MŰEGYETEM 1782

Kombinatorikus algoritmusok a VLSI huzalozásban

PhD disszertáció tézisei

Írta: Szeszlér Dávid

Témavezető: Dr. Recski András

2005.

Bevezetés

A nagy bonyolultságú integrált (avagy angol rövidítéssel: VLSI) áramkörök tervezése egyike a legszélesebb területeknek, ahol a kombinatorikus optimalizálás módszereit a gyakorlatban is alkalmazzák. Az utóbbi néhány évtizedben számtalan eredmény született ebben a témában. Hosszú a listája az erről a területről származó NP-nehéz problémáknak is, ezek kezelésére gyakran igen jó teljesítményű heurisztikus algoritmusok ismeretesek.

A „VLSI" kifejezés általában nem egyetlen problémát takar, hanem az áramkörök tervezése során felmerülő, egymástól gyakran lényegesen különböző feladatok széles skálájára utal. Ebben a tézisfüzetben csak a tervezési folyamat egyik utolsó fázisával, a *részletes huzalozással* foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy a megtervezendő áramkör alkatrészei már végső helyükre kerültek az áramköri lapon. A részletes huzalozás feladata nem más, mint hogy az alkatrészek kivezetéseinek (vagy *termináljainak*) bizonyos előre megadott részhalmazait (az úgynevezett *neteket*) huzalokkal összekössük úgy, hogy közben a különböző netekhez tartozó huzalok között egy adott minimális távolságot megtartunk. Az utóbbi követelmény teljesülését általában úgy garantálják, hogy a huzalokat egy derékszögű rács élei mentén vezetik. Ez a rács jellemzően nem síkbeli (így a feladatok többsége megoldhatatlan volna), hanem néhány, egymással (és az áramköri lappal) párhuzamos síkbeli rétegből áll, és a huzalok minden rácspontban átléphetnek egy szomszédos rétegre. Gráfelméleti szemszögből összegezve tehát a részletes huzalozás feladata nem más, mint egy háromdimenziós rácsban páronként csúcsdiszjunkt Steiner-fák (vagyis adott csúcsokat tartalmazó fák) keresése.

A továbbiakban a részletes huzalozás számtalan részfeladata közül csak hárommal foglalkozunk: a *switchboxhuzalozással*, a *csatornahuzalozással* és az *egy aktív rétegű huzalozással*.

1. téziscsoport: switchboxhuzalozás

Tegyük fel, hogy az összekötendő terminálok egy téglalap négy oldalán helyezkednek el. A switchboxhuzalozás feladatában a neteket úgy kell meghuzalozni (vagyis a termináljaikat huzalokkal összekötni), hogy ehhez csak a téglalap belsejét használjuk. A feladat alábbi, precíz definícióját úgy fogalmaztuk meg, hogy a következő két technológiai követelményt is figyelembe vegye: egyrészt a lap „sarkait” nem szabad használni, másrészt a huzalok bármely rétegről elérhetik a terminálokat.

Definíció. *Legyen egy gráf csúcshalmaza a* $\{0, \ldots, n+1\} \times \{0, \ldots, w+1\} \times \{1, \ldots, k\}$ *halmaz és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy koordinátában térnek el és abban éppen eggyel. Hagyjuk most el ebből a gráfból a „sarkait”, vagyis a* $(0, 0, l)$, $(n+1, 0, l)$, $(0, w+1, l)$ *és* $(n+1, w+1, l)$ *alakú csúcsait, ahol* $l = 1, \ldots, k$. *A maradék gráfban húzzuk össze egy csúccsá az összes* $\{(i, j, l) : l = 1, \ldots, k\}$ *alakú csúcshalmazt, ahol*

