

**FELÜLETEK SZÁMÍTÓGÉPES
ELŐÁLLÍTÁSA ÉS A 3^- FELÜLET
SZIMMETRIACSOPORTJAI**

PhD dolgozat
tézisei

STETTNER ELEONÓRA

Témavezető: **Dr. MOLNÁR EMIL**

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM**
Alkalmazott Matematika Szak
2004

„A matematikusok mintáinak, miként a festő és a költő mintáinak, szépeknek kell lenniük. A gondolatoknak, miként a színeknek vagy a szavaknak, harmonikusan kell egymáshoz illeszkedniük. A szépség az első kritérium: a csúnya matematikának nincs tartós helye a világban.”

G. H. Hardy

1 Bevezetés

Ez az értekezés kompakt felületek szimmetriacsoportjait tárgyalja. A 3^- felület szimmetriacsoportjait szeretnénk megadni, ezért tekintsük át néhány (nem csak kompakt) felület ismert diszkrét szimmetriacsoportjait.

Az E^2 euklideszi síkban 17 kristálycsoport van. Ezek első teljes felsorolását Fjodorov közölte (1890) a $219+11$ térbeli kristálycsoporttal együtt, amit vele egyidőben Schoenflies (1891) is felfedezett. Fricke és Klein is foglalkozott a síkbeli kristálycsoportokkal 1897-ben, majd Pólya György 1924-ben. Nowacki absztrakt módon írta le a kristálycsoportokat. Az E^3 euklideszi térben 230 kristálycsoport van, közülük 219 nem-izomorf, 11 tükrös pár lép fel, 1890-ben Fjodorov, 1891-ben Schoenflies, 1894-ben Barlow különböző helyeken, különböző módszerekkel egymástól függetlenül jutottak ugyanarra az eredményre. Valódi kristályokat vizsgálva röntgensugarakkal arra is következtethetünk, hogy a „mi méreteinkben” a tér euklideszi.

A Hilbert által megfogalmazott híres problémák között vannak kristálycsoportokra vonatkozó kérdések is. Az egyik: Igaz-e, hogy minden dimenzióban véges sok euklideszi kristálycsoport van? Bieberbach 1912-ben válaszolt: ez igaz, de számuk rohamosan nő a dimenzióval. Az E^4 térben 4783 (nem izomorf) kristálycsoport van (111 tükrös pár lép fel), ezt számítógéppel határozták meg. 5 és 6 dimenzióban a számuk ismert, de a kristálycsoportok felsorolása nem reményteljes, az esetek száma olyan gyorsan nő.

A hiperbolikus sík kövezései még áttekinthetők [L-M 90, 91], [L-M-V 98]. Végtelen szériák lépnek fel, melyeket később a szignatúra jellemez majd. A 3-dimenziós hiperbolikus tér kristálycsoportjairól nincs áttekintésünk.

Jól ismert, hogy bármely g^+ ($g \geq 2$) nemszámú Riemann-felület irányítást megtartó \mathbf{N}/\mathbf{G} izometria- csoportja véges, rendje legfeljebb $84(g-1)$. Itt $\mathbf{G} = \mathbf{O}^g$ g tórusz összefüggő egyesítésének fundamentális csoportját jelöli és \mathbf{N} a \mathbf{G} normalizátora H^2 mozgáscsoportjában, azaz a hiperbolikus sík orientációt megtartó izometria-csoportjában. Ez a becslés végtelen sok g -re pontos, pl. először $g=3$ -ra.

Ismereteink szerint analóg becslést nem bizonyítottak még $g \geq 3$ nemszámú, kompakt nem-irányítható felületre, melynek univerzális fedőfelülete, a konstans negatív görbületű H^2 hiperbolikus sík.

A 0 nemszámú gömb, a 1^- nemszámú projektív sík, a 2^- nemszámú Klein-kancsó diszkrét izometriacsoportjait a gömb, illetve az euklideszi sík diszkrét szimmetriacsoportjainak ismeretében áttekinthetjük.

A 3^- felület – ami 3 projektív sík összefüggő egyesítése - nem irányítható, és az első e felületek között, melynek fedőfelülete hiperbolikus metrikával rendelkezhet. Mint látni fogjuk, véges izometria-csoporttal rendelkezik, mint minden hiperbolikusan metrizált kompakt felület.

2 Alkalmazott új módszerek

Vizsgálataink új módszere, a számítógéppel előállított felületkiterítés. [S 1998]. Ez azt jelenti, hogy meghatározzuk egy $2n$ -szög lényegesen különböző oldalpárosításait úgy, hogy az oldalpárok mentén összeragasztva (logikailag azonosítva a pontokat) a $2n$ -szög egy kompakt felület lesz. Fordítva, a felület egy $2n$ -szögbe teríthető ki. A problémát algoritmikusan [L-M 90], [L-M 91] és [M 1992] értelmében oldottam meg. Az exponenciálisan növekvő esetszám miatt akkor egy Commodore 64 számítógéppel csak $2n=10$ -ig tudtam a programot lefuttatni. Majd később egy 133 MHz-es Intel Pentium processzorú, 16 Mbyte RAM-mal rendelkező géppel $2n=14$ -ig, a futási idő ekkor, 14-szög esetén kb. 6,5 óra volt. (A dolgozathoz mellékeltem a számítógépes program forráskódját.) Meghatároztuk tehát $2n=14$ -ig egy adott $2n$ oldalszámú sokszög fixpontmentes oldalpárosításait. Számítógéppel minden kombinatorikusan különböző esetet megkaptunk. Ezután becslést adtunk a sokszögek oldalszámától függően a kombinatorikusan különböző felületkiterítések esetszámára.

Észrevesszük az eredmények táblázatából, hogy a három projektív sík összefüggő egyesítéseként kapott felület (továbbiakban 3^- felület) összes kombinatorikusan különböző sokszög kiterítését megkaptuk, mivel a 3^- felületnél a $6 \leq 2n \leq 12$ eseteket kell csak tekintenünk (lsd. 1. táblázat).

A kapott előállítások lehetővé teszik, hogy megvizsgáljuk az említett felület eddig ismeretlen szimmetriacsoportjait. Gondolatmenetünk általános módszert ad arra, hogy a felületek, mint állandó görbületű 2-dimenziós térformák lehetséges szimmetriacsoportjait meghatározzuk. A disszertációban részletesen elvégzett becslés a felület nemszámának (g -nek) függvényében exponenciális növekedést mutat.

