MŰEGYETEM 1782

ENTRÓPIA-KORLÁTOZOTT KVANTÁLÁS

György András

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Ph.D. értekezés tézisei

Témavezetők: Dr. Györfi László
Dr. Linder Tamás

Budapest, 2002. június

1. Bevezetés

Napjainkban növekvő igény mutatkozik egyre nagyobb mennyiségű információ továbbítására és tárolására. Az ebből adódó problémák megoldásának egyik lehetséges módja a rendelkezésre álló kommunikációs csatornák és adattároló-egységek folyamatos bővítése. Egy másik, sokkal gazdaságosabb megoldás, ha a meglévő kapacitások minél jobb kihasználására törekszünk, és az infrastruktúra bővítése helyett az adatokat transzformáljuk valamilyen tömörebb formába, amelyek ezután már kisebb költséggel továbbíthatók illetve tárolhatók. Azt az eljárást, amely során egy analóg vagy nagy jelsebességű digitális adatfolyamot egy kisebb jelsebességű digitális adatfolyamba kódolunk, adattömörítésnek, vagy más néven forráskódolásnak nevezzük.

Az adattömörítés elmélete egy idealizált kommunikációs rendszert vizsgál. A feladat egy információforrás adatainak továbbítása egy zajmentes kommunikációs csatornán (vagy tárolóegységen) keresztül egy felhasználóhoz oly módon, hogy a felhasználó a kapott adatokból az eredeti információt megfelelő pontossággal vissza tudja állítani, ugyanakkor az átvitel során az erőforrásokat – azaz a csatornát – a lehető legkevesebbet használjuk. A forráskódolás elméletének két célja van: az egyik a rendszer által elérhető optimális teljesítmény meghatározása, a másik pedig olyan kódolási eljárások kidolgozása, amelyek jól megközelítik ezt az optimumot.

Az adattömörítési eljárásoknak két fajtája van. Az első a veszteségmentes adattömörítés: ebben az esetben a felhasználó által rekonstruált adatoknak pontosan meg kell egyezniük az eredetivel. Ez az elvárás igen természetes, ha eredeti formájukban is diszkrét adatokat – például szöveget vagy számítógépes adatállományokat – tömörítünk. Sok esetben azonban elég, ha csak azt követeljük meg, hogy a rekonstruált adatok kellő pontossággal egyezzenek meg az eredetivel. Ebben az esetben veszteséges adattömörítésről beszélünk. Ezzel az eljárással – kihasználva, hogy az adatokat nem kell pontosan kódolni – általában sokkal jobb tömörítés érhető el, mint a veszteségmentes esetben. Bizonyos esetekben, például ha az információforrás analóg, nem is lehet az adatokat veszteségmentesen továbbítani egy digitális csatornán. Ebből következően a veszteséges adattömörítés természetes eljárás például hang- vagy képtömörítés esetén, illetve minden olyan esetben, amikor nem a teljes adatot, csak annak bizonyos tulajdonságait kell továbbítani.

Amíg veszteségmentes tömörítésre léteznek optimális kódolási eljárások, addig a veszteséges esetben nem ismertek maximális tömörítést elérő általános kódkonstrukciók. Disszertációmban a veszteséges forráskódolás különböző kérdéseit vizsgáltam valós értékű források esetén.

A veszteséges adattömörítési eljárások egy igen általános és széles körben alkalmazott csoportját kvantálásnak nevezzük. Az $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ információforrás kvantálása során a bemenetet először k hosszúságú nem átlapolódó $\{X_{kn+1}^{(n+1)k}\}$ blokkokra bontjuk (itt $j > i$ egészekre X_i^j az $X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j$ sorozatot jelöli), majd az egyes blokkokat egymástól függetlenül ugyanazzal a kóddal kódoljuk.

3.1. definíció. *Az $\mathbb{R}^k$ k-dimenziós euklideszi tér egy $\mathcal{S}$ részhalmazának $Q : \mathcal{S} \to \{c_i, i \in \mathcal{I}\}$ leképzését egy k-dimenziós* vektorkvantálónak *nevezzük, ahol $\mathcal{I}$ egy véges vagy megszámlálha-*

tóan végtelen indexhalmaz, $\{c_i, i \in \mathcal{I}\} \subset \mathbb{R}^k$*, a kvantáló* kódkönyve *pedig ennek megfelelően* k*-dimenziós valós vektorok egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaza. A kódkönyv elemeit* kódpontoknak *nevezzük, a* c_i *kódpontokhoz tartozó* $S_i = \{x : Q(x) = c_i\}$*,* $i \in \mathcal{I}$*, halmazokat pedig* kvantálási celláknak.

A továbbiakban használni fogjuk a $Q \equiv \{(S_i, c_i), i \in \mathcal{I}\}$ rövid jelölést, és $\mathcal{Q}_k$-val jelöljük a k-dimenziós kvantálók halmazát. Ha $\mathcal{I}$ egy N elemű véges halmaz, akkor Q-t egy N-pontú kvantálónak nevezzük, ha $\mathcal{I}$ végtelen, akkor Q egy végtelen-pontú kvantáló.

Tegyük fel, hogy a forrás k-stacionárius. Ekkor, mivel egy kvantáló minden blokkra ugyanazt a leképzést hajtja végre, elegendő a teljesítményét egyetlen blokkra vizsgálni. A stacionaritás miatt létezik olyan $\mathbb{R}^k$ értékkészletű X valószínűségi változó, melynek μ eloszlása megegyezik az egyes $X_{nk+1}^{(n+1)k}$ blokkok eloszlásával. A továbbiakban feltételezzük, hogy $X \in \mathcal{S}$ 1-valószínűséggel. Az X valószínűségi változó Q kvantálóval történő kódolása során bekövetkező hibát a

$$D(Q) = E\{d(X, Q(X))\} = \int_{\mathcal{S}} d(x, Q(x))\, d\mu(x)$$

várható értékkel mérjük, és Q torzításának nevezzük, ahol X és $Q(X)$ távolságát a $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ nemnegatív függvény, az úgynevezett torzításmérték adja meg.

