

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Villamosság Tanszék

PhD Tézis

*Elemi operátorokból felépített hiszterézis
modellek és integrál egyenletek*

Szabó Zsolt

Budapest
2002

I. A kutatás célja és az alkalmazott modellek

A. A hiszterézis modellek és a mágneses térszámító eljárások rövid összefoglalása

A ferromágneses anyagok hiszterézise már nagyon régen ismert és kutatott jelenség, mégis a hiszterézist okozó folyamatok bonyolult és összetett volta miatt nem sikerült kidolgozni egy egységes, minden hiszterézist mutató anyagot leíró és a mérnöki tervezésben is jól alkalmazható modellt. A korszerű mérnöki tervezésnél felmerült a hiszterézis modellek és a különböző térszámító numerikus eljárások közötti kapcsolat megvalósításának igénye.

A mérnöki gyakorlatban, olyan elrendezések számításánál, amelyek mágneses köröket tartalmaznak, a Maxwell egyenleteket vagy azok valamilyen egyszerűsített változatát kell megoldani, kiegészítve a mágneses anyagot leíró összefüggésekkel, modellekkel. Számos esetben az állandó permeabilitás vagy egyértékű nemlinearitás alkalmazása nem vezet kellő pontosságra, vagy olyan fontos és érdekes jelenségeket nem tudunk modellezni, amelyek kapcsolatban állnak a remanens mágnesezettséggel vagy a hiszterézis veszteségekkel. Tehát a hiszterézis jelenséget sok esetben nem lehet elhanyagolni, mi több vektor jelenségként kell tekinteni és modellezni.

A legelterjedtebb hiszterézist leíró eljárások a Preisach modell, a Jiles-Atherthon modell valamint a Stoner-Wohlfarth modell.

A klasszikus Preisach modell a skalár hiszterézis jelenséget írja le. A modell számos eltolt kétértékű elemi hiszterézis operátor szuperpozíciója. Az operátorokat a fel- és lekapcsolási terükkel lehet jellemezni, vagy a szélességükkel, ami meghatározza koercitív terüket és az eltolás mértékével, ami az operátorok közötti kölcsönható térre jellemző mennyiség. Egy, az anyagra jellemző eloszlásfüggvény bevezetésével, valamint az operátoroknak a külső tér szerinti fel- és lekapcsolásával írja le a hiszterézis jelenséget. A Mayergoyz által bevezetett vektor Preisach modell egyenletesen elosztott skalár Preisach modellek szuperpozíciója. A Preisach modell szemléletes geometriai interpretációja, egyszerű matematikai felépítése, mért adatokhoz való illesztése, valamint aránylag könnyű és gyors számítógépes programozhatósága miatt az egyik legelterjedtebben alkalmazott hiszterézis modell.

A Jiles-Atherthon modell egy sokdoménű anyag hiszterézisét írja le. A hiszterézist kiváltó fő oknak a doménfal elmozdulást tekinti, ennek a jelenségnek a makroszkopikus leírásán alapszik.

A Stoner-Wohlfarth modell az egydoménű, egyirányú anizotropiával rendelkező anyag hiszterézisét írja le. A ferromágneses anyagot állandó mágnesezettségű, egyirányú anizotropiával rendelkező részecskék összességének tekinti, elhanyagolva a részecskék közötti kölcsönhatást. Egy részecske mágnesezettsége elfordulhat a mágneses tér irányába. Az elfordulás mértékét a külső tér és a részecske fő mágneses iránya határozzák meg, tehát ennek a modellnek az esetén az anizotropia a hiszterézist kiváltó ok. A Stoner-Wohlfarth részecskékből felépített makroszkopikus hiszterézis modell fő előnye, hogy vektor leírást ad a mágnesezési folyamatról, valamint figyelembe veszi a reverzibilis és az irreverzibilis mágnesezési jelenségeket. Hátránya, hogy negyedrendű egyenletet kell megoldani egy részecske mágnesezettség irányának meghatározásához. Makroszkopikus modell esetén ez nagyon megnövelheti a számítási igényt.

Mindazonáltal, hogy számos hiszterézis modell ismert, nehéz kiválasztani egy adott mérnöki alkalmazáshoz legjobban illő modellt.

A Maxwell egyenletekből kapott parciális differenciálegyenleteknek algebrai egyenletekké való redukálása többféle módon történhet. A bevezetett mágneses térjellemező mennyiség, a közelítő módszer és a generált háló különböztetik meg a numerikus térszámító módszereket. A leggyakrabban alkalmazott eljárások a véges elem, a peremelem, az integrálegyenletek, a véges differenciák és a globális variációk módszere. Közös ezekben a módszerekben egy háló, amelyen a parciális differenciálegyenleteket diszkretizáljuk, valamint egy, a geometriai elrendezéstől függő mátrix invertálása, hogy megkapjuk az eredményt. A véges elem és a véges differenciák alkalmazása esetén az egész teret be kell hálózni, azonban ezek az eljárások ritka vagy sávós mátrixot eredményeznek.

Az integrál egyenletek alkalmazásának számos előnye lehet főként 3D elrendezések és olyan feladatok esetén, ahol a mágneses térszámítás például elmozdulás vagy mechanikai tulajdonságok vizsgálatával van összekapcsolva. A módszer fő előnye, hogy csak a ferromágneses anyagot kell 2D esetén elemi felületekre, 3D esetén elemi cellákra osztani.

Ha állandó szuszceptibilitást tekintünk, egy lépésben meghatározható a mágnesezettség vektorok eloszlása csak a geometriai elrendezéstől függő mátrix invertálásával.

