BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Építészmérnöki Kar
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Pluzsik Anikó

Kompozit gerendaelméletek

(Analysis of Composite Beams)

Ph.D disszertáció rövid összefoglalása

Témavezető: Kollár László P. egyetemi tanár

Budapest, 2003. november

1. BEVEZETÉS

Disszertációmban vékonyfalú, egyenes tengelyű, prizmatikus rudakat vizsgáltunk. Ezek vékony lemezelemekből összetett háromdimenziós szerkezetek. A rúdelmélet a háromdimenziós szerkezetet egydimenziós modell segítségével vizsgálja. Ehhez az egyszerűsítéshez olyan általánosított erőket és általánosított elmozdulásokat vezet be, amelyek csak egyetlen változótól függenek. Ezekhez az általánosított jellemzőkhöz a rúdmodellekben különböző rúdmerevségeket (EA, EI,…) definiálnak.

A disszertációmban vizsgált vékonyfalú rudak szálerősítésű műanyagból (kompozitból) készülnek. A kompozit anyag tulajdonságai több tényezőtől függnek (a szálak anyaga, a mátrix anyaga, a szálak irányultsága stb.). A kompozitokra jellemző az anizotrop viselkedés és az izotrop anyagokénál kisebb nyírási merevség.

Nem szimmetrikus rétegrendű rudak és egyes zárt, kompozit rudak esetében az irodalomban található modellek pontatlan eredményt szolgáltatnak. Az irodalomban nem található módszer, amely alapján eldönthető, hogy mely esetekben vezet az egyszerűsített rúdmodell elfogadható pontosságú eredményre.

Ennek megfelelően disszertációmban célul tűztem ki, hogy (a) új rúdmodelleket dolgozzak ki azokra az esetekre, melyeknél az elérhető rúdmodellek pontatlan eredményre vezetnek; és (b) szabályokat fogalmazzak meg a tervező számára, hogy mikor szabad az egyszerűsített modelleket alkalmaznia.

2. ELŐZMÉNYEK

Az egyes rúdelméletek három egyenletcsoportot definiálnak. Az egyensúlyi egyenletek a gerenda általánosított belső erői, $\{N\}$ és a gerendára ható terhek, $\{p\}$ között teremtenek kapcsolatot:

$$[F]\{N\}=\{p\}.$$

Az anyagegyenletek adják meg az általánosított erők és az általánosított alakváltozások, $\{\varepsilon\}$ kapcsolatát:

$$\{N\}=[P]\{\varepsilon\},$$

ahol $[P]$ az anyagi merevségi mátrix.

A geometriai egyenletek segítségével a gerenda elmozdulásaiból, $\{u\}$ kiszámíthatjuk az általánosított alakváltozásokat:

$$[F^*]\{u\}=\{\varepsilon\}.$$

A fenti mátrixegyenletek mérete, az $[F]$, $[F^*]$ operátormátrixok és a $[P]$ merevségi mátrix felépítése, az általánosított jellemzők megadása a különböző rúdelméletekben más és más. Az alábbiakban számba vesszük az irodalomban található rúdelméleteket.

A klasszikus rúdmodellek a Bernoulli-Navier-hipotézist alkalmazzák (a rúd tengelyére merőleges keresztmetszetek a deformációk lejátszódása után síkok maradnak és merőlegesek maradnak a rúdtengelyre). Ortotrop esetre Barbero [Barbero at al,1993] adta meg a klasszikus rúdmodell merevségeit. Általánosan anizotrop rudakra a sík keresztmetszetek elve nem tartható. Általánosított síkbeli alakváltozásállapotot feltételezve, zárt szelvényű rudakra Mansfield és Sobey [Mansfield és Sobey, 1979] vezette le a merevségi mátrixot. Elméletükben elhanyagolják a rudat alkotó vékony lemezek lokális hajlítómerevségeit.

