Doktori disszertáció tézisfüzet

Komplex hálózatok szerkezete

Szabó Gábor

Témavezető
Dr. Kertész János

Elméleti Fizika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2005

Bevezetés

A tudományos kutatás számos területe olyan problémakörrel rendelkezik, amelyeknek megoldásában a hálózatokkal történő jellemzés nagy segítséget jelent. Ezek tanulmányozása arra a felismerésre vezetett, hogy a különféle jelenségek leírására használt hálózatok hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. Az alkalmazási területek közé tartozik a biológia (metabolikus hálózatok, a sejt fehérjéinek kölcsönhatási hálózata), a szociológia (színészek és társszerzők hálózata), az informatika (Internet, Web). A fenti példák mindegyikében lehetőség nyílik arra, hogy összetevőket és közöttük kölcsönhatásokat, kapcsolatokat azonosítsunk, amelyek már a matematika nyelvén gráfokra válthatók. Különösen említésre méltó a *skálamentes gráf* fogalma, amely a kísérletek szerint számtalan valós hálózat jellemzésre alkalmas. Egy skálamentes gráf fokszámeloszlása csökkenő hatványfüggvényt követ, ami azt eredményezi, hogy kis konnektivitású csúcsok serege mellett néhány nagy fokszámú központi csúcs biztosítja a hálózaton belüli szoros kapcsolatot.

Célkitűzések és alkalmazott módszerek

A természetben sok helyütt előforduló struktúrák hálózatokkal való leírása a tudomány egy viszonylag új fejezete. Bár a kezelésükre szolgáló matematikai eszközök már régóta léteznek, kísérleteknek kellett igazolni azt, hogy róluk feltételezéseink helyesek. A tudományág hozzávetőleges népszerűsége köszönhető annak, hogy olyan modellek megalkotása, amelyeknek viselkedése kvalitatíven egyezik a megfigyelésekkel, intuitív és nem túlságosan nehéz feladat. A kezdeti kutatások a hálózatok struktúrájának megállapítására irányultak; ebben az időben kezdtem el tanulmányozni a skálamentes fák két véletlenszerűen választott csúcsa között mérhető legrövidebb utak hosszának eloszlását. Ennek a munkának továbbvitele volt a csúcsok terhelésének becslése, melynek során analitikus és szimulációs eszközök segítségével vizsgáltam a csúcsokon átmenő legrövidebb utak számát. A számítások hitelességének megerősítésére kidolgoztam egy Internetes csomagküldést modellező szimulációt, melyhez kifejlesztettem egy párhuzamos programok írását nagyban megkönnyítő keretrendszert.

Később foglalkoztam minimális feszítőfák kérdésével skálamentes hálózatokon, úgy, hogy a hálózat élsúlyai egymástól független véletlenszámok voltak. A minimális feszítőfák optimalizációs problémákban vetődnek fel, és mivel egyre több, gyakorlati szempontból fontos hálózatról mutatják ki, hogy skálamentes, a feszítőfáknak az eredeti gráfhoz való viszonyának ismerete hasznos lehet. A feszítőfák élsúlyai eloszlásfüggvényének aszimptotikus viselkedése analitikus módszerekkel megjósolható, és alsó határ adható a feszítőfák degenerációjára abban az esetben, ha az élsúlyok azonosak.

A „clustering" vizsgálatával akkor kezdtem el foglalkozni, amikor egy sor rendszerre megmutatták, hogy a lokális clustering együttható a fokszám reciprok függvényével skálázik. A Barabási-Albert modell egy olyan módosításának segítségével, amely egy csúcs szomszédait is összekapcsolja, a fenti összefüggésre adtam egy lehetséges magyarázatot. A módszer, amit a levezetés során használtam, más növekvő hálózatok esetén is alkalmazható.