Sokkal bonyolultabb a helyzet, ha a ferromágneses anyag hiszterézisét akarjuk figyelembe venni. Miután kiválasztottunk egy megfelelő hiszterézis modellt, a mágneses térszámítás egyenleteit kiegészítve a hiszterézis modellel, iteratív úton lehet megoldani. Az integrál egyenletek másik nagy előnye, hogy az egyenleteket meg lehet fogalmazni, úgy hogy az ismeretlen mennyiség a mágneses térerősség. Mivel a hiszterézis modellek esetén legtöbbször a mágneses térerősség a bemenő mennyiség, ezért az iteratív megoldást direkt módon lehet megvalósítani mindenféle plusz iteráció nélkül. Ha analitikusan kifejezhető egyértékű mágneses karakterisztikát használunk, akkor a leggyakrabban alkalmazott iteratív eljárás a Newton-Raphson módszer és ennek változatai. Hiszterézis modell esetében, mikor a mágnesezettség nem fejezhető ki analitikusan a mágneses térerősség függvényében (és így a deriváltakat csak numerikusan lehetne képezni), a fix pontos iterációs eljárások a legelterjedtebbek.

B. A kitűzött kutatási feladat

A dolgozat célja a ferromágneses hiszterézis általános modellezése és olyan vektor hiszterézis modellek kidolgozása, amelyek beépíthetők numerikus térszámító eljárásokba. Meg kell vizsgálni melyek a vektor hiszterézis jelenségnek azok a fő tulajdonságai, amelyek felhasználhatók makroszkopikus modellek létrehozására.

A kidolgozott eljárások

(1) A Preisach modell a fentebb felsorolt előnyös tulajdonságai miatt az egyik legtöbbet alkalmazott hiszterézis modell. Kidolgoztam egy folytonos skalár Preisach modellt, amelyet 2D és 3D vektormodellek felépítésére alkalmaztam. A fő mágnesezési karakterisztika néhány jellemző pontjának ismeretében egy optimalizáló eljárást alkalmazva illesztettem a skalár, valamint a 2D és 3D izotrop vektor modelleket meghatározva a karakterisztikához tartozó Preisach eloszlásfüggvény exponenciális függvényvel történő közelítésének paramétereit.

Az egyirányú anizotropiával rendelkező anyagok leírására bevezetett Stoner-Wohlfarth részecske, valamint a kétirányú anizotropiával rendelkező anyagokat leíró biaszteroid részecske általánosításaként egy elemi vektor hiszterézis operátort lehet bevezetni, felismerve azt a tényt, hogy a Stoner-Wohlfarth részecskéhez rendelhető aszteroid, valamint a biaszteroid egyaránt hipocikloisok. A bevezetett elemi operátor egy, az anyag szerkezetétől függő hipocikloidból és azon szabályok összességéből áll, amelyek kiválasztják a hipocikloidhoz húzható érintők közül azt, amelyik az elemi mágnesezettség aktuális irányát adja. Eltolt és elforgatott elemi vektor operátorok szuperpozíciójaként különféle makroszkopikus hiszterézis modelleket lehet bevezetni. A Stoner-Wohlfarth, valamint a klasszikus skalár Preisach modellek a bevezetett általános hiszterézis modell speciális eseteinek tekinthetők.

(2) Ferromágneses elrendezéseket tartalmazó mágneses körök számítására az integrál egyenletek módszerét alkalmaztam. Bebizonyítottam, hogy a módszer sikeresen alkalmazható abban az esetben is, ha figyelembe vesszük a hiszterézist. A hiszterézis modellek és a térszámítás összekapcsolására kidolgoztam egy iteratív eljárást, ami a Piccard-Banach féle fixpontos módszeren alapszik. Különböző egyszerű geometriával rendelkező 2D és 3D elrendezések mágneses viselkedését vizsgáltam, hogy megmutassam a kidolgozott nemlineáris iteratív eljárás alkalmazhatóságát és konvergenciáját.

(3) Bebizonyítottam, hogy a kidolgozott eljárás alkalmazható kis méretű alkatrészek mágneses térrel történő pozicionálásának szimulációjára. Megvizsgáltam egy olyan nem mágneses anyagból készült kocka homogén mágneses térben való viselkedését, melynek két szemben levő oldalát ferromágneses bevonattal láttuk el. A szimuláció eredményeként meghatároztam a mágneses tér nagyságát, amely szükséges, hogy a kockát megfelelő irányba pozicionálja, ha figyelembe vesszük a súrlódást.

Megvizsgáltam egy ferromágneses doboz tércsökkentő hatását, és összehasonlítottam nyílásokkal rendelkező ferromágneses dobozok tércsökkentő hatásával kisfrekvenciás, lassan változó gerjesztés esetén a hiszterézis figyelembevételével. Megvizsgáltam a remanens mágnesezettséget és az általa keltett teret a dobozok belsejében.