3 Új eredmények, tételek

Az univerzális fedőfelület általános konstrukciója lehetővé teszi, hogy bármely kompakt nemirányítható felületet mint Π^2/\mathbf{G} orbitstruktúrát tekinthessünk. Itt Π^2 egyszeresen összefüggő topologikus felület, egy az S^2 , E^2 , H^2 , azaz a gömb, az euklideszi és a hiperbolikus sík közül. \mathbf{G} pedig Π^2 -en fixpontmentesen (szabadon) ható izometriacsoport $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$ kompakt fundamentális tartománnyal. Ez a tartomány egy $2g$ oldalú sokszögnek választható az egymásutáni oldalak alábbi (kanonikus) oldalpárosításával, ahol

$$(1.1) \quad a_i: s_{ai-1} \rightarrow s_{ai}, \quad a_i^{-1}: s_{ai} \rightarrow s_{ai-1}, \quad 1 \leq i \leq g$$

irányításváltó izometriák (eltolástükrözések). Ez a \mathbf{G} fundamentális csoport kanonikus előállításához (prezentálásához) vezet:

$$(1.2) \quad \mathbf{G} = (a_1, a_2, \dots, a_g \text{ — } a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g = 1) =: \otimes^g$$

S^2 , $g=1$ a projektív síkot
 E^2 , $g=2$ a Klein-kancsót jellemzi,
 H^2 , $g \geq 3$ más, nem irányítható kompakt felülethez vezet,
 pl. 3^- felületünkhöz.

Először a 3^- felület 8 fundamentális hatszög előállításából kapott szimmetriacsoportokat vizsgáljuk. Majd megfogalmazzuk a következő tételt (1.a)-b) ábra):

1.1 Tétel. *A hatszögtartományok csúcsalakzataikkal együtt a 3^- felület alábbi (kombinatorikusan nem bővíthető) N/G szimmetriacsoportját hozzák létre a G fundamentális csoport N normalizátorával a hiperbolikus sík H^2 izometriacsoportjában.*

1. aabbcc: $|N/G|=12$. *Az N normalizátort négy tengelyes tükrözés generálja, melyek az oldalaira tükrözik az \mathcal{F}_N tartományt, amint a 1.a) ábra mutatja. Az N Conway-Macbeath szignaturája $*2223$, amely egy peremkomponenssel rendelkezik a felsorolt diédercsúcsokkal.*

2. aabcbC: $|N/G|=2$. *Az N normalizátor \mathcal{F}_G centrumalakzatát a csúcsalakzatba képezi le \mathcal{F}_N szerint ($2*\otimes$ szignaturával, ahol a keresztsapka a projektív síkot jelenti) a következő előállítással*

$$N=(m, h, t, g - m^2, h^2, mtmt^{-1}, hggt)$$

(1. a) ábra) .

3. aabcBC: $|N/G|=4$. *Az N normalizátor \mathcal{F}_N fundamentális tartományának előállítása az 1.a) ábrán látható. N szignaturája $2*222$ (egy másodrendű forgáscentrummal és egy peremkomponenssel rendelkezik).*

4. aabccb: $|N/G|=8$. *Az N alaptartománya az \mathcal{F}_N tükrözéstartomány a 1.b) ábrán látható $*2224$ szignaturával.*

5. abacbc, 8. abcaBC: $|N/G|=4$. *Az \mathcal{F}_N fundamentális tartomány a következő N normalizátort állítja elő*

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1}),$$

amely az 1.b) ábrán látható, N szignaturája $2*222$.

6. abacbc, 7. abacBC: $|N/G|=2$. *\mathcal{F}_N oldalpárosításával a következő geometriai előállítását láthatjuk*

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1})$$

az 1.b) ábrán, $2**$ szignaturával (két peremkomponenssel).

A 3. 5. és 8. esetben izomorf a normalizátor és ekvivariánsak a szimmetriacsoportok. \square

A továbbiakban a számítógépes program által adott mind a 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományt figyelembe véve, a 3^- felület szimmetriáit és az ezekhez tartozó (fundamentális) kövező sokszögeit elemzzük. Különösen fontosak az úgynevezett maximális szimmetriacsoportok, amelyek kombinatorikusan már nem bővíthetők tovább. A 2. táblázatban látható eredményünk az

1.2 Tétel 3^- felületnek 2 maximális, nem bővíthető szimmetriacsoportja van: a 12-rendű $*2223/G$ és a 8-adrendű $*2224/G$ csoportok. A további N/G ($G = \otimes^3$) csoportok ezek részcs csoportjai, melyek háló struktúrával (részcs csoport-háló) rendelkeznek. \square

Ez analógiában van az euklideszi sík (E^2) N/T kristály csoportjainak 17 osztályával, melyeknél

$$(1.3) \quad N_1 = p 6 m m = * 2 3 6 \text{ és } N_2 = p 4 m m = * 2 4 4$$

az alábbi tóruszcsoportnak a maximális normalizátorai (további eltolások nélkül!):

$$(1.4) \quad T = p 1 = O = (a_1, b_1 \text{ — } a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} (=1)).$$

Ezért tárgyalásunkat tekinthetjük úgy, mint a 17 diszkrét E^2 csoport analóg kiterjesztését más, hiperbolikus metrikájú kompakt felületre. A számítógépes előállításunk [S 98]-ban felsorolja a H^2/\otimes^3 jelű 3^- felület 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományát (3. táblázat). Az általános algoritmus alapja - amely g^- -nek minden fundamentális tartományát megadja [L-M 90, 91], [L-M-V 98]-ben - a $2g$ oldalú sokszög fixpontmentes oldalpárosítása: egy csúcsosztállyal, legalább egy irányítást megváltoztató oldalpárral. Ezt gráf szerkesztésével kell bővítenünk, esetleg további csúcsok hozzáadásával. Ezen gráf mentén a felületet felvágjuk és kiterítjük legfeljebb $6(g-1)$ oldalú topológiai sokszöggé, legfeljebb $2(g-1)$ csúcsosztállyal úgy, hogy minden osztályba legalább 3 csúcs tartozzon (ezt az eljárást mutatja a 3.a)-3.b) ábra).

Ily módon majd nem csak a lehetséges N/G csoportokat kapjuk meg, de a H^2/G 3^- felület normalizátor- kövezéseit is, az \mathcal{F}_N tartományok kombinatorikus (topológiai) ekvivalenciájáig egyértelműen. Természetesen a $G = \otimes^3$ különböző fundamentális tartományai indukálhatják az N normalizátor ugyanazon tartományait, így a 3^- felület ekviviáns kövezéseit (lsd. pl. 3.a) és 3.b) ábrát). De a fix N -hez tartozó kombinatorikusan különböző \mathcal{F}_N -eket meg fogjuk különböztetni, mint H^2/G különböző kövezéseit. A 3. táblázat felsorolja az ugyanazon \mathcal{F}_G -hez tartozó jellemző maximális normalizátort (normalizátorokat), ez néha nem egyetlen. A 2. táblázatban más fundamentális kövezésbe alakíthatjuk át ezeket részcs csoport-szimmetriatöréssel.

A 3^- felület \mathcal{F}_N fundamentális kövezéseinek teljes osztályozása ezután már viszonylag könnyű, de túl hosszadalmas lenne felsorolni. Mint információt megadjuk az összes kombinatorikusan különböző \mathcal{F}_N poligonszimbólumot a 4. táblázatban és egy esetet illusztrálunk a 3. a-b ábrán.