A fentebb vázolt csomagküldési modellből ötletet merítve végül egy kommunikációs hálózat struktúráját felderítő módszerrel foglalkoztam. Ennek alapja az, hogy a csomagok visszatérési idejéből esetleg megjósolható, hogy azok milyen útvonalat követtek, ha feltételezzük, hogy két szorosan egymást követő csomagot a router-ek várhatóan hasonló idő alatt dolgoznak fel és küldenek tovább.

Új eredmények

1. Vizsgáltam skálamentes gráf N csúcsa között mérhető legrövidebb utak hosszának eloszlását. Átlagtér-elméleti módszerek segítségével bemutattam, hogy a véletlen Barabási-Albert modell $m = 1$ paraméterválasztás esetén determinisztikus fastruktúrával jól közelíthető, ami lehetővé tette a legrövidebb utak hosszeloszlásának becslését olyan módon, hogy az nagy N esetén a Gauss-függvényt közelíti. A közelítések természetes kiterjesztéseként megmutattam, hogy a gráf egy csúcsán átmenő legrövidebb utak száma skálázó mennyiség a fokszám függvényében.

2. A valós hálózatokat gyakran nagy clustering jellemzi, ami a gráfon belüli háromszögek nagy előfordulási valószínűségére utal, és a lokális clustering együttható is sok esetben a fokszám inverz függvényével skálázik. A Barabási-Albert modell egy olyan egyszerű kiterjesztésében, ami a háromszögek létrejöttét elősegíti, bemutattam az inverz skálázás jelenlétét, és azt is, hogy ez adott fokszámon túl egy konstans szakaszba csap át. Az átcsapás jelenségét megfigyelték néhány valódi hálózaton is. A használt átlagtér-elméleti megoldás jól alkalmazható a clustering leírására más növekvő hálózati modellek esetén is.

3. Megmutattam, hogy skálamentes hálózatok minimális feszítőfái véletlen élsúlyok jelenlétében szintén skálamentesek. A feszítőfa élsúlyai különböznek attól, mintha hagyományos rácson vizsgálnánk a feszítőfát, ami a rövid átlagos úthossz következménye. Abban az esetben, ha a gráf összes élsúlya megegyezik, az optimalizálás degenerált megoldásra vezet. A megoldások száma ebben az esetben exponenciálisan növekszik a rendszerméret függvényében, amit gráfelméleti módszerek segítségével alulról becslek.

4. Gyakorlati alkalmazásként bemutatom, hogy egy fastruktúrát alkotó kommunikációs hálózat hogyan térképezhető fel kizárólag ‘echo’ kérések küldésével vagy a forgalom időben való figyelésével. A megoldásban kihasználom, hogy a csomagok feldolgozási ideje a router-eken korrelált akkor, ha azok gyors egymásutánban érkeznek.

Publikációs lista

A disszertációhoz kötődő publikációk

1. G. Szabó, 'Mapping a communication tree with correlation of packets', to be published in the International Journal of Modern Physics C.

2. G. Szabó, M. Alava, and J. Kertész, 'Clustering in complex networks', *Springer's Lecture Notes in Physics „Networks: structure, dynamics, and function”* **650**, pp. 139-162 (2004).

3. G. Szabó, M. Alava, and J. Kertész, 'Geometry of minimum spanning trees on scale-free networks', Physica A **330**, 31 (2003).

4. G. Szabó, M. Alava, and J. Kertész, 'Structural transitions in scale-free networks', Phys. Rev. E **67**, 056102 (2003).

5. G. Szabó, M. Alava, and J. Kertész, 'Shortest paths and load scaling in scale-free trees', Phys. Rev. E **66**, 026101 (2002).

További publikációk

1. G. Szabó, M. Alava, and J. Kertész, 'Self-organized criticality in the Kardar–Parisi–Zhang equation', Europhys. Lett. **57**, 665 (2002).

2. G. Szabó and M. Alava, 'Mapping a depinning transition to polynuclear growth', Physica A **301**, 17 (2001).