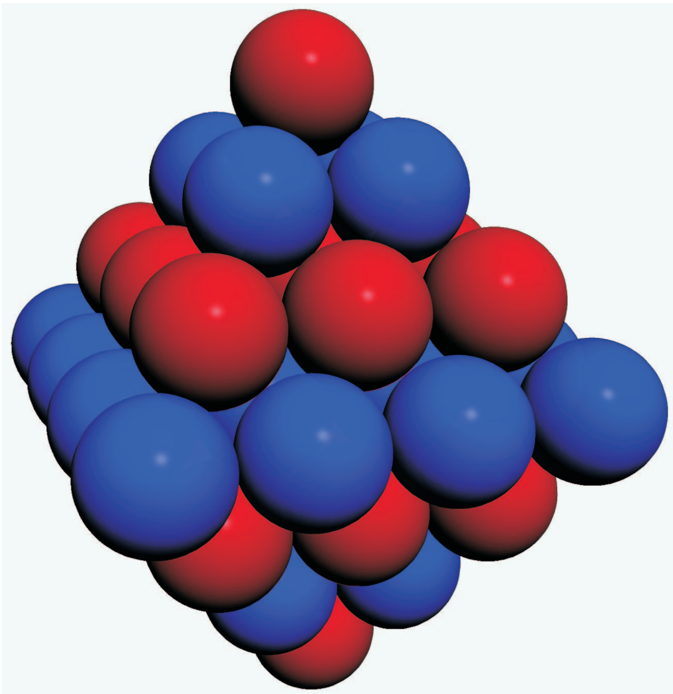
Wintsche Gergely

Véges gömbelhelyezések és fedések

A Ph.D. tézisek összefoglalása



témavezető: ifj. Böröczky Károly
2002

Bevezetés

A dolgozat hat fejezetre tagolódik. A bevezetőben röviden összefoglalom a poliéderekben történő gömbelhelyezésekkel kapcsolatos korábbi eredményeket.

Az első fejezetben az oktaéderben történő gömbelhelyezésekkel kapcsolatos – részben korábbról ismert, részben saját rövidebb bizonyításokat tartalmazó – eredményeket tekintem át.

A második fejezetben a d-dimenziós keresztpolitóppal kapcsolatos hasonló eredményeinket ismertetem.

A harmadik fejezetben az oktaéderen belüli elhelyezések lokális stabilitásásról szóló eredmények vannak.

A negyedik fejezet a d-dimenziós keresztpolitóp fedésével foglalkozik.

Az ötödik fejezetben a d-dimenziós gömbfelület fedésére adunk optimális elrendezést $d + 3$ gömbbel.

A hatodik fejezetben a d-dimenziós gömbfelület fedésének sűrűségére látunk be korlátot.

Az alábbiakban összefoglalom a dolgozatban lévő eredményeket.

1. fejezet

Az oktaéder

Legyen $v_1, \ldots, v_3$ a 3-dimenziós tér egy ortonormált bázisa, és jelölje O a 3-dimenziós oktaédert, melynek csúcsai $\pm v_1, \ldots, \pm v_3$, és így O éleinek hossza $\sqrt{2}$.

1. Tétel: *$n = 3$ pont esetén az optimális pontrendszer olyan szabályos háromszöget határoz meg, melynek egyik csúcsa az oktaéder egyik csúcsa, másik két csúcsa pedig az okatédernek azon a két élén van, melyek nem illeszkednek az első csúcsra, de azzal és az origóval egy síkba esnek.*

2. Tétel: *$n = 4, 5, 6$ pont esetén a pontok az oktaéder csúcsaiban helyezkednek el, illetve $n = 4$ esetén lehetséges, hogy három pont az oktaéder egy lapjának három csúcsában, a negyedik pedig a szemköztes lap középpontjában helyezkedik el. $r_4 = r_5 = r_6 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\rho_4 = 4\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,4035$, $\rho_5 = 5\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,5044$, $\rho_6 = 6\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,6053$.*

3. Tétel: $n = 7$ pont esetén az optimális elrendezés az oktaéder 6 csúcsa és O középpontja, $r_7 \approx 0,1895$.

2. fejezet

A d-dimenziós keresztpolitóp

Legyen $v_1, \ldots, v_d$ a d-dimenziós tér egy ortonormált bázisa, és jelölje O^d a d-dimenziós szabályos keresztpolitópot, melynek csúcsai $\pm v_1, \ldots, \pm v_d$, és így O^d éleinek hossza $\sqrt{2}$.