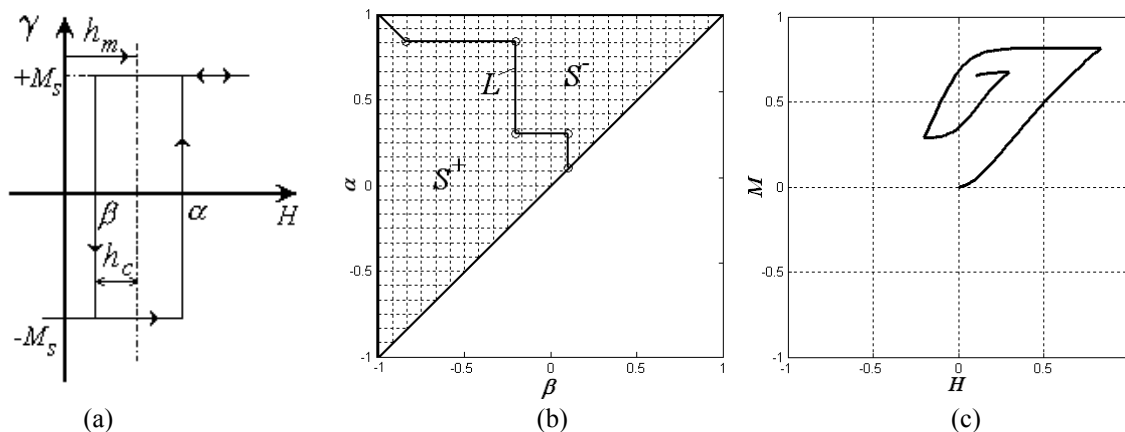
II. Alkalmazott módszerek

A. A skalár és vektor Preisach modell

A modell számos eltolt derékszögű elemi hiszterézis operátor szuperpozíciója. A derékszögű operátorok az α felkapcsolási (mikor a mágneses térerősség eléri ezt az értéket, az elemi mágnesezettség értéke M_s) és β lekapcsolási mágneses térerősségekkel (mikor a mágneses térerősség lecsökken erre ezt az értékre, az elemi mágnesezettség értéke $-M_s$) jellemezhetők vagy a $h_c = (\alpha - \beta)/2$ koercitiv, valamint a $h_m = (\alpha + \beta)/2$ kölcsönható mágneses térerősségekkel, ahogy az 1.a. ábrán látható. A makroszkopikus mágnesezettség a következő integrállal fejezhető ki

$$M(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma(\alpha, \beta, H(t)) d\alpha d\beta, \quad (1)$$

ahol $\mu(\alpha, \beta)$ a Preisach eloszlásfüggvény, γ jelöli az α és β fel- és lekapcsolási terekkel jellemezhető elemi vektor hiszterézis operátort, $H(t)$ a mágneses térerősség, a modell bemenete, $M(t)$ a mágnesezettség, a hiszterézis modell kimenete. Az α, β síkon, a Preisach háromszög bevezetésével egyszerű és szemléletes grafikus képet kaphatunk a modell működéséről. A Preisach háromszög minden pontjának (lásd 1.b. ábra) egyértelműen megfeleltethető egy elemi vektor hiszterézis operátor. A mágneses térerősség függvényében ezek fel vagy lekapcsolott állapotban lehetnek. A Preisach háromszögon két tartomány különböztethető meg: egy tartomány ahol az összes operátor fel van kapcsolva (S^+), és egy tartomány ahol az összes operátor le van kapcsolva (S^-). A két tartomány határvonalát lépcsős görbének nevezzük. A hiszterézis jelenség modellezéséhez elegendő ennek a görbének az időbeli változását ismerni és tárolni.



1. ábra Az elemi hiszterézis operátor, a Preisach háromszög a lépcsősgörbével és a megfelelő hiszterézis karakterisztika.

A lépcsőgörbe alakja a mágneses térerősség nagyságának függvényében változik, megjegyezve a mágneses anyag előéletét (a lokális szélsőértékeket).

Egy anyag mágnesezési folyamatának leírásához ismerni kell a Preisach eloszlást (ez úgy tekinthető, mint az elemi operátorokhoz rendelt súlyfüggvény) vagy ennek a Preisach háromszögön vett integrálját, az Everett függvényt.

A Preisach modellt a következőképpen valósítottam meg: a lépcsőgörbe folytonosan változhat a Preisach háromszögön. Az eljárás eltárolja a fordulópontok koordinátáit. A kettős integrál minden lépésbeli kiértékelésének elkerüléséért először kiszámolom az Everett függvényt a Preisach háromszög diszkrét pontjaiban. Az alkalmazott mágneses térerősség függvényében változtatom a lépcsőgörbét, lineáris vagy köbös interpolációval meghatározom a fordulópontoknak megfelelő Everett függvényértékeket, majd megfelelő előjellel összegzem őket (pozitívan, ha lokális maximumnak, negatívan, ha lokális minimumnak felel meg).

A vektor Preisach modell egyenletesen elosztott folytonos skalár modellek szuperpozíciója. A numerikus realizációban csak véges számú irányt lehet figyelembe venni. A mágneses térerősség vektorát felbontva az irányok által meghatározott komponensekre, minden komponensre egy skalár Preisach modellt futtatva, meg lehet határozni az adott irány menti mágnesezettséget. A teljes mágnesezettség az irányok szerinti mágnesezettségek vektori összege.

2D izotrop vektor modell esetén már 8 iránnyal jó közelítést lehet elérni. 3D esetén minimális számú iránnyal legjobb közelítés eléréséhez szabályos testek által definiált irányokat alkalmaztam (kockával 7 irányt, ikozaéderrel 16 irányt lehet meghatározni).

A Preisach modell kísérleti úton való felépítése számos nehézségbe ütközik, egyrészt a szükséges felszerelés, másrészt az elkerülhetetlen mérési hibák miatt. Sokszor célszerű a Preisach eloszlást analitikusan közelíteni, például a következő exponenciális függvény sikerrel alkalmazható számos anyag hiszterézisének modellezésére

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} e^{-\frac{(\alpha-\beta-c)^2}{10^a} - \frac{(\alpha+\beta-d)^2}{10^b}}, & \alpha + \beta \leq 0 \\ e^{-\frac{(\alpha-\beta-c)^2}{10^a} - \frac{(\alpha+\beta+d)^2}{10^b}}, & \alpha + \beta > 0 \end{cases}, \quad \alpha \in [-1,1], \quad \beta \in [-1,1]. \quad (2)$$

Az a, b, c, d paraméterekkel lehet a modellt a mért adatokhoz illeszteni. Kidolgoztam egy eljárást a skalár, 2D és 3D izotrop vektor eloszlásfüggvény paramétereinek meghatározására a fő mágnesezési karakterisztika néhány pontjának ismeretében, minimalizálva a következő hibát

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_m^i - M_c^i)^2 = \varepsilon \rightarrow \min, \quad (3)$$

ahol M_m^i a mért vagy előírt mágnesezettség, M_c^i a Preisach modellel számított ugyanannak a H^i mágneses térerősségnek megfelelő mágnesezettség.

B. Reverzibilis és irreverzibilis mágnesezési folyamatok, egyirányú és kétirányú anizotropia

A klasszikus Stoner-Wohlfarth modell az anyagot egyirányú anizotropiával rendelkező, egymással kölcsönhatásban nem levő, állandó mágnesezettségű részecskék szuperpozíciójának tekinti. Egy részecske energiája az anizotropiából származó energia és a mágneses kölcsönhatásból származó energia különbsége

$$w = K \sin^2 \theta - \mu_0 H M_s \cos(\theta_0 - \theta), \quad (4)$$

ahol K az anizotropikus állandó, H az alkalmazott mágneses térősség abszolút értéke, M_s a Stoner-Wohlfarth részecske mágnesezettségének nagysága, θ_0 a gerjesztő térerősség és a fő mágnesezési irány által bezárt szög, θ a részecske mágnesezettsége és a fő mágnesezési irány közötti szög.

Külső tér hiányában a részecske mágnesezettsége a fő mágnesezési irányba mutat. Mágneses tér hatására a részecske mágnesezettség vektora elfordulhat a fő mágnesezési irányból, helyzetét a következő feltételekből határozhatjuk meg

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \geq 0. \quad (5)$$

A mágneses tér nagyságától függően az első egyenletnek két vagy négy valós megoldása lehetséges. Első esetben egy energia minimum létezik, így a mágnesezettség helyzete egyértelműen meghatározható. Második esetben két energia maximum és két energia minimum van, a mágnesezettség helyzete az előélettől függ. A valós megoldások számától függően a H_x , H_y síkon két tartományt lehet megkülönböztetni. A két tartomány határán

$$H_x^{2/3} + H_y^{2/3} = \alpha^{2/3}, \quad (6)$$

ami egy aszteroid egyenlete, ahol α az aszteroid nagysága. A Stoner-Wohlfarth részecske mágnesezési folyamatához a fenti aszteroid segítségével egy grafikus szemléltetést lehet hozzárendelni (lásd 3.a. ábra). Az (5) egyenlet megoldásai az aszteroidhoz húzható érintőket jelentik, ezek közül az aktuális energiaminimumnak megfelelő adja a mágnesezettség irányát. A mágnesezettség irányának ugrásszerű változása lehet, ha a mágneses térősség az aszteroidot bentről kifelé metszi. A elemi mágnesezettség irányának az ugrásszerű változását egy Barkhausen ugrásnak lehet tekinteni.

Általában a ferromágneses anyagok kristályszerkezetei bonyolultabbak és magasabb rendű anizotropiát mutatnak, mint az előzőekben bevezetett Stoner-Wohlfarth részecske. Köbös kristályszerkezetű anyagot tekintve (például vasat), ha azt az esetet tekintjük amikor a mágnesezettség a (001) síkban található, akkor a következő energiaegyenletet írhatjuk fel

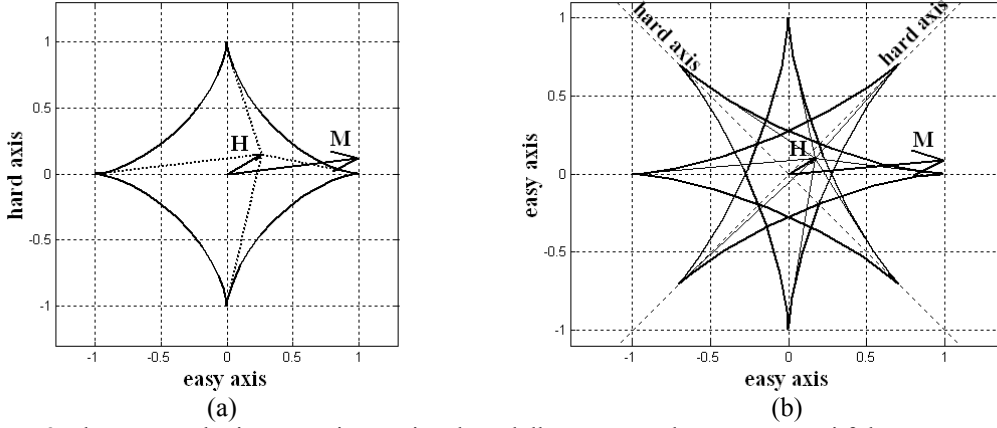
$$w = K \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \mu_0 H M_s \cos(\theta_0 - \theta). \quad (7)$$

A mágnesezettség irányát hasonló módon határozhatjuk meg, mint a Stoner-Wohlfarth részecske esetén, azonban ebben az esetben két fő és két kereszt mágnesezési irányt kapunk. A mágneses térősség függvényében 2, 4, 6 és 8 energia szélsőérték lehetséges. A görbe, ami ezeket a tartományokat elválasztja, a biaszteroid (vagy wind-rose)

$$\begin{aligned} H_x &= \alpha \cos^3 \theta (5 - 6 \cos^2 \theta), \\ H_y &= \alpha \sin^3 \theta (5 - 6 \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

A biaszteroidon kívül két energia szélsőérték van, amely közül az egyik energia minimum, a másik energia maximum, tehát a mágnesezettség iránya egyértelműen meghatározott. A biaszteroid belsejében 2, 3 vagy 4 energia minimum van, a mágnesezettség irányát ezek közül a mágneses előélet függvényében lehet kiválasztani. Ebben az esetben is az energia szélsőértékek a biaszteroidhoz húzható érintőknek felelnek meg (lásd 2.b. ábra).

A Stoner-Wohlfarth részecskék vagy a kétirányú anizotropiával rendelkező részecskék szuperpozíciójaként izotrop és anizotrop makroszkopikus hiszterézis modelleket lehet felépíteni a fő mágnesezési irányok megfelelő elosztásával és a részecskéhez rendelt súlyfüggvény segítségével.



2. ábra Egy és kétirányú anizotropiával rendelkező részecske mágnesezési folyamata

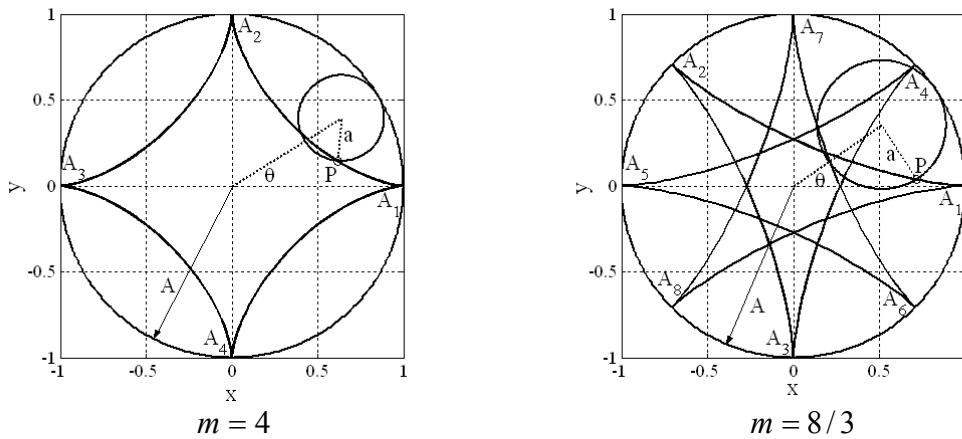
C. Az általánosított elemi vektor hiszterézis operátor

Az előzőekben bemutatott Stoner-Wohlfarth és biaszteroid részecskék elemi vektor hiszterézis operátoroknak tekinthetők. Mindkét operátorhoz rendelhető görbe (az aszteroid és a biaszteroid) geometriai szempontból hipocikloisok. Egy hipocikloid parametrikus egyenlete

$$\begin{aligned}
 x &= (A - a) \cos \theta + a \cos \left(\frac{A - a}{a} \theta \right) \\
 y &= (A - a) \sin \theta + a \sin \left(\frac{A - a}{a} \theta \right).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

A hipocikloid alakja az $m = A/a$ aránytól függ, ahol A a külső kör sugara, a a belső gördülő kör sugara. Aszteroidot $m = 4$ estén, biaszteroidot $m = 8/3$ esetén kapunk (lásd 3.ábra). A hipocikloidhoz húzható érintőket a következő nemlineáris egyenlet megoldásaiból lehet meghatározni

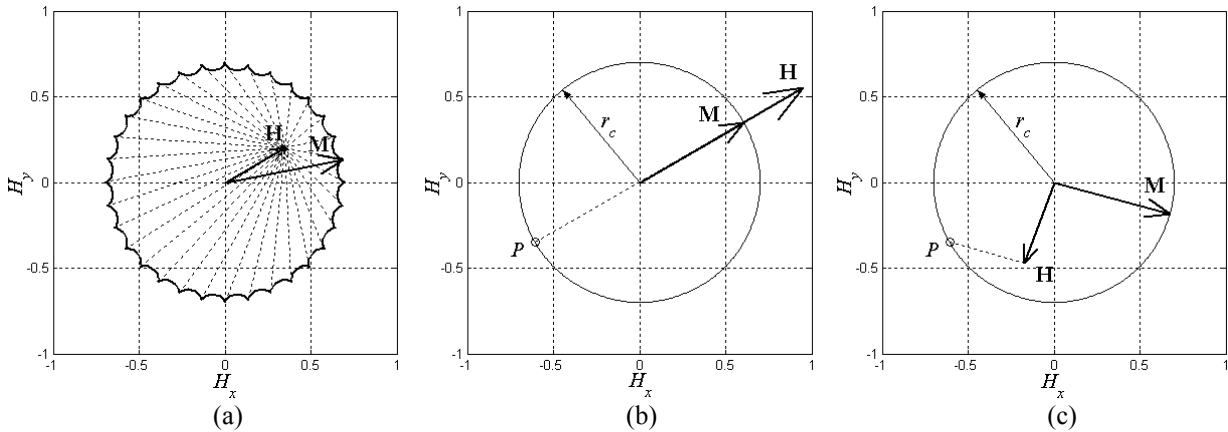
$$H_x \sin \left(\frac{2a - A}{2a} \theta \right) - H_y \cos \left(\frac{2a - A}{2a} \theta \right) + (A - 2a) \sin \frac{A}{2a} \theta = 0.
 \tag{10}$$



3. ábra Speciális hipocikloidok, az aszteroid és a biaszteroid

Egy általánosított elemi vektor hiszterézis operátort lehet bevezetni, amely egy hipocikloid görbéről és a hozzárendelt szabályok összességéből áll. A szabályok kiválasztják a hipocikloidhoz húzható érintők közül azt, amelyik az elemi mágnesezettség aktuális irányát adja.

A (10) nemlineáris egyenletet például a Newton-Raphson módszerrel lehet megoldani, az iterációt a hipocikloid csúcsából indítva aránylag gyors konvergenciát kapunk. Aszteroid esetén negyedfokú egyenletet, bonyolultabb esetben magasabb fokú egyenletet kell megoldani. makroszkopikus modell esetén, mikor sok részecskét kell figyelembe venni, ez nagyon időigényes lehet. Ezért egy egyszerűsített elemi vektor hiszterézis operátort vezettem be. Abban az esetben, ha m egész szám, akkor a hipocikloidnak m egymást nem metsző ága van. Ha m nagyon nagy a hipocikloid alakja körhöz konvergál. A 4. ábrán egy egyszerűsített elemi vektor hiszterézis operátor látható, összehasonlítva egy olyan elemi vektor hiszterézis operátorral, aminek működését egy $m = 32$ csúcsú hipocikloid szabályozza.



4. ábra Egyszerűsített elemi vektor hiszterézis operátor

D. Elemi vektor hiszterézis operátorok szuperpozíciójaként felépített makroszkopikus hiszterézis modellek

A makroszkopikus modell bevezetéséhez tekintsünk egy mátrixot, amelynek elemei vektor hiszterézis operátorok. Általánosan a modell mátrix kifejezhető mint

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11} & \dots & \mathcal{H}_{1m} \\ \vdots & \mathcal{H}_{ij} & \vdots \\ \mathcal{H}_{n1} & \dots & \mathcal{H}_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}_{ij}], \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m, \quad (11)$$

ahol

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathcal{H}(m_{ij}, M_{ij}^s, \xi_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}), \quad (12)$$

az elemi vektor hiszterézis operátorok. Az m paraméter meghatározza az elemi vektor hiszterézis operátorhoz rendelt hipocikloid típusát, az M_s paraméter az elemi mágnesezettség nagysága, a ξ paraméter az elemi operátor elforgatását fejezi ki a vízszintes irányhoz képest, míg az α és β paraméterek az elemi vektor hiszterézis operátor fel és lekapcsolási terei a fő mágnesezési irányhoz képest. A makroszkopikus modell kimenete az elemi mágnesezettségek vektor összege.

Az általánosított elemi vektor hiszterézis operátorok paramétereinek megfelelő megválasztásával, alkalmazva a modell mátrixot kölcsönható és nem kölcsönható izotrop és anizotrop makroszkopikus hiszterézis modelleket építettem fel.

E. Mágneses tér számítása az integrálegyenletek módszerével és a nemlineáris iteráció

Magnetosztatikus feladat esetén a megoldandó Maxwell egyenletek kiegészítve a ferromágneses anyagot leíró összefüggéssel a következők

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (13)$$

Helmholtz tétele alapján a mágneses térerősség két részre bontható

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m, \quad (14)$$

ahol \mathbf{H}_s a források által létrehozott divergenciamentes mágneses tér, \mathbf{H}_m az a rotációmentes tér, amelyet a megmágneseződött ferromágneses anyag hoz létre.

3D esetén a mágneses térerősség kifejezhető a következő összefüggéssel

$$\mathbf{H}^f = \mathbf{H}_s^f - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_f \int_{V_e} \mathbf{M}_s \cdot \operatorname{grad}_s \left(\frac{1}{r} \right) dV, \quad (15)$$

ahol r a forráspont és azon pont közötti távolság, ahol a teret ki akarjuk számítani. Osszuk fel a ferromágneses anyagot n elemi térfogatra, és tekintsük a mágnesezettséget állandónak minden elemén. Bevezetve a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} G_{xx}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(x_f - x_s)^2 - r^2}{r^5} dV, & G_{xy}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(x_f - x_s)(y_f - y_s)}{r^5} dV, \\ G_{yy}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(y_f - y_s)^2 - r^2}{r^5} dV, & G_{yz}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(y_f - y_s)(z_f - z_s)}{r^5} dV, \\ G_{zz}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(z_f - z_s)^2 - r^2}{r^5} dV, & G_{xz}^f &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{3(x_f - x_s)(z_f - z_s)}{r^5} dV, \end{aligned} \quad (16)$$

a következő mátrixegyenletet kapjuk

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{G}\mathbf{M}, \quad (17)$$

ahol a \mathbf{G} mátrix elemei az (16) integrálok, amelyek csak az elrendezés geometriájától függenek. A (17) egyenletben a mágneses térerősség és a mágnesezettség egyaránt ismeretlenek. Ha állandó permeabilitást tekintünk és (17) az elemi térfogatok középpontjában akarjuk kielégíteni, akkor a mágnesezettség egy lépésben kiszámítható a következő egyenletből

$$\mathbf{M} = (\boldsymbol{\chi}^{-1} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}_s, \quad (18)$$

ahol $\boldsymbol{\chi}$ a szuszceptibilitás tenzor. Ismerve a ferromágneses anyag belsejében a mágnesezettség eloszlását, bármely térjellemező mennyiség kiszámítható az adott geometriai elrendezés bármely pontjában.

Különböző elemei cellák esetén kiszámítottam a geometriától függő mátrixot. A (16) integrálok

$f = s$ esetén szingulárisokká válnak. Egyszerű elemi cellákra mint a téglalap 2D elrendezések esetén vagy téglatest 3D esetén az integrálok analitikusan kiértékelhetők. Sajátelmen határérték számolással határozhatók meg az integrálok értékei.

Bonyolultabb elemi cellák esetén speciális eljárások vagy megfelelő kvadratura formulák szükségesek az integrálok kiértékeléséhez. 3D esetben a szingularitást kizárva egy gömbbel vagy téglatesttel (ezek térfogatát majd nullára zsugorítva) az elemi cella térfogatára vett integrálok átalakíthatók felületi integrálokká, amelyek egyszerű négyponos Gauss kvadraturával is kiértékelhetők.

Nemlineáris közeg esetén a mágneses térerősség és a mágnesezettség nemlineáris kapcsolatot alkot, a megoldandó egyenletrendszer

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{GM},$$

$$\mathbf{M} = \mathcal{H} \{ \mathbf{H} \}, \quad (19)$$

ahol a mágneses térerősség és a mágnesezettség egyaránt ismeretlenek és \mathcal{H} jelöli a hiszterézis modellt. Alkalmazva a Piccard-Banach iterációs eljárást a következő iteratív megoldást kapjuk

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k (1 - \tau) + \tau (\mathbf{H}_s + \mathbf{GM}^k). \quad (20)$$

Az iterációt mindig lemágnesezett állapotból indítva

$$\mathbf{H} = 0, \mathbf{M} = 0, \quad (21)$$

a mágnesezettség ismert és a (20) formula alapján a mágneses térerősség első lépésbeli közelítése meghatározható. A kapott mágneses térerősség értékkel a hiszterézis karakterisztika ismeretében a mágnesezettség vektorának meghatározható egy újabb közelítése

$$\mathbf{M}^{k+l} = \mathcal{H} \{ \mathbf{H}^{k+l} \}, \quad (22)$$

és egy újabb iterációs ciklus indítható újra behelyettesítve a hiszterézis modelltől kapott mágnesezettség értéket.

Két iterációs lépés között kiértékelve a régi és az új mágneses térerősség közötti különbséget

$$\mathbf{H}^{k+1} - \mathbf{H}^k = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (23)$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}$ az eltéréseket tartalmazó vektor, az iteráció megállítható, ha teljesül a következő feltétel

$$\| \boldsymbol{\varepsilon} \| < \delta, \quad (24)$$

ahol δ kicsi pozitív szám. Az iteráció konvergenciáját és annak sebességét a τ paraméter szabályozza. Hogy az iteráció kontrakció legyen, τ a következőképpen kell megválasztani

$$0 < \tau \leq \frac{2}{\chi_{\max} + 1}, \quad (25)$$

ahol χ_{\max} a hiszterézis karakterisztika maximális szuszceptibilitása.

III. Az új tudományos eredmények összefoglalása

1. Tézis

Elemi hiszterézis operátorok szuperpozíciójaként izotrop és anizotrop makroszkopikus hiszterézis modelleket építettem fel.

- 1.1. A fő mágnesezési karakterisztika néhány jellemző pontjának ismeretében egy optimalizáló eljárást alkalmazva illesztettem a skalár valamint a 2D és 3D izotrop vektor modelleket, meghatározva a karakterisztikához tartozó Preisach eloszlásfüggvény exponenciális függvényvel történő közelítésének paramétereit.
- 1.2. Kidolgoztam egy általánosított elemi vektor hiszterézis operátort. Az elemi vektor operátor egy hipocikloid görbéből és a hozzárendelt szabályok összességéből áll. A szabályok kiválasztják a hipocikloidhoz húzható érintők közül azt, amelyik az elemi vektor hiszterézis operátor mágnesezettségének aktuális irányát adja. Az általánosított operátor speciális eseteként bevezettem egy gyors és egyszerű elemi vektor hiszterézis operátort. A skalár Preisach operátor, a Stoner-Wohlfarth részecske és a biaszteroiddal jellemezhető kétirányú anizotropiával rendelkező részecske a bevezetett általánosított vektor hiszterézis operátor speciális eseteinek tekinthetők.
- 1.3. Bevezetve a modell mátrixot, amelynek elemei az általánosított vektor hiszterézis operátorok, különböző kölcsönható és nem kölcsönható makroszkopikus hiszterézis modelleket építettem fel a vektor hiszterézis fenomenológiai leírásának jobb megvalósítására. Az operátorok eltolásával figyelembe vettem a kölcsönható teret, az operátorok elforgatásával pedig különféle anyagszerkezeteket modelleztem.

2 Tézis

A mágneses téregyenletek és a hiszterézis közötti kapcsolat megvalósítására beillesztettem az integrál egyenletek módszerébe egy vektor hiszterézis modellt, kidolgozva egy konvergens iteratív eljárást a kapott nemlineáris egyenletek megoldására, hogy meghatározhassam a mágneses tér mennyiségeit a geometriai elrendezés minden szükséges pontjában.

- 2.1 Kidolgoztam egy iteratív eljárást, ami a Picard-Banach elméleten alapszik, hogy megvalósítsam a kapcsolatot az integrál egyenletek módszere és a vektor hiszterézis karakterisztika között.
- 2.2 A bemutatott példákon keresztül bizonyítottam, hogy a kidolgozott numerikus módszer sikerrel alkalmazható különféle geometriájú elrendezések modellezésére akár lineáris, akár nemlineáris ferromágneses karakterisztikát tekintve. Megmutattam a felosztás hatását a megoldás pontosságára nézve.

3. Tézis

- 3.1 Kidolgoztam egy eljárást, amely megvalósítja a kapcsolatot az integrál egyenletekkel történő mágneses térszámítás és a mozgásegyenlet között figyelembe véve a hiszterézist. Alkalmazva a kidolgozott eljárást megmutattam, hogy kis alkatrészek sikerrel pozícionálhatók mágneses tér segítségével. Ha az alkalmazott mágneses tér értéke megfelelő, az alkatrész néhány oszcilláció után felveszi a kívánt pozíciót.

3.2. Zárt és oldalain lyukakkal ellátott ferromágneses dobozok 2D és 3D modelljeit dolgoztam ki figyelembe véve a hiszterézist. A vizsgált elrendezések alapján megmutattam, hogy a remanens mágnesezettség által keltett mágneses terek nem túl nagyok, azonban számos esetben zavaró tényezőt jelenthetnek árnyékolás esetén. A hiszterézissel történő szimuláció újra bizonyította azt a jól ismert tényt, hogy árnyékoláskor az alkalmazott geometriának nem kell szükségszerűen zártnak lennie, hanem az elrendezés függvényében lyukakat és üregeket tartalmazhat az árnyékolási tulajdonságok csökkenése nélkül.

IV. Alkalmazási lehetőségek, további kutatási célkitűzések

A bemutatott elvek és eljárások alapján egy térszámító programcsomag került kidolgozásra, ami figyelembe veszi a ferromágneses anyagok hiszterézisét. Ez a programcsomag nagyon hasznos lehet különféle mérnöki tervezések és optimalizálások esetén.

