Lineáris paraméterfüggő modellek politopikus felbontása tenzorszorzat-modell transzformációval

Ph.D. tézisfüzet

Petres Zoltán

Témavezetők:
Dr. Baranyi Péter
Dr. Korondi Péter

Budapest, 2006.

1. Bevezetés

1.1. A kutatási feladat előzménye, tudományos háttere

Az értekezésben ismertetett tudományos eredményekhez vezető kutatómunka az elmúlt évtizedben szinte párhuzamosan megjelent, áttörő jelentőségű irányításelméleti és matematikai eredményekre, illetve rendszerelméleti szemléletváltozásra támaszkodik.

Az elmúlt évtizedben a rendszerelméleti identifikációs modellek reprezentációja jelentősen megváltozott. A tudományos szemléletváltozás eredetileg HILBERT híres, 1900-ban tartott párizsi előadására vezethető vissza. HILBERT 13. sejtésében azt feltételezte [25–27,33], hogy nem minden n-változós függvény bontható fel n-nél kisebb változószámú függvények kompozíciójára. Hozzátette, hogy e sejtés tisztázása lesz a következő évszázad matematikusainak egyik legnagyobb feladata. 1950-ben ARNOLD megcáfolta a sejtést [3], sőt KOLMOGOROV később bebizonyította [35], hogy bármely függvény felbontható egyváltozós függvények kompozíciójára, amivel tulajdonképpen az *univerzális approximátorok* létezését igazolta. (További jelentős eredményeket találunk e témakörrel kapcsolatban LORENTZ és SPRECHER munkáiban [40,48].) Ezen eredményekre támaszkodva hamarosan bebizonyították, hogy a biológiai indíttatású mesterséges neurális hálózatok és genetikus algoritmusok, valamint a filozófiai indíttatású fuzzy logika közelítő eszközei között is vannak univerzális approximátorok [8,12,14,29,36,45,52,54]. Így ezek az approximátorok megjelentek a rendszerelméleti identifikációs modellek között, és hatékony eszközöknek bizonyultak bonyolult, analitikusan nem, vagy csak nehezen leírható rendszerek esetén is.

A lineáris algebra és a lineáris algebra alapú jelfeldolgozás világában az egyik leggyümölcsözőbb fejlesztés a szinguláris értékfelbontás (SVD) kidolgozása mátrixokra. A mátrixdekompozíció története az 1980-as évekig nyúlik vissza. Az elmúlt 150 évben számos matematikus — Eugenio Beltrami (1835–1899), Camille Jordan (1838–1921), James Joseph Sylvester (1814–1897), Erhard Schmidt (1876–1959) és Hermann Weyl (1885–1955), csakhogy néhányat említsünk a legjelentősebbek közül — munkálkodott a szinguláris értékfelbontás megalkotásán és elméletének kidolgozásán [50]. Gene Golub úttörő munkásságának köszönhetően stabil és hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre a szinguláris értékfelbontás kiszámítására [24]. Újabban az SVD számos tudományterületen tölt be fontos szerepet [15,42,53]. A népszerűsége nőtt a hatékonyabb számítási metódusoknak köszönhetően. A személyi számítógépek fejlődésével lehetővé vált a nagyméretű, többdimenziós problémák kezelése és így megnőtt az igény az SVD tenzorokra értelmezett magasabb rendű kiterjesztésére. A magasabb rendű SVD (Higher Order SVD, HOSVD) hatékonyan használható a független komponens analízisre [38] ugyanúgy, mint dimenziócsökkentésre a magasabb rendű faktoranalízis típusú problémákra — így csökkentve a számítási komplexitást [37] — csak hogy néhány példát említsünk. A HOSVD-ről, mint egy teljes többdimenziós SVD eljárásról elsőként 2000-ben publikáltak [39], és a 2005. augusztus 29. és szeptember 2. között Franciaországban, Marseille-ben tartott „Workshop on Tensor Decomposition and Application” volt az első rendezvény, amelynek fő témája a HOSVD volt. A különleges jelentősége a lineáris algebra területén abból adódik, hogy képes egy adott N-dimenziós tenzort egy teljesen ortonormált rendszerre felbontani, amelyben a szinguláris értékek rendezettek, ezáltal kifejezve a tenzor rangját. Ebből adódóan a HOSVD képes egy adott tenzor egyértelmű és egyedi struktúráját megadni.

A tenzorszorzat-modell transzformáció egy további kiterjesztése a folytonos n-változós függvényeknek. Képes az adott függvény teljesen ortonormált és szinguláris értékek szerint rendezett alakját megadni. Fontos, hogy ezt az alakot analitikusan nem lehet előállítani, mert nem létezik a HOSVD-nek általános analitikus megoldása. A tenzorszorzat-modell transzformációt a lineáris paraméterfüggő modellekre (LPV) is kiterjesztették 2003-ban. A transzformáció megadja az LPV modell HOSVD alapú kanonikus alakját, azaz a lineáris időinvariáns modellek paraméterfüggő kombinációját, amely a következőképpen jellemzi az LPV modellt: i) az LTI rendszerek száma minimális; ii) a súlyfüggvények egyváltozós függvényei a paraméter vektornak; iii) a súlyfüggvények ortonormált rendszert alkotnak az egyes paraméterekre; iv) az LTI rendszerek szintén ortonormált pozícióban helyezkednek el; v) az LTI rendszerek és a súlyfüggvények a szinguláris értékek szerint rendezettek.

