk használni és $3-3$ alsó becslést készítünk az eltűnő elemek illetve az eltűnő konjugáltosztályok számára.
Először vezessük be a következő jelöléseket! Legyen $n^{\mathfrak{G}}(\chi)$ illetve $n^{\mathfrak{C}}(\chi)$ az eltűnő elemek illetve az eltűnő konjugáltosztályok száma,

$$n^{\mathfrak{G}}(\chi) = |\{g \in G \mid \ \chi(g) = 0\}| \text{ és } n^{\mathfrak{C}}(\chi) = |\{C \in \mathrm{Cl}(G) \mid \ \chi|_C = 0\}|.$$

Gallagher a következőképpen erősítette Burnside eredményét.

3.1. Tétel (Gallagher [16, 4 Tétel])**.** *Minden χ irreducibilis karakter esetén*

$$n^{\mathfrak{G}}(\chi) \geqslant (\chi(1)^2 - 1)|Z(\chi)|,$$

ahol $Z(\chi)$ a χ karakter centruma. Továbbá pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha $|\chi|$ csak 0, 1 és $\chi(1)$ értékeket vesz fel.

Bevezettük az úgy nevezett Gallagher-becslést eltűnő elemek számára: $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}(\chi) = (\chi(1)^2 - 1)|Z(\chi)|$.

3.2. Megjegyzés. *Végtelen sok olyan csoport van, melyre $n^{\mathfrak{G}}(\chi) = E^{\mathfrak{G}}_{Ga}(\chi)$ a csoport valamely χ irreducibilis karaktere esetén. Például azon csoportok, amelyeknek a nilpotencia osztálya* 2 *([24, 2.30 Következmény, 2.31 Tétel]).*

Tekintsük a következő eredményt.

3.3. Tétel (Chillag [9, 1.1 Tétel])**.** *Legyen G egy olyan véges nem Abel csoport, melyre $G \neq G'$ és legyen χ a G csoport egy nem-lineáris irreducibilis karaktere. Ekkor a következők egyike teljesül:*

(i) Létezik egy olyan $x \in G$, melyre $|C_G(x)| \leqslant 2n^C(\chi)$. Sőt az x elem választható akármelyik olyan maximális méretű konjugáltosztályból, melyen a χ eltűnik.

(ii) $\phi = \chi_{G'} \in \mathrm{Irr}(G')$ és $\phi^G = \chi \sum\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Irr}(G),\ \lambda(1) = 1\}$. Továbbá $\{\chi\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Lin}(G)\}$ halmaz ponzosan $|G : G'|$ kiterjesztését tartalmazza ϕ karakternek. Speciálisan ϕ nem lineáris és $G'' \neq 1$.

Ezen tételből a Burnside-tétellel ötvözve a következő alsó becslést ($E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi)$-t) készítettük $n^{\mathfrak{C}}(\chi)$ értékére.

$$E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \chi \text{ lineáris}, \\ \min_{\{x\in G \ \mid \ \chi(x)=0\}} \lceil |C_G(x)|/2 \rceil, & \text{ha } G \neq G' \text{ és } \chi_{G'} \notin \mathrm{Irr}(G'), \\ 1, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Vizsgáltuk azt az esetet, amikor $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi) = 1$.

3.4. Állítás (P [42, 2.4 Állítás]). *Legyen G véges csoport, melyre $G \neq G'$, és legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ egy nem-lineáris irreducibilis karaktere melyre $\chi_{G'} \notin \mathrm{Irr}(G')$. Továbbá tegyük fel, hogy $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi) = 1$. Ekkor $n^{\mathfrak{G}}(\chi) = \frac{|G|}{2}$ és $n^{\mathfrak{C}}(\chi) = 1$. Továbbá, G Frobenius csoport másodrendű komplementerrel.*

Tegyük fel, hogy ismerjük a G csoport konjugáltosztályainak a méretét. Ekkor felhasználva az $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}(\ )$ Gallagher-becslést az eltűnő elemek számára, egy ($E^{\mathfrak{C}}_{Ga}(\ )$) alsó becslést készítettünk az eltűnő konjugáltosztályok $n^{\mathfrak{C}}$ számára:

$$E^{\mathfrak{C}}_{Ga}(\chi) = \min\{|J| \ \mid \ J \subseteq I, \ \sum_{j\in J} |C_j| \geqslant E^{\mathfrak{G}}_{Ga}(\chi)\},$$

ahol $\mathrm{Cl}(G) = \{C_i\}_{i\in I}$.

Hasonlóan felhasználva az $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\ )$ Chillag-becslést az eltűnő konjugáltosztályok számára, alső becslést ($E^{\mathfrak{G}}_{Ch}(\ )$) készítettünk az eltűnő csoport elemek $n^{\mathfrak{G}}(\ )$ számára. Figyelembe véve a 3.4 Állítást és a tényt, hogy a centrumon semelyik karakter sem tűnik el:

$$E^{\mathfrak{G}}_{Ch}(\chi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \chi \text{ lineáris}, \\ \dfrac{|G|}{2}, & \text{ha } E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi) = 1,\ G \neq G', \\ & \quad \text{és } \chi_{G'} \notin \mathrm{Irr}(G'), \\ \min_{J\subseteq I}\{\sum_{j\in J} |C_i| \ \mid & \\ \quad C_j \in \mathrm{Cl}(G),\ C_j \nsubseteq Z(G) \text{ és } |J| = E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi)\}, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy $\chi_{G'} \in \mathrm{Irr}(G')$ esetén $E^{\mathfrak{G}}_{Ch}(\chi)$ a legkisebb nem centrális konjugáltosztály mérete.

Wilde eredményeinek ismertetése előtt tekintsük a következőket.