Megfogalmazzuk fő eredményünket:

1.3 Tétel: *A hiperbolikus (H^2) metrikával ellátott 3^- felület, mint 3 projektív sík összefüggő egyesítése, 12 darab N/G izometria-csoportot határoz meg. Ezek a csoportok a 3^- felületen hatnak, amit H^2 izometria- csoportjában a felület $G = \otimes^3$ fundamentális csoportjának N normalizátora indukál homeomorf ekviviánciáig egyértelműen. Ez a 12 darab N normalizátor a 3^- felület $65+58$ fundamentális kövezését adja (2-4 táblázat). □*

Ezután bizonyítjuk majd osztályozásunk teljességét.

Alapeszközünk egy tetszőlegesen adott szignaturájú tetszőleges kompakt felület (orbifold) fundamentális tartományainak algoritmikus felsorolása [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98]. Nevezetesen, most a 3^- kompakt felület G fundamentális csoportjához és ennek a H^2 sík $\text{Isom}H^2$ izometria- (egybevágóság-) csoportjában vett tetszőleges N normalizátorához (lsd. 2-4. táblázatban).

Az alábbi diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{G}_i \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{g}_i \\
 \\
 \Pi_j^2 \ni P_j & \longrightarrow & P_j^{\mathbf{g}_i} \in \Pi_j^2 (=H^2) \\
 \downarrow \mathbf{N}_k \ni \mathbf{n}_k & & \downarrow \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 \\
 & & P_j^{\mathbf{g}_i^{\mathbf{n}_k}} \\
 & & \parallel \\
 \Pi_j^2 \ni P_j^{\mathbf{n}_k} & \longrightarrow & P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{g}_i}} \in \Pi_j^2 \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{g}_i' \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{G}_i
 \end{array}$$

(1.1)

azt szimbolizálja, hogy a $\mathbf{G}_i = \{g_i\}$ fundamentális csoport hogyan hat a $\Pi_j^2 = \{P_j\}$ univerzális fedősíkon a Π_j^2/\mathbf{G}_i orbittérhez, mint felülethez képest, és hogyan hat az orbittéren a \mathbf{G}_i -hez tartozó normalizátor $\mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2$, miközben az n_k leképezés egy tetszőleges $P_j^{\mathbf{G}_i}$ \mathbf{G}_i -orbitot képez egy másik $P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{G}_i}} = P_j^{\mathbf{G}_i^{\mathbf{n}_k}}$ orbitba bármely $n_k \in \mathbf{N}_k$ -re. Ez indukálja a felületen az $\mathbf{N}_k/\mathbf{G}_i$ izometria csoportot:

$$(1.5) \quad \mathbf{G}_i \triangleleft \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j, \text{ ezért } \mathbf{n}_k \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k/\mathbf{G}_i.$$

Itt a Π_j^2 sík vagy az S^2 , vagy az E^2 , vagy a H^2 síkot jelenti. A \mathbf{G}_i és \mathbf{N}_k csoportokat homeomorfizmus-ekvivariancia erejéig egyértelműen a szignatúra fogja meghatározni.

1.1 Definíció: A \mathbf{G}_1 csoportnak a Π_1^2 -síkon történő hatása φ -ekvivariáns a \mathbf{G}_2 csoport Π_2^2 -síkon való hatásával, ha létezik egy φ homeomorfizmus az alábbiak szerint:

$$(1.6) \quad \varphi: \Pi_1^2 \rightarrow \Pi_2^2: P_1 \rightarrow P_2 := P_1^\varphi, \text{ úgyhogy } \mathbf{G}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{G}_1 \varphi,$$

tehát a \mathbf{G}_1 hatását φ viszi át a \mathbf{G}_2 hatásába.

Ha a fenti φ homeomorfizmusra még $\mathbf{N}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$ is teljesül, akkor az $\mathbf{N}_1/\mathbf{G}_1$ és $\mathbf{N}_2/\mathbf{G}_2$ faktorcsoporthoz (szimmetriacsoporthoz) szintén ekvivariánsnak nevezzük. Ha $\mathbf{N}_2 > \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$, akkor $\mathbf{N}_2/\mathbf{G}_2 > \mathbf{N}_1/\mathbf{G}_1$, azaz \mathbf{N}_2 gazdagabb szimmetriacsoporthoz vezet a Π_2^2/\mathbf{G}_2 felületen, mint \mathbf{N}_1 a Π_1^2/\mathbf{G}_1 felületen.

A G csoport izomorf, vagyis ekvivariáns N normalizátorai ekvivalenciaosztályokat hoznak létre és felvethetjük a különböző ekvivalenciaosztályok meghatározását és a részcsoporthoz tartozások vizsgálatát. Ehhez elegendő a maximális (valódi) részcsoporthoz többi részcsoporthoz való kapcsolatát tanulmányozni.

Habár sok kombinatorikusan különböző \mathcal{F}_G (\mathcal{F}_N) tartományunk lehet — algoritmusunk [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98] mindegyiket felsorolja. Bármely \mathcal{F}_G , a baricentrikus felbontásával és G -képeivel, a G -t generáló oldalpárosításokkal, a nem- G -ekvivalens csúcsok a definiáló relációkkal, teljes információt ad — véges algoritmikus eljárásban — a lokálisan minimális zárt geodetikusok rendszeréről, az irányítástartó és irányítást váltó transzformációkról és ezek G -képeiről (konjugáltjairól) is. Az N normalizátornak bármely n eleme ezt a rendszert önmagára képezi, most metrikusan is, ha az \mathcal{F}_G tartományt jól deformáltuk egy φ homeomorfizmussal. Tehát \mathcal{F}_N -t lépésről lépésre határozzuk meg.

Természetesen, bármely \mathcal{F}_G deformálható oly módon, hogy bármely lehetséges N normalizátor előforduljon, mert bármely kombinatorikus \mathcal{F}_G -t átdarabolással és ragasztással átalakíthatunk bármely másikba a szokásos topologikus eljárással. De most csak azokra az esetekre koncentrálunk, ahol \mathcal{F}_N -nek N - képei kikövezik \mathcal{F}_G -t N/G reprezentánsaival, és tudjuk, hogy ez az eljárás véges.

1.4 Tétel: *A $G = \otimes^3$ csoporthoz a fundamentális (topologikus) poligonoknak 65 típusa van, melyeket a 3. táblázatban megadott a számítógépes eljárás. \square*

Megvizsgáljuk mindegyiket a fenti szempontból. \mathcal{F}_G kombinatorikus strukturájából kiválasztjuk a normalizátor elemeit és lépésről lépésre felvágjuk \mathcal{F}_G -t kisebb tartományokra az indukált oldalpárosításokkal, először kombinatorikus egyenes tükrözéssel, azután forgatással, speciálisan félfordulattal, eltolás-tükrözéssel, eltolással, megőrizve az oldalak G -ekvivalenciáját. Mindig ellenőrizzük a homomorfizmus kritériumát bármely lehetséges N -nel. Így megkapjuk \mathcal{F}_N -t és N -et, majd N/G -t, ezenkívül a legkisebb \mathcal{F}_N -t \mathcal{F}_G -hez, így adódik a leggazdagabb N és N/G , amely kövezi \mathcal{F}_G -t az N/G -t reprezentáló \mathcal{F}_N képeivel.

Ily módon megkapjuk majd a 2. táblázatot a 3. és a 4. táblázatból.

4 Sejtések, további feladatok megfogalmazása

Végül a kapott eredmények alapján általános megjegyzések is megfogalmazhatók tetszőleges g^- , $g \geq 3$ felület esetére, amely sejtéseket egy későbbi dolgozatban szeretnénk bizonyítani.

1.1 Megjegyzés Az 2.b ábrán feltüntettük a séma általános előállítását tetszőleges g^- , $g \geq 3$ felület esetén. Általános feltevésünk az, hogy

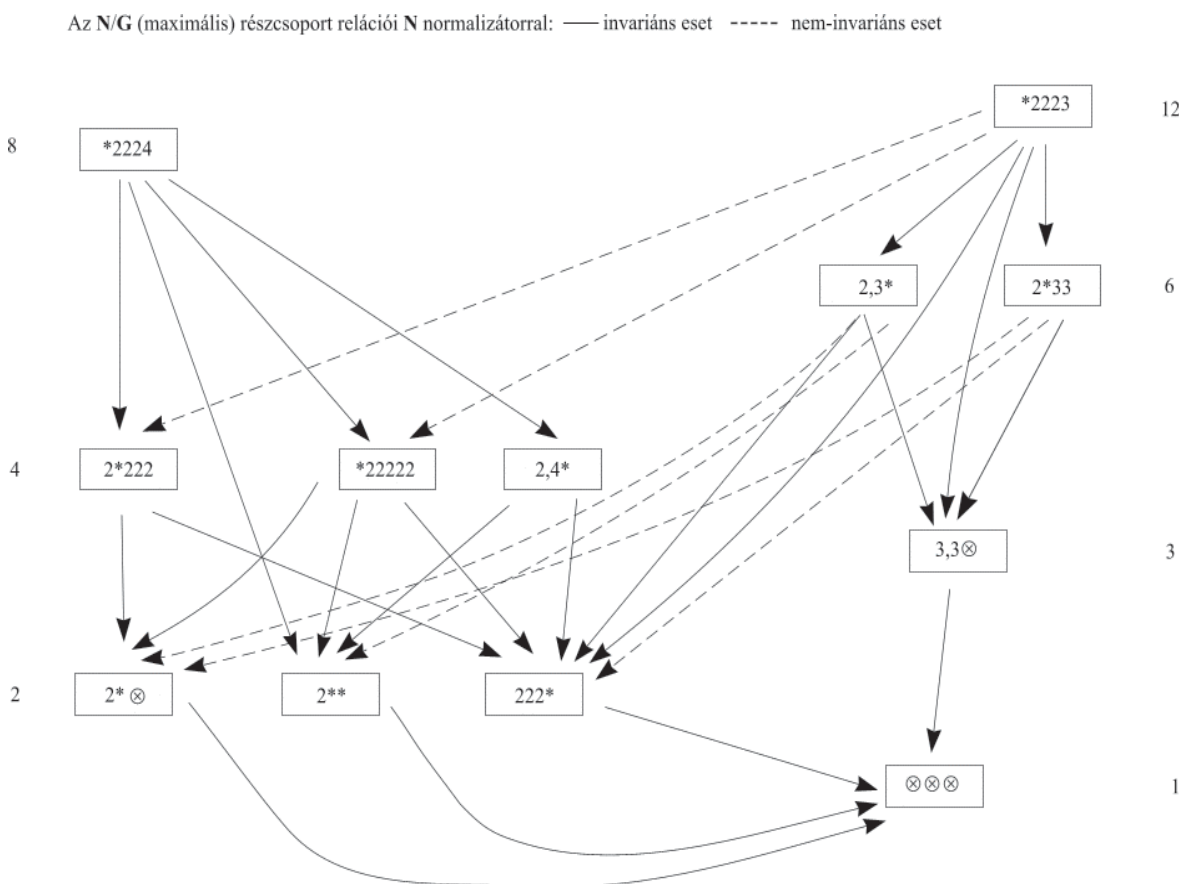
$G = \otimes^g$ maximális normalizátora a hiperbolikus sík Isom H^2 izometria csoportjában az $N_{g^-} = *222g$ $|N/G|=4g$, mint tükrözés csoport a $(\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/g)$ szögű négyszög oldalegyenesekre.

1.2 Megjegyzés Az általunk létrehozott sémát szabályos $\pi/2$ szögű $4(g-1)$ -szög is generálja.

Ekkor $N_{g^-} = *222[2(g-1)]$ a sejtett második leggazdagabb normalizátor. A $4(g-1)$ -szög oldalait $g-1$ eltolás tükrözéssel és ugyancsak $g-1$ eltolással párosítjuk, és $g-1$ egyenként 4 csúcsot tartalmazó csúcsoztály keletkezik $|N/G|=4(g-1)$.

| 2n | p1 | p2 | p3 | n2 | n3 | n4 | n5 | n6 | n7 |
|----|----|----|------|----|----|-----|-------|--------|--------|
| 4 | 1 | | | 2 | | | | | |
| 6 | 1 | | | 2 | 8 | | | | |
| 8 | | 4 | | | 22 | 47 | | | |
| 10 | | 18 | | | 24 | 279 | 473 | | |
| 12 | | 34 | 82 | | 11 | 682 | 4928 | 7192 | |
| 14 | | 38 | 1022 | | | 838 | 20979 | 110266 | 144906 |

1. táblázat



2. táblázat

A 3^- felület fundamentális tartományainak felsorolása a tipikus maximális kövező normalizátorokkal, N/G faktorcsoportjaival és azok rendjével