Összefoglalva, a tenzorszorzat-modell transzformáció megadja az adott LPV modell egyértelmű és jól definiált alakját. Ez nem kapható meg analitikus átalakításokkal. Így a tenzorszorzat-modell transzformáció eredményét 2006-ban elnevezték a politopikus vagy LPV modellek HOSVD alapú kanonikus alakjának [5, 6].

A nemlineáris rendszerek irányításelméletében jelentős előrelépést eredményezett a *Ljapunov-féle stabilitási kritériumok* megjelenése. A szemléletváltozást az jelentette, amikor az 1990-es évek elején e kritériumokat *lineáris mátrixegyenlőtlenségek* formájában újrafogalmazták. Ezzel az irányításelmélet stabilitási feladatait egy új reprezentációban adták meg, s a Ljapunov-féle kritériumok teljesíthetőségét, mint konvex optimalizációs feladatot értelmezték újra, és igen tág modellosztályra terjesztették ki. Az ezzel kapcsolatos úttörő tanulmányok GAHINET, BOKOR, CHILAI, BOYD és APKARIAN nevéhez fűződnek [1, 2, 9, 16, 18, 19, 22, 32, 43, 47]. Az új reprezentáció geometriai szemlélete és módszertana BOKOR József kutatócsoportjának munkásságához kapcsolható. Hamar bebizonyosodott, hogy ezen új szemlélet alapján a stabilitáson túlmenően további szabályozási tulajdonságokat (*control performance*) is könnyen meg lehet fogalmazni – lineáris mátrixegyenlőtlenségek formájában –, az optimalizálási feladattal együtt. Ettől kezdődően a különböző stabilitási és szabályozási tulajdonságokat biztosító lineáris mátrixegyenlőtlenségeket ismertető tanulmányok száma szinte robbanásszerűen megnőtt. BOYD tanulmányában [10] azt állítja, hogy az irányításelméleti feladatok tág osztályára igaz az, hogy ha a feladatot megfogalmaztunk lineáris mátrixegyenlőtlenségek formájában, akkor gyakorlatilag megoldottuk.

A fentiekkel párhuzamosan, a számítógépek számítási teljesítménynövekedésének köszönhetően, hatékony numerikus matematikai eljárások és algoritmusok jelentek meg *konvex optimalizációs* feladatok – így lineáris mátrixegyenlőtlenségek – megoldására. A konvex optimalizáció gyakorlati alkalmazásának lényegi áttörése a belső pontos (*interior point methods*) módszerek bevezetésére tehető. E módszereket cikkek sorozatában dolgozták ki [31], és valós jelentőségűvé váltak a lineáris mátrixegyenlőtlenségen alapuló feladatokkal összefüggésben Yurii NESTEROV és Arkadii NEMIROVSKI munkájában [44]. Mára a „hétköznapi” mérnöki tervezőmunkát is elérték ezek a módszerek, és olyan esetekben is hatékonynak bizonyultak, amikor a megoldás zárt analitikus formája nem ismert. Ennek következtében tágabb értelmet nyert az irányításelmélet analitikus feladatainak a megfogalmazása. Közismert, hogy a modern irányításelméletben a problémák jelentős része a *Riccati-egyenletek* megoldását igényli, viszont többszörös Riccati-egyenletek (zárt) analitikus megoldása általános esetben nem ismert. Ma már viszont – a konvex optimalizáció numerikus módszereinek alkalmazásával – azokat a feladatokat is megoldottnak tekinthetjük, amelyek nagyszámú konvex algebrai Riccati-egyenlet megoldását igénylik, annak ellenére hogy a megoldás eredménye nem egy (klasszikus értelemben vett) zárt analitikus képlet.

> Összegezve, az irányításelméletben megjelent – konvex optimalizáción alapuló – új reprezentáció legnagyobb előnye az, hogy abban könnyen kezelhető módon lehet kombinálni a különböző tervezési feltételeket és célokat, numerikusan kezelhető lineáris mátrixegyenlőtlenségek formájában [10]. E szemlélettel számos (bonyolult) irányításelméleti feladat rendkívül hatékonyan oldható meg.

Különösen igaz ez a Ljapunov-alapú analízisre és szintézisre, de hasonlóan az optimális LQ szabályozásra, a H_∞ szabályozásra [17, 23, 51], valamint a minimális varianciájú szabályozásra is. A lineáris mátrixegyenlőtlenségeken alapuló tervezés más területeken is megjelent, mint például a becslés, az identifikáció, az optimális tervezés, a strukturális tervezés és a mátrix-méretezési feladatokban. Az alábbi felsorolás további feladatokra mutat rá, amelyek lineáris mátrixegyenlőtlenségen alapuló reprezentációban kezelhetőek és megoldhatóak: lineáris időinvariáns bizonytalansággal rendelkező rendszerek robusztus stabilitása (μ-analízis) [46, 49, 55], kvadratikus stabilitása [11, 28], paraméterfüggő rendszerek Ljapunov-féle stabilitása [21], lineáris időinvariáns rendszerek bemeneteinek, állapotterének, valamint kimeneteinek korlátozása és különböző tulajdonságainak biztosítása [10], több modellű és több célú (*multi-model* és *multi-objective control*) állapot-visszacsatolás alapú tervezés [4, 7, 10, 13, 34], robusztus pólus áthelyezés, optimális LQ szabályozás [10], robusztus H_∞ szabályozás [20, 30], több célú H_∞ szintézis [13, 34, 41], sztochasztikus rendszerek szabályozása [10], és súlyozott interpolációs problémák [10].