3.5. Tétel (Brauer, Nesbitt [24, 8.17 Tétel]). *Legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ és tegyük fel, hogy $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$ valamely p prímre. Ekkor $\chi(g) = 0$, ha $p \mid o(g)$.*

Ezt átfogalmazhatjuk a következőképpen, ha a g elem $o(g)$ rendjének $o(g)_0$ négyzetmentes része nem osztja $\frac{|G|}{\chi(1)}$-t, akkor $\chi(g) = 0$.

Wilde a [48, 1.1 Sejtés] cikkében megfogalmazta a következő sejtést.

3.6. Sejtés (Wilde). *Legyen G véges csoport, továbbá legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ és $g \in G$. Tegyük fel, hogy $\chi(g) \neq 0$. Ekkor $o(g)$ osztja $\frac{|G|}{\chi(1)}$-t.*

Wilde [48] cikkében megmutatta, hogy a 3.6 Sejtés igaz feloldható csoportokra, és megjegyezte, hogy szimmetrikus csoportokra is igaz. A teljesség kedvéért mi is adtunk egy bizonyítást erre. Továbbá ellenőriztük, hogy a Suzuki- és a Ree-csoportokra is igaz a sejtés. Ezekre még a későbbbiekben visszatérünk.

Ezért a sejtést ötvözve Burnside tételével ([24, 3.15 Tétel]) a következő alsó becsléseket adtuk az eltűnő elemek $n^{\mathfrak{G}}(\ )$ számára, illetve az eltűnő konjugáltosztályok $n^{\mathfrak{C}}(\ )$ számára. Legyen χ egy nem-lineáris irreducibilis karaktere egy olyan G csoportnak, melyen teljesül a 3.6 sejtés.

$$E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\chi) = \max\left\{\left|\left\{g \in G \mid o(g) \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}\right\}\right|, \min_{C\in \mathrm{Cl}(G), |C|\neq 1} |C|\right\},$$
$$E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\chi) = \max\left\{\left|\left\{C \in \mathrm{Cl}(G) \mid o(g) \nmid \frac{|G|}{\chi(1)} \text{ minden } g \in C\right\}\right|, 1\right\}.$$

Lineáris χ karakter esetén $E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\chi) = E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\chi) = 0$.

Tetszőleges csoportra Wilde a következő részeredményt kapta .

3.7. Tétel (Wilde [48, 2.1 Tétel]). *Legyen χ egy irreducibilis karaktere a G csoportnak és $g \in G$ egy olyani elem, hogy $\chi(g) \neq 0$. Ekkor $o(g)o(g)_0 \mid (\frac{|G|}{\chi(1)})^2$ és $o(g)^3 \mid \frac{|G|^3}{\chi(1)^2}$.*

A 3.7 Tételt és Burnside eredményét használva a következő alsó becsléseket adtuk az eltűnő elemek $n^{\mathfrak{G}}(\ )$ és az eltűnő konjugáltosztályok $n^{\mathfrak{C}}(\ )$számára. A Wilde-tól származtatott becsléseket az eltűnő elemek illetve konjugáltosztályok számára $E_W^{\mathfrak{G}}(\ )$-vel illetve $E_W^{\mathfrak{C}}(\ )$-vel fogjuk jelölni.

$$E_W^{\mathfrak{G}}(\chi) = \max\left\{\left|\left\{g \in G \mid o(g)o(g)_0 \nmid \frac{|G|^2}{\chi(1)^2} \text{ vagy } o(g)^3 \nmid \frac{|G|^3|}{\chi(1)^2}\right\}\right|, \min_{C\in \mathrm{Cl}(G), C\not\subseteq Z(G)} |C|\right\},$$
$$E_W^{\mathfrak{C}}(\chi) = \max\left\{\left|\left\{C \in \mathrm{Cl}(G) \mid o(g)o(g)_0 \nmid \frac{|G|^2}{\chi(1)^2} \text{ vagy } o(g)^3 \nmid \frac{|G|^3}{\chi(1)^2} \text{ minden } g \in C\right\}\right|, 1\right\}.$$

Természetesen az $E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\chi) \geq E_W^{\mathfrak{G}}(\chi)$ és az $E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\chi) \geq E_W^{\mathfrak{C}}(\chi)$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Ezért az $E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\ ), E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\ )$ becsléseket fogjuk használni az $E_W^{\mathfrak{C}}(\ ), E_W^{\mathfrak{G}}(\ )$ becslések helyett a szimmetrikus, Suzuki- illetve Ree-csoportoknál.

Beláttuk, hogy a 3.6 sejtés igaz p-csoportokra.

3.8. Állítás (P [42, 2.8 Állítás]). *Legyen G egy p-csoport, ekkor minden $g \in G$ és minden $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ esetén $o(g) \mid \frac{|G|}{\chi(1)}$. Speciálisan minden $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ esetén $E_W^{\mathfrak{C}}(\chi) = 1$ és $E_W^{\mathfrak{G}}(\chi) = \min_{C\in \mathrm{Cl}(G)\setminus Z(G)} |C|$.*

A előbbi becsléseket az eltűnő elemek $(n^{\mathfrak{G}}(\chi))$ és eltűnő konjugáltosztályok $(n^{\mathfrak{C}}(\chi))$ számára összehasonlítottuk kisméretű csoportokra (a [46] GAP programcsomag segítségével). A használt programok megtalálhatóak a [41] honlapon.