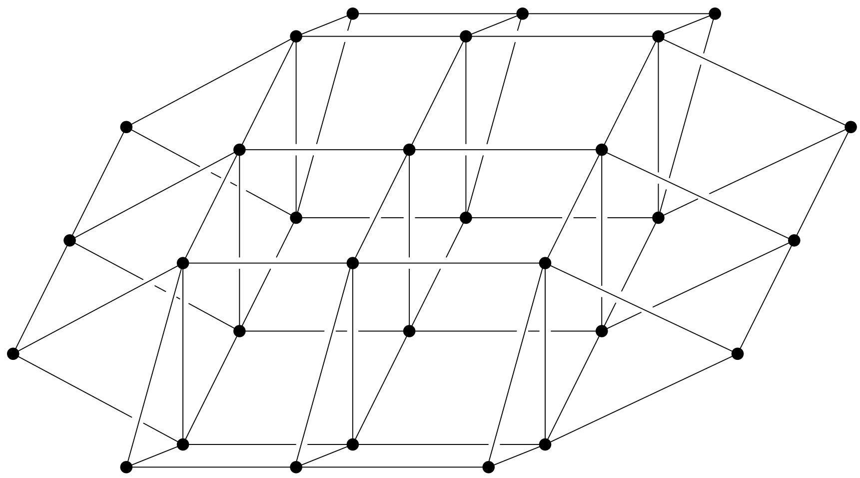
- $i = 0$ *vagy* $i = n + 1$ *és* $j = 1, \ldots, w$*; vagy*
- $j = 0$ *vagy* $j = w + 1$ *és* $i = 1, \ldots, n$.

Az így keletkezett G_k *gráfot nevezzük* k-rétegű derékszögű rácsgráfnak*, amelynek* termináljai *az összehúzások eredményeiként kapott csúcsok. A rács* szélessége w, hosszúsága *pedig* n.

Az 1. ábrán a $w = n = 3$ értékekhez tartozó kétrétegű derékszögű rácsgráf látható.

Definíció. Netnek *nevezzük a terminálok egy részhalmazát.* Switchboxhuzalozási probléma *alatt páronként diszjunkt netek egy* $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_t\}$ *halmazát értjük. Ennek egy* k-rétegű megoldása *(vagy* huzalozása*) a* G_k *derékszögű rácsgráf páronként csúcsdiszjunkt, összefüggő részgráfjainak* $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ *halmaza úgy, hogy* $N_i \subset V(H_i)$*, vagyis* H_i *összeköti az* N_i*-hez tartozó terminálokat. A* H_i *részgráfokat* huzaloknak *nevezzük.*

Korábban már említettük, hogy a huzalokat célszerű minimálisnak választani, így ezek általában Steiner-fák. Az alábbi definíciót az motiválja, hogy bizonyos technológiák számára előnytelen, ha egy huzalozás hosszan egymás fölött futó, párhuzamos szakaszokat tartalmaz. Ezért számos eredmény foglalkozik az úgynevezett *Manhattan modellel.*



1. ábra

Definíció. *Egy huzalozást* Manhattan modellbelinek *mondunk, ha a szomszédos rétegeken csak különböző irányú huzalszakaszok futnak, azaz a rétegek felváltva tartalmaznak függőleges és vízszintes huzalszakaszokat. Ha egy huzalozásra nézve nincs ilyen megkötés, akkor arra azt mondjuk, hogy a* megszorítás nélküli modellben *van.*

Ha adott egy switchboxhuzalozási feladat, természetes a felhasznált rétegek számát választani a minimalizálandó célfüggvénynek. Ezzel NP-nehéz feladatot kaptunk, sőt, ennek a problémának számtalan, igen speciális esetéről ismert, hogy NP-nehéz. Hambrusch [5] megfigyelése szerint azonban annyi mondható, hogy nem létezik olyan rögzített rétegszám, amely minden feladat megoldásához elég. Ennek a bizonyítása egy igen egyszerű vágásfeltételen alapul: ha egy, a lapot kettévágó e egyenes sok netet választ ketté, akkor a rétegszámnak is elég nagynak kell lenni ahhoz, hogy minden ilyen nethez tartozó huzal keresztezhesse e-t. Ebből pontosabban a következő becslés nyerhető: ha $m = \max(\frac{n}{w}, \frac{w}{n})$ jelöli a switchbox két oldalának arányát, akkor a legrosszabb esetben $\lceil m \rceil + 1$ rétegre is szükség lehet a feladat megoldásához. Ha pedig a Manhattan modellre szorítkozunk, akkor egy nagyon hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a szükséges rétegszám $\max(4, 2\lceil m \rceil + 1)$ is lehet a legrosszabb esetben.