1.2. A műszaki probléma általános felvetése

A fentiek alapján, egy modell, legyen adott egy zárt analitikus formulával, vagy egy lágy számítástudományi identifikációs technika, mint például fuzzy logika, neurális hálózat vagy genetikus algoritmus kimeneteként, a tenzorszorzat-modell transzformációval a HOSVD alapú kanonikus alakra átalakítható. Az egyetlen feltétel az, hogy a modell egy rácsháló felett diszkretizálható legyen. A HOSVD alapú kanonikus alakból, a modell további felhasználásától függően, különböző konvex politopikus modellek hozhatóak létre egyszerű numerikus átalakítások segítségével. A szabályozási célok is megfogalmazhatóak mint konvex optimalizációs problémák a lineáris mátrixegyenlőtlenségek segítségével, és ezáltal lehetővé válik hogy egy feladatok tág osztályát oldjunk meg függetlenül attól, hogy létezik-e a feladatnak zárt formában adott analitikus megoldása. A tenzorszorzat-modell transzformáción alapuló szabályozótervezési eljárás egy egységes, könnyen kezelhető, világos numerikus szabályozótervezési keretrendszer. Sok esetben az analitikus átalakítás, affin felbontás, vagy a konvex optimalizáció problémás, időigényes vagy akár megoldhatatlan is lehet még az elérhető legmodernebb analitikus eszközök segítségével is, amíg sok alkalmazás esetén bizonyítható, hogy a numerikus módszerek könnyen úrrá lesz ezen nehézségeken. Jelen disszertáció célja, hogy megvizsgálja a tenzorszorzat-modell transzformáció alkalmazhatóságát és megvalósíthatóságát különböző szabályozási problémák esetén.

A lineáris mátrixegyenlőtlenségeken alapuló szabályozótervezés az elmúlt évtizedben aktív kutatások középpontjában volt, így annak létjogosultságával és alkalmazhatósági vizsgálatával jelen disszertációmban nem foglalkozom.

1.3. A disszertáció célja

Az 1.1. fejezetben ismertetett szemléleti átalakulás eredményeképpen — különböző reprezentációban megadott — hatékony rendszerelméleti eszközök jelentek meg. Ezzel szemben az eszközök együttes alkalmazása, a különböző reprezentációk egymáshoz illesztése — tervezési szemlélet és matematikai eszközök, különösen analitikus átalakítások szempontjából – nehézkes, és sok esetben nem megoldott. Kutatómunkám során fő célom az volt, hogy megvizsgáljam és értékeljem a tenzorszorzat-modell transzformáció alapú szabályozótervezési eljárás, egy egységes, könnyen kezelhető, numerikus szabályozótervezési metódus, alkalmazhatóságát és megvalósíthatóságát, továbbá kiterjesztem a szabályozási problémák nagyobb osztályára.

Ezen belül az értekezés céljául tűztem ki:

- Megvizsgálni, hogy a tenzorszorzat-modell transzformáció komplex, benchmark jellegű és valós dinamikai rendszerekre olyan modellt eredményez, amelyen lineáris mátrixegyenlőtlenségekkel megfogalmazott konvex optimalizációs problémák értelmezhetőek és megfogalmazhatóak. Egy akadémiai benchmark problémát választottam az elméleti értékelésre és hiteles összehasonlításra más közölt módszerekkel. Mindemellett, a kutatásom fontos részét képezték ipari jellegű kísérleti vizsgálatok is.

- Megmutatni, hogy a választott dinamikai rendszerek véges elemű HOSVD alapú kanonikus alakjai és a véges elemű konvex tenzorszorzat-modelljei léteznek és a tenzorszorzat-modell transzformáció minimális számú lineáris időinvariáns rendszert eredményez.

- Mivel a tenzorszorzat-modell transzformáció számítási komplexitásának robbanása magasabb dimenziós feladatok esetén egy kritikus kérdés, célom a tenzorszorzat-modell transzformáció alkalmazhatósági vizsgálata és olyan algoritmusok és módszerek megadása, amellyel a transzformáció számítási komplexitása csökkenthető magasabb dimenziójú feladatok esetén.

2. A tenzorszorzat-modell transzformáció rövid ismertetése

A tenzorszorzat-modell transzformáció egy egységes, numerikus módszer, amely képes mind elméleti, mind algoritmikus szempontból egységesen, lineáris paraméterfüggő dinamikus modelleket paraméterfüggetlen (konstans) rendszermodellek (lineáris időinvariáns rendszerek) paraméterfüggő súlyozott kombinációjává alakítani különböző optimalizációs és konvexitáskényszerek figyelembevételével. A használhatóságának lényege irányításelméleti feladatok esetén az, hogy a lineáris paraméterfüggő állapottér-modellekből létrehozott politopikus modellek olyan konvexitási feltételeket biztosítanak, amelyek lehetővé teszik a lineáris mátrixegyenlőtlenségeken alapuló szabályozótervezés azonnali, közvetlen alkalmazását, és így különböző szabályozási célokat kielégítő többcélú szabályozók tervezhetőségét. Ezért, a 2.1. definíció szerint adott lineáris paraméterfüggő modelleknek megadható a HOSVD alapú kanonikus alakja (lásd 2.3. definíció), és ezután véges elemű konvex tenzorszorzat-modellé transzformálható (lásd 2.4. definíció). A lineáris mátrixegyenlőtlenségeken alapuló szabályozótervezési metódusok erre a modellre közvetlenül alkalmazhatóak. Így a transzformáció helyettesíti az analitikus, sok esetben bonyolult és nem nyilvánvaló átalakításokat egy numerikus, könnyen kezelhető, világos és rutinszerű műveletek sorozatára.