3.9. Tétel (P [42, 2.9 Tétel]). *Tetszőleges rendezett párra az eltűnő konjugáltosztályok számára vonatkozó becslések közül: $\{E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\ ),\ E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\ ), E_W^{\mathfrak{C}}(\ )\}$ illetve az eltűnő elemek számára vonatkozó becslések közül: $\{E_{Ch}^{\mathfrak{G}}(\ ),\ E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\ ), E_W^{\mathfrak{G}}(\ )\}$, található olyan csoport egy olyan irreducibilis karakterrel, melyre az első becslés jobb, mint a második.*

Az eredményt a következő diagramon mutatjuk be:

$$\begin{tikzcd}
E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\ ) \arrow[rr, bend left, "D_8\ (2)"] \arrow[dr, bend left, "C_5 \rtimes C_4\ (20{,}3)\ (1)"] & & E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\ ) \arrow[ll, bend left, "C_3 \rtimes Q_8\ (2)"] \arrow[dl, bend left, "C_7 \rtimes C_4\ (2)"] \\
& E_W^{\mathfrak{C}}(\ ) \arrow[ul, bend left, "D_8\ (2)"] \arrow[ur, bend left, "D_8\ (2)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_{Ch}^{\mathfrak{G}}(\ ) \arrow[rr, bend left, "D_8\ (2)"] \arrow[dr, bend left, "C_3 \rtimes C_4\ (2)"] & & E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\ ) \arrow[ll, bend left, "D_{10}\ (1)"] \arrow[dl, bend left, "D_{10}\ (1)"] \\
& E_W^{\mathfrak{G}}(\ ) \arrow[ul, bend left, "D_8\ (2)"] \arrow[ur, bend left, "D_8\ (2)"] &
\end{tikzcd}$$

A nyilakat azon (legkisebb méretű) csoporttal címkéztük, melynek van olyan karaktere, hogy a nyíl hegyénél lévő becslés jobb, mint a másik. Abban az esetben, hogyha a szemidirekt szorzat nem egyértelmű, feltüntettük a csoport GAP programcsomagbeli azonosítóját is. Továbbá zárójelben jeleztük a kérdéses karakter centrumának méretét, ezekben az esetekben ez egyértelműen azonosítja a csoport megfelelő karakterét vagy karaktereit.

3.1. Becslések szimmetrikus csoportokra

Az előző fejezet becsléseit vizsgátuk szimmetrikus csoportokra. A következő eredményeket kaptuk:

3.10. Lemma (P [42, 3.1 Lemma]). *Legyen χ egy irreducibilis karaktere az S_n szimmetrikus csoportnak ($n \geq 5$ esetén). Ekkor $E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\chi) = \chi(1)^2 - 1$. Továbbá $n^{\mathfrak{G}}(\chi) \geq \chi(1)^2 - 1$.*

3.11. Lemma (P [42, 3.2 Lemma]). *Legyen $\chi \in \mathrm{Irr}(S_n)$ a λ partícióhoz tartozó irreducibilis karakter. Ekkor $E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\chi) = 1$ akkor és csak akkor, ha λ nem szimmetrikus (és χ nem-lineáris) illetve $n = 3$ és $\lambda = (2, 1)$.*

3.12. Lemma (P [42, 3.4 Lemma]). *Legyen χ egy szimmetrikus partícióhoz tartozó irreducibilis karaktere S_n-nek. Ekkor $E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\chi) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.*

3.13. Lemma (P [42, 3.5 Lemma]). *Ha $\chi \in \mathrm{Irr}(S_n)$ és $n \geq 851$, akkor $E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\chi) \leq 1$.*

Továbbá a következőt sejtjük.

3.14. Sejtés (P [42, 3.6 Sejtés]). *Legyen χ nem-lineáris irreducibilis karaktere egy szimmetrikus csoportnak. A korábban definiált Gallagher-féle $E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\chi)$ becslés az eltűnő konjugáltosztályok számára pontosan akkor lesz kettő, ha χ a következő partíciók valamelyikéhez tartozik:*

$$(3, 1^2),\ (3, 2, 1),\ (3, 2, 1^2),\ (4, 2, 1),\ (4, 2, 1^2),\ (4, 2^2, 1),\ (4, 3, 1^2),$$
$$(4, 3, 2, 1),\ (4, 3, 2, 1^2),\ (5, 3, 2, 1),\ (5, 3, 2, 1, 1),\ (6, 4, 3, 2, 1, 1).$$

Minden egyéb esetben $E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\chi)$ értéke 1 lesz.

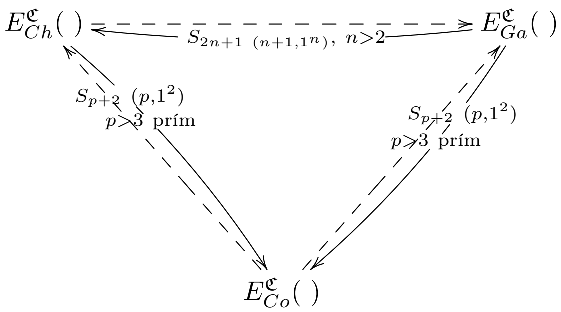
3.15. Megjegyzés. *McKay ([37]) eredményét használva, a sejtés igaz ha $n \leq 75$, illetve előbb láttuk, hogy $n \geq 851$-re is teljesül. Továbbá GAP programok segítségével egyszerűen ellenőrizhető, hogy igaz 2- és 3-soros partíciókra, illetve indukcióval igazolható hook-partíciókra. A sejtés azt mutatja, hogy szimmetrikus csoportok esetén az $E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\ )$ Gallagher-becslése az eltűnő konjugáltosztályok számára valójában nem jobb Burnside eredményénél ([24, 3.15 Tétel]).*

3.16. Állítás (P [42, 3.8 Lemma]).
1. *Ha $n > 4$, akkor S_n egy nem-lineáris irreducibilis karakterének minimális fokszáma legalább $n - 1$.*
2. *S_n egy (nem lineáris) irreducibilis, szimmetrikus partícióhoz tartozó karakterének minimális fokszáma legalább $2^{n/4}$.*

3.17. Következmény (P [42, 3.9 Következmény]). *Ha χ egy nem-lineáris irreducibilis karaktere S_n-nek ($n > 4$ esetén), akkor $E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\chi) \geq (n-1)^2 - 1$. Továbbá ha χ szimmetrikus partícióhoz tartozik, akkor $E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\chi_\lambda) \geq 2^{n/2} - 1$ ($n > 2$ esetén).*

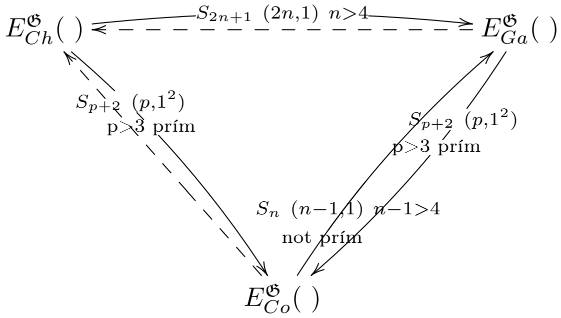
3.18. Tétel (P [42, 4.1 Tétel]). *A $\{E^{\mathfrak{C}}_{Ch}, E^{\mathfrak{C}}_{Ga}, E^{\mathfrak{C}}_{Co}\}$ halmaz az $(E^{\mathfrak{C}}_{Ga}, E^{\mathfrak{C}}_{Co})$, az $(E^{\mathfrak{C}}_{Ga}, E^{\mathfrak{C}}_{Ch})$, és az $(E^{\mathfrak{C}}_{Ch}, E^{\mathfrak{C}}_{Co})$ rendezett párok kivételével minden rendezett párra, végtelen sok szimmetrikus csoportnak van olyan karaktere, amelyen a második a becslés jobb, mint az első. A fennmaradó esetekben csak véges sok szimmetrikus csoport van, ilyen tulajdonságú karakterrel.*

A tétel állítását a következő diagramon illusztráljuk. A szaggatott vonalú nyíl azon becslés felé mutat, mely csak véges sok szimmetrikus csoport valamely karakterén jobb. A nyilakat pedig (végtelen sok) szimmetrikus csoportok egy sorozatával illetve a kérdéses irreducibilis karakteréhez tartozó partícióval címkéztük.



Annak ellenére, hogy csak véges sok olyan szimmetrikus csoportnak van olyan karaktere, melyre a $E^{\mathfrak{C}}_{Ga}(\,)$ becslés jobb a másik kettőnél, végtelen sok olyan karakter van, melyre mindhárom becslés egyenlő. Például $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi) = E^{\mathfrak{C}}_{Ga}(\chi) = E^{\mathfrak{C}}_{Co}(\chi) = 1$, ha $n > 5$ és $n-1$ nem prím továbbá χ az $(n-1, 1)$ partícióhoz tartozó karakter. Ez azért is érdekes, mert ebben az esetben az eltűnő konjugáltosztályok száma nagyobb, mint 1.

3.19. Tétel (P [42, 4.10 Tétel]). *A $\{E^{\mathfrak{G}}_{Ch}, E^{\mathfrak{G}}_{Ga}, E^{\mathfrak{G}}_{Co}\}$ halmaz az $(E^{\mathfrak{G}}_{Ga}, E^{\mathfrak{G}}_{Ch})$ és az $(E^{\mathfrak{G}}_{Co}, E^{\mathfrak{G}}_{Ch})$ rendezett párjainak kivételével minden rendezett párjára végtelen sok szimmetrikus csoportnak van olyan irreducibilis karaktere, melyre a második becslés jobb, mint az első. További esetekben csak véges sok szimmetrikus csoportnak van ilyen irreducibilis karaktere.*



3.2. Becslések Suzuki-csoportokra

Legyen G egy $q = 2^{2n+1} = r^2/2 > 2$ paraméterű Suzuki-csoport, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. A következőkben ismertetjük a G csoport karaktertábláját. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket. Emlékeztetőül a ciklikus $Hall_{q\pm r+1}$-részcsoportok normalizátorai tartalmaznak (legalább) egy negyed rendű elemet, jelöljük ezeket s_1-gyel és s_2-vel. Ekkor ha y, z-vel jelöljük a ciklikus Hall-részcsoportok generátorait, akkor $y^{s_1} = y^q$ és $z^{s_2} = z^q$. Tekintsük a következő ekvivalencia relációt ($\sim$), melyet a $k \sim kq$ generál a $\mathbb{Z}_{q+r+1}$ illetve $\mathbb{Z}_{q-r+1}$ halmazokon. (Megjegyezzük, hogy $(q + r + 1)(q - r + 1) = q^2 + 1$, azaz $q^2 \equiv -1 \pmod{q \pm r + 1}$.) Ezért az ekvivalencia osztályok például $\mathbb{Z}_{q+r+1}$-en a következőképpen néznek ki: $\{1\}$, $\{2, 2q, -2, -2q\}$, $\{3, 3q, -3, -3q\}$,..., összesen $\frac{q+r}{4} + 1$ darab.

3.20. Tétel (SUZUKI[44, 13. TÉTEL] AND [35]). *Legyen x, y, z, f és t a G csoportnak $q-1$, $q+r+1$, $q-r+1$, 4 és 2 rendű elemei. Továbbá ω, ζ és θ primitív $q-1$, $q+r+1$ és $q-r+1$-edik egységgyökök. Ekkor G karaktertáblája a következő lesz:*

	1	x^a	y^b	z^c	t	f	f^{-1}
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1
α	q^2	1	-1	-1	0	0	0
β_1	$r(q-1)/2$	0	1	-1	$-r/2$	$ri/2$	$-ri/2$
β_2	$r(q-1)/2$	0	1	-1	$-r/2$	$-ri/2$	$ri/2$
γ_j	q^2+1	$\omega^{ja}+\omega^{-ja}$	0	0	1	1	1
δ_k	$(q-1)(q-r+1)$	0	$-\psi_k^b$	0	$r-1$	-1	-1
η_l	$(q-1)(q+r+1)$	0	0	$-\psi_l^c$	$-r-1$	-1	-1

,

ahol $a, j \in \mathbb{Z}^*_{(q-2)/2}$, $b, k \in \mathbb{Z}^*_{q+r+1}/\sim$, $c, l \in \mathbb{Z}^*_{q-r+1}/\sim$, i az imaginárius egység és $\psi_k^b = \zeta^{kb}+\zeta^{-kb}+\zeta^{qkb}+\zeta^{-qkb}$, $\psi_l^c = \theta^{lc}+\theta^{-lc}+\theta^{qlc}+\theta^{-qlc}$.