A klasszikus rúdmodell pontosítható úgy, hogy figyelembe vesszük a gátolt öblösödés hatását [Vlasov, 1961]. Ortotrop anyagokra Barbero [Barbero, 1993] terjesztette ki Vlasov eredményeit. Bauld és Tzeng [Bauld és Tzeng, 1984] szimmetrikus rétegrendű, nyitott szelvényű, rétegelt kompozit rudakat vizsgált Vlasov alapfeltevéseivel.

Timoshenko úgy pontosította a klasszikus elméletet, hogy figyelembe vette a nyírási deformáció hatását. Modelljében a keresztmetszetek deformáció után nem maradnak merőlegesek a rúd tengelyére, a merőlegestől való eltérésüket jellemzi a nyírási szögtorzulás. Bank [Bank, 1987]

A rúdelmélet alapegyenleteit a nyitott gerendákra levezetett egyenletekkel analóg módon tételeztük fel. Az egyenletekben szereplő ismeretlen merevségeket ($GI_t, S_\omega, EI_\omega$ stb.) úgy határoztuk meg, hogy a rúdmodellünkben elkövetett hiba a lehető legkisebb legyen. Ehhez kétféleképpen felírtuk a rúd belső energiáját, egyrészt a falelemek belső energiájának összegeként, másrészt a rúd általánosított erőinek a segítségével. A kétféle felírás egyenlőségéből számíthatók a rúdmerevségek:

A merevségek képleteiben szereplő nyírófolyamokhoz a (szinuszos teherre kapott) Ritz

$$GI_t = \frac{\left(\oint q_0 r ds\right)^2}{\oint \alpha_{66} q_0^2 ds} \qquad S_\omega = \frac{\left(\oint q_\omega r ds\right)^2}{\oint \alpha_{66} q_\omega^2 ds} \qquad EI_\omega = \frac{\left(\oint q_\omega r ds\right)^2}{\oint \alpha_{11} \left(\frac{\partial q_\omega}{\partial s}\right)^2 ds}$$

módszeres eredményeinket használtuk fel. A Ritz módszerből nyert nyírófolyamot közelítettük, így a gerenda hosszától független képleteket kaptunk.

Ha a keresztmetszet nem szimmetrikus, és a rudat nemcsak csavarónyomaték terheli, a nyíróerőkből is származik elcsavarodás. Disszertációmban megadtuk a merevségi mátrix számítását erre az esetre is.

Megoldásunk jó egyezést mutat a pontos analitikus megoldással.

8. ÖSSZEFOGLALÁS

Disszertációmban új rúdmodellt dolgoztunk ki általánosan anizotrop gerendák számítására elhanyagolva a gátolt öblösödés hatását és a nyírási deformációt.

Egyszerű módszert dolgoztunk ki a tervezők számára a nyírási deformáció elhanyagolásából származó hiba becslésére.

Vizsgáltuk a gátolt öblösödés hatását: Javaslatot adtunk a gátolt öblösödés figyelembevételére kiegyensúlyozott rétegrendű, nyitott gerendák esetére, továbbá új rúdmodellt dolgoztunk ki ortotrop, zárt keresztmetszetű gerendákra. Ezekben az esetekben a gátolt öblösödés hatása jelentős lehet.

Új tudományos eredmények felsorolása

1. Tézis

Levezettem a vékonyfalú zárt és nyitott keresztmetszetű *anizotrop* falelemekből álló kompozit rudak modelljét a *gátolt öblösödés* hatásának *elhanyagolása* esetében és levezettem a merevségi mátrix elemeinek számítására szolgáló összefüggéseket.

Az irodalomban csak olyan modell található [Mansfield és Sobey, 1979], amely elhanyagolja a falelemek lokális hajlítási merevségeit. Megmutattam, hogy ez az elhanyagolás (nem szimmetrikus rétegrend esetén) jelentős hibát okozhat. (Az eredményeket publikáltam: [Kollár és Pluzsik, 2002].)

2. Tézis

Módszert adtam a *gátolt öblösödés* hatásának figyelembevételére nyitott keresztmetszetű, *anizotrop* falelemekből álló kompozit rudak esetére, arra a gyakorlat számára fontos esetre, ha a falelemek rétegrendje kiegyensúlyozott (balanced laminate). Erre a problémára nem volt megoldás az irodalomban. ([Pluzsik és Kollár, 2002])

3. Tézis

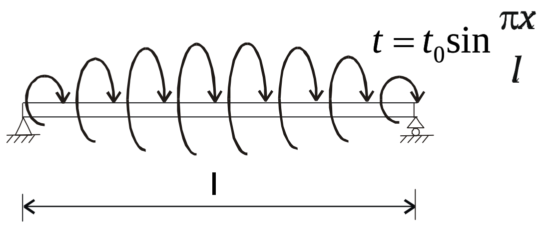
A tervező számára egy egyszerű összefüggést vezettem le, amely alapján eldönthető, hogy egy vékonyfalú, *ortotrop* falelemekből álló rúd esetén milyen rúdhosszúságnál hanyagolható el a *nyírási deformáció* hatása. Az irodalomban nem találtam ilyen módszert. ([Pluzsik és Kollár, 2002])

Az összefüggést kiterjesztettem *anizotrop* falelemekből álló gerendákra is. Az összefüggések alkalmazhatóságát és pontosságát több mint 50 numerikus példával illusztráltam [Pluzsik és Kollár, 2002].

7. ZÁRT SZELVÉNYŰ, ORTOTROP GERENDÁK CSAVARÁSA FIGYELEMBE VÉVE A GÁTOLT ÖBLÖSÖDÉS ÉS A NYÍRÁSI DEFORMÁCIÓ HATÁSÁT

Az irodalomban két megoldást találtunk, amely figyelembe veszi a gátolt öblösödés hatását . Izotrop, kétszeresen szimmetrikus négyszögszelvényű, prizmatikus rudak tiszta csavarását vizsgálta Urban [Urban, 1955]. Az ő eredményeit Kristek [Kristek, 1979] fejlesztette tovább a tengely mentén változó keresztmetszetű négyszögszelvényű rudakra. Kristek modelljének az alkalmazhatósági köre kicsi (csak kétszeresen szimmetrikus négyszögszelvényre ad megoldást) és a nyírási deformációnak a hatását rosszul becsüli. Ennek az az oka, hogy a levezetésben a nyírófolyamot konstansnak tételezi fel. Vlasov [Vlasov, 1961] megoldást adott izotrop, zárt keresztmetszetű rudakra a gátolt öblösödést és a nyírási deformációt is figyelembe véve. Vlasov modelljében nem fejez ki a rúdra vonatkozó merevségeket, a falelemekre felírt differenciálegyenletrendszerében szereplő egyenletek száma a falelemek számának a függvénye. Így módszere nem tekinthető rúdmodellnek. A rúdtengelyirányú nyúlásra tett feltevésük miatt egyik megoldás sem alkalmazható tetszőleges merevségarányok esetében.

Mi felírtuk az egyes falelemekre vonatkozó alapegyenleteket, továbbá az ezekhez tartozó csatlakozási feltételeket (a falelemek találkozásánál a nyírófolyam és a tengelyirányú elmozdulás értéke megegyezik). Ezt a differenciálegyenletrendszert megoldottuk két végén csuklós megtámasztású rúdra szinuszos megoszlású csavarást feltételezve (4. ábra).



1. ábra

Kéttámaszú tartó szinuszos megoszlású csavarónyomatékkal terhelve

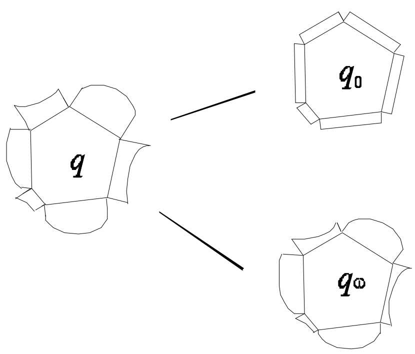
Ez a feladat pontos, analitikus megoldása, ezért (Vlasov megoldásával ellentétben) minden merevségaránynál alkalmazható.

Megadtuk a megoldás közelítését is a Ritz-módszert felhasználva. A nyírófolyamot első és másodfokú bázisfüggvények lineáris kombinációjával közelítettük

$$q = \left(\sum_{k=1}^{2K} C_k \varphi_k \right) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Az ismeretlen konstansokat (C_k) a potenciális energia stacionaritási feltételéből számítottuk.

A gerendamodellünk levezetésekor a nyírófolyamot két részre osztottuk (5. ábra). A konstans nyírófolyamból származik a rúd teljes elcsavarodása, a másodfokú részből származó elcsavarodás zérus.



2. ábra
A nyírófolyam megosztása

általánosan anizotrop anyagú rudakhoz adott megoldást, melyben figyelembe veszi a nyírási deformációt. Elmélete azonban erősen közelítő, saját megfogalmazása szerint is csak előtervezéshez használható.

A nyírási deformáció és a gátolt öblösödés hatásának egyidejű figyelembevételére, ortotrop esetre Massa és Barbero [Massa és Barbero,1998], szimmetrikus rétegrend esetére Kobelev és Larichev [Kobelev és Larichev, 1999] dolgozott ki rúdmodellt, Vlasov és Timoshenko alapfeltevéseit egyszerre figyelembe véve.

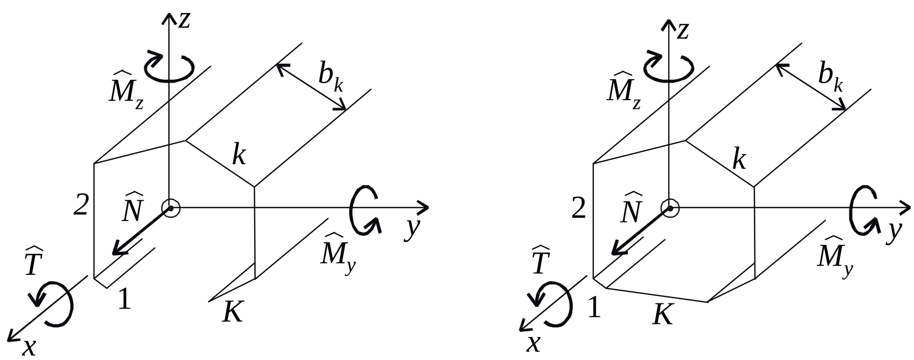
Massa és Barbero, Kobelev és Larichev megoldásai nem veszik figyelembe az öblösödési nyírási deformációt. Ortotrop, nyitott szelvényű gerendákra Kollár [Kollár, 2001] dolgozott ki egy olyan rúdmodellt, amely figyelembe veszi a gátolt öblösödés hatását, a hajlítási nyírási deformációt és az öblösödési nyírási deformációt is. Az izotrop, zárt keresztmetszetű gerendák megoldásait a 7. fejezetben foglaljuk össze. Wu és Sun [Wu, Sun, 1992] általánosan anizotrop, nyitott és zárt keresztmetszetű rudakat vizsgált. Nem fejezik ki azonban a merevségeket explicit formában, megoldásuk nagyon bonyolult és a gyakorlati számításokban nem használható.

Léteznek még komplexebb rúdelméletek is, melyek számításigénye már-már a numerikus módszerekével vetekedik.

3. A DISSZERTÁCIÓ CÉLJA

a) Az irodalomban egyetlen olyan, a gyakorlatban is alkalmazható rúdmodellt találtunk, amely az általánosan anizotrop anyagokat is tudja kezelni [Mansfield és Sobey, 1979]. Mansfield és Sobey zárt keresztmetszetű rudakra vonatkozó modellje azonban csak szimmetrikus rétegrend esetén közelíti jól a valóságot. Célunk egy pontosabb rúdmodell kidolgozása, mely nyitott és zárt keresztmetszet esetén egyaránt alkalmazható.
b) Meg kívánjuk becsülni a nyírási deformáció és a gátolt öblösödés elhanyagolásából származó hibát. Így segítséget nyújtunk a tervezőknek abban, hogy eldöntsék, mikor melyik rúdmodellt válasszák.
c) Célunk volt továbbá olyan rúdmodellt kidolgozni, amely figyelembe veszi a nyírási deformáció és a gátolt öblösödés hatását ortotrop, zárt gerendák esetén. (Az irodalomban csak egy speciális esetre találtunk megoldást.)

4. GERENDAELMÉLET NYITOTT ÉS ZÁRT SZELVÉNYŰ, ÁLTALÁNOSAN ANIZOTROP GERENDÁK ESETÉRE ELHANYAGOLVA A GÁTOLT ÖBLÖSÖDÉS ÉS A NYÍRÁSI DEFORMÁCIÓ HATÁSÁT



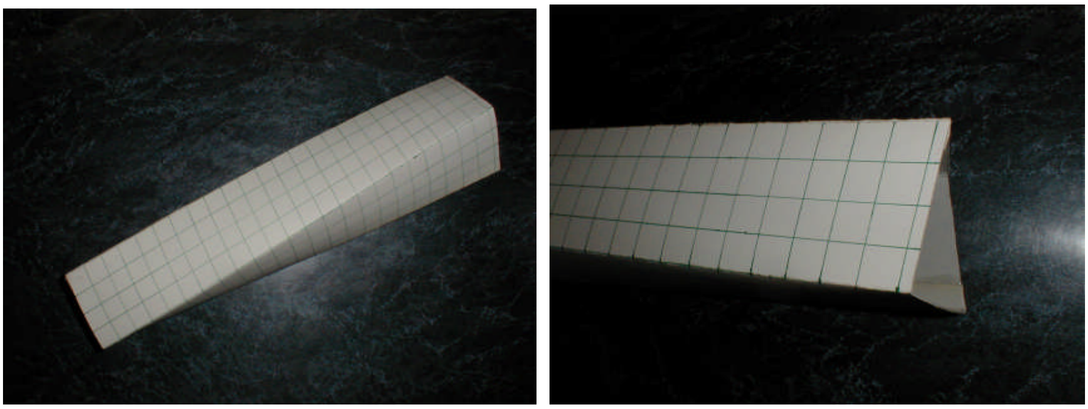
3. ábra
Nyitott és zárt keresztmetszetű, vékonyfalú gerenda

Mansfield és Sobey [Mansfield és Sobey, 1979] zárt keresztmetszetű rudakra vonatkozó levezetésükben önkényesen elhanyagolták a falelemek lokális hajlítómerevségeinek a hatását. Azt találtuk, hogy nem szimmetrikus rétegrend esetén ez az elhanyagolás nagy hibákat okozhat.

Kidolgoztunk egy új rúdmodellt általánosan anizotrop rudakra. Megadtuk a rúd merevségi mátrixát mind nyitott, mind zárt keresztmetszet (1. ábra) esetére. A merevségi mátrix teljesen kitöltött.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \dfrac{1}{\rho_y} \\ \dfrac{1}{\rho_z} \\ \vartheta \end{Bmatrix}$$

(Az általánosított erők értelmezése az 1. ábrán megtalálható, a jobb oldali vektor a tengely irányú fajlagos megnyúlást, a görbületeket és a fajlagos elcsavarodást tartalmazza.) Ha a koordinátarendszert a „centroidban” (izotrop esetben súlypontban) vesszük fel, akkor a normálerő hatására nem görbül meg a rúdtengely, de a rúd ekkor is elcsavarodhat (2.a ábra). Megadtuk a „centroid” koordinátáinak képletét is, és a merevségi mátrixot a „centroid” koordinátarendszerében. A levezetés során a gátolt öblösödés és a nyírási deformáció hatását elhanyagoltuk. Figyelembe vettük, hogy a keresztmetszetek nem maradnak síkok (2.b ábra).



4. ábra
Húzott anizotrop gerenda jellemző deformációi
a, elcsavarodás b, a keresztmetszetek eltorzulása

5. A NYÍRÁSI DEFORMÁCIÓ HATÁSA

Egy rúd lehajlása két részre osztható, hajlítási és nyírási lehajlásra:

$$w = w_B + w_S \,.$$

A nyírási deformáció elhanyagolásakor elkövetett hiba jellemezhető a nyírásból származó lehajlás és a teljes lehajlás hányadosával. Ez az érték függ a rúd, hosszától, a megtámasztásaitól, a rúdra ható terhektől, a keresztmetszet alakjától, és az anyagjellemzőktől. Levezettünk egy olyan közelítő képletet, amely különböző megtámasztási és terhelési viszonyok esetén, I, C és zárt négyszög keresztmetszet esetén is jól becsüli a nyírási deformáció elhanyagolásának hibáját:

$$\alpha = \frac{w_S}{w} \approx \frac{1}{1 + \dfrac{2 l^2 \alpha_{11}^{f}}{\pi^2 b_f d \alpha_{66}^{w}}} .$$

A képletben l a rúd (effektív) hossza, b_f az övlemez szélessége, d az övlemezek távolsága, α_{11}^{f} és α_{66}^{w} pedig az övlemez illetve a gerinclemez hajlékonysági mátrixának elemei. Megmutattuk, hogy az ortotrop rudakra levezetett képlet használható általánosan anizotrop anyagjellemzők esetén is.

A közelítő képletünk pontosságát numerikus példákkal, az ANSYS végeselemes program segítségével ellenőriztük.

6. A GÁTOLT ÖBLÖSÖDÉS HATÁSA

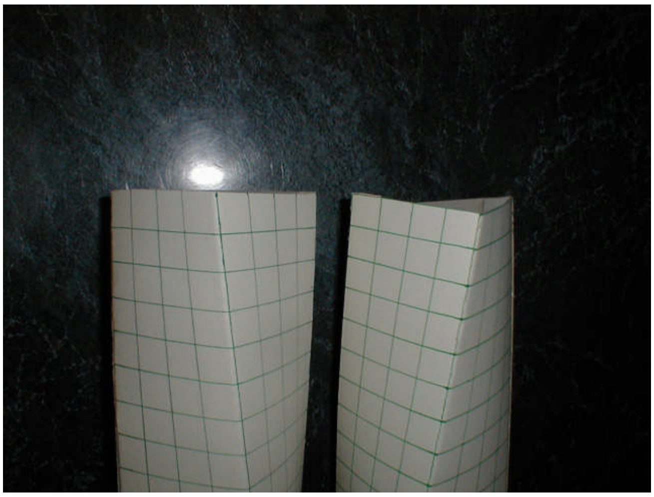
Numerikus futtatásokat végeztünk az ANSYS végeselemes programmal a gátolt öblösödés hatásának vizsgálatára. Azt találtuk, hogy nyitott keresztmetszetű rudaknál semmilyen rétegrend esetén nem hanyagolhatjuk el ezt a hatást.

Közelítő módszert javasoltunk a gátolt öblösödés hatásának a figyelembevételére kiegyensúlyozott rétegrendű rudak esetén. (Az irodalomban nem találtunk használható modellt erre az esetre.) A numerikus eredmények tanúsága szerint jól közelíti a problémát, ha a módosított merevségi mátrix képletében az öblösödési merevséget ortotrop anyag feltételezésével számoljuk, és elhanyagoljuk az öblösödési taghoz tartozó kereszttagokat. Így az anyagegyenlet az alábbi lesz:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T_{sv} \\ M_\omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & \\ & & & & EI_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \frac{1}{\rho_y} \\ \frac{1}{\rho_z} \\ \vartheta \\ \Gamma \end{Bmatrix}$$

(A képletben M_ω a bimoment, Γ pedig az elfordulás második deriváltja.)

Zárt keresztmetszetű rudaknál, ha az összes fal ugyanolyan anyagból azonos rétegrenddel készült, a gátolt öblösödés hatása bármely rétegrend esetén elhanyagolható. A keresztmetszetek közelítően síkok maradnak (3. ábra bal oldal). Ha a falak különböző anyagból készülnek és az egyes falak merevségei között jelentős különbség van, akkor a keresztmetszet öblösödik (3. ábra jobb oldal) és a gátolt öblösödés hatása nem hanyagolható el .



5. ábra

Csavart zárt szelvény deformált alakja

a, azonos falak és b, különböző falak esetén

4. Tézis

Levezettem az *ortotrop* falelemekből álló *zárt keresztmetszetű* kompozit rudak csavarásának differenciálegyenletrendszerét és szinuszos teher és villás megtámasztás esetére megadtam a differenciálegyenletrendszer pontos megoldását. Az irodalomban csak *izotrop* esetre található *közelítő* megoldás [Vlasov, 1961], amely szélsőséges merevségek esetén hibás eredményt szolgáltat.

5. Tézis

Levezettem az *ortotrop* falelemekből álló *zárt keresztmetszetű*, csavart, hajlított, húzott kompozit rudak alapegyenleteit a csavarási nyírási deformáció és a gátolt öblösödés hatásának figyelembevételével, és zárt alakú összefüggéseket vezettem le a merevségek számítására. Az irodalomban ezeket az összefüggéseket csak *nyitott keresztmetszetű* kompozit rudakra vezették le [Kollár, 2001]. Zárt, négy *izotrop* falból álló kétszeresen szimmetrikus rudakra [Urban, 1955] adott megoldást, de a nyírási deformációt hibásan vette figyelembe.

Publikációim az értekezés témakörében

L.P. Kollár and A. Pluzsik, 2002. Analysis of Thin-Walled Composite Beams with Arbitrary Layup. *Journal of Reinforced Plastics & Composites*, Vol.21. 1423-1465

A. Pluzsik and L.P. Kollár, 2002. Effects of Shear Deformation and Restrained Warping on the Displacements of Composite Beams. *Journal of Reinforced Plastics & Composites*, Vol.21. 1517-1541

Hivatkozott publikációk

Bank, 1987. Shear Coefficients for Thin-Walled Composite Beams. Composite Structures. Vol. 8. 47-61.

E.J. Barbero, R. Lopez-Anido, and J.F. Davalos, 1993. On the Mechanics of Thin-Walled Laminated Composite Beams. J. of Composite Materials. Vol. 27. 806-829.

N.R. Bauld and L.S. Tzeng, 1984. A Vlasov Theory of Fiber Reinforced Beams with Thin-walled Open Cross Sections. Int. J. Solids and Structures. Vol. 20. 277-297.

V.V. Kobelev and A.D. Larichev, 1999 Model of Thin-Walled Anisotropic Rods, Mechanika Kompozinykh Materialov, Vol. 24, 102-109.

L. P. Kollár, 2001. Flexural-torsional buckling of open section composite coloumns with shear deformation. International Journal of Solids and Structures 38, 7525-7541.

V. Kristek, 1979. Theory of Box Girders. John Wiley & Sons, New York.

E.H. Mansfield and A.J. Sobey, 1979. The Fiber Composite Helicopter Blade - Part 1: Stiffness Properties - Part 2: Prospectors for Aeroelastic Tailoring. Aeronautical Quarterly, Vol. 30. 413-449.

J.C. Massa and E.J. Barbero, 1998. A Strength of Materials Formulation for Thin Walled Composite Beams with Torsion. J. of Composite Materials. Vol. 32. 1560-1594.

I. V. Urban, 1955. Teoria Rascota Sterznevih Tonkostennih Konstrukcij. Gosudarstvennoe Transportnoe Zeleznodoroznoe Izdatelstvo, Moscow.

V.Z Vlasov, 1961. Thin-walled elastic beams. Office of Technical Services. U.S. Department of Commerce, Wasington 25, DC, TT-61-11400 X.

Wu and C.T. Sun, 1992 Simplified Theory for Composite Thin-Walled Beams. AIAA J. Vol. 30. 2945-2951.