2.1. definíció (Lineáris paraméterfüggő állapottér-modell). *Legyen adott a következő lineáris paraméterfüggő állapottér-modell:*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{p}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{p}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{p}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{p}(t))\mathbf{u}(t),\end{aligned} \tag{1}$$

ahol az $\mathbf{u}(t)$ a bemeneti értékeket, az $\mathbf{y}(t)$ a kimeneti értékeket tartalmazó vektor, valamint az $\mathbf{x}(t)$ az állapotvektor. Az

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{B}(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}(t)) & \mathbf{D}(\mathbf{p}(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{O\times I} \tag{2}$$

rendszermátrix egy parametrikusan változó mátrix, ahol a $\mathbf{p}(t) \in \Omega$ egy az időtől függő N-dimenziós paramétervektor és az $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N] \subset \mathbb{R}^N$ egy zárt hipertér. A $\mathbf{p}(t)$ vektor tartalmazhatja az $\mathbf{x}(t)$ elemeit. Így az ilyen típusú modellt a nemlineáris modellek egy osztályának tekintik.

2.2. definíció (Véges elemű tenzorszorzat-modell). *A (**??**) egyenlet $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$ mátrixa megadható bármilyen $\mathbf{p}(t)$ paraméterre mint az $\mathbf{S}$ lineáris időinvariáns rendszermátrixok (vertex rendszerek néven is ismert) paraméterfüggő kombinációja*

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{S} \overset{N}{\underset{n=1}{\otimes}} \mathbf{w}_n(p_n(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ahol a $\mathbf{w}_n(p_n) \in \mathbb{R}^{I_n}$ $n = 1, \dots, N$ sorvektor tartalmaz egy korlátozott változót és $w_{n,i_n}(p_n)$, $(i_n = 1 \dots I_n)$ folytonos súlyfüggvényeket. A $w_{n,i_n}(p_n(t))$ súlyfüggvény az Ω n-edik dimenzióján definiált i_n-edik súlyfüggvény, és a $p_n(t)$ a $\mathbf{p}(t)$ vektor n-edik eleme. $I_n < \infty$ jelöli a súlyfüggvények számát az Ω n-edik dimenziójában. Fontos megjegyezni, hogy az Ω dimenziói a $\mathbf{p}(t)$ paramétervektor egyes elemeihez vannak rendelve.

Az $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times O\times I}$ $(N+2)$-dimenziós együttható tenzor az $\mathbf{S}_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \mathbb{R}^{O\times I}$ LTI vertex rendszerekből áll össze.

2.3. definíció (A véges elemű tenzorszorzat-modell HOSVD alapú kanonikus alakja). *Adott egy (1) modell (3) alakban. Akkor*

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{D} \bigotimes_{n=1}^{N} \mathbf{w}_n(p_n(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

megadható az $\mathcal{S}$ első N dimenzió HOSVD Egzakt Minimális alakra hozásával. A keletkező $\mathcal{D}$ tenzor mérete $r_1 \times \cdots \times r_N \times O \times I$. A súlyfüggvények a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. *Az r_n számú $w_{n,in}(p_n)$ súlyfüggvények a $\mathbf{w}_n(p_n)$ vektorban ortonormált rendszert alkotnak. A $\mathbf{w}_{i,n}(p_n)$ súlyfüggvény egy i-edik szinguláris függvény az $n = 1 \dots N$ dimenzióban.*

   A $\mathcal{D}$ tenzor tulajdonságai a következőek:

2. *Az $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times O \times I}$ tenzor $\mathcal{D}_{i_n=\alpha}$ altenzorainak a tulajdonságai a következőek:*

   (a) *teljes ortogonalitás: válasszon ki egy-egy elemet a $\mathcal{D}$ tenzor $N+1$-edik és $N+2$-edik dimenziójából. A kiválasztott N-dimenziós $\mathcal{D}'$ altezor teljesen ortogonális, azaz $\mathcal{D}'_{i_n=\alpha}$ és $\mathcal{D}'_{i_n=\beta}$ altenzorok ortogonálisak n, α és β : $\left\langle \mathcal{D}'_{i_n=\alpha}, \mathcal{D}'_{i_n=\beta} \right\rangle = 0$ when $\alpha \neq \beta$ minden lehetséges értékére,*

   (b) *rendezett: $\left\| \mathcal{D}'_{i_n=1} \right\| \geq \left\| \mathcal{D}'_{i_n=2} \right\| \geq \cdots \geq \left\| \mathcal{D}'_{i_n=I_n} \right\| \geq 0$ $n = 1 \dots N$ minden lehetséges értékére.*