3.21. Állítás. *az 3.6 sejtés igaz az $G = Sz(q)$ Suzuki-csoportokra, azaz ha $\chi(g) \neq 0$ valamely χ irreducibilis karakter és $g \in G$ esetén, akkor $o(g) | \frac{|G|}{\chi(1)}$. Sőt a megfordítása is igaz. Azaz $n^{\mathfrak{G}}(\chi) = E^{\mathfrak{G}}_{Co}(\chi)$ és $n^{\mathfrak{C}}(\chi) = E^{\mathfrak{C}}_{Co}(\chi)$.*

Mivel G egyszerű nem Abel csoport, az $E^{\mathfrak{C}}_{Ch}(\chi)$ Chillag-becslés az eltűnő konjugáltosztályok számára 1 értéket ad. Chillag-becslése az eltűnő elemek számára viszont $E^{\mathfrak{G}}_{Ch}(\chi) = \min_{C\in \mathrm{Cl}(G)\setminus Z(G)} |C| = (q^2+1)(q-1)$. Egy esetben az $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}$ Gallagher-becslés az eltűnő elemek számára pontos lesz. A 3.14 tétel szerint $E^{\mathfrak{G}}_{Ga}(\chi)$ pontosan akkor pontos, ha $|\chi|$ csak 0, 1 és $\chi(1)$ értékeket vesz fel.

3.3. Becslések Ree-csoportokra

Legyen $G = R(q)$ egy $q = 3^{2n+1} = 3m^2 > 3$ paraméterű Ree-csoport valamely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Ennek a karaktertábláját Ward a [47] cikkben majdnem teljesen meghatározta, ezt egészítettük ki.

Legyenek R, S, V, W, J a G $\frac{q-1}{2}$-od, $\frac{q+1}{4}$-ed, $q-3m+1$-ed, $q+3m+1$-ed és 2-od rendű elemei. Továbbá legyenek X, Y illetve T rögzített elemek $Z(P)$-ből, $P \setminus P'$-ből illetve $P' \setminus Z(P)$-ből.
Az $\langle S\rangle$, a $\langle V\rangle$ és $\langle W\rangle$ részcsoportok normalizátorai tartalmaznak (legalább) egy harmadrendű elemet, jelöljük ezeket h_S, h_V és h_W-vel. Mivel az említett részcsoportok ciklikusak, léteznek olyan $N_S \in \mathbb{Z}_{(q+1)/4}$, $N_V \in \mathbb{Z}_{q-3m+1}$ és $N_W \in \mathbb{Z}_{q+3m+1}$ számok, hogy $S^{h_S} = S^{N_S}$, $V^{h_V} = V^{N_V}$ és $W^{h_W} = W^{N_W}$ teljesül. A $(q+1)/4$, $q-3m+1$ és $q+3m+1$ számok páronként relatív prímek, így a kínai maradéktétel értelmében van olyan $N \in \mathbb{Z}_{(q^3+1)/4}$ melyre $N \equiv N_S \bmod (q+1)/4$, $N \equiv N_V \bmod q-3m+1$ és $N \equiv N_W \bmod q+3m+1$.
Vizsgáljuk a következő ekvivalencia relációt $\sim$, melyet az $s \sim sN \sim -s$ relációk generálnak. Ezt tekinthetjük külön-külön $\mathbb{Z}_{(q+1)/4}$-en, $\mathbb{Z}_{q-3m+1}$-en és $\mathbb{Z}_{q+3m+1}$-en vagy egyszerre $\mathbb{Z}_{(q^3+1)/4}$-en. Mivel $N^3 \equiv 1 \bmod (q^3+1)/4 = (q+1)(q-3m+1)(q+3m+1)/4$, az ekvivalencia osztályok például $\mathbb{Z}_{(q+1)/4}$-n a következő módon néznek ki $\{1\}$, $\{2,-2,2N,-2N,2N^2,-2N^2\}$, $\{3,-3,3N,-3N,3N^2,-3N^2\}$,....
A G konjugáltosztályai egy-egy reprezentánssal jelölve a következők lesznek.

$$\{1, \{R^a\}_{a\in A}, \{C^b\}_{b\in B}, \{V^c\}_{c\in C}, \{W^d\}_{d\in D}, X, Y, T, T^{-1}, YT, YT^{-1},$$

$$JT, JT^{-1}, \{JR^a\}_{a\in A}, \{J_k S^b\}_{k\in\mathbb{Z}_3, b\in B}, J\},$$

ahol $A = \mathbb{Z}^*_{(q-3)/4}$, $B = \mathbb{Z}^*_{(q+1)/4}/\sim$, $C = \mathbb{Z}^*_{q-3m+1}/\sim$ és végül $D = \mathbb{Z}^*_{q+3m+1}/\sim$.

Legyen τ, ι és $\sigma^{\pm}$ primitív $(q-1)/2$-odik, $(q+1)/4$-edik és $(q\pm 3m+1)$-edik egységgyökök. A kivételes karakterek családjait egységgyökökkel fogjuk indexelni: $\mathcal{R} = \{\tau^k\}_{k\in\mathbb{Z}^*_{(q-3)/4}}$, $\mathcal{T} = \{\iota^k\}_{k\in\mathbb{Z}^*_{(q+1)/4}/\sim}$, $\mathcal{T}' = \{\iota^k\}_{k\in\mathbb{Z}^*_{(q-3)/8}}$, $\mathcal{J} = \{(\sigma^-)^k\}_{k\in\mathbb{Z}_{q-3m+1}/\sim}$ és $\mathcal{K} = \{(\sigma^+)^k\}_{k\in\mathbb{Z}_{q+3m+1}/\sim}$. Különböző ekvivalencia-osztályból választott egységgyökök különböző (kivételes) karaktert fognak generálni. Általában r, t, t', j és k egységgyököket $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{J}$ és $\mathcal{K}$ halmazokból választjuk.

3.22. Tétel (Ward [47]). *Ekkor G karaktertáblája a következő módon néz ki.*

	1	R^a	S^b	V^c	W^d	X	Y	T	T^{-1}	YT	YT^{-1}	JT	JT^{-1}	JR^a	J_kS^b	J
ξ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ξ_2	q^2-q+1	1	3	0	0	$1-q$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
ξ_3	q^3	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	q
ξ_4	$q(q^2-q-1)$	1	-3	0	0	q	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	$-q$
ξ_5	$(q-1)m\frac{q+3m+1}{2}$	0	1	-1	0	$-\frac{q+m}{2}$	m	$\frac{-m+im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+im\sqrt{3}}{2}$	0	1	$-\frac{q-1}{2}$
ξ_6	$(q-1)m\frac{q-3m+1}{2}$	0	-1	0	1	$\frac{q-m}{2}$	m	$\frac{-m+im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-im\sqrt{3}}{2}$	0	-1	$\frac{q-1}{2}$
ξ_7	$(q-1)m\frac{q+3m+1}{2}$	0	1	-1	0	$-\frac{q+m}{2}$	m	$\frac{-m-im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-im\sqrt{3}}{2}$	0	1	$-\frac{q-1}{2}$
ξ_8	$(q-1)m\frac{q-3m+1}{2}$	0	-1	0	1	$\frac{q-m}{2}$	m	$\frac{-m-im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-m-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+im\sqrt{3}}{2}$	0	-1	$\frac{q-1}{2}$
ξ_9	$m(q^2-1)$	0	0	-1	1	$-m$	$-m$	$-m+im^2\sqrt{3}$	$-m-im^2\sqrt{3}$	$\frac{m+im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{m-im\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	0
ξ_{10}	$m(q^2-1)$	0	0	-1	1	$-m$	$-m$	$-m-im^2\sqrt{3}$	$-m+im^2\sqrt{3}$	$\frac{m-im\sqrt{3}}{2}$	$\frac{m+im\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	0
η_r	q^3+1	$\omega_r(a)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	$\omega_r(a)$	0	$q+1$
η_r'	q^3+1	$\omega_r(a)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	-1	-1	$-\omega_r(a)$	0	$-q-1$
η_t	$(q-1)(q^2-q+1)$	0	$-\psi_t(b)$	0	0	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	-3	-3	0	$-\psi_t(b)$	$3q-3$
$\eta_{t'}$	$(q-1)(q^2-q+1)$	0	$-\psi_t(b)$	0	0	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	$-\psi'_{t'}(b)$	$-q+1$
η_j^-	$(q^2-1)(q+3m+1)$	0	0	$-\psi_j(c)$	0	$-(q+3m+1)$	-1	$-3m-1$	$-3m-1$	-1	-1	0	0	0	0	0
η_k^+	$(q^2-1)(q-3m+1)$	0	0	0	$-\psi_k(d)$	$-(q-3m+1)$	-1	$3m-1$	$3m-1$	-1	-1	0	0	0	0	0

,

ahol $\omega_r(a) = r^a + r^{-a}$, $\psi_r(b) = r^b + r^{-b} + r^{bN} + r^{-bN} + r^{bN^2} + r^{-bN^2}$ *és* $\psi'_r(b) = -r^b - r^{-b} - r^{bN} - r^{-bN} + r^{bN^2} + r^{-bN^2}$.

Eredetileg a fenti karaktertábla bizonyos részei nem voltak meghatározva a [47] cikkben. A teljesség kedvéért a dolgozatban ezeket a részeket meghatároztuk.

3.23. Állítás. *A 3.6 Sejtés igaz a $G = R(q)$ Ree-csoportra, azaz ha $\chi(g) \neq 0$ valamely χ irreducibilis karakterre és $g \in G$ elemre, akkor $o(g) | \frac{|G|}{\chi(1)}$. Továbbá $E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\chi) = n^{\mathfrak{C}}(\chi)$ és $E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\chi) = n^{\mathfrak{G}}(\chi)$, ha $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{\xi_4, \xi_9, \xi_{10}, \eta_{t'} \eta_j^+, \eta_k^-\}$.*

Mivel G egyszerű és nem Abel, a Chillag-féle becslések a következő értékeket veszik fel: $E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\chi) = 1$ és $E_{Ch}^{\mathfrak{G}}(\chi) = \min_{C \in \mathrm{Cl}(G) \setminus Z(G)} |C| = (q-1)(q^3+1)$ tetszőleges χ nem-lineáris irreducibilis karakterre. Mathematica programok (lásd [41]) segítségével megmutattuk, hogy a sejtésből származtatott becslések mindig jobbak, mint a Gallagher-félék. Tetszőleges $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ esetén

$$E_{Co}^{\mathfrak{C}}(\chi) > E_{Ga}^{\mathfrak{C}}(\chi) > E_{Ch}^{\mathfrak{C}}(\chi) \text{ és } E_{Co}^{\mathfrak{G}}(\chi) > E_{Ga}^{\mathfrak{G}}(\chi) > E_{Ch}^{\mathfrak{G}}(\chi).$$