A megszorítás nélküli modellre vonatkozó alsó becslés m kis értékeire javítható: tetszőleges n és w értékekre mutatható olyan n hosszúságú és w szélességű switchboxfeladat, amelynek a megoldásához legalább 4 réteg kell [8]. Továbbá ismert olyan 2×2-es feladat, amelynek a megoldásához legalább 6 réteg szükséges a Manhattan modellben [4]. Bár n tetszőleges értékére az $n \times n$-es feladatra 4-nél jobb alsó becslés nem ismert, az alábbi tétel állítása így sem áll messze az optimálistól.

1.1. Tézis. [9] *Minden $n \times n$-es switchboxhuzalozási feladat megoldható 6 rétegen a Manhattan modellben.*

Visszatérve az általános, $n \times w$-es feladatra, a fenti becslések azt mutatják, hogy a legrosszabb esethez szükséges rétegszám alulról becsülhető az $m = \max(\frac{n}{w}, \frac{w}{n})$ érték egy függvényével. Másrészt Boros E., Recski A. és Wettl F. [3] megmutatták, hogy a szükséges rétegszám felülről is becsülhető m egy függvényével: belátták, hogy $\max(18, 2m + 14)$ rétegen minden feladat megoldható lineáris időben a megszorítás nélküli modellben. Az alábbi tétel ezt az eredményt javítja meg.

1.2. Tézis. [9] *Minden switchboxhuzalozási feladat megoldható $2\lceil m \rceil + 4$ rétegen a Manhattan modellben.*

Az alábbi állítás azt emeli ki, hogy a fenti tézisek felső becslései megvalósíthatók hatékony algorimussal is.

1.3. Tézis. [9] *Létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely minden switchboxhuzalozási feladatot megold az 1.1, illetve 1.2 tézisek állításának megfelelő számú rétegen.*

Korábban említettük, hogy a Manhattan modellben a minimális rétegszám $\max(4, 2\lceil m \rceil + 1)$ réteg is lehet a legrosszabb esetben. Bár az 1.2. tézis állítása szerint $2\lceil m \rceil + 4$ réteg elegendő, az ezt megvalósító algoritmus mégsem közelíti az optimumot valamilyen garantált határokon belül, hiszen az alsó becslés csak a legrosszabb esetre vonatkozik. Azonban létezik olyan, lineáris idejű algoritmus is, amely minden switchboxhuzalozási feladatot megold a minimálisnál legföljebb 5-tel több rétegen [8].

2. téziscsoport: csatornahuzalozás 2 rétegen a Manhattan modellben

A switchboxhuzalozásnak azt a speciális esetét, amelyben a terminálok a lapnak csak két szemközti, mondjuk az alsó és a felső oldalán helyezkedhetnek el, *csatornahuzalozásnak* nevezzük. Ebben az esetben egy feladat kitűzése csak a lap n hosszúságát határozza meg. Ezért a csatornahuzalozás problémáját általában úgy fogalmazzák meg, hogy valamilyen előre rögzített rétegszámon a minimális szélességű huzalozást keresik.

A csatornahuzalozás 2 rétegű, Manhattan modellbeli esete egyike a VLSI huzalozás legnépszerűbb, legtöbbet vizsgált területeinek. Nem nehéz azonban olyan feladatot mutatni (lásd a 2.1. tézist), amely semmilyen szélességben nem megoldható. Ezért az irodalomban elfogadott a feladat megfogalmazásának az a módosítása, hogy megengedett a jobb és bal szélen tetszőleges számú új oszlopot hozzávenni a rácshoz.