3. *$\left\| \mathcal{D}'_{i_n=i} \right\|$ Frobenius-normák, amelyet $\sigma_i^{(n)}$-ként jelölünk, az $\mathcal{S}$ n-ed rendű szinguláris értékei.*

4. *Az $\mathcal{D}$ tenzor elnevezése mag tenzor, amely az LTI rendszereket tartalmazza.*

2.4. definíció (Véges elemű konvex tenzorszorzat-modell). *A (3) véges elemű tenzorszorzat-modell konvex akkor és csak akkor ha a súlyfüggvények*

$$\forall n, i, p_n(t) \quad : \quad w_{n,i}(p_n(t)) \in [0, 1] \tag{5}$$

$$\forall n, p_n(t) \quad : \quad \sum_{i=1}^{I_n} w_{n,i}(p_n(t)) = 1 \tag{6}$$

3. Tézisek

A következő tézisek tudományos eredményei a [P–1–P–18] (összesített impakt faktor: 1.02) közleményekben jelentek meg, és ezen közleményekre 8 független hivatkozás található.

1. tézis: A tenzorszorzat-modell transzformáció számítási bonyolultságának enyhítése a diszkretizációs rácsháló csökkentésével [P–1]

Javasoltam egy enyhített számítási bonyolultságú tenzorszorzat-modell transzformációt, amely a rendszermátrix ritka diszkretizációs rácshálója felett hajtható végre, amely így azonnali számítási bonyolultság csökkentést eredményez. Azonban a ritka diszkretizációs rácsháló használata ronthatja a konvex burok pontosságát. Ezen probléma ellensúlyozására a tenzorszorzat-modell transzformáció elméleti módosítását javasoltam, amely képes a tenzorszorzat-modellt egy sűrű rácshálóra kiterjeszteni. Továbbá, megadtam a módosított tenzorszorzat-modell transzformáció numerikus megvalósítását. A javasolt megvalósítás valós alkalmazásokra is azonnal alkalmazható, egy MATLAB bővítményként elérhetővé tettem.

Becslést adtam arra, hogy a javasolt enyhítés polinomiálisan csökkenti a tenzorszorzat-modell transzformáció számítási bonyolultságát. Gyakorlati esetekben a súlyfüggvények várható száma kicsi, így a rácssűrűség több nagyságrenddel csökkenthető.

2. tézis: A tenzorszorzat-modell transzformáció számítási bonyolultságának enyhítése a konstans és nem konstans elemek szétválasztásával [P–2]

Javaslatot tettem arra, hogy a tenzorszorzat-modell transzformáció számítási bonyolultsága csökkenthető úgy, hogy ha mellőzzük a konstans elemek számítását az LPV modellben. Ezen megközelítés alapelve a konstans és nem konstans elemek szétválasztása a diszkretizált rendszermátrixban. A numerikus megvalósításhoz kidolgoztam egy algoritmust, amely a rendszermátrixot konstans és nem konstans elemeket tartalmazó mátrixokra bontja fel, majd végrehajtja a módosított tenzorszorzat-modell transzformációt a diszkretizált mátrixokon, és végül összerakja tenzorszorzat-modell alakra. Fontos megjegyezni, hogy a javasolt módosítás csak konvex tenzorszorzat-modellek esetén alkalmazható, a HOSVD alapú kanonikus alakra közvetlenül nem. A javasolt megvalósítás valós alkalmazásokra is azonnal alkalmazható, egy MATLAB bővítményként elérhetővé tettem.

Megmutattam, hogy a javasolt konstans és nem konstans elemek szétválasztása a diszkretizált rendszermátrixban jelentősen csökkentheti a számítási terhelést azon esetekben, amikor a konstans elemek aránya magas a diszkretizált mátrixban. A javasolt módszer lineáris számítási bonyolultság csökkentést biztosít. Gyakorlati esetekben a rendszermátrix konstans elemeinek száma 70–80%, így a javasolt eljárás jelentősen csökkenti a számítási bonyolultságot.

3. tézis: Bonyolult szabályozási problémák megoldása a tenzorszorzat-modell transzformáción alapuló szabályozótervezéssel [P–3, 5, 6, 12, 16–18]

3.1. tézis. Bebizonyítottam, hogy a TORA és SPG rendszerek véges elemű HOSVD alapú kanonikus alakjai léteznek, mint tíz illetve tizennégy vertex rendszer paraméterfüggő súlyozott kombinációja. Ezen új alakok megadhatóak a

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{S} \bigotimes_{n=1}^{2} \mathbf{w}_n(p_n(t)) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

formában. Ebben a tekintetben bebizonyítottam, hogy különböző típusú véges elemű konvex tenzorszorzat-modellek (SN, NN, szűk konvex, INO–RNO) léteznek, és megadhatóak minimum tíz illetve tizennégy vertex rendszer konvex kombinációjaként.

Ezek a tenzorszorzat-modell alakok új reprezentációk, korábban még nem közölték a tudományos szakirodalomban. Ez az új reprezentáció új lehetőségeket teremt a lineáris mátrixegyenlőtlenségeken alapú szabályozótervezési módszertanban.

3.2. tézis. Bebizonyítottam a lineáris mátrixegyenlőtlenségek formájában megadott Ljapunov stabilitási tételek segítségével, hogy a TORA és SPG rendszerek folytonos véges elemű konvex politopikus modelljei szabályozhatóak és megfigyelhetőek az Ω térben.