4. fejezet

Expanzivitás

A [19] cikk eredményeire próbáltunk párhuzamot találni. Ehhez legyen $n(\alpha)$ az α karakter irreducibilis alkotóinak száma (multiplicitást nem számolva). A G csoport *karakter expanzív*, ha minden α karakter és minden χ irreducibilis karakter esetén $n(\alpha) \leq n(\alpha\chi)$. Első megfigyelésünk az ilyen csoportokra a következő

4.1. Tétel (HALASI, MARÓTI, P [18, 1.1 TÉTEL])**.** *Legyen G egy karakter expanzív csoport.*

1. *Ha G feloldható, akkor Abel.*
2. *Ha G majdnem egyszerű, akkor egyszerű.*
3. *Ha G kváziegyszerű, akkor egyszerű.*

4.2. Megjegyzés. *A szimmetrikus csoportok majdnem egyszerűek $n > 4$ esetén, de nem egyszerűek. Ezért nem lehetnek karakter expanzívak.*

A [19, 3. fejezet] ötleteit átültetve a következőt kapjuk.

4.3. Tétel (HALASI, MARÓTI, P [18, 1.2 TÉTEL])**.** *Legyen G csoportok egy direkt szorzata. Ekkor G pontosan akkor karakter expanzív, ha G minden direkt faktora karakter expanzív.*

A 4.1, 4.3 Tételek és a konjugált expanzív eredmények miatt a következő problémát vizsgáltuk.

4.4. Probléma (HALASI, MARÓTI, P [18, 1.3 PROBLÉMA])**.** *Igaz, hogy egy karakter expanzív csoport direkt szorzata egyszerű és Abel csoportoknak?*

A 4.4 probléma fordítottja hamis. Legyen $n = k^2$, ahol k legalább 3. Ekkor [2, 5.6 Tétel] eredményeként, van négy irreducibilis karaktere A_n-nek: χ_1, $\chi_2 \neq \overline{\chi}_2$ és χ_3 úgy hogy $\chi_1\chi_2 = \chi_3 = \chi_1\overline{\chi}_2$. Ez azt jelenti, hogy A_n nem lehet karakter expanzív $n = k^2$-re. Továbbá hasonló okokból a Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{24}', M, M_{12}, M_{24} és Th sporadikus csoportok sem karakter expanzívak. (A magyar algoritmust használva ([31]) megmutatható, hogy ezek kivételével a 138 nem Abel egyszerű csoport a Gap [46] könyvtárban karakter expanzív. Továbbá Mathematica programok [36] segítségével megmutattuk, hogy minden Suzuki- illetve Ree-csoport karakter expanzív. A pontos programok megtalálhatók a [41] honlapon.

Teljességében nem sikerült megoldani a 4.4 Problémát. Azt tudtuk megmutatni

4.5. Tétel (HALASI, MARÓTI, P [18, 1.4 TÉTEL])**.** *A 4.4 Probléma minimális ellenpéldájának egyetlen minimális normálosztója van, mely nem centrális de Abel.*

Legyen V egy véges hűséges irreducibilis FG-modulus valamely G véges féligegyszerű csoportra és F prímtestre. Ekkor V tetszőleges λ komplex lineáris karakterére legyen $I_G(\lambda)$ a λ inercia csoportja G-ben. Továbbá egy véges H csoport konjugáltosztályai a számát jelöljük $k(H)$-val. A következő probléma pozitív megválaszolásából következne a 4.4 Probléma pozitív megoldása is.

4.6. Probléma (Halasi, Maróti, P [18, 1.5 Probléma]). *Az előző jelöléseket és feltételeket használva: létezik-e olyan* $\lambda \in \mathrm{Irr}(V)$ *melyre* $k(I_G(\lambda)) < k(G)$*?*

Érdekes módon a 4.6 Probléma kapcsolódik a $k(GV)$ problémához.

4.7. Tétel (Halasi, Maróti, P [18, 1.6 Tétel]). *Az előző jelöléseket és feltételeket használva: a 4.6 Probléma igaz, ha* G *egyszerű és* $(|G|, |V|) = 1$*, vagy ha* G *egyszerű és* $G = GL(V)$*.*

Irodalomjegyzék

[1] Y. Berkovich and L. Kazarin. Finite groups in which the zeros of every nonlinear irreducible character are conjugate modulo its kernel. *Houston Journal of Mathematics*, 24:619–630, 1998.

[2] C. Bessenrodt and A. Kleshchev. On Kronecker products of complex representations of the symmetric and alternating groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 190:201–223, 1999.

[3] M. Bianchi, D. Chillag, and A. Gillio. Finite groups in which every irreducible character vanishes on at most two conjugacy classes. *Houston Journal of Mathematics*, 25:451–461, 2000.

[4] R. Boltje, S. Danz, and B. Külshammer. On the depth of subgroups and group algebra extensions. *Journal of Algebra*, 335:258–281, 2011.

[5] R. Boltje and B. Külshammer. On the depth 2 condition for group algebra and Hopf algebra extensions. *Journal of Algebra*, 323:1783–1796, 2010.

[6] R. Boltje and B. Külshammer. Group algebra extensions of depth one. *Algebra Number Theory*, 5:63–74, 2011.

[7] S. Burciu and L. Kadison. Subgroups of Depth Three, 2009.

[8] S. Burciu, L. Kadison, and B. Külshammer. On subgroup depth. *Int. Electron. J. Algebra*, 9:133–166, 2011.

[9] D. Chillag. On zeros of characters of finite groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127:977–983, 1999.

[10] S. Danz. The depth of some twisted group algebra extensions. *Communications in Algebra*, 39:1631–1645, 2011.