| | | | | | |
|-----|----------|-----------------------|------|---------------|-----------------------|
| | | | 10/1 | aabcbdeeDc | → 10/16 |
| 6/1 | aabbcc | 2*33 / 3m, 6 | 2 | aabccBdeeD | 2*⊗ / m, 2 |
| 2 | aabcBC | ⊗ ³ / 1, 1 | 3 | aabcdbeCed | ⊗ ³ / 1, 1 |
| 3 | aabcBC | 2*⊗ / m, 2 | 4 | aabcdBeCDE | 2*⊗ / m, 2 |
| 4 | aabccb | 2*222 / mm, 4 | 5 | aabcdBedcE | 222* / m, 2 |
| 5 | abacbc | *2224 / mm o m, 8 | 6 | aabcdceDeB | → 8/16 |
| 6 | abacbC | 2** / m, 2 | 7 | aabcdCedEB | → 8/19 |
| 7 | abacBC | 2** / m, 2 | 8 | aabcdCeDEB | → 8/18 |
| 8 | abcaBC | 2*222 / mm, 4 | 9 | aabcdecDeB | → 8/18 |
| | | | 10 | aabcdeCDEB | → 8/16 |
| 8/1 | aabbcdC | → 6/4 | 11 | aabcdeCedB | → 8/15 |
| 2 | aabcbCd | 2*⊗ / m, 2 | 12 | aabcbdeeDcB | *2223 / m o 3m, 12 |
| 3 | aabcbddc | 2*⊗ / m, 2 | 13 | abacdbeCDE | ⊗ ³ / 1, 1 |
| 4 | aabcBdcD | 222* / m, 2 | 14 | abacdbedcE | ⊗ ³ / 1, 1 |
| 5 | aabcBdCD | 2** / m, 2 | 15 | abacdBceDe | 2*⊗ / m, 2 |
| 6 | aabcdbCd | 2** / m, 2 | 16 | abacdBeCed | 2*⊗ / m, 2 |
| 7 | aabcdBCD | 2*⊗ / m, 2 | 17 | abacdCbedE | 222* / m, 2 |
| 8 | aabcdBdc | ⊗ ³ / 1, 1 | 18 | abacdCbeDE | 2** / m, 2 |
| 9 | aabcdcDB | → 6/6 | 19 | abacdeBcDe | 2** / m, 2 |
| 10 | aabcdCDB | → 6/5 | 20 | abcadBeCDe | 2*222 / m o 2, 4 |
| 11 | aabcbdcB | → 6/8 | 21 | abcadcebDE | ⊗ ³ / 1, 1 |
| 12 | abacbdC | ⊗ ³ / 1, 1 | 22 | abcadcedBE | 2*⊗ / m, 2 |
| 13 | abacbdCD | ⊗ ³ / 1, 1 | 23 | abcAdeBCEd | 2*222 / mm, 4 |
| 14 | abacBdCd | 2*⊗ / m, 2 | 24 | abcAdecBEd | 2*222 / mm, 4 |
| 15 | abacdbCD | 2*⊗ / m, 2 | | | |
| 16 | abacdbdc | *2223 / mm o 3, 12 | 12/1 | aabcdceffEdB | 2*⊗ / m, 2 |
| 17 | abacdBcD | ⊗ ³ / 1, 1 | 2 | aabcbddCeffEB | *2223 / 3m o m, 12 |
| 18 | abAcdbDc | *22222 / mm, 4 | 3 | aabcbdecfDfeB | → 12/11 |
| 19 | abAcdbDc | *22222 / mm, 4 | 4 | aabcbdeCfDEFB | → 10/23 |
| 20 | abcadBCD | 2*⊗ / m, 2 | 5 | aabcbdeCfedFB | → 10/23 |
| 21 | abcadcbD | 2*⊗ / m, 2 | 6 | abacdeBcfDfe | 2*⊗ / m, 2 |
| 22 | abcdaBcD | *2224 / 4m, 8 | 7 | abacdeCbfDEF | 2*⊗ / m, 2 |
| | és | *2223 / 2 o 3m, 12 | 8 | abacdeCbfedF | 222* / m, 2 |
| | | | 9 | abcadeBdfCEf | *2223 / 3m o m, 12 |
| | | | 10 | abcadecfDbEF | 2*⊗ / m, 2 |
| | | | 11 | abcadecfeBdF | 2*⊗ / m, 2 |

3.táblázat

Az \mathcal{F}_N sokszög szimbólumok felsorolása [L-M-V 98] alapján $G = \otimes^3$ nem triviális N normalizátoraival. A szimbólumban ...a...a... eltolástükrözéssel történő oldalpárosításra utal ...b...B... hiperbolikus eltolásra, — egyenes tükrözésre; ...anb... n-ed rendű forgatási, vagy tükrözési középpontot jelent, ami a-t b-vel kapcsolja össze, ...c2C... az oldal középpontja körüli ponttükrözést jelenti, ...dnD... n-ed rendű elforgatásra utal d-ből D-be.

222* (13 tartomány): —a2Ab2Bc2C, —a2Ab2c2C2B, —a2b2B2c2CA, —a2b2c2C2B2A,
—a2A—b2Bc2C, —a2A—b2c2C2B, —a2A—b2B—c2C,
—a2Abc2Cd2DB, —ab2Bc2Cd2DA, —ab2Bc2d2D2CA,
—a2bc2Cd2DB2A, —a2A—bc2cd2DB, —ab2Bcd2De2ECA

2 (4):** —a2Ab—B, —a—A—b2B, —a2b—B2A, —ab—Bc2CA

2*⊗ (16): — ab2Ba, —a2ba2b, —a2b2b2A, —a—ab2B, —a2b—a2b,
—a—a—b2B, —abac2Cb, —abbAc2C, —abbc2CA, —abc2CbA,
— ab2cb2cA, —a2bccBA, —a2A—bccB, —ab—ac2Cb,
—ab2BcddCA,
— abc2CdbdA

3,3⊗ (8): a3a3b3B3, a3b3a3b3, aab3Bc3C, aab3c3C3B, a3Ab3cb3c, a3Abc3Cb,
aabc3Cd3DB, a3ABc3CdBd