Szymanski [11] bebizonyította, hogy a minimális szélesség meghatározása NP-nehéz feladat. Baker, Bhatt és Leighton [2] azonban hatékony közelítő algoritmust talált. Ehhez két, egymástól független alsó becslést használtak a minimális szélességre: a d *sűrűség*, vagyis a függőleges egyenesek által kettéválasztott netek maximális száma természetesen adódó alsó korlát. Azonban az említett két alsó becslés közül a másik, az f *fluxus* definíciója már sokkal több előkészítő munkát igényel; a részletekre itt nem térünk ki, csak annyit említünk meg, hogy $f = O(\sqrt{t})$ (ahol t a netek száma). A fenti szerzők [2]-ben megmutatják, hogy minden csatornahuzalozási feladat megoldható legföljebb $2d+O(f)$ szélességben 2 rétegen a Manhattan modellben. Az általuk konstruált megoldás hátránya azonban, hogy a rácshoz hozzávett új oszlopok száma elérheti az $O(f)$ nagyságrendet is.

Tegyük most fel, hogy a rács n hosszúsága rögzített, vagyis a továbbiakban nem szabad a rácshoz új oszlopokat hozzávenni. Ebben a téziscsoportban teljes leírását adjuk az ilyen feltételek mellett megoldható feladatoknak és egyben felső becslést is adunk a minimális szélességre.

Egy csatornahuzalozási feladatot nevezzünk *párosnak*, ha minden netnek két terminálja van, egy a lap felső, egy pedig az alsó szélén. Egy feladatot nevezzünk *sűrűnek*, ha minden terminál (a lap mindkét oldalán) eleme valamely netnek. Egy netet nevezzünk *triviálisnak*, ha két terminálból áll, amelyek egy oszlopban vannak.

2.1. Tézis. [10] *Egy csatornahuzalozási feladat akkor és csak akkor* nem *megoldható 2 rétegen a Manhattan modellben (új oszlopok hozzávétele nélkül), ha páros, sűrű és van legalább egy nemtriviális net.*

2.2. Tézis. [10] *Létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely minden megoldható csatornahuzalozási feladatot meghuzaloz 2 rétegen a Manhattan modellben úgy, hogy a rácsot nem bővíti új oszlopokkal. Továbbá a kapott huzalozás szélessége legföljebb $\frac{3}{2}n$, ha feladat páros, és legföljebb $\frac{7}{4}n$ egyébként.*

Megemlítjük még a 2.1. tézis egy némileg meglepő következményét is.

2.3. Tézis. [10] *Minden csatornahuzalozási feladat megoldható lineáris időben 2 rétegen a Manhattan modellben, ha megengedett a rácshoz legföljebb egy új oszlop hozzávétele.*

A 2.2. tézisben említett algoritmus nem közelíti a minimális szélességet valamilyen konstansszoros határon belül. Természetes kérdés, hogy igaz marad-e Baker, Bhatt és Leighton [2] fent említett tétele, ha nem megengedett a csatona hosszának növelése? A válasz nemleges: minden n értékre mutatható olyan n hosszúságú csatornahuzalozási feladat, amelynek sűrűsége $d = 2$, fluxusa $f \leq \lceil\sqrt{n}\rceil$ és a huzalozáshoz szükséges minimális szélesség $w = n - 1$ [8].

3. téziscsoport: egy aktív rétegű huzalozás

Az 1. téziscsoportban említettük, hogy egy switchboxhuzalozási feladat megoldásához tetszőlegesen sok rétegre szükség lehet. Mégis, a switchboxhuzalozás tekinthető alapvetően kétdimenziós feladatnak: az input négy terminálsorozatból áll, az output pedig néhány síkbeli réteg.

Az utóbbi időben azonban a huzalozási technológia gyors fejlődése miatt a figyelem egyre inkább a „valódi” háromdimenziós huzalozás felé fordul. Az elmúlt két évtizedben számtalan eredmény született ezen a területen.

A továbbiakban csak az *egy aktív rétegű huzalozással* foglalkozunk, amelyben az összekötendő terminálok egy $w \times n$ méretű, síkbeli rácson helyezkednek el, és a huzalozást egy h magasságú térbeli rácsban, a terminálokat tartalmazó síkrács fölött kell megvalósítani.