A csatornahasználat mennyiségét a kvantáló kódsebességével mérjük. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a csatorna bináris; ekkor a kvantáló kimenetét egy bináris kóddal kell kódolnunk, hogy átküldhető legyen a csatornán. Ha egy N-pontú Q kvantáló kimenetét egy fix szóhosszúságú veszteségmentes kóddal kódoljuk, akkor Q-t *fix sebességű* kvantálónak nevezzük, és kódsebességét az

$$r_f(Q) = \frac{1}{k} \log N$$

kifejezéssel definiáljuk, ami éppen az egy kimenet kódolásához szükséges bitek átlagos száma. Nyilvánvaló, hogy a fix sebességű kvantálásnak csak akkor van értelme, ha Q-nak véges sok kódpontja van.

Egy N-pontú fix sebességű Q^* kvantáló *optimális*, ha

$$D(Q^*) = \inf\{D(Q) : Q \in \mathcal{Q}_k \text{ egy } N\text{-pontú kvantáló}\}.$$

Az optimális fix sebességű kvantálók különböző tulajdonságai jól ismertek. Az optimalitás szükséges feltételeit, a legközelebbi szomszéd és a súlypont feltételt, előbb skalár- majd vektorkvantálókra a [14, 15, 13] cikkekben bizonyították. E két feltételt együtt Lloyd-Max feltételeknek szokás nevezni, és fontos következményük, hogy monoton növő különbségi torzításmértékek egy általános osztályára a „jó” fix sebességű kvantálókról – és így természetesen az optimális fix sebességű kvantálókról is – feltehető, hogy regulárisak: cellái konvexek és tartalmazzák a hozzájuk tartozó kódpontot. A reguláris kvantálók előnye, hogy létezik egyszerű paraméteres leírásuk (egy véges sok pontú reguláris kvantáló cellái konvex poliéderek), és hatékonyan implementálhatók egyszerű, féltereket használó döntési függvények segítségével.

Váratlan problémákkal találjuk szembe magunkat még a skaláris esetben is, ha ki akarjuk terjeszteni a regularitás fogalmát végtelen-pontú kvantálókra (az irodalomban nem is létezik erre vonatkozóan általánosan elfogadott definíció). Például ha egy skalárkvantáló cellái a

$$(-\infty, 0), [1, \infty), [0, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 7/8), \ldots, [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)}), \ldots$$

intervallumok, akkor a kódpontok megfelelő választásával ez a kvantáló regulárisnak tekinthető, pedig az 1 tetszőleges környezetében végtelen sok cellája van. Hogy az ilyen eseteket kiküszöböljük, a regularitás általános definíciójában bevezetünk egy további feltételt, amely automatikusan teljesül minden véges sok pontú kvantálóra.

3.3. definíció. *Egy Q kvantálót* regulárisnak *nevezünk, ha cellái konvexek, tartalmazzák a hozzájuk tartozó kódpontot, és a kvantálási cellák halmaza lokálisan véges, azaz az $\mathbb{R}^k$ tetszőleges korlátos részhalmaza csak véges sok kvantálási cellát metsz.*

A fix sebességű kvantálás során a kvantáló kimeneteit azonos hosszúságú bináris kódszavakkal reprezentáljuk. További tömörítést érhetünk el azonban, ha a kimenetet nem fix, hanem változó szóhosszúságú veszteségmentes (blokk-)kóddal kódoljuk; ebben az esetben a kapott átlagos kódszóhossz az eredetinél sokkal kisebb lehet. Legyen a kvantáló kimenetének (azaz a $Q(X)$ valószínűségi változónak) kódolása során kapott átlagos kódszóhossz L, ekkor a kódsebességet értelemszerűen $r_v(Q) = \frac{1}{k}L$-nek definiáljuk, és Q-t egy *változó sebességű* kvantálónak nevezzük. Ismert, hogy ha a változó szóhosszúságú kódot optimálisan választjuk, akkor $\frac{1}{k}H(Q) \leq \frac{1}{k}L < \frac{1}{k}H(Q) + \frac{1}{k}$ [6], ahol

$$H(Q) = H(Q(X)) = -\sum_{i \in \mathcal{I}} P\{X \in S_i\} \log P\{X \in S_i\}$$

a kvantáló kimenetének entrópiája, így megfelelő a kódsebességet az $\frac{1}{k}H(Q)$ képlettel definiálni.

3.5. definíció. *Egy $Q \in \mathcal{Q}_k$ vektorkvantálót, melynek kódsebességét $\frac{1}{k}H(Q)$-val mérjük,* entrópia-korlátozott vektorkvantálónak *(EKVK) nevezünk.*

Mivel az entrópia a cellavalószínűségek explicit függvénye, az EKVK-k sokkal könnyebben kezelhetők, mint a változó sebességű kvantálók. Ezen kívül az entrópia-korlátozott megközelítés azért is hasznos, mert nem köti a kvantálótervezést egy adott kódolási eljáráshoz (például változó szóhosszúságú betűnkénti kódoláshoz), így az EKVK-k optimalitása általánosabb érvényű.

Tetszőleges $R \geq 0$-ra jelölje $D_h(R)$ a legfeljebb R entrópiájú kvantálók által elérhető legkisebb torzítást. Formálisan:

$$D_h(R) = \inf\{D(Q) : H(Q) \leq R, Q \in \mathcal{Q}_k\},$$

ahol az infimumot az összes olyan véges vagy végtelen sok pontú Q kvantáló fölött vesszük, melynek entrópiája legfeljebb R. Egy EKVK *optimális*, ha eléri a $D_h(R)$ függvényt abban az értelemben, hogy $H(Q) \le R$ és $D(Q) = D_h(R)$ (a változó sebességű kvantálók optimalitását hasonlóan definiálhatjuk).

A fix sebességű kvantálással ellentétben elég keveset tudunk az optimális entrópia-korlátozott vektorkvantálásról. Úgy tűnik, hogy a szakirodalomban a cikkek többségében a *reguláris* entrópia-korlátozott skalárkvantálók (EKSK-k) optimalitásának szükséges feltételeit vizsgálták *adott számú kódpont* esetén négyzetes torzításra [2, 8, 11], és ezen feltételek alapján több praktikus algoritmus is született adott számú kódponttal rendelkező EKSK-k tervezésére [2, 16, 8, 11, 5] (az [5] cikk algoritmusa használható lokálisan optimális vektorkvantálók tervezésére is). Ugyanakkor az optimális entrópia-korlátozott kvantálók struktúrája általában nem ismert, és az optimális kvantálók létezése szintén nyitott kérdés. A $D_h(R)$ függvényre nincsenek analitikus kifejezések még a legegyszerűbb általánosan használt eloszlásokra sem az exponenciális eloszlás kivételével [2], és a $D_h(R)$ általános tulajdonságai sem ismertek. A disszertációban ezeket a problémákat vizsgáltam.