24* (5): —a2Ab4B, —a4b2B4A, —a2b4B2A, —a2A—b4B, —ab2Bc4CA

***22222 (1):** —2—2—2—2—2

2*222 (2): —2—2—2a2A2, —2—2—2—a2A

2*33 (2): —3—3a2A3, —3—3—a2A

23* (5): —a2Ab3B, —a3b2B3A, —a2b3B2A, —a2A—b3B, —ab2Bc3CA

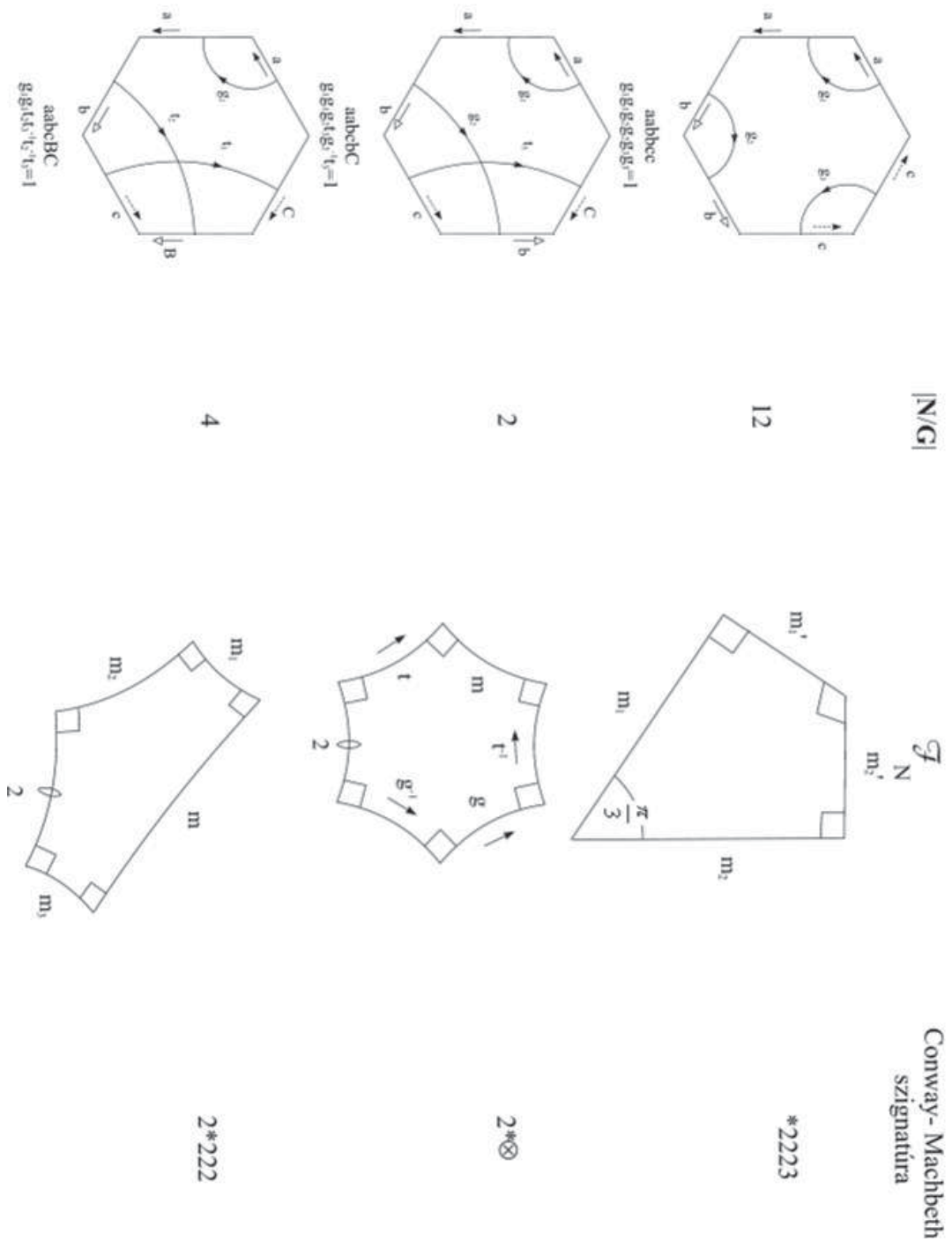
***2224 (1):** —2—2—2—4

***2223 (1):** —2—2—2—3

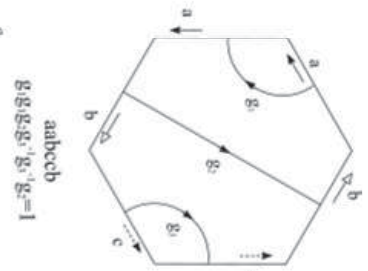
65+
58 kövezés

4. táblázat

Hatszögletartományok zárt geodetikus vonalakkal és a $\bar{3}$ felület néhány tipikus normalizátóra