Könnyű azonban olyan feladatokat mutatni, amelyek semmilyen magasságban nem megoldhatók. Ezért megengedett a w szélesség, illetve az n hosszúság növelése úgy, hogy új sorokat, illetve oszlopokat veszünk hozzá a rácshoz, a terminálokat tartalmazó eredeti sorok és oszlopok között.

Definíció. *Egy adott $w \times n$-es (azaz w sorból és n oszlopból álló) síkbeli rács csúcsait* terminálok*nak nevezzük.* Net *a terminálok egy részhalmaza.* Egy aktív rétegű huzalozási probléma *(vagy röviden* EARH probléma*) alatt páronként diszjunkt netek egy $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$ halmazát értjük.*

Definíció. n irányú, s_n-szeres ritkítás *alatt azt értjük, hogy a rács bármely két szomszédos oszlopa közé (és a jobbszélső oszloptól jobbra) felveszünk $s_n - 1$ darab új oszlopot. Így a rács hosszúsága $n' = s_n \cdot n$-re növekszik. A w* irányú, s_w-szeres ritkítás *értelmezése hasonló.*

Definíció. *Ha adott egy $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$ EARH probléma, valamint az s_w és s_n értékek, akkor a probléma egy* megoldása *(vagy* huzalozása*) a $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n) \times h$ méretű (a terminálokat tartalmazó eredeti sík fölött elhelyezkedő) háromdimenziós rács páronként csúcsdiszjunkt, összefüggő részgráfjainak $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ halmaza úgy, hogy $N_i \subset V(H_i)$, vagyis H_i összeköti az N_i-hez tartozó terminálokat. A H_i részgráfokat* huzaloknak *nevezzük. h a huzalozás* magassága.

Ha adott egy EARH probléma, valamint az s_w és s_n értékek, akkor célunk a minimális h magasságú huzalozás megtalálása. Egy, az [5]-belihez nagyon hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a szükséges magasság legrosszabb esetben $\frac{n}{2s_w}$ is lehet [6]. Más szóval, ha az s_w értéket rögzítettnek tekintjük, a minimális magasságra $h = \Omega(n)$ teljesül a legrosszabb esetben.

Másrészt viszont igen egyszerű konstrukcióval lehet $h \leq \frac{wn}{2}$ magasságú megoldást találni tetszőleges feladathoz, de csak ha $s_w, s_n \geq 2$ teljesül [6]. Ennek az állításnak egy alternatív értelmezése a következő: ha w értéke rögzített, akkor létezik $h = O(n)$ magasságú huzalozás, feltéve hogy $s_w, s_n \geq 2$. Az alábbi (egyáltalán nem nyilvánvaló) tézis azt állítja, hogy lényegében ugyanez érvényes akkor is, ha $s_n = 1$.

3.1. Tézis. [6] *Ha $s_w \geq 8$, akkor w minden rögzített értékére és tetszőleges n esetén minden EARH probléma megoldható $t = O(n)$ időben és $h = O(n)$ magassággal úgy, hogy közben az n hosszúság értéke változatlan, vagy legföljebb eggyel nő.*

A továbbiakban tegyük fel, hogy $s_w, s_n \geq 2$. Már említettük, hogy $h = O(wn)$ magasságú huzalozás egyszerűen található. Aggarwal, Kleinberg és Williamson [1] azonban bebizonyították, hogy ha minden net két terminálból áll, akkor egy $n \times n$-es EARH probléma netjeinek halmaza partícionálható $O(n \log^2 n)$ osztályra úgy, hogy minden osztály, mint különálló EARH feladat meghuzalozható az eredeti ($n \times n$-es rács) egy példányán. Ebből könnyen következik, hogy ha $s_w, s_n \geq 2$ (és minden net két terminálból áll), akkor létezik $h = O(n \log^2 n)$ magasságú huzalozás. Az alábbi tézis azonban lineáris korlátot szolgáltat.