A dolgozat első felében a bevezetett általánosított elemi vektor hiszterézis operátor segítségével a hiszterézis jelenség általános modellezése lett megvalósítva. A jövőbeli kutatási feladat egyik célkitűzése 3D elemi vektor operátorok kidolgozása és ezek alkalmazása makroszkopikus vektor modellek felépítésére. Az alkalmazott exponenciális eloszlásfüggvény nem tudja minden esetben megvalósítani a kívánt pontosságot. Következésképpen jövőbeli kutatási munkaként meg kell határozni, hogy milyen anyaghoz melyik operátor illik a legjobban, valamint azt, hogyan lehet mérési eredmények alapján meghatározni a szükséges eloszlásokat. Egy másik érdekes célkitűzés megvizsgálni hogyan lehet a skalár Preisach modellhez bevezetett Preisach háromszöghöz hasonlóan egyszerűsíteni az elemi vektor hiszterézis operátorokból felépített makroszkopikus modellt. A tanszéken most felállításra kerülő Mágneses Mérések Laboratóriuma ideális helynek ígérkezik ezen problémák megoldására.

A disszertáció második részében egy integrál egyenletek módszerén alapuló, a ferromágneses hiszterézist iteratív módon figyelembe vevő mágneses térszámító eljárás került megvalósításra. Ahogy a disszertációban bemutattam a Piccard-Banach módszeren alapuló eljárás aránylag hosszú iteráció után adja a kívánt megoldást. A jövőben meg kell vizsgálni más iteratív eljárásokat, valószínűleg ezek kombinációját kell majd alkalmazni, kiválasztva azt amelyik a karakterisztika adott szakaszán optimális. Az örvényáramok figyelembe vétele szintén fontos feladat. Más közelítések, például mágneses vektorpotenciál vagy magasabb rangú formafüggvények alkalmazása is egy érdekes feladat. Nagyon hasznos lenne meghatározni egy feltételt az elemek minimális számának meghatározására egy adott pontosság eléréséhez.

Szintén jövőbeli célkitűzés a kidolgozott programcsomag ellátása kényelmes kimenő és bemenő grafikus felülettel, automatikus hálógenerálóval mágneses erő és forgatónyomaték számolására alkalmas kiterjesztéssel.

Bonyolult geometriával rendelkező komplex mérnöki feladatok esetén elkerülhetetlen a párhuzamos számolási lehetőségekre való áttérés.

V. A disszertációban referált saját publikációk jegyzéke

1. Zs. Szabó, A. Iványi, Computer Aided Simulation of Stoner-Wohlfarth Model, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 215-216, 2000, pp. 33-36. L R
2. Zs. Szabó, A. Iványi, Demagnetizing Field in Ferromagnetic Sheet, *Physica B*, vol. 306, 2001, pp. 172-177. L
3. Zs. Szabó, A. Iványi, The Stoner-Wohlfarth Particle in Rotational Magnetic Field, *Proceedings of the Engineering of Modern Electric Systems, EMES'99*, Baile Felix, Romania, 27-29 May 1999, pp.115-121. L SR
4. Zs. Szabó, A. Iványi, Anisotropic Sheet with Assembly of Stoner-Wohlfarth Particles, *12th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG '99*, Sapporo, Japan, 25-28 October 1999, pp. 388-389. L

5. Zs. Szabó, A. Iványi, Vectorial Models of Magnetic Materials as Assembly of Elementary Operators, *Proceedings of the 7th International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipment*, Brasov, Romania, 11-12 May 2000, pp.89-95. L
6. Zs. Szabó, A. Iványi, Vectorial Hysteresis and Temperature Dependence, *Proceedings of 9th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering and European TEAM Workshop*, Graz, Austria, 11-13 September 2000, pp. 389-395. L SR
7. Zs. Szabó, Iványi A, Monte Carlo Based Meshless Method in Electromagnetic Field Computation, *13th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG'01*, Evian, France, 2-5 July 2001, pp 80-81. L
8. Zs. Szabó, A. Iványi, Sorting Process with Static Fields, *XI. International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, ISTET'01*, Linz, Austria, 19-22 August 2001, CD Proceeding.
9. Zs. Szabó, J. Füzi, A. Iványi, Ferromagnetic Cylinder with Hysteresis in Homogeneous Magnetic Field, *7th International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipment*, Brasov, Romania, 16-19 May 2002, accepted for presentation.
10. Zs. Szabó, J. Füzi, A. Iványi, Hysteresis as a superposition of simplified elementary vector operators, *The Tenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC*, Perugia, Italy, June 16-19 2002, accepted for presentation.
11. Zs. Szabó, A. Iványi, Anizotrop Anyagok Hiszterézis Karakterisztikájának Vektoriális Szimulációja, *Híradástechnika*, 1999/9, vol. 1, pp. 15-38.
12. Zs. Szabó, Iványi A, A Stoner-Wohlfarth Modell Számítógépes Szimulációja, *Műszaki Tudományos Füzetek, Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka*, Kolozsvár, Romania, 19-20 Március 1999, pp.73-76.
13. Zs. Szabó, A. Iványi, J. Füzi, Gy. Székely, Toroid Alakú Vasmagot Tartalmazó Tekercs Mágneses Veszteségei, *Műszaki Tudományos Füzetek, Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka*, Kolozsvár, Romania, 19-20 Március 1999, pp.77-80.
14. Zs. Szabó, A Stoner-Wohlfarth Hiszterézis Modell, Tavaszi Szél '99 Posztergaléria, *Fiatal Magyar Tudományos Kutatók és Doktoranduszok III. Világtalálkozója*, Budapest 1999, pp. 54-55.
15. Zs. Szabó, Iványi A, Anizotrop Anyagok Vektor Hiszterézis Modellje, *Műszaki Tudományos Füzetek, Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka*, Kolozsvár, Romania, 24-25 Március 2000, pp.69-72.
16. Zs. Szabó, Iványi A, Mágneses térrel való pozicionálás, *Műszaki Tudományos Füzetek, Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka*, Kolozsvár, Romania, 23-24 Március 2001, pp.43-46.