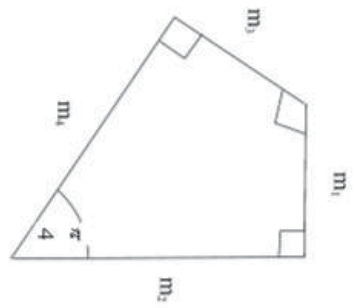


1.a) ábra

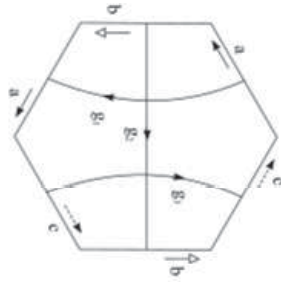


abcbcb
 $g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 = 1$

8

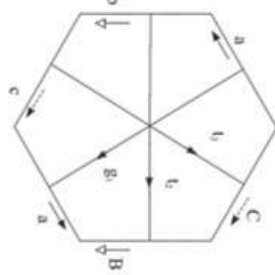


*2224



abcbcb
 $g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 = 1$

4

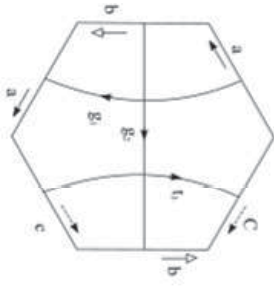


abcbcb
 $g_1 t_1 c^{-1} g_1 t_1^{-1} = 1$

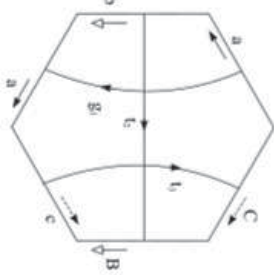
2*222



2

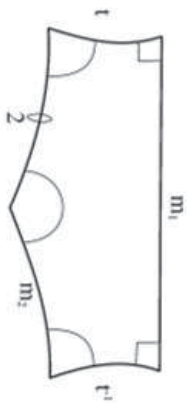


abcbcb
 $g_1 g_2 t_1^{-1} g_2^{-1} g_1 t_1 = 1$



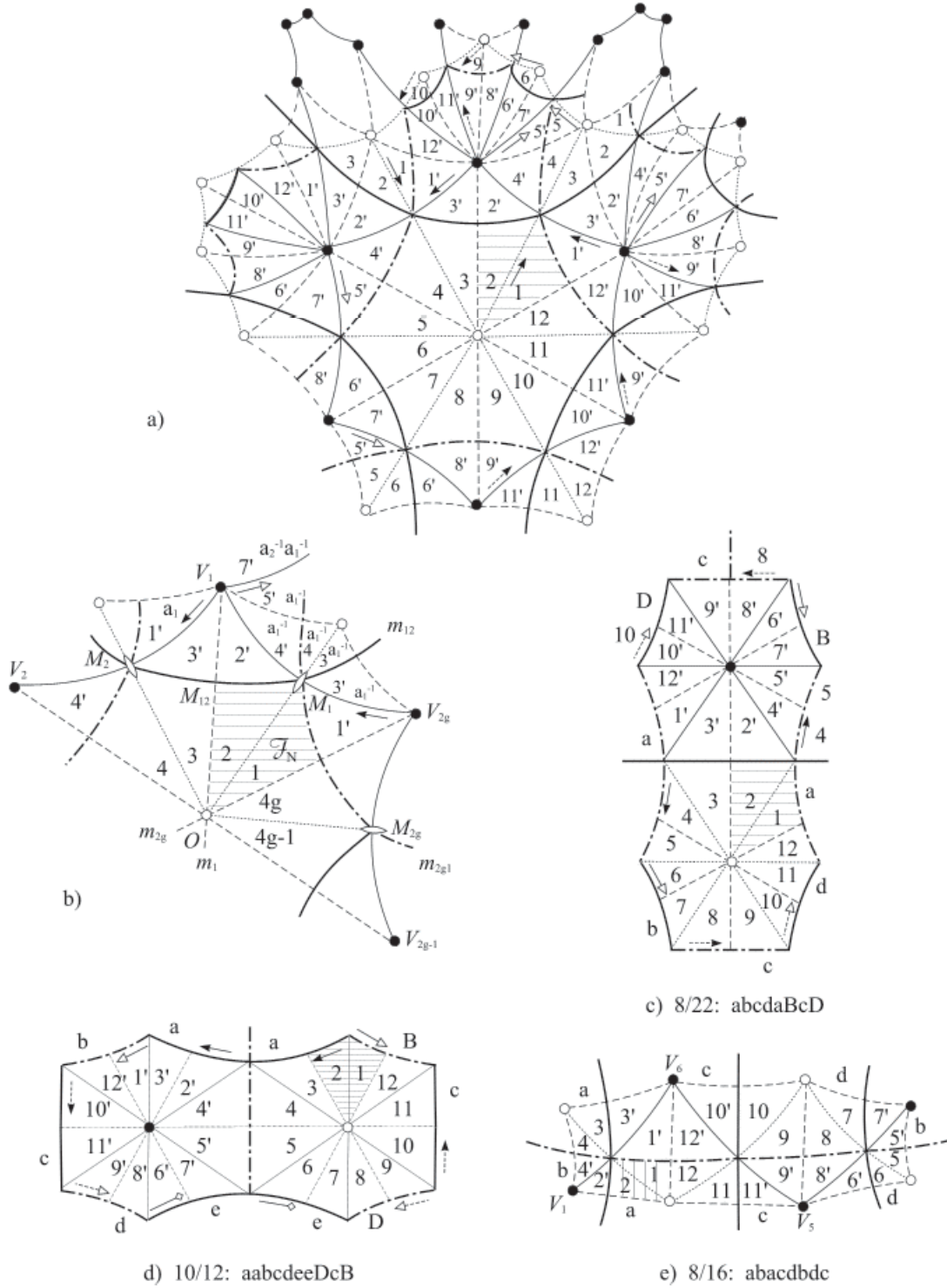
abcbcb
 $g_1 t_1 t_1^{-1} g_1 t_1 = 1$

2**



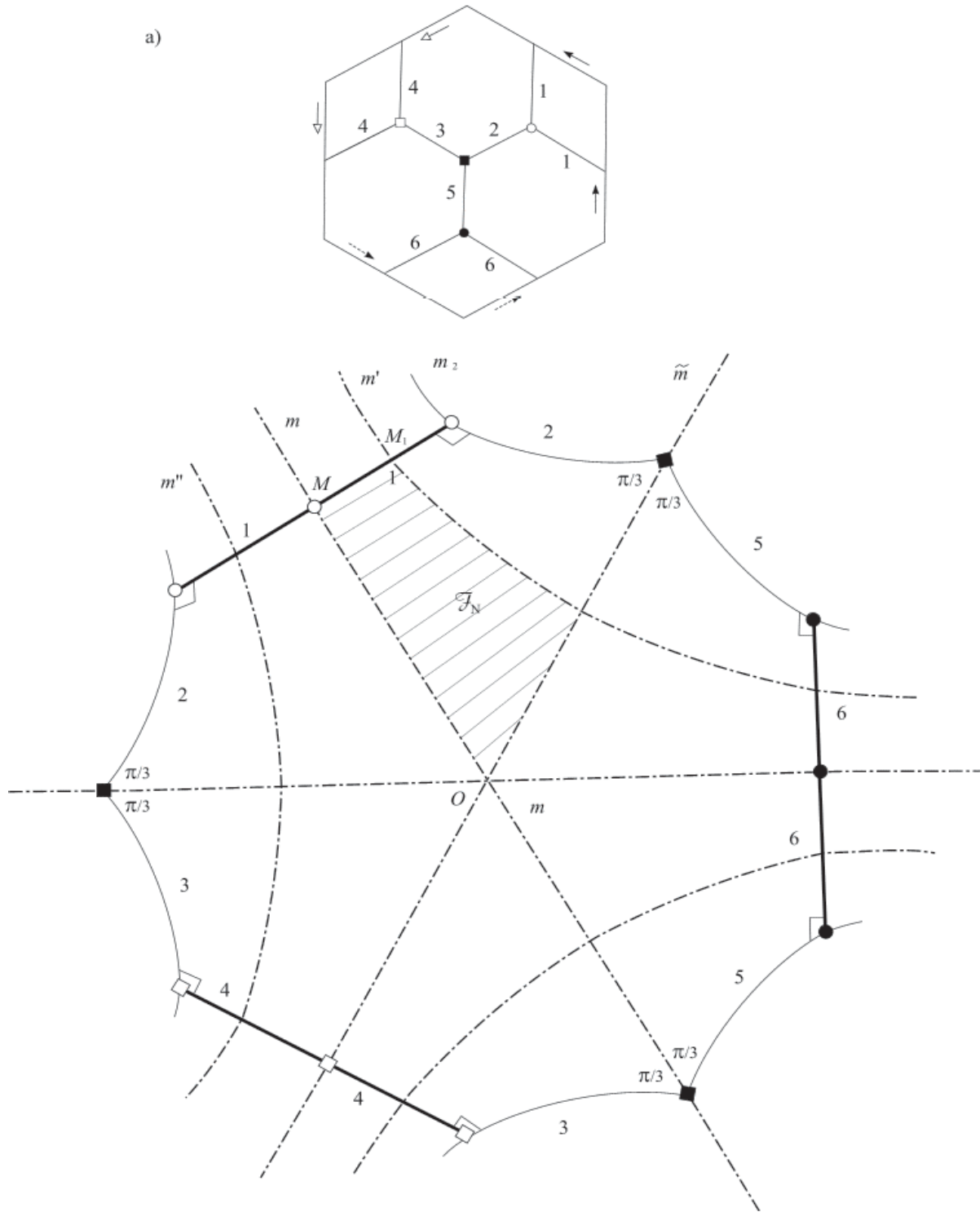
1.b) ábra

a) Az **aabcc** sokszög szimbólumhoz tartozó 6/1 kő és baricentrikus felbontása; b) a g^- felület maximális normalizátora, $g=3$, és fundamentális tartománya $\mathcal{F}_N=(1,2)$; c) - e) A 3^- felület néhány tartománya \mathcal{F}_N -nel közeve