Ebben a fejezetben meghatározzuk n darab d-dimenziós gömb maximális sugarát, $r(n, d)$-t az O^d tartományon belül, ha $n \leq 2d + 1$.

Ezen feladat természetesen ekvivalens O^d-beli n pont közötti minimális távolságok maximumának meghatározásával.

A továbbiakban csak az O^d-beli pontelhelyezésekkel foglalkozunk, mert a tételek és bizonyítások egyszerűbben és érthetőbben megfogalmazhatók, mint a gömbelhelyezések kapcsán.

Első hallásra talán meglepő lehet, de a 3-dimenziós esettel egyező eredmények adódnak a d-dimenziós ($d \geq 3$) esetben is, azaz

$$\varphi(n,d) = \begin{cases} 2\left(\sqrt{3}-1\right) & \text{ha } n = 3 \\ \sqrt{2} & \text{ha } 4 \leq n \leq 2d \\ 1 & \text{ha } n = 2d+1. \end{cases}$$

1. Tétel: *Legyen $d \geq 3$, és legyen a három pont közötti minimális távolság maximális O^d-ben. Ekkor a három pont egyike O^d egyik csúcsa, mondjuk v_i, és a három pont olyan szabályos háromszöget határoz meg, mely a $\pm v_i, \pm v_j$, $v_j \neq v_i$ pontok által adott négyzetben van.*

Ha az O^d-ben elhelyezett pontok n száma 4 és $2d$ között van, akkor O^d csúcsai adják a legjobb elhelyezést.

2. Tétel: *Legyen $d \geq 3$, és legyen az n pont közötti minimális távolság maximális O^d-ben, ahol $4 \leq n \leq 2d$. Ekkor vagy minden pont O^d csúcsa, vagy $n = 4$ esetében három pont egy kétdimenziós lap három csúcsa, a negyedik pedig a szemköztes lap középpontja.*

Ebből a tételből egy érdekes állítás következik, nevezetesen:

Ha a d-dimenziós szabályos keresztpolitóp négy kongruens gömböt tartalmaz, akkor összesen akár 2d velük kongruens gömb is belepakolható O^d-be.

Végezetül pontosan egy optimális konfiguráció létezik, ha $n = 2d+1$:

3. Tétel: *Legyen $d \geq 3$, és legyen az n pont közötti minimális távolság maximális O^d-ben, ahol $n = 2d+1$. Ekkor az egyik pont O^d középpontja, a többi pedig O^d csúcsa.*

3. fejezet

Lokális stabilitás

Ha $d = 3, 4$, akkor a $D_d = \{(x_1, \ldots, x_d) \in Z^d : x_1 + \ldots + x_d \equiv 0 \bmod 2\}$ rács a sejtett legsűrűbb elhelyezést adja egyenlő sugarú gömbökre. Mivel a D_d rács struktúrája nagyon jól illeszkedik O^d-hez, jó esély van arra, hogy D_d összehúzottjának O^d-be eső része legyen a középpontok optimális halmaza.

Definíció: *Egy pontelhelyezést rácsszerűnek hívunk O^d-ben, ha a pontok halmaza*

$$\left(\frac{1}{k-1}D_d + v_1\right) \cap O^d, \qquad k \geq 2,\ k \in Z.$$

Az itt fellépő minimális távolság $\frac{\sqrt{2}}{k-1}$, *s ha ezt a véges pontrendszert* $\frac{\frac{\sqrt{2}}{k-1}}{\frac{\sqrt{2}}{k-1}\sqrt{d}+2} = \frac{1}{\sqrt{d}+\sqrt{2}(k-1)}$ *-szeresre kicsinyítjük, akkor éppen a megfelelő rácsszerű gömbelhelyezés középpontjait kapjuk.*

A következőkben belátjuk, hogy a 3-, illetve a 4-dimenziós keresztpolitópban rácsszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil.

Definíció: *Az r sugarú gömbök egy P elhelyezése O^d-ben lokálisan stabil, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogyha bármely gömböt legfeljebb ε-nal elmozgatva a kapott gömbök is elhelyezést alkotnak O^d-ben, akkor P minden eleme a helyén maradt.*

Tétel: *A 3-dimenziós oktaéderben rácsszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil.*

Tétel: *A 4-dimenziós keresztpolitópban rácsszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil.*

4. fejezet

A d-dimenziós keresztpolitóp fedése

Ebben a fejezetben az oktaéder illetve a keresztpolitóp fedésével foglalkozunk. Meghatározzuk azon kