

TÖKÉLETLEN SZIMMETRIA MEGJELÉSE A MÉRNÖKI OPTIMALIZÁLÁSBAN ÉS AZ EVOLÚCIÓBAN

A BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
SZILÁRDSÁGTANI ÉS TARTÓSZERKEZETI TANSZÉKÉN A PHD
FOKOZAT KÖVETELMÉNYEINEK RÉSZLEGES TELJESÍTÉSEKÉNT
BENYÚJTOTT DISSZERTÁCIÓ RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

VÁRKONYI PÉTER

TÉMAVEZETŐ:
DR. DOMOKOS GÁBOR

TARTALOMJEGYZÉK

A DISSZERTÁCIÓ TÉMÁJA, ALAPKÉRDÉSEK	3
SZERKEZETOPTIMALIZÁLÁS	5
ASZIMMETRIA AZ EVOLÚCIÓBAN	7
AZ ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA	10
<i>Szerkezeti optimumokra vonatkozó tézisek:</i>	10
<i>Evolúcióra vonatkozó tézisek</i>	13
PUBLIKÁCIÓK A DISSZERTÁCIÓ TÉMAKÖRÉBEN.	14
EGYÉB PUBLIKÁCIÓK	14

Baranyi P., Várkonyi P. L., Yam Y., Different Affine Decompositions of the Prototypical Aeroelastic Wing Section Model by the TP Model Transformation Part 1. *Proc. of the 9th International Conference on Intelligent Engineering Systems, 2005*, 16-19. 09. 2005, in press.

Petres Z., Várkonyi P. L., Baranyi P., Korondi P. , Different Affine Decompositions of the TORA Model by the TP Model Transformation Part 2. *Proc. of the 9th International Conference on Intelligent Engineering Systems, 2005*, 16-19. 09. 2005, in press.

Várkonyi P. L, Tikk D., Korondi P., Baranyi P., A New Algorithm for RNO-INO Type Tensor Product Model Representation. *Proc. of the 9th International Conference on Intelligent Engineering Systems, 2005*, 16-19. 09. 2005, in press.

Baranyi P., Várkonyi P.L. (2005): Exact Tensor Product Distributed Compensation Based Stabilization of the TORA System. *Proc. of the 2005 WSEAS Int. Conf. on dynamical systems and control, Venice, Italy, November 2-4*, pp. 38-43.

PUBLIKÁCIÓK A DISSZERTÁCIÓ TÉMAKÖRÉBEN.

Várkonyi P. L., Domokos G. (2004), Symmetry, optima and bifurcations in structural design. *Nonlinear Dynamics*, elfogadva.

Várkonyi P. L., Meszéna G., Domokos G., Emergence of asymmetry in evolution. *Theoretical Population Biology*, elfogadva.

Várkonyi P. L., Domokos G. (2005), Symmetry in structural optimisation. *Bulletin, Faculty of Architectural Engineering, BUTE*, pp. 43-46.

EGYÉB PUBLIKÁCIÓK

Várkonyi P. L., Domokos G., Static Equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincaré-Hopf theorem *Journal of Nonlinear Science*, elfogadva.

Baranyi, P., Petres, Z., Varkonyi, P. L., Korondi, P., Yam, Y., Determination of different polytopic models of the Prototypical Aeroelastic Wing Section by TP Model Transformation. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, elfogadva.

Gáspár Zs., Várkonyi P. (2004), Simple Models for Degenerate Cusp Catastrophes. *Proc. of the International Colloquium on Recent Advances and New Trends in Structural Design (Anniversary of Prof. Gioncu)*, Temesvár, 2004. május 7-8.

Várkonyi P. (2004), Qualitative examination of families of structures using the topological map. *Bulletin 2004, Faculty of Architectural Engineering, BUTE*, pp. 143-150.

Várkonyi P. (2001) Hajlított tartók egyszerűsített merevségi vizsgálata. *Vasbetonépítés* 2001/3, pp. 115-118.

A DISSZERTÁCIÓ TÉMÁJA, ALAPKÉRDÉSEK

A szimmetria kitüntetett szerepet játszik az emberi kultúra és megismerés minden területén. Az ember ősidők óta a szimmetria számos megjelenési formáját figyelte meg az őt körülvevő természetben a hópihéek formájától kezdve egy virág felépítéséig, és a szimmetriára régtől fogva, mint a harmónia, tökéletesség szimbólumára tekintenek. Az ókori görög művészetben csakúgy, mint a tudományos világképükben, a szimmetria fő szervezőelemként jelentkezik. Számos példa mutatja ugyanakkor, hogy *tökéletlen szimmetriájú* (vagyis a szimmetrikustól csak kismértékben különböző) kompozíciókkal is kísérleteztek, például a szobrászatban vagy a templomépítészetben. A későbbi művészeti stílusok, azon belül is talán legjobban az építészeti stílusok, előnyben részesítették a tökéletes, illetve tökéletlen szimmetriájú kompozíciókat. A modern stílus volt az első, amely elvetette a szimmetria kitüntetett voltát, sőt tudatosan kerülte azt. A művészetekhez hasonlóan központi szerepet kapott a szimmetria a tudományok fejlődésében, elég, ha a kvantumfizika csoportprezentációkon alapuló elméletére gondolunk.

A mérnöki szerkezetek között is gyakoriak a szimmetrikus formák, de az építészettel ellentétben *tökéletlen szimmetriát* csak elvétve látunk ezek között. A mérnöki alkotások tervezésekor általában célszerűségi szempontok az elsődlegesek, ezért a fenti megfigyelés azt az intuíciót sugallja, hogy egy tökéletlen szimmetriájú szerkezet nem lehet optimális, sőt, rosszabb, mint a tökéletesen szimmetrikus forma. A disszertáció egyik fele ennek az okát kutatja. Bemutat egy egyszerű optimalizálási feladattípust ahol ez az intuíció helyesnek bizonyul. Ezen túlmenően két kérdést vizsgál: meg lehet-e a szimmetriát mégis zavarni úgy, hogy az a szerkezeten *javítson*, illetve egy tökéletlen szimmetriájú szerkezet alak *lehet-e optimális*.

Az élő természetben az evolúcióra gyakran úgy tekintenek, mint egy önszabályozó optimalizálási folyamatra, amely során a

legéletképesebb életformák kifejlődnek és kiszorítják a kevésbé tökéleteseket. Ilyen értelemben az evolúció analógnak tűnik a mérnöki optimalizálással. Az evolúció során az élőlények testfelépítésének szimmetriája is változik (pl. a gerincesek általában kétoldali, míg a csalánozók sugaras szimmetriával rendelkeznek). A szimmetria általános az állatvilágban, de gyakran *tökéletlen*. A véletlenszerűen kialakuló hibákon kívül számos élőlény szimmetriájában genetikusan öröklött tökéletlenségek találhatók, ilyen például az emberi jobb/balkezesség és a hozzá kapcsolódó agyi aszimmetria, amely egyértelműen előnyösebb, mint a tökéletesen szimmetrikus felépítés. A dolgozat második része az aszimmetriák kialakulásának lehetőségeit vizsgálja az Adaptív Dinamika eszköztárának felhasználásával: fő célja annak felderítése, milyen típusai vannak az aszimmetria megjelenésének és ezekhez milyen evolúciós mintázatok kapcsolódnak.

A dolgozat tehát két jelentősen eltérő tudományterületen vizsgálja a szimmetria és optimum viszonyát. A mérnöki részben a tökéletlen szimmetriájú szerkezetek hiánya motiválta a kutatást, míg az evolúciós fejezet alapfelismerése a tökéletlen szimmetria gyakori volta az élővilágban. Mindkét terület szorosan kapcsolódik az optimalizálás témaköréhez, bár, mint bemutattam, az evolúció számos aspektusa nem érthető meg, ha pusztán optimalizálási feladatnak tekintjük. Valójában a két téma matematikai szempontból a sima függvényesaládok (potenciálok) szinguláris pontjaival foglalkozó elemi katasztrófaelmélet közismert eredményeinek két eltérő jellegű általánosítása és alkalmazása. Míg a szerkezetoptimalizálási részben a potenciál nem sima volta jelenti a többletet, az evolúciós rész az „általánosított potenciálként” is felfogható fitness-függvények szinguláris pontjait vizsgálja. Mindkét esetben olyan eredményeket láthatunk, amelyek az elemi katasztrófaelméleti ismeretek alapján szokatlanok: a tartószerkezeti részben olyan bifurkációk jelentkeznek, ahol a szimmetrikus megoldás optimalitása a bifurkációs pontban nem változott, míg az evolúciós kutatás azt mutatja, hogy szimmetrikus élőlények között egy új, aszimmetrikus forma el tud terjedni anélkül, hogy kipusztítaná a szimmetrikus formát.

Evolúcióra vonatkozó tézisek

Az élővilágban gyakran tapasztalható *tökéletlen szimmetria* evolúciós megjelenését modelleztem az adaptív dinamika eszköztárával, azaz egy, az egyedekre jellemző, öröklött szimmetria-sértő x skalár „stratégia” fejlődését vizsgáltam nagy, aszexuális, térben jól kevert populációkban, időben ritkán jelentkező, és x -ben kicsi, de véges változást előidéző mutációk hatására. A tézisek célja elsősorban az aszimmetria megjelenéséhez kapcsolódó evolúciós mintázatok feltérképezése.

IV. Gyakorisághfüggő modellekben a szimmetria-sértés két típusát különítettem el, amit erős/gyenge szimmetriának neveztem. Mindkét típusnál meghatároztam a modellek fitness-függvényének szimmetriatulajdonságait, valamint megmutattam, hogy a két típus eltérő evolúciós viselkedést mutat. A két fajta szimmetria-sértésre számos valódi példát mutattam.

V. Az aszimmetria megjelenésének evolúciós mintázatait vizsgálva

- V.1. **felsoroltam az adaptív dinamikai modellekben jelentkező tipikus mintázatokat**, valamint megadtam valamennyi mintázat kialakulásának pontos feltételét.
- V.2. **kimutattam egy eddig nem ismert evolúciós elágazási mintázat lehetőségét**, melynek során szimmetrikus egyedek között elterjed egy új, aszimmetrikus alak, és együtt él az előbbiekkal.
- V.3. **megmutattam, hogy az új mintázat csak változó környezetben alakulhat ki**, ezzel is bizonyítva, hogy a külső változásoknak az aszimmetria kialakulásában nagyobb szerepe van, mint a hagyományos adaptív dinamikában, ahol az evolúciós elágazás jelenségét időfüggetlen modelleken be lehet mutatni.

esetén a szükséges feltétel megegyezik az II. tézisben szereplő elégséges feltétellel, illetve az I. Tézis pontos feltételével, C_3 szimmetriánál pedig $n=3$ esetben az állítások látszólag ellentmondóak. Ennek magyarázata az, hogy itt nem létezik a kiinduló feltételeknek megfelelő $n=3$ db változó.

II.3. Megmutattam, hogy $\Gamma \equiv D_1$, (tengelyes tükrözés) vagy C_2 és $n=1$ változó esetében speciális (atipikus) szerkezetek potenciálisan lokálisan javíthatóak, tehát a javíthatóságnak ebben a különleges esetben nem szükséges feltétele $n \geq 2$. Megadtam a speciális esetek létrejöttének pontos feltételét, felsoroltam létrejövő tipikus optimum/pesszimum bifurkációkat, és ezek mindegyikére szerkezeti példát mutattam. Egy másik, D_2 szimmetrikus speciális példával szemléltettem, hogy más szimmetriacsoportokban is található a II.2 altézisnek ellentmondó speciális szerkezet típusok

III. Az alábbi két állítást bizonyítottam egy szerkezet lokális, optimális javíthatóságával kapcsolatban:

III.1. Megmutattam, hogy $\Gamma \equiv D_1$, (tengelyes tükrözés) vagy C_2 és $n=1$ változó esetében egy tipikus szerkezet-család lokálisan optimálisan nem javítható, tehát az optimális javíthatóságnak is tipikusan szükséges feltétele $n \geq 2$. A bizonyítás során felsoroltam a λ változtatása mellett létrejövő tipikus optimum/pesszimum bifurkációkat, és ezek mindegyikére szerkezeti példát mutattam.

III.2. Példát mutattam olyan szerkezetcsaládra és változókra, amely potenciálisan lokálisan nem javítható szerkezetekből áll, de a szerkezetcsalád lokálisan, optimálisan javítható. Ezzel igazoltam, hogy D_1 szimmetriával ellentétben bizonyos szimmetriák esetén az optimális javíthatósághoz kevesebb változó is elég lehet, mint a potenciális javíthatósághoz.

A két témakörhöz kapcsolódó vizsgálatokat részletesebben a következő két pontban foglalom össze.

SZERKEZETOPTIMALIZÁLÁS

Szerkezetoptimalizálási feladatokban gyakori, hogy egyes szerkezeti elemek jósága külön-külön van definiálva, és a legkedvezőtlenebb elem határozza meg a teljes szerkezet jóságát, azaz potenciálját. A fejezet gondolatmenete abból a felismerésből indul ki, hogy a fenti feladattípusnál egy tengelyes vagy egyéb szimmetriájú szerkezet szimmetriáját megzavarva a tökéletes szerkezet általában lokális, "robosztus" optimum, azaz ilyen feladatokban a szimmetria kis mértékű megzavarása ront a szerkezeten, mégpedig a romlás mértéke a zavarással lineárisan nő, ellentétben egy sima optimummal, ahol a minőségcsökkenés csak a zavarás négyzetével lenne arányos. A lokális optimum természetesen nem zárja ki más, erősen aszimmetrikus lokális optimumok létét. Ez a tény egyrészt hozzájárulhat annak az alapvető felismerésnek a magyarázatához, hogy miért olyan ritka a tökéletes szimmetria mérnöki szerkezetek geometriájában, másrészt egyenesen következik belőle a kérdés, hogyan lehetne mégis javítani egy szimmetrikus szerkezeten, a szimmetria kismértékű zavarásával.

Ha egy helyett több szimmetriasértő változót vezetünk be, akkor a szimmetrikus konfiguráció javíthatósága szempontjából az alábbi esetek fordulhatnak elő:

A: robusztus optimum

B1: optimum, de nem robusztus, azaz van a változóknak olyan kombinációja, amellyel a szerkezet minősége nem lineárisan romlik.

B2: nem optimum, azaz a változóknak van olyan kombinációja, amely javít a szerkezeten.

Javíthatóság szempontjából a B2 típus van kitüntetett helyzetben. Ugyanakkor az, hogy egy példa B1 vagy B2 típusba tartozik-e, csak részletes erőtanai számítások alapján dönthető el, míg az A és a B típusok között pusztán a szerkezet szimmetriaviszonyai és a változók

ismeretében is különbséget tehetünk. Definiáltam ezért a *potenciális javíthatóság* fogalmát, ami annyit jelent, hogy a tökéletes szerkezet B típusú, és a klasszikus reprezentációelmélet eredményeinek felhasználásával adott változóhalmazra és szimmetriatípusra a potenciális javíthatóság egyszerűen ellenőrizhető feltételét határoztam meg (I. tézis). Ennek segítségével könnyen kiválaszthatók olyan változók, amelyekkel egy szerkezetet kis zavarással potenciálisan javítható, ezen belül a tényleges javíthatóság kérdése részletes erőtanai számításokkal dönthető el. A potenciális javíthatóságra olyan szükséges, illetve elégséges feltételeket is meghatároztam, amelyek kizárólag a változók számára vonatkoznak (II. tézis).

A javíthatóság mellett további kérdésként merült fel, lehetséges-e, hogy a szimmetriát kis mértékben megzavarva (lokális) optimumot kapunk, azaz a szimmetrikus szerkezet *optimálisan javítható*. Majdnem szimmetrikus optimumokat egy p paraméter bevezetésével előállított *feladatcsaládban* találhatunk a paraméter azon p_0 értéke környezetében, ahol a szimmetria-sértő változók \mathbf{x} vektorának optimális értékeit p függvényében ábrázolva az $(\mathbf{x}, p) = (0, p_0)$ pontból aszimmetrikus ($\mathbf{x} \neq 0$) optimumok ágaznak el. Ezért az optimális javíthatóság kérdése a potenciálfüggvények bifurkációanalízisére vezet. Nem sima függvényekről lévén szó, az elemi katasztrófaelmélet eredményei nem alkalmazhatóak, a sima, szimmetrikus potenciálok szokásos villa-elágazása helyett más bifurkációs mintázatok jelentkeznek. Tengelyes szimmetriájú szerkezetekre a vizsgálatot elvégezve megállapítottam, hogy egy szimmetria-sértő változó esetén speciális kivételektől eltekintve a szerkezetcsaládban nincsenek optimum-elágazások (III.1 tézis), ez az eredmény azt mutatja, hogy a majdnem szimmetrikus szerkezeti optimumok rendkívül ritkák. Ugyanakkor példát mutattam olyan, más szimmetriával rendelkező szerkezetek családjára, ahol a szimmetrikus szerkezetek potenciálisan nem javíthatók, a szerkezetcsaládban mégis vannak optimálisan javítható elemek (III.2 tézis). Ezekben az esetekben, meglepő módon, az optimális javíthatósághoz kevesebb szimmetria-sértő változó bevezetése szükséges, mint a potenciális javíthatósághoz, annak ellenére, hogy a természetes intuíció szerint az előbbi tulajdonság tűnik speciálisabbnak.

I. Megmutattam, hogy a potenciális lokális javíthatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a Γ csoport reprezentációja a változók terében nem részreprezentációja Γ reguláris reprezentációjának. Ezáltal könnyen kezelhető algoritmust adtam annak eldöntésére, hogy adott szerkezet és adott változó-halmaz esetén a szimmetrikus szerkezet potenciálisan lokálisan javítható-e. Az algoritmust használatát számos szerkezeti példán illusztráltam. Itt numerikus számításokkal igazoltam hogy a potenciális javíthatóság adott szerkezetre vonatkoztatva gyakran *tényleges* javíthatóságot, szerkezet-családra vonatkoztatva pedig *tényleges, optimális* javíthatóságot jelent.

A csoport-reprezentáció ismerete nélkül (tehát pusztán a szimmetria típusa és a változók száma alapján) is megfogalmazhatók feltételek a potenciális és optimális lokális javíthatóságra, természetesen ezek az I. tézisnél gyengébb, de könnyebben alkalmazható algoritmusokhoz illetve állításokhoz vezetnek, melyeket az alábbiakban ismertetek:

II. Meghatároztam a potenciális, lokális javíthatóság szükséges, illetve elégséges feltételét a változók számára vonatkozóan. Ezen belül:

II.1. **Megmutattam, hogy egy szerkezet potenciális lokális javíthatóságának tipikusan *elégséges* feltétele tetszőlegesen választott n változó esetén $n \geq O(\Gamma)$, ahol $O(\Gamma)$ a Γ csoport rendjét jelöli.** Tengelyesen szimmetrikus szerkezet például két tetszőleges változóval tipikusan potenciálisan lokálisan javítható, C_n , illetve D_n szimmetria esetén az elégséges változószám n , illetve $2n$.