3.2. Tézis. [7] *Ha egy EARH problémában minden net két terminált tartalmaz, akkor*

- *$s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$ és $s_w = 2$ esetén létezik $h = 3n$ magasságú huzalozás;*
- *$s_w = s_n = 2$ esetén létezik $h = 3\max(n, w)$ magasságú huzalozás.*

Ha w sokkal nagyobb, mint n, akkor a fenti tézis állítása két lehetőséget kínál: vagy a magasság aránylag alacsony ($h = 3n$) és akkor az s_n ritkítás nagy, vagy a magasság nagy ($h = 3w$) és akkor az s_n ritkítás csak 2. A következő tézis azt állítja, hogy a két véglet között található középút.

3.3. Tézis. [7] *Ha egy EARH problémában minden net két terminált tartalmaz, akkor $s_n = \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$ és $s_w = 2$ esetén létezik $h = \lfloor \frac{9}{2} n \rfloor$ magasságú huzalozás.*

Tekintsük most az EARH probléma általános esetét, amelyben a neteknek tetszőlegesen sok terminálja lehet. Az alábbi tézisek azt állítják, hogy a fenti lineáris korlátok megnövekedett konstansokkal érvényben maradnak.

3.4. Tézis. [7] *Minden EARH probléma megoldható*

- *az* $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$, $s_w = 2$ *ritkítási értékek mellett* $h = 6n$ *magasságban;*
- *az* $s_w = s_n = 2$ *ritkítási értékek mellett* $h = 6\max(n, w)$ *magasságban.*

A 3.3. tézishez hasonlóan a 3.4. tézis állítása ismét módosítható úgy, hogy az s_n ritkítás csökken, de a magasság növekszik.

3.5. Tézis. [7] *Minden EARH probléma megoldható* $s_n = \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$, $s_w = 2$ *ritkítási értékek mellett* $h = 9n$ *magasságban.*

Végül az alábbi tézis arra mutat rá, hogy a bemutatott korlátok megvalósíthatók hatékony algoritmussal.

3.6. Tézis. [7] *Léteznek olyan algoritmusok, amelyek megvalósítják a 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 tézisek által biztosított korlátokat és a lépésszámuk* $O(t \cdot (w + n))$ *(ahol* t *a netek száma). Azaz, ha* $A = w \cdot n$ *jelöli az input méretét, akkor az algoritmusok futásideje* $O(A^{\frac{3}{2}})$*, ha feltesszük, hogy* $w = \Theta(n)$ *teljesül.*

Hivatkozások

[1] Aggarwal, A., J. Kleinberg és D. P. Williamson, Node-disjoint paths on the mesh and a new trade-off in VLSI layout, *SIAM J. Computing* (2000) **29**, 1321-1333.

[2] Baker, S. B., S. N. Bhatt és F. T. Leighton, An approximation algorithm for Manhattan routing, *Advances in Computer Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA (1984), 205-229.

[3] Boros E., Recski A. és Wettl F., Unconstrained multilayer switchbox routing, *Annals of Operations Research* (1995) **58**, 481-491.

[4] Golda B., Laczay B., Mann Z. Á., Megyeri Cs. és Recski A., Implementation of VLSI Routing Algorithms, *Proc. IEEE 6th Internat. Conf. on Intelligent Engineering Systems, Croatia, 2002*, 383-388.

[5] Hambrusch, S. E., Channel routing in overlap models, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.* (1985) **CAD-4**, 23-30.

[6] Recski A. és Szeszlér D., 3-dimensional single active layer routing, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Computer Science **2098**, 318-329, Springer, Berlin (2001).

[7] Recski A. és Szeszlér D., Routing Vertex Disjoint Steiner-Trees in a Cubic Grid and Connections to VLSI, *submitted.*

[8] Szeszlér D., *PhD Dissertation*, 2005.

[9] Szeszlér D., Switchbox routing in the multilayer Manhattan model, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* (1997) **40**, 155-164.

[10] Szeszlér D., A New Algorithm for 2-layer, Manhattan Channel Routing, *Proc. 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (2003), 179-185.

[11] Szymanski, T. G., Dogleg channel routing is NP-complete, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.* (1985) **CAD-4**, 31-41.