[11] S. Dolfi, G. Navarro, E. Pacifici, P. Sanus, and P. H. Tiep. Non-vanishing elements of finite groups. *Journal of Algebra*, 323:540–545, 2010.

[12] S. Dolfi, E. Pacifici, L. Sanus, and P. Spiga. On the orders of zeros of irreducible characters. *Journal of Algebra*, 321:345–352, 2009.

[13] T. Fritsche, B. Külshammer, and C. Reiche. The depth of Young subgroups of symmetric groups. *Journal of Algebra*, 381:96–109, 2013.

[14] T. Fritzsche. The depth of subgroups of $PSL(2, q)$. *Journal of Algebra*, 349:217–233, 2012.

[15] T. Fritzsche. The depth of subgroups of $PSL(2, q)$ II. *Journal of Algebra*, 381:37–53, 2013.

[16] P. X. Gallagher. Group characters and commutators. *Mathematische Zeitschrift*, 79:122–126, 1962.

[17] P. X. Gallagher. Zeros of characters of finite groups. *Journal of Algebra*, 4:42–45, 1966.

[18] Z. Halasi, A. Maróti, and F. Petényi. Character expansiveness in finite groups. *International Journal of Group Theory*, 2:9–17, 2013.

[19] Z. Halasi, A. Maróti, S. Sidki, and M. Bezerra. Conjugacy expansiveness in finite groups. *Journal of Group Theory*, 15:485–496, 2012.

[20] A. Hernandez, L. Kadison, and M. Szamotulski. Subgroup depth and twisted coefficients. *Communications in Algebra*, 44:3570–3591, 2016.

[21] L. Héthelyi, E. Horváth, and F. Petényi. The depth of the maximal subgroups of Ree groups $(^2G_2(q))$.

[22] L. Héthelyi, E. Horváth, and F. Petényi. The Depth of Subgroups of Suzuki Groups. *Communications in Algebra*, 43:4553–4569, 2015.

[23] B. Huppert and N. Blackburn. *Finite groups III*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[24] I. M. Isaacs. *Character Theory of Finite Groups*. Dover Publications, 1994.

[25] I. M. Isaacs, G. Navarro, and T. R. Wolf. Finite group elements where no irreducible character vanishes. *Journal of Algebra*, 222:413–423, 1999.

[26] S. M. Gagola Jr. Characters vanishing on all but two conjugacy classes. *Pacific Journal of Mathematics*, 109:363–385, 1983.

[27] L. Kadison. Finite depth and Jacobson-Bourbali correspondence. *Journal Pure Application Algebra*, 212:1822–1839, 2008.

[28] L. Kadison. Algebra depth in tensor categories, to appear.

[29] L. Kadison and B. Külshammer. Depth two, normality and a trace ideal condition for Frobenius extensions. *Communications in Algebra*, 34:3103–3122, 2006.

[30] P. B. Kleidman. The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups $^2G_2(q)$, and their automorphism groups. *Journal of Algebra*, 117:30–71, 1988.

[31] H. W. Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2:83–97, 1955.

[32] P. Landrock and G. O. Michler. Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 260:83–111, 1980.

[33] V. M. Levchuk and Ya. N. Nuzhin. Structure of Ree groups. *Algebra and Logic*, 24:16–24, 1985.

[34] G. Malle, G. Navarro, and J. B. Olsson. Zeros of characters of finite groups. *Journal of Group Theory*, 3:353–368, 2000.

[35] R. P. Martineau. On representations of the Suzuki groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 6:153–160, 1972.

[36] Wolfram Mathematica. http://www.wolfram.com/mathematica.

[37] J. McKay. The largest degrees of irreducible characters of symmetric groups. *Mathematics of Computation*, 30:624–631, 1976.

[38] A. Moretó and J. Sangroniz. On the number of conjugacy classes of zeros of characters. *Israel Journal of Mathematics*, 142:163–167, 2004.

[39] A. Moretó and J. Sangroniz. On the number of zeros in the columns of the character table of a group. *Journal of Algebra*, 279:726–736, 2004.

[40] G. Navarro. Zeros of primitive characters in solvable groups. *Journal of Algebra*, 221:644–650, 1999.

[41] F. Petényi. Programs. www.math.bme.hu/∼pfranci/programs.html, 2012.

[42] F. Petényi. Comparing estimates on the number of zeros of irreducible characters in symmetric groups. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 72:B72c, 2015.

[43] G. Qian. Bounding the Fitting height of a solvable group by the number of zeros in a character table. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130:3171–3176, 2002.

[44] M. Suzuki. On a class of doubly transitive groups. *Annals of Mathematics*, 75:105–114, 1962.

[45] M. Suzuki. On a class of doubly transitive groups II. *Annals of Mathematics*, 78:514–589, 1962.

[46] Algorithms The GAP Group, GAP Groups and Programs. http://www.gap-system.org.

[47] H. N. Ward. On Ree's series of simple groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 121:62–89, 1966.

[48] T. Wilde. Orders of elements and zeros and heights of characters in a finite group, 2006.

[49] J. Zhang, Z. Shen, and S. Wu. A note on the number of zeros in the columns of the character table of a group. *Journal of Algebra and Its Applications*, 12:10p., 2013.

[50] É. M. Zhmud. The zeros of group characters. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 32:223–224, 1977.

[51] É. M. Zhmud. On estimates of the number of zeros of irreducible characters of a finite group. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 33:125–146, 1986.

[52] É. M. Zhmud. On finite groups all irreducible characters of which take at most two nonzero values. *Ukrainian Mathematical Journal*, 47:1308–1313, 1995.

[53] S. Zhou, H. Li, and W. Liu. The Ree groups ${}^2G_2(q)$ and $2-(v,k,1)$ block designs. *Discrete Mathematics*, 224:251–258, 2000.