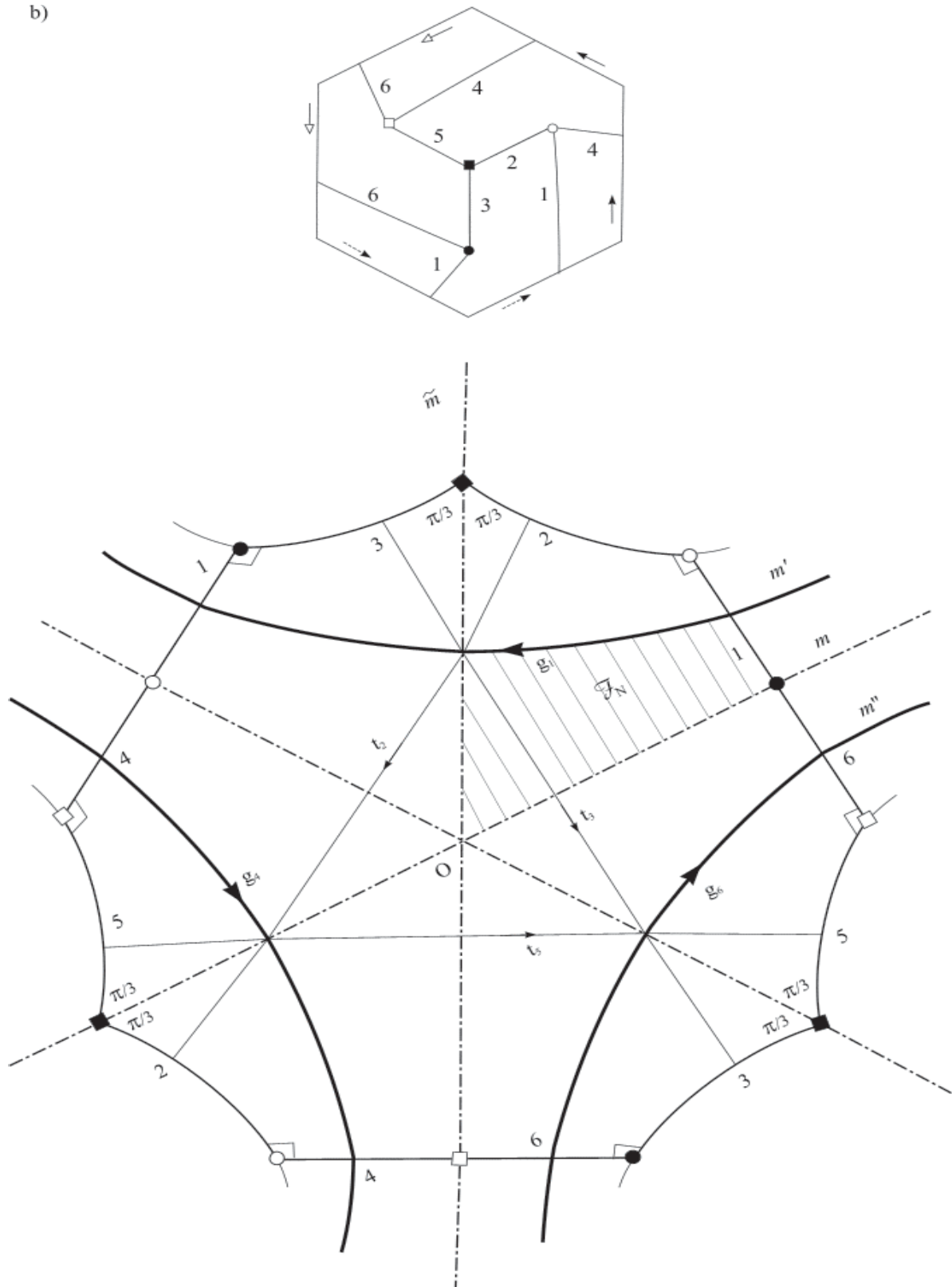
2. ábra

A $G=\otimes^3$ két 12-szög fundamentális tartománya az $N=2223$ maximális normalizátorral ekviviáns kövezéshez vezet a) 12/2 **aabccddCeffEB** b) 12/9 **abcadeBdfCEf**



3. a) ábra

b)



3. b) ábra

5 Irodalomjegyzék

- [B 00] T. Breuer, *Characters and automorphism groups of compact Riemann Surfaces*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **280**, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [B 51] S. Bilinski, Homogene mreže zatvorenih orientabilnih ploha, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **277** (1951), 129-164. – Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, *Bull. Int. Acad. Yugosl.* **6** (1952), 59-75.
- [B–E–G–G 90] E. Bujalance–J. J. Etajo–J. M. Gamboa–G. Gromadzki, *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surface, A Combinatorial Approach*, Lecture Notes in Mathematics **1439**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990
- [C 87] M. D. E. Conder, The genus of Compact Riemann surfaces with maximal automorphism group, *J. Algebra* (1987), no. **108**, 204-247.
- [C–B 88] A. J. Casson–S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts **9**.
- [D–F 87] A. W. M. Dress–R. Franz, Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen von Brezelflächen betreffend, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **428** (1987), 83-101.
- [F–H 92] R. Franz–D. H. Huson, The classification of quasi regular polyhedra of genus 2, *J. Discrete and Comp. Geom.* **7** (1992), 347-357.
- [H 93] D. Huson, The generation and classification of tile-k-transitiv tilings of the Euclidean plane, the sphere and the hyperbolic plane, *Geometriae Dedicata*, **47** (1993), 269-296.
- [K–W 96] H. Karcher, M. Weber, On Klein's Riemann surface, *Manuscript*, 1996. – The geometry of Klein's Riemann surface. *The eightfold way* 9-49, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999
- [L–M 90] Z. Lučić–E. Molnár, Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups, *Arch. Math.* **54** (1990), 511-520.
- [L–M 91] Z. Lučić–E. Molnár, Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata*, **40** (1991), 125-143.
- [L–M–V 98] Z. Lučić–E. Molnár–N. Vasiljević, Combinatorial structure of fundamental polygons of finite area for plane discontinuous groups, *Manuscript*, 1998.
- [M 92] E. Molnár, Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their metric realizations, *Acta Math. Hung.* **59** (1992), 175-216.
- [M–S 05] E. Molnár and E. Stettner, Symmetry groups and fundamental tilings for the compact surface of genus $3 - 2$. The normalizer diagram with classification, *Beiträge Alg. Geom. (Contr. Alg. Geom.)* to appear in 2005
- [R 94] J. G. Ratcliffe, On the isometry groups of hyperbolic manifolds, *Contemporary Math.* **169** (1994) 491-495.
- [S 88] M. Senechal, Tiling the torus and other space forms, *Discrete and Computational Geometry*, Vol. **3**, No. 1, 1988 (55-72).

- [S 98] E. Stettner, Die Computergestützte Klassifizierung der Flächeneinwickelungen in einem Vieleck vorgegebener Seitenanzahl, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **41** (1998), 103-115.
- [S 03] E. Stettner, Symmetriegruppen und fundamentale Pflasterungen der Fläche vom Geschlecht -3 I. Maximale Gruppen mit Sechseckbereichen, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **40** (2003), 41-57.
- [SS 98] P. Schmutz Schaller, Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Volume **35**, Number 3, 193-214.
- [Z 97] E. Zamorzaeva, On isohedral tilings of hyperbolic manifolds, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N. S.)* **43** (1997), no. 1, 81-88 (1998).
- [Z-V-C 80] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.