2. Új tudományos eredmények

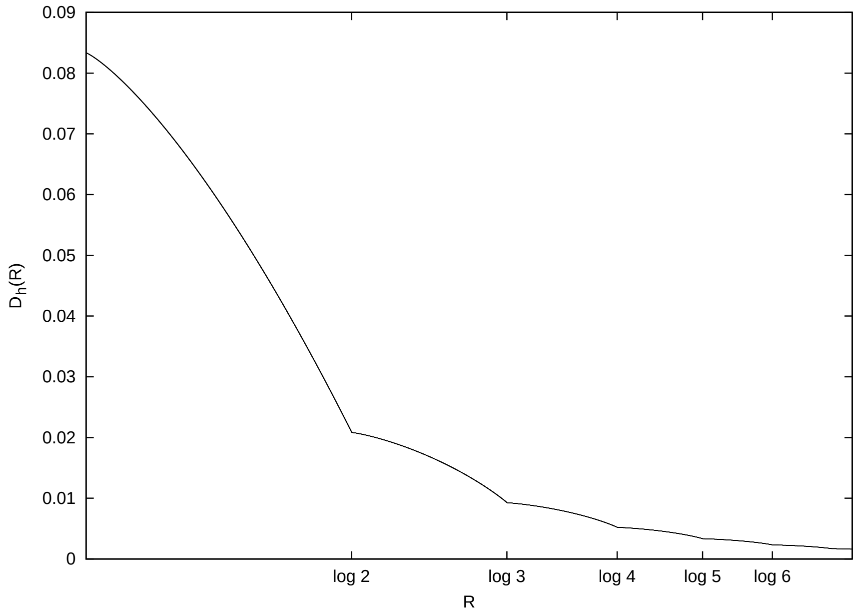
1. tézis: Optimális EKSK-k egyenletes eloszlásra

Az optimális entrópia-korlátozott kvantálók és a hozzájuk tartozó $D_h(R)$ függvény meghatározása adott eloszlású forrásokhoz igen nehéz feladat még skalárkvantálók esetében is. Mivel a „jó” EKSK-k struktúrája általában nem ismert, a probléma megfogalmazása önmagában is nehéz feladat, és az optimális kvantálók meghatározása a reguláris kvantálók között szintén nem könnyű, hiszen minden N-re meg kell talalálni az optimális N-pontú kvantálókat. Fontos kivétel az az eset, amikor a forrás exponenciális eloszlású, a torzításmérték pedig a négyzetes torzítás. Erre az esetre Berger [2] analitikusan meghatározta a $D_h(R)$ függvényt azon megfigyelés alapján, hogy a végtelen-pontú egyenletes kvantálók kielégítik az optimalitás bizonyos szükséges feltételeit. Legjobb tudomásunk szerint mindezidáig ez az egyetlen eset az általánosan használt forrásmodellek körében, amikor a $D_h(R)$ függvényre ismert egy korrekt[1] analitikus kifejezés.

Ha a forrás egyenletes eloszlású egy intervallumon, akkor nem nehéz látni, hogy a „jó” kvantálók regulárisak, és egyszerűen leírhatók a cellavalószínűségek segítségével (a továbbiakban ebben a tézisben csak ilyen kvantálókkal foglalkozunk). Ezen észrevételből kiindulva bizonyítható be a következő tétel, amely az első optimális EKSK-kra vonatkozó precízen bizonyított analitikus eredmény.

4.1. tétel (György és Linder [J2, C3]). *Tegyük fel, hogy X egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, és $d(x,y) = \rho(|x-y|)$, ahol $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ egy szigorúan monoton növő folytonos függvény, melyre $\rho(e^t)$ szigorúan konvex. Ekkor Q akkor és csak akkor optimális az $R > 0$ entrópia-korlátra, ha Q-nak $N = \lceil 2^R \rceil$ cellája van, melyek közül egy c hosszúságú,*

[1] Bár a végtelen-pontú egyenletes kvantálók optimalitása nem bizonyított, az eredmény széles körben elfogadott.



4.1. ábra. $D_h(R)$ egyenletes eloszlásra négyzetes torzítás esetén.

$N-1$ pedig $\frac{1-c}{N-1}$ hosszúságú, ahol c a

$$-c \log c - (1-c) \log \left(\frac{1-c}{N-1} \right) = R$$

egyenlet egyetlen megoldása a $(0, \frac{1}{N}]$ intervallumban.

A tétel (újraskálázás után) érvényes marad akkor is, ha X egyenletes eloszlású egy tetszőleges (a, b) intervallumon. A tétel alapján $D_h(R)$ paraméteresen meghatározható a c és az N függvényében (4.1. következmény). A 4.1. ábrán látható a $D_h(R)$ függvény négyzetes torzítás esetén. Mint az ábra mutatja, ebben az esetben $D_h(R)$ folytonos és szakaszonként konkáv. Ezek a tulajdonságok, amint azt a 4.2. következményben megmutatjuk, általánosabb torzításmértékek esetén is teljesülnek. Látható tehát, hogy – ellentétben a korábbi várakozásokkal – a $D_h(R)$ függvény nem szükségszerűen konvex még olyan „szép" eloszlásokra sem, mint az egyenletes.

2. tézis: Lagrange-optimális EKVK-k

Ebben a tézisben az optimális EKVK-k egy speciális osztályát vizsgáljuk, azokat a kvantálókat, melyek elérik a $D_h(R)$ függvény alsó konvex burkát. Bár, mint az egyenletes eloszlásnál láttuk, előfordulhat, hogy ilyen kvantálók csak diszkrét kódsebességekre léteznek, a Lagrange-optimális kvantálók az optimális kvantálók elméletileg és gyakorlatilag is érdekes osztályát alkotják [5, 18, 9], továbbá, mivel kielégítik az általánosított legközelebbi szomszéd feltételt [5, 4] (5.1. lemma), analitikusan is jól kezelhetők.

Tetszőleges $\lambda > 0$ esetén a Q kvantáló *Lagrange-i torzítását* a

$$J(\lambda, Q) = D(Q) + \lambda H(Q)$$

kifejezéssel definiáljuk. Ekkor a minimális Lagrange-i torzítás

$$J^*(\lambda) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_k} J(\lambda, Q) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_k} \{D(Q) + \lambda H(Q)\},$$

ahol az infimumot az összes véges vagy végtelen-pontú $Q \in \mathcal{Q}_k$ fölött vesszük. Minden Q kvantálót, amely eléri a fenti infimumot, *Lagrange-optimális* entrópia-korlátozott kvantálónak nevezünk. Könnyen bizonyítható, hogy Q akkor és csak akkor Lagrange-optimális valamely $\lambda \geq 0$-ra, ha Q eléri a $D_h(R)$ alsó konvex burkát abban az értelemben, hogy a $(H(Q), D(Q))$ pont rajta van az alsó konvex burkon ($-\lambda$ egy ebben a pontban húzott érintő meredeksége). Először megmutatjuk, hogy a torzításmértékre vonatkozó általános feltételek mellett léteznek Lagrange-optimális EKVK-k.

5.1. tétel (György és Linder [C5]). *Tegyük fel, hogy minden $x \in \mathbb{R}^k$ esetén a $d(x,y)$ nemnegatív torzításmérték az y alulról félig folytonos függvénye, és tetszőleges $y' \in \mathbb{R}^k$-ra, $d(x,y') \leq \liminf_{\|y\| \to \infty} d(x,y)$. Ekkor minden $\lambda > 0$-ra létezik Lagrange-optimális kvantáló, azaz van olyan Q, melyre*

$$D(Q) + \lambda H(Q) = J^*(\lambda).$$

Chou és Betts [4] bebizonyították, hogy ha a forrás eloszlásának a farka elég kicsi a torzításmértékhez képest, akkor a Lagrange-optimális kvantálónak csak véges sok kódpontja van. Ebből következik, hogy négyzetes torzítás esetén a Lagrange-optimális kvantálók regulárisak. Chou és Betts eredményének egy triviális általánosítása olvasható a disszertáció 5.2. tételében. A következő tétel azt mondja ki, hogy ha a forrás farokeloszlása egy kicsit nagyobb, akkor a Lagrange-optimális kvantálónak végtelen sok kódpontja van.

5.3. tétel. *Legyen $d(x,y) = \rho(\|x-y\|)$, ahol $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ szigorúan monoton növő és konvex. Tegyük fel, hogy valamilyen $\lambda > 0$-ra $J^*(\lambda) < \infty$, és Q egy Lagrange-optimális kvantáló. Ekkor ha valamilyen $0 < \epsilon < 1$-re*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{P\{\|X\| > t\}}{2^{-\rho((1-\epsilon)t)/\lambda}} > 0,$$

akkor Q-nak végtelen sok kódpontja van.

Az 5.2. és 5.3. tétel érvényes – többek között – a négyzetes torzításra. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy a normális eloszlás a fordulópont: a normálisénál kisebb farkú eloszlásokra (beleértve a véges tartójú eloszlásokat is) a Lagrange-optimális kvantálónak véges sok kódpontja van, a normálisénál nagyobb farkú eloszlásokra pedig a Lagrange-optimális kvantálónak végtelen sok pontja van. Magát a normális eloszlást vizsgálva azt kapjuk, hogy létezik egy olyan $\lambda^* > 0$ kritikus érték (és hozzá tartozó kritikus $R^* > 0$ kódsebesség), hogy a Lagrange-optimális kvantálónak véges sok kódpontja van, ha $\lambda > \lambda^*$ (azaz $H(Q) < R^*$), és végtelen sok kódpontja van, ha $\lambda < \lambda^*$ (azaz $H(Q) > R^*$).

3. tézis: Optimális EKSK-k létezése és struktúrája nematomos eloszlásokra

Ahogy a bevezetőben már említettük, a legközelebbi szomszéd feltételből következik, hogy a $d(x, y) = \rho(\|x - y\|)$ alakú torzításmértékek esetén, ahol ρ monoton növekvő függvény, a „jó" fix sebességű kvantálókról feltehető, hogy regulárisak. Ez a szép strukturális tulajdonság hatékony tervezési eljárásokat és egyszerű implementációt eredményez, továbbá nagyban elősegíti az optimális kvantálók létezésének egyszerű bizonyítását és különböző tulajdonságainak vizsgálatát. Ezzel szemben, bár a regularitást általánosan feltételezik az entrópia-korlátozott kvantálás szakirodalmában, az optimális entrópia-korlátozott kvantálók regularitása továbbra is nyitott kérdés. A következő példa megmutatja, hogy e kérdésre általában nemleges válasz adandó diszkrét eloszlású források esetén.

6.1. példa (György és Linder [C4, J3]). Legyen $d(x, y) = (x - y)^2$, és tegyük fel, hogy az X diszkrét valószínűségi változó a $\{-1, 0, 2\}$ értékeket veheti fel, mégpedig

$$P\{X = -1\} = P\{X = 2\} = 2/5 \quad \text{és} \quad P\{X = 0\} = 1/5$$

valószínűséggel. Ekkor tetszőleges Q kvantáló lényegében megadható a $\{-1, 0, 2\}$ halmaz egy partíciójával (Q definíciója más pontokon nyilvánvalóan érdektelen) és az egyes partíciós cellákhoz tartozó kódpontokkal. Ez utóbbiakat optimálisan megválaszthatjuk minden partícióhoz a súlypont feltétel szerint. Megvizsgálva mind az öt lehetséges partíciót azt kapjuk, hogy ha az R entrópia-korlát kielégíti a $h_b(1/5) \leq R < h_b(2/5)$ egyenlőtlenséget, ahol $h_b(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$, akkor az optimális EKSK-nak két kódpontja van: $c_1 = 1/2$ és $c_2 = 0$, és a megfelelő cellákra teljesül, hogy

$$\{-1, 2\} \subset S_1 \quad \text{és} \quad \{0\} \subset S_2.$$

Így ha S_2 egy intervallum, akkor S_1 két diszjunkt, pozitív valószínűségű intervallum uniója, ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy ebben az esetben egy reguláris kvantáló sem lehet optimális.

Ebben a tézisben megmutatjuk, hogy ilyen problémák nem fordulhatnak elő, ha az X valós valószínűségi változó eloszlása nematomos. A következő definíció megadja a „jó" torzításmértékeket, amelyekre a véges sok pontú kvantálók „regularizálhatók", azaz tetszőleges véges sok pontú kvantálóhoz létezik egy reguláris kvantáló, melynek cellavalószínűségei megegyeznek az eredetivel, a torzítása viszont legfeljebb ugyanannyi, mint az eredeti kvantálóé.

6.1. definíció (György és Linder [J3]). *Adott pozitív egész N-re egy $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ torzításmértéket* N-pont-regulárisnak *nevezünk, ha tetszőleges nematomos eloszlásra és N-pontú Q kvantálóra létezik egy N-pontú reguláris $\widehat{Q}$ kvantáló úgy, hogy $D(\widehat{Q}) \leq D(Q)$, továbbá Q és $\widehat{Q}$ cellavalószínűségei megegyeznek (azaz létezik egy olyan π kölcsönösen egyértelmű leképzés Q és $\widehat{Q}$ cellái között, hogy $\mu(S) = \mu(\pi(S))$ a Q tetszőleges S cellájára). Végül d-t* végesen regulárisnak *nevezzük, ha minden pozitív egész N-re N-pont-reguláris.*

A következő tétel megmutatja, hogy ha egy d torzításmérték két-pont-reguláris, akkor végesen reguláris is, és a két-pont-reguláris torzításmértékek egy nagy családját is meghatározza.

6.1. tétel (György és Linder [C4, J3]). *Minden két-pont-reguláris torzításmérték végesen reguláris, azaz ha az X valós valószínűségi változó μ eloszlása nematomos és d két-pont-reguláris, akkor tetszőleges véges sok pontú, $\{S_1, \ldots, S_N\}$ cellákkal rendelkező Q kvantálóhoz létezik egy N-pontú reguláris $\widehat{Q}$ kvantáló $\{\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_N\}$ intervallum cellákkal úgy, hogy $\mu(S_i) = \mu(\widehat{S}_i)$ minden $i = 1, \ldots, N$-re, és $D(\widehat{Q}) \le D(Q)$. Ha $d(x,y) = \rho(|x-y|)$ valamely $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton növekvő konvex függvényre, akkor d két-pont-reguláris.*

Ebből az eredményből könnyen következik, hogy ha létezik $c^* \in \mathbb{R}$, melyre $E\{d(X, c^*)\} < \infty$, és a tétel feltételei teljesülnek, akkor $D_h(R)$ tetszőlegesen megközelíthető véges sok pontú reguláris kvantálókkal (6.2. következmény).

Ha a 6.1. tételt ki akarjuk terjeszteni végtelen-pontú kvantálókra is, váratlan nehézségek merülnek fel. Kiderül, hogy ha a tétel bizonyítása során használt regularizáló eljárást alkalmazzuk, akkor előfordulhat, hogy olyan kvantálót kapunk, melynek cellái, az $S_1, S_2, \ldots$ halmazok ugyan intervallumok, és $P\{X \in \bigcup_i S_i\} = 1$, ám $\bigcup_i S_i \ne \mathbb{R}$. Az ilyen kvantálókat majdnem reguláris kvantálóknak nevezzük.

6.2. definíció (György és Linder [C4, J3]). *Egy k-dimenziós $Q \in \mathcal{Q}_k$ vektorkvantálót* μ-majdnem regulárisnak *nevezünk, ha van egy olyan $S \subset \mathcal{S}$ halmaz, melyre $\mu(S) = 0$, Q mindenhol definiált az $\mathcal{S} \setminus S$ halmazon, továbbá Q cellái konvexek és tartalmazzák a hozzájuk tartozó kódpontot.*[2]

A következő tétel megmutatja, hogy minden két-pont-reguláris torzításmérték esetén tetszőleges végtelen-pontú kvantálóhoz létezik egy majdnem reguláris kvantáló az eredetivel azonos cellavalószínűségekkel és az eredetinél nem nagyobb torzítással.

6.2. tétel (György és Linder [C4, J3]). *Tegyük fel, hogy a valós X valószínűségi változó μ eloszlása nematomos, és $d(x,y)$ egy két-pont-reguláris torzításmérték úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $d(x,y)$ az y alulról félig folytonos függvénye, továbbá minden $y' \in \mathbb{R}$-re $d(x,y') \le \liminf_{|y|\to\infty} d(x,y)$. Ekkor tetszőleges végtelen-pontú Q kvantálóhoz létezik egy μ-majdnem reguláris $\widehat{Q}$ kvantáló úgy, hogy Q és $\widehat{Q}$ cellavalószínűségei megegyeznek, és $D(\widehat{Q}) \le D(Q)$.*

E tétel alapján már bebizonyíthatjuk az optimális EKSK-k létezését nematomos forráseloszlások esetén. A 6.2. tétel értelmében az optimális kvantálókról feltehetjük, hogy majdnem regulárisak.

6.3. tétel (György és Linder [C4, J3]). *Tegyük fel, hogy a valós X valószínűségi változó μ eloszlása nematomos, és $d(x,y)$ egy két-pont-reguláris torzításmérték úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $d(x,y)$ az y alulról félig folytonos függvénye, továbbá minden $y' \in \mathbb{R}$-re $d(x,y') \le \liminf_{|y|\to\infty} d(x,y)$. Ekkor tetszőleges $R \ge 0$-ra létezik egy μ-majdnem reguláris Q kvantáló, melyre $H(Q) \le R$ és $D(Q) = D_h(R)$.*

[2] Lásd a 3.1 definíciót.

Hasonlóan megmutatható (6.4. tétel), hogy a 6.3. tétellel azonos feltételek mellett létezik reguláris optimális kvantáló a legfeljebb N-pontú EKSK-k körében. A 6.1. tétel értelmében a 6.2. és 6.3. tétel teljesül, ha $d(x, y) = \rho(|x - y|)$ valamilyen konvex monoton növekvő ρ függvényre.

Abban az esetben, ha $d(x, y) = (x - y)^2$ a négyzetes torzítás, és X-nek létezik sűrűségfüggvénye, mely szakaszonként folytonos és szakaszonként monoton, bebizonyíthatjuk az optimális EKSK-k regularitását is.

6.5. tétel (György és Linder [C4, J3]). *Tegyük fel, hogy a valós X valószínűségi változónak létezik sűrűségfüggvénye, mely szakaszonként folytonos és szakaszonként monoton a (σ, τ) intervallumon ($-\infty \leq \sigma < \tau \leq \infty$), és legyen $d(x, y) = (x - y)^2$. Ekkor tetszőleges $R \geq 0$ entrópia-korlátra létezik reguláris optimális EKSK.*

4. tézis: Optimális EKVK-k létezése és struktúrája folytonos eloszlásokra

Ebben a tézisben az előző tézis eredményeit terjesztjük ki vektorkvantálókra. A bizonyítások alapgondolata és módszere alapvetően ugyanaz, de ebben az esetben a problémák technikailag sokkal nehezebben kezelhetők. Vizsgálatainkat csak a gyakorlati szempontból legfontosabb négyzetes torzításra és folytonos eloszlású forrásokra végezzük el. A reguláris vektorkvantálók féltereken alapuló leírásának segítségével bebizonyíthatjuk a következő, a „jó" EKVK-k struktúrájára vonatkozó tételt.

7.1. tétel. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi vektorváltozó μ eloszlása abszolút folytonos, és legyen $d(x, y) = \|x - y\|^2$. Ekkor tetszőleges N-pontú $Q \equiv \{(S_1, c_1), \ldots, (S_N, c_N)\}$ kvantálóhoz létezik egy $(N + 1)$-pontú $\widehat{Q} \equiv \{(\widehat{S}_1, c_1), \ldots, (\widehat{S}_{N+1}, c_{N+1})\}$, melyre $\widehat{S}_i$ konvex poliéder minden $1 \leq i \leq N$-re, $\widehat{S}_{N+1}$ véges sok konvex poliéder uniója,*

$$\mu(\widehat{S}_i) = \mu(S_i) \text{ ha } 1 \leq i \leq N, \text{ és } \mu(\widehat{S}_{N+1}) = 0,$$

továbbá

$$D(\widehat{Q}) \leq D(Q).$$

Pontosabban fogalmazva, tetszőleges $1 \leq i < j \leq N$ esetén létezik egy olyan $h_{i,j}$ hipersík, amely merőleges a $c_i - c_j$ vektorra, és a hipersíkok által meghatározott $(H_{i,j}, H_{j,i})$ félterekre teljesül, hogy $\widehat{S}_i = \bigcup_{j \neq i} H_{i,j}$ minden $1 \leq i \leq N$ esetén, továbbá $\widehat{S}_{N+1} = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{i=1}^N \widehat{S}_i$.

Ha $\widehat{S}_{N+1}$-et felbontjuk véges sok konvex poliéderre, akkor egy véges sok pontú reguláris kvantálót kapunk, melynek azonban N-nél több pontja is lehet (7.1. következmény). A 7.2. következményben megmutatjuk, hogy ha az X sűrűségfüggvénye mindenhol pozitív, akkor a 7.1. tételben kapott kvantáló reguláris. Az egydimenziós esethez hasonlóan szintén megmutatható (7.3. következmény), hogy ha X szórása véges, akkor $D_h(R)$ tetszőlegesen megközelíthető véges sok pontú reguláris EKVK-kal.

A végtelen-pontú vektorkvantálók regularizálása sokkal nehezebb feladat, mint a végtelen-pontú skalárkvantálóké. A bizonyítás alapja a 7.1. lemma, amelyben bizonyos kvantálósorozatok konvergenciáját bizonyítjuk be. A lemma alkalmazásával a „jó" kvantálók majdnem regularitása és az optimális EKVK-k létezése szinte azonnal következik.

7.3. tétel. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi vektor eloszlása abszolút folytonos, és legyen $d(x,y)=\|x-y\|^2$. Ekkor tetszőleges Q kvantálóhoz létezik egy majdnem reguláris $\widehat{Q}$ kvantáló úgy, hogy Q és $\widehat{Q}$ cellavalószínűségei megegyeznek, továbbá $D(\widehat{Q})\le D(Q)$.*

7.4. tétel. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi vektor eloszlása abszolút folytonos, és legyen $d(x,y)=\|x-y\|^2$. Ekkor tetszőleges $R\ge 0$ esetén létezik egy majdnem reguláris Q kvantáló, melyre $H(Q)\le R$ és $D(Q)=D_h(R)$.*

Az optimális entrópia-korlátozott skalár- illetve vektorkvantálók struktúrájára vonatkozó eredményekből következik, hogy – a forrás eloszlására és a torzításmértékre vonatkozó különböző feltételek mellett – tetszőleges Q kvantálóhoz létezik egy reguláris vagy majdnem reguláris $\widehat{Q}$ kvantáló, melyre $D(\widehat{Q})\le D(Q)$, továbbá Q és $\widehat{Q}$ cellavalószínűségei megegyeznek. Ez utóbbiból következik, hogy ha Q illetve $\widehat{Q}$ kimeneteit ugyanazzal a változó szóhosszúságú kóddal kódoljuk, akkor a kapott átlagos kódszóhossz azonos lesz, amiből látható, hogy a „jó" változó sebességű vektorkvantálók szintén majdnem regulárisak. Ezt felhasználva a 6.3. és 7.4. tétel bizonyításának kis módosításával a 7.5. illetve a 7.6. tételben bebizonyítjuk az optimális változó sebességű kvantálók létezését mind a skalár-, mind a vektorkvantálók esetében.

A 3. és 4. tézisben bizonyított eredmények igazolják az optimális entrópia-korlátozott kvantálók létezését a gyakorlati szempontból legfontosabb esetekben, az optimális kvantálók struktúrájára vonatkozó eredmények pedig praktikusan igazolják azt a szakirodalomban gyakran előforduló implicit feltevést, mely szerint az optimális EKVK-k regulárisak.

5. tézis: Kevert eloszlású források aszimptotikus R-D függvénye

Az értekezés utolsó tézisében meghatározzuk az – egyre nagyobb dimenziójú – entrópia-korlátozott vektorkvantálókkal aszimptotikusan elérhető legjobb tömörítést bizonyos kevert eloszlású források esetén. Feltételezzük, hogy a forrás stacionárius, a torzítás pedig a betűnkénti négyzetes torzítás.

Az $X^n=X_1,\ldots,X_n$ véletlen vektor $D>0$ torzítással való kódolásához szükséges minimális kódsebességet az R-D függvény adja meg [1]:

$$R_{X^n}(D)=\inf_{n^{-1}E\|X^n-Y^n\|^2\le D}\frac{1}{n}I(X^n;Y^n),$$

ahol az $\frac{1}{n}I(X^n;Y^n)$ normalizált kölcsönös információ infimumát az X^n és $Y^n=(Y_1,\ldots,Y_n)$ olyan közös eloszlásai fölött vesszük, melyekre

$$\frac{1}{n}E\|X^n-Y^n\|^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{(X_i-Y_i)^2\}\le D.$$

Az $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ stacionárius forrás R-D függvényét az

$$R_{\mathcal{X}}(D) = \lim_{n\to\infty} R_{X^n}(D)$$

határértékkel definiáljuk (a határérték minden stacionárius forrásra létezik [1]). Az R-D függvény megadja az $\mathcal{X}$ forrás legfeljebb D torzítással történő kódolásához szükséges legkisebb kódsebességet, és ez a kódsebesség tetszőlegesen megközelíthető egyre nagyobb dimenziójú EKVK-k alkalmazásával [12, 7].

Az R-D függvény analitikus meghatározása általában igen nehéz, és a pontos formulák helyett a legtöbb esetben csak korlátok illetve aszimptotikus kifejezések adhatók. Bizonyos kevert eloszlású forrásokra Rosenthal és Binia [17] meghatározta az aszimptotikus R-D függvényt kis torzításokra: azt az esetet vizsgálták, amikor az X^n vektor eloszlása egy diszkrét és egy folytonos eloszlás keveréke. Ez az eredmény alkalmazható memóriamentes források vizsgálatánál, azonban nem használható memóriával rendelkező stacionárius és ergodikus forrásokra. E probléma megoldására bevezetünk egy általánosabb keverék-modellt, melynek segítségével ezek a források is vizsgálhatók.

Legyen $\{X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \ldots, X_n^{(j)}),\ j = 1, \ldots, N\}$ n-dimenziós valószínűségi változók egy véges halmaza, és tegyük fel, hogy minden j-re $X^{(j)}$ pontosan d_j koordinátája diszkrét eloszlású (az ezekből a „diszkrét” koordinátákból alkotott d_j-dimenziós vektort $\widehat{X}^{(j)}$-vel jelöljük), a maradék $c_j = n - d_j$ koordinátának pedig létezik közös sűrűségfüggvénye (az ezekből a „folytonos” koordinátákból alkotott c_j-dimenziós vektort $\tilde{X}^{(j)}$-vel jelöljük).

Legyen az X^n forrás eloszlása az $X^{(j)}$ vektorok eloszlásának keveréke valamilyen nemnegatív $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ súlyokkal ($\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$). Ekkor valamilyen $X^{(j)}$-ktől független $\{1, \ldots, N\}$ értékkészletű, $P\{V = j\} = \alpha_j$, $j = 1\ldots, N$, eloszlású V keverő valószínűségi változó segítségével X^n felírható

$$X^n = X^{(V)} \tag{1}$$

alakban, azaz $X^n = X^{(j)}$ ha $V = j$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ha $j \neq j'$, akkor $X^{(j)}$ és $X^{(j')}$ diszkrét koordinátái nem pontosan ugyanazokban a pozíciókban vannak. A továbbiakban ezen kívül azt is feltételezzük, hogy X^n kielégíti az alábbi enyhe feltételeket:

(a) Minden $X^{(j)}$-nek véges a szórása, azaz $E\|X^{(j)}\|^2 < \infty$, $j = 1, \ldots, N$.

(b) Minden $X^{(j)}$-re, $j = 1, \ldots, N$, a $h(\tilde{X}^{(j)}|\widehat{X}^{(j)})$ feltételes differenciális entrópia és a diszkrét koordináták $H(\widehat{X}^{(j)})$ entrópiája véges.

Ekkor az X^n R-D függvénye aszimptotikusan meghatározható kis torzítások esetén.

8.1. tétel (György, Linder és Zeger [C1, C2, J1]). *Tegyük fel, hogy X^n (1) szerinti keverék-eloszlású úgy, hogy az $X^{(j)}$ komponensnek pontosan d_j diszkrét eloszlású koordinátája van, a maradék $c_j = n - d_j$ koordinátájának pedig létezik közös sűrűségfüggvénye. Tegyük fel továbbá, hogy $X^{(j)}$ kielégíti az (a) és (b) feltételeket. Ekkor négyzetes torzításra az X^n R-D függvénye $D \to 0$ esetén aszimptotikusan*

$$R_{X^n}(D) = \frac{1}{n}H(V) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j H(\widehat{X}^{(j)}) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j h(\tilde{X}^{(j)}|\widehat{X}^{(j)}) - \frac{\Lambda}{2}\log(2\pi e D/\Lambda) + o(1)$$

alakú, ahol $\Lambda = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j c_j$*, és* $o(1) \to 0$ *ha* $D \to 0$.

Az eredményből rögtön következik, hogy az X^n R-D-dimenziója [10] éppen $n\Lambda$, a „folytonos" koordináták számának várható értéke. A 8.1. következményben a fenti tétel segítségével meghatározzuk az aszimptotikus R-D függvényt stacionárius források egy kicsi, de érdekes osztályára, ahol az egydimenziós peremeloszlásokat egy diszkrét és egy folytonos eloszlás keverékeként kapjuk. Ez a forrásosztály alkalmazható ritka források modellezésére [3].

3. A kutatás módszertana

A kutatás során a valószínűségszámítás, a mértékelmélet, a feltételes minimalizálás és az információelmélet eszköztárából merítettem. Az egyenletes eloszlásra vonatkozó optimális EKSK meghatározása a Lagrange-multiplikátorok módszerén alapul, és ez a módszer áll az optimális entrópia-korlátozott kvantálás Lagrange-i megfogalmazásának hátterében is. Az optimális entrópia-korlátozott kvantálók szerkezetének meghatározása és az optimális kvantálók létezésének bizonyítása mértékelméleti meggondolásokon alapszik, és a bizonyítások során a Cantor-féle átlós módszer és a Fatou-lemma is fontos szerepet játszik. A kevert eloszlású források aszimptotikus R-D függvényének meghatározása tisztán információelméleti módszereken alapul.

4. Az eredmények hasznosítása

A disszertáció az optimális veszteséges forráskódolás problémakörét vizsgálja, és a kapott eredmények egy újabb lépést jelentenek az általános optimális kódkonstrukciók megtalálása felé. Bár az eredmények inkább elméleti jellegűek, a vizsgált problémák alkalmazás-orientáltak, és az eredmények hasznosíthatók a kvantálótervezés területén. Az optimális entrópia-korlátozott kvantálók létezésére vonatkozó eredmények biztosítják, hogy a tervezőalgoritmusok által keresett optimális kvantálók léteznek. Az egyenletes eloszlásra vonatkozó optimális EKSK közvetlenül alkalmazható, ha egy egyenletes eloszlású forrásból származó adatokat akarunk tömöríteni, bár az eredmény elméleti szempontból érdekesebbnek tűnik. Az egyik legjobb entrópia-korlátozott és változó sebességű kvantálókat tervező algoritmus [5] az optimális kvantálás Lagrange-i megfogalmazásán alapszik; a Lagrange-optimális kvantálók kódkönyvének végességére vonatkozó eredmények alkalmazhatók az algoritmus inicializálása során. A kvantálók regularitására vonatkozó eredmények elméletileg igazolják azt a szakirodalomban gyakran előforduló implicit feltevést, mely szerint az optimális EKVK-k regulárisak, ezzel igazolva számos tervezési eljárás helyességét. Az utolsó tézisben meghatározott aszimptotikus R-D függvény referenciaként szolgálhat a sok nulla értékű pixelt tartalmazó, úgynevezett ritka képek kódolására alkalmazott eljárások teljesítményvizsgálatához, mivel a 8.1. következményben használt modell ebben az esetben jól alkalmazható [3]. Az R-D függvényre kapott kifejezés alapján egy aszimptotikusan optimális kódolási eljárás is adható az itt szereplő kevert eloszlású forrásokra.

Publikációk

[J1] A. György, T. Linder, and K. Zeger, „On the rate-distortion function of random vectors and stationary sources with mixed distributions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, pp. 2110–2115, Sep. 1999.

[J2] A. György and T. Linder, „Optimal entropy constrained scalar quantization of a uniform source," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-46, pp. 2704–2711, Nov. 2000.

[J3] A. György and T. Linder, „On the structure of optimal entropy-constrained scalar quantizers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-48, pp. 416–427, Feb. 2002.

[C1] A. György, T. Linder, and K. Zeger, „Lossy coding of sources with mixed distribution," in *Proc. 33rd Conference on Information Sciences and Systems*, (The Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA), pp. 619–623, March 1999.

[C2] A. György, T. Linder, and K. Zeger, „On the rate-distortion function of random vectors and stationary sources with mixed distributions," in *Proc. 6th Canadian Workshop on Information Theory*, (Kingston, Ont, Canada), pp. 52–55, June 1999.

[C3] A. György and T. Linder, „Optimal entropy constrained scalar quantization of a uniform source," in *Proc. Int. Symp. Inform. Theory Appl.*, (Honolulu, HI, USA), pp. 85–88, Nov. 2000.

[C4] A. György and T. Linder, „On the structure of entropy-constrained scalar quantizers," in *Proc. 2001 IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, (Washington, D. C., USA), p. 29, June 2001.

[C5] A. György and T. Linder, „A note on the existence of optimal entropy-constrained vector quantizers." to appear at the *2002 IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, (Lausanne, Switzerland), June-July 2002.

Hivatkozások

[1] T. Berger, *Rate Distortion Theory.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall, 1971.

[2] T. Berger, „Optimum quantizers and permutation codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 759–765, Nov. 1972.

[3] Y. Bresler, M. Gastpar, and R. Venkataramani, „Image compression on-the-fly by universal sampling in Fourier imaging systems," in *Proc. 1999 IEEE Information Theory Workshop on Detection, Estimation, Classification, and Imaging*, (Santa Fe, NM, USA), p. 48., Feb. 1999.

[4] P. A. Chou and B. J. Betts, „When optimal entropy-constrained quantizers have only a finite number of codewords," in *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, (Cambridge, MA, USA), p. 97, Aug. 1998.

[5] P. A. Chou, T. Lookabaugh, and R. M. Gray, „Entropy-constrained vector quantization," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, pp. 31–42, Jan. 1989.

[6] T. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory.* New York: Wiley, 1991.

[7] M. Effros, P. A. Chou, and R. M. Gray, „Variable-rate source coding theorems for stationary nonergodic sources," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-40, pp. 1920–1925, Nov. 1994.

[8] N. Farvardin and J. W. Modestino, „Optimum quantizer performance for a class of non-Gaussian memoryless sources," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 485–497, May 1984.

[9] R. M. Gray, T. Linder, and J. Li, „A Lagrangian formulation of Zador's entropy-constrained quantization theorem," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-48, pp. 695–707, Mar. 2002.

[10] T. Kawabata and A. Dembo, „The rate-distortion dimension of sets and measures," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-40, pp. 1564–1572, Sep. 1994.

[11] J. C. Kieffer, T. M. Jahns, and V. A. Obuljen, „New results on optimal entropy-constrained quantization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 1250–1258, Sep. 1988.

[12] A. Leon-Garcia, L. D. Davisson, and D. L. Neuhoff, „New results on coding of stationary nonergodic sources," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-25, pp. 137–144, Jan. 1979.

[13] Y. Linde, A. Buzo, and R. M. Gray, „An algorithm for vector quantizer design," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, pp. 84–95, Jan. 1980.

[14] S. P. Lloyd, „Least squared quantization in PCM." unpublished memorandum, Bell Lab., 1957; reprinted in *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-28, no. 2 , Mar. 1982, pp. 129-137.

[15] J. Max, „Quantizing for minimum distortion," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-6, pp. 7–12, Mar. 1960.

[16] A. N. Netravali and R. Saigal, „Optimum quantizer design using a fixed-point algorithm," *Bell Syst. Tech. J*, vol. 55, pp. 1423–1435, Nov. 1976.

[17] H. Rosenthal and J. Binia, „On the epsilon entropy of mixed random variables," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 1110–1114, Sep. 1988.

[18] E.-H. Yang, Z. Zhang, and T. Berger, „Fixed slope universal lossy data compression," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-43, pp. 1465–1476, Sep. 1997.