Bebizonyítottam, hogy a TORA és SPG rendszerek (7) tenzorszorzat-modelljei SN, NN és NO típusú súlyfüggvényekkel kielégítik a Parallel Distributed Compensation szabályozótervezési keretrendszert. Ezen keretrendszert felhasználva szabályozókat terveztem. Bebizonyítottam a PDC keretrendszerben értelmezett lineáris mátrixegyenlőtlenségekkel azt, hogy a tervezett szabályozók garantálják a többcélú szabályozási feltételeket, mint például aszimptotikus stabilitás, adott kényszerek a szabályozó jellel és a kimeneti állapotokkal szemben.

Továbbá megmutattam, hogy a TORA rendszer szűk konvex tenzorszorzat modellje közvetlenül alkalmazható megfigyelő alapú kimenet-visszacsatolású szabályozótervezésre. Ezen megfigyelő struktúrát felhasználva, lehetőség nyílik a nem mérhető állapotvektorok becslésére, és annak biztosítására, hogy ezen kimenet-visszacsatolásos szabályozó tervezés kielégíti a többcélú szabályozási feltételeket, mint például aszimptotikus stabilitás, adott kényszerek a szabályozó jellel és a kimeneti állapotokkal szemben.

3.3. tézis. Megvizsgáltam a TORA rendszer különböző típusú (SN, NN, és CNO típusú súlyfüggvények) konvex politopikus modelljeinek számítási bonyolultsága és közelítési pontossága közötti ellentmondást. Numerikus szimulációkkal bebizonyítottam, hogy a különböző bonyolultságú tenzorszorzat-modellek között nincs jelentős különbség szabályozási teljesítményben, amíg a tenzorszorzat-modellek számítási bonyolultsága 60%-kal csökkent és a szabályozó 76%-kal kisebb, mint az eredeti. Továbbá fontos megjegyezni, hogy nem csak a szabályozó bonyolultsága csökkent jelentősen, hanem az egész szabályozótervezési eljárás számítási terhelése is sokkal kisebb lett, mivel a lineáris időinvariáns rendszerek száma polinomiálisan befolyásolják a lineáris mátrixegyenlőtlenségek számát.

4. Alkalmazások és felhasználások

A tenzorszorzat-modell transzformáció lehetőséget ad arra, hogy irányítási feladatokban használt különböző reprezentációban adott modelleket új, tenzorszorzat-modell formára alakítsunk át, és újra, új szempontok szerint is megvizsgáljuk azokat. Azzal, hogy az adott feladatot a konvex optimalizálás megoldható feladatai közé transzformáljuk olyan új optimalizálási célok is figyelembe vehetőek, melyek eddig esetleg nem merültek fel. Erre példát is mutat a disszertáció a TORA rendszeren és a Single Pendulum Gantryn keresztül. Mindkét esetben a tenzorszorzat-modell megadja a lehetőséget, hogy a stabilizálási feltételen kívül további szabályozási feltételeket is teljesítsen. A tenzorszorzat-modell transzformáció folytonos függvényeket képes numerikusan és gyorsan, bonyolult analitikus levezetések nélkül, tenzorszorzat alakban megadni különböző tulajdonságok kielégítésével. Ezért olyan tervezési folyamatok rutinszerűvé válhatnak, amelyek eddig analitikus átalakítások sorozatát igényelték. Erre mutat rá a disszertáció a kísérleti példáján, a Single Pendulum Gantryn keresztül, ahol előre megadott szabályozási tulajdonságoktól függően a szabályozót „automatikusan" eredményezték a numerikus módszerek végrehajtása, amelynek stabilizáló tulajdonságai elméletileg is bizonyítottak. Több olyan numerikus vagy lágy számítástudományi eszközökön alapuló identifikációs technika is létezik, melyek automatikusan generálják a modellt. A tenzorszorzat-modell transzformáció ezekhez a modellekhez jól illeszthető. Így esetlegesen megoldható, hogy az identifikációtól a szabályozó tervezésig automatikusan eljuthassunk mindennapos rutinszerű mérnöki irányítási feladatok esetén. A tenzorszorzat-modell transzformáción alapuló megközelítések illetve modellezési technikák, — kiterjesztve a javasolt bonyolultság csökkentő módszerekkel magasabb rendű nemlineáris rendszerekre, — eredményesen alkalmazhatóak a földi járművek (közúti haszongépjárművek) dinamikai modelljeinek vizsgálatára, így többek között hatékonyan felhasználható a közúti haszongépjárművek vázszerkezetének modális analízisében is, a végeselem alapú módszerek kiegészítéseként. Hasonló módon a transzformáció jól alkalmazható haszongépjárművek irányítási, fékezéssel és kormányzással kapcsolatos, feladataiban is.

Publikációk

[P–1] P. Baranyi, Z. Petres, P. Korondi, Y. Yam, and H. Hashimoto. Complexity relaxation of the Tensor Product Model Transformation for Higher Dimensional Problems. *Asian Journal of Control*, 2007. (elfogadva, közlés alatt).

[P–2] Z. Petres and P. Baranyi. Reference Signal Tracking Control of the TORA System: a Case Study of TP Model Transformation Based Control. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering*, 2007. (elfogadva, közlés alatt).