II.2. **Megmutattam, hogy egy tetszőleges szerkezet potenciális lokális javíthatóságának tipikusan szükséges feltétele tetszőlegesen választott n változó esetén $n \geq 2 \dim(\Gamma)$, ahol $\dim(\Gamma)$ a Γ csoport legkisebb valós, triviális komponensét nem tartalmazó reprezentációjának dimenziója.** Diéder és páros rendű ciklikus szimmetriák esetén tehát $n \geq 2$, páratlan rendű ciklikus szimmetriák esetén pedig $n \geq 4$ tipikusan szükséges feltétele a potenciális, lokális javíthatóságnak. D_1 , C_2 szimmetria

AZ ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

Szerkezeti optimumokra vonatkozó tézisek:

Egy paraméteres (p), n változós ($\mathbf{x}=[x_i, i=1,2,\dots,n]$) szerkezet-családok esetén vizsgáltam az n változó optimális értékét lokálisan ($x_i \ll 1$), olyan $U(p,\mathbf{x})$ skalár feltétel szerint, amely a szerkezet „gyenge pontjaihoz“ rendelt lokális potenciálok maximumaként állítható elő, azaz a szerkezet leggyengébb pontjához rendelt mennyiség. Feltételeztem, hogy p tetszőleges, rögzített értéke mellett az $\mathbf{x}=0$ szerkezet nemtriviális, véges Γ szimmetria-csoporttal rendelkezik, de más ($\mathbf{x}\neq 0$) szerkezet nem, továbbá hogy az n -dimenziós szerkezet-halmaz egésze Γ -invariáns. Az $\mathbf{x}=0$ helyzet tipikusan az alábbi két típus egyikébe sorolható:

- (a) Nem sima (robosztus) optimum
- (b) Részben vagy teljesen sima optimum, pesszimum vagy nyereg.

Potenciálisan javíthatónak neveztem egy $\mathbf{x}=0$ szimmetrikus szerkezetet az adott változóiban, ha a szerkezet (b) típusú. Ezen belül a pesszimum vagy nyereg jelent tényleges lokális javíthatóságot. Annak eldöntésére, hogy a potenciálisan javítható szerkezet ténylegesen is javítható-e, el kell végezni az erőtani számításokat.

Optimálisan javíthatónak neveztem egy szerkezetcsaládot $p=p_0$ helyen, ha \mathbf{x} lokálisan optimális értékeinek diagramjában a p paraméter változtatása során az $(p,\mathbf{x})=(p_0,0)$ helyen aszimmetrikus ($\mathbf{x}\neq 0$) optimumokat tartalmazó elágazás van.

Téziseim célja, hogy a szerkezetek potenciális illetve optimális lokális javíthatóságának meghatározására egyszerűen alkalmazható, az erőtani számítást nem tartalmazó algoritmusokat adjak. A szerkezetek potenciális lokális javíthatóságára az alábbi általános feltételt adtam:

ASZIMMETRIA AZ EVOLÚCIÓBAN

A dolgozat második része azzal az evolúciós jelenséggel foglalkozik, amikor kétoldali szimmetriával rendelkező élőlények testfelépítésében valamilyen öröklött aszimmetria jelenik meg, azaz szimmetriájuk tökéletlenné válik az evolúció során. Az evolúció sok szempontból tekinthető optimalizálódásnak, de valójában több annál, hiszen nem egy „optimális” faj egyeduralkodóvá válásához vezet, hanem a természetben tapasztalt sokféleséghez. Ennek megfelelően az evolúciós folyamatok modellezése mutat ugyan matematikai hasonlóságokat a szerkezetoptimalizálással, de az analógia csak részleges: az optimalizálási feladatok egy adott megoldás jóságát kifejező potenciálon alapulnak, ezzel szemben a biológiai modellekben ennek megfelelő fitness-függvény egy élőlény életképességét *adott környezetben* adja meg. A környezeti viszonyokra az adott életközösségben együtt élő összes élőlény hatással van, tehát, egy élőlény „jóságát” önmaga mellett a vele együtt élő versenytársak gyakorisága és típusa is befolyásolja. Ezt a tulajdonságot *gyakoriságfüggésnek* nevezik.