[P–3] Z. Petres, P. Baranyi, and H. Hashimoto. Trajectory tracking by TP model transformation: case study of a benchmark problem. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2006. (elfogadva, közlés alatt).

[P–4] P. Baranyi, Z. Petres, P. L. Várkonyi, P. Korondi, and Y. Yam. Determination of different polytopic models of the Prototypical Aeroelastic Wing Section by TP Model Transformation. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 10(4):486–493, July 2006.

[P–5] P. Baranyi, Z. Petres, P. Várlaki, and P. Michelberger. Observer and Control law Design to the TORA System via TPDC Framework. *WSEAS Transactions on Systems*, 1(5):156–163, January 2006.

[P–6] Z. Petres and P. Baranyi. Trade-Off Properties of Tensor Product Model Transformation: a Case Study of the TORA System. *Production Systems and Information Engineering*, 4:33–51, 2006.

[P–7] Z. Petres, B. Reskó, and P. Baranyi. TP Model Transformation Based Control of the TORA System. *Production Systems and Information Engineering*, 2:159–175, 2004.

[P–8] P. Korondi and Z. Petres. Sliding Mode Control Based on Tensor Product Model Transformation. In *Proceedings of IEEE 3rd International Conference on Mechatronics (ICM 2006)*, pages 672–677, Budapest, Hungary, July 3–5 2006.

[P–9] Z. Petres, P. Baranyi, and H. Hashimoto. Decrease of the Computational Load of TP Model Transformation. In *Proceedings of IEEE 3rd International Conference on Mechatronics (ICM 2006)*, pages 655–659, Budapest, Hungary, July 3–5 2006.

[P–10] Z. Petres, P. Baranyi, F. Kolonić, and A. Poljugan. Approximation Trade-off by TP Model Transformation. In *6th International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*, pages 731–741, Budapest, Hungary, November 18–19 2005.

[P–11] Z. Petres and T. Kiss. Investigation of the approximation accuracy of the TP model transformation through the prototypical aeroelastic wing and the TORA system. In *Proceedings of the 2005 International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES 2005)*, pages 289–294, Mediterranean Sea, September 16–19 2005.

[P–12] Z. Petres, P. L. Várkonyi, P. Baranyi, and P. Korondi. Different Affine Decomposition of the Model of the TORA System by TP model transformation. In *Proceedings of the 2005 International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES 2005)*, pages 105–110, Mediterranean Sea, September 16–19 2005.

[P–13] Z. Petres, B. Reskó, and P. Baranyi. Nonlinear Reference Signal Control of the TORA System: a TP Model Transformation Based Approach. In *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2004)*, volume 2, pages 1081–1086, Budapest, Hungary, July 25–29 2004.

[P–14] P. Baranyi, A. R. Várkonyi-Kóczy, and Z. Petres. Reference Signal Following Control Design of the TORA System: a TP Model Transformation Based Approach. In *Proceedings of Sixth Portuguese Conference on Automatic Control (CONTROLO 2004)*, pages 85–90, Faro, Portugal, June 7–9 2004.

[P–15] A. R. Várkonyi-Kóczy, P. Baranyi, Z. Petres, S. Győri, A. E. Ruano, and P. Légrády. SVD Based Modeling of Nonlinear Systems. In *Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, volume 2, pages 887–891, Anchorage, Alaska, USA, May 21–23 2002.

[P–16] Z. Petres, P. Korondi, and F. Kolonić. Practical application of tensor product model transformation based control design. *IFAC Control Engineering Practice*, 2006. (benyújtva).

[P–17] Z. Petres, P. Baranyi, and H. Hashimoto. Approximation and Complexity Trade-off by TP model transformation in Controller Design: a Case Study of the TORA system. *Asian Journal of Control*, 2005. (benyújtva).

[P–18] P. Baranyi, Z. Petres, P. Várlaki, and P. Michelberger. Tensor Product Model Transformation Based Control of Translational Oscillations with an Eccentric Rotational Proof Mass Actuator (TORA) System. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005. (benyújtva).

Hivatkozások

[1] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1995.

[2] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, pages 856–860, 1994.

[3] V. I. Arnold. On functions of three variables. *Doklady Akademii Nauk USSR*, 114:679–681, 1957.

[4] R. Bambang, E. Shimemura, and K. Uchida. Mixed H_2/H_∞ control with pole placement, state-feedback case. In *Proceeding of American Control Conference*, pages 2777–2779, 1993.

[5] P. Baranyi, L. Szeidl, P. Várlaki, and Y. Yam. Definition of the HOSVD-based canonical form of polytopic dynamic models. In *3rd International Conference on Mechatronics (ICM 2006)*, pages 660–665, Budapest, Hungary, July 3-5 2006.

[6] P. Baranyi, L. Szeidl, P. Várlaki, and Y. Yam. Numerical reconstruction of the HOSVD-based canonical form of polytopic dynamic models. In *10th International Conference on Intelligent Engineering Systems*, pages 196–201, London, UK, June 26-28 2006.

[7] B. R. Barmish. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-28:848–850, 1983.

[8] E. K. Blum and L. K. Li. Approximation theory and feedforward networks. *Neural Netwroks*, 4(4):511–515, 1991.

[9] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba. A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix related problems. *Math. Contr. Sign. Syst.*, 2:207–219, 1989.

[10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM books, Philadelphia, 1994.

[11] S. Boyd and Q. Yang. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems. *International Journal on Control*, 49:2215–2240, 1989.

[12] J. L. Castro. Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Trans. on SMC*, 25:629–635, 1995.

[13] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. In *Proceedings of Conference on Decision Control*, pages 553–558, 1994.

[14] G. Cybenko. Approximation by superposition of sigmoidal functions. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2:303–314, 1989.

[15] E. F. Deprettere, editor. *SVD and Signal Processing*, volume Algorithms, Applications and Architectures. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[16] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34:831–847, 1989.

[17] A. Edelmayer and J. Bokor. Optimal H_2 and H_∞ scaling for sensitivity optimization detection filters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(8):749–760, 2002.

[18] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. S-procedure for the analyisi of control systems with parametric uncertanities via parameter-dependent lyapunov functions. *Thrid SIAM Conf. on Contr. and its Applic.*, 1995.

[19] P. Gahinet. Explicit controller formulas for lmi-based H_∞ synthesis. *Automatica and also in Proc. Amer. Contr. Conf.*, pages 2396–2400, 1994.

[20] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.

[21] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In *Proceedings of Conference on Decision Control*, pages 2026–2031, 1994.

[22] P. Gahinet and A. J. Laub. Reliable computation of γ_{opt} in singular H_∞ control. *SIAM J. Contr. Opt., also in Proc. Conf. Dec. Contr.*, pages 1527–1532, 1994.

[23] P. Gáspár and J. Bokor. *Progress in system and robot analysis and control design*. Springer, 1999.

[24] G. H. Golub and W. Kahan. Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2:205–224, 1965.

[25] I. Grattan-Guinness. A sideways look at hilbert's twenty-three problems of 1900. *Notices of the AMS*, 47, 2000.

[26] J. Gray. The hilbert problems 1900-2000. *Newsletter*, 36:10–13, 2000.

[27] D. Hilbert. Methematische probleme. *2nd International Congress of Mathematican*, 1900. Paris, France.

[28] H. P. Horisberger and P. R. Belanger. Regulators for linear time-varying plants with uncertain parameters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-21:705–708, 1976.

[29] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2:359–366, 1989.

[30] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 30:1307–1317, 1994.

[31] N. Kamarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[32] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ control fir discrete time systems via convex optimization. *Automatica*, 29:57–70, 1993.

[33] I. Kaplansky. Hilbert's problemsversity of chicago. 1977.

[34] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39:824–837, 1991.

[35] A. N. Kolmogorov. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Dokl. Akad. USSR*, 114:953–956, 1957.

[36] B. Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *Proc. of the IEEE Int. Conf. On Fuzzy Systems*, pages 1153–1162, 1992. San Diego.

[37] L. D. Lathauwer. *Signal Processing Based on Multilinear Algebra*. PhD thesis, K.U. Leuven, E.E. Dept.-ESAT, Belgium, 1997.

[38] L. D. Lathauwer, B. D. Moor, and J. Vandewalle. Blind source separation by higher-order singular value decomposition. In *Signal Processing VII: Theories and Applications, Proc. EUSIPCO-94*, pages 175–178, Edinburgh, UK, 1994.

[39] L. D. Lathauwer, B. D. Moor, and J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4):1253–1278, 2000.

[40] G. G. Lorentz. *Approximation of functions*. Holt, Reinhard and Winston, 1966. New York.

[41] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda. LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 8(8):669–686, 1998.

[42] M. Moonen and B. D. Moor, editors. *SVD and Signal Processing*, volume III. Algorithms, Applications and Architectures. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[43] A. Nemirovski and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, pages 840–844, 1994.

[44] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[45] H. T. Nguyen and V. Kreinovich. On approximations of controls by fuzzy systems. LIFE Chair of Fuzzy Theory TR 92-93/302, Tokyo Institute of Technology, 1992.

[46] A. Packard and J. C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29:71–109, 1994.

[47] C. Scherer. H_∞ optimization without assumptions on finite or infinite zeros. *SIAM J. Contr. Opt.*, 30:143–166, 1992.

[48] D. A. Sprecher. On the structure of continuous functions of several variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115:340–355, 1965.

[49] G. Stein and J. C. Doyle. Beyond singular values and loop shapes. *Journal of Guidance*, 14:5–16, 1991.

[50] G. W. Stewart. On the early history of singular value decomposition. Technical Report TR–92–31, Institute for Advanced Computer Studies, University of Mariland, March 1992.

[51] Z. Szabó, J. Bokor, and F. Schipp. Identification of rational approximate models in H_∞ using generalized orthonormal basis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):153–158, 1999.

[52] D. Tikk, L. T. Kóczy, and T. D. Gedeon. A survey on the universal approximation and its limits in soft computing techniques. *Int. J. of Approx. Reasoning*, 33(2):185–202, June 2003.

[53] R. Vaccaro, editor. *SVD and Signal Processing*, volume II. Algorithms, Applications and Architectures. Elsevier, Amsterdam, 1991.

[54] L. X. Wang. Fuzzy systems are universal approximators. *Proc. of the IEEE Int. Conf. On Fuzzy Systems*, pages 1163–1169, 1992. San Diego.

[55] P. M. Young, M. P. Newlin, and J. C. Doyle. *Robust Control Theory*, chapter Let's Get Real, pages 143–174. Springer Verlag, 1994.