Az aszimmetria kialakulásának vizsgálatára az adaptív dinamika eszköztárát használtam, amely az evolúció fenti aspektusát figyelembe veszi, de számos, matematikailag nehezebben kezelhető tényezőt (pl. az evolúció részletes genetikai hátterét, összetett populációdinamikai jelenségeket, nagy változással járó evolúciós lépések lehetőségét) elhanyagol, így aránylag könnyen alkalmazható számos evolúciós jelenség modellezésére.

Az aszimmetria megjelenését két szempont szerint osztályoztam. A megjelenést kiváltó ok szempontjából:

- a. Egyszerűbb élőlények rendszerei gyakran nem teszik lehetővé az aszimmetria kódolását. Az evolúciós fejlődés során a genetikai rendszer komplexebbé válik, és így lehetséges lesz az aszimmetria kialakulása. Ha az adott környezeti feltételek mellett előnyös, ki is alakulnak aszimmetrikus élőlények. Ezzel

leegyszerűsített módon egy olyan tényezőt veszünk figyelembe (a genetikai korlátokat), amelyekkel az adaptív dinamika általában nem foglalkozik.

- b. Az aszimmetria kialakulása genetikailag lehetséges, de ökológiailag nem előnyös, majd a külső környezet megváltozása miatt előnyössé válik. Ennek modellezéséhez időfüggő adaptív dinamikai modellt kell vizsgálni.

Ökológiai jellegét tekintve pedig a következő osztályokba sorolható az aszimmetria megjelenése:

(A) A modell gyakoriságfüggő. Ezen belül két, az irodalomban nem tárgyalt altípust vezettem be (lásd IV. tétel):

(A1) ha két aszimmetrikus élőlény egymás tükörképe, akkor egymással felcserélhetőek, a modell viselkedésének megváltozása nélkül. Ezt *erős szimmetriának* neveztem el.

(A2) ha két aszimmetrikus élőlény egymás tükörképe, akkor sem azonos a szerepük. Ezt *gyenge szimmetriának* neveztem el.

(B) A modell nem gyakoriságfüggő (tehát a vizsgált evolúciós folyamat optimalizálási feladatra vezethető vissza). Ekkor a tükörkép élőlények szükségképpen felcserélhetőek.

A dolgozat mind a hat esetre felsorolja az aszimmetria kialakulásának tipikus mintázatait, összesen három különbözőt (V. tétel). A b/(A1) esetben kimutatja egy szokatlan elágazás-típus lehetőségét is: egy szimmetrikus populációban megjelenhet és elterjedhet egy új, aszimmetrikus típus, amely együtt él a szimmetrikus ősökkel. Ez jellegében különbözik az adaptív dinamikában szokványos evolúciós elágazásoktól, amelyek során az elágazás előtti őstípus mindig eltűnik. Az új mintázat annak köszönhetően alakul ki, hogy erős szimmetria esetén az időfüggő modell fitness-függvénye diszkrét időpillanatokban degenerálttá válhat, ugyanakkor a mutációs lépések véges (nem infinitezimálisan kicsiny) mérete miatt a degenerált modellre jellemző viselkedés hosszabb ideig is fennállhat, és az alatt néha számottevő evolúciós fejlődés is lezajlik. Ez az eset azt is mutatja, hogy az aszimmetria megjelenésében a külső környezeti változások fontos szerepet játszanak.

Az erős és a gyenge szimmetria közti különbséget valódi példákon, míg az új típusú evolúciós mintázatot egy klasszikus modellen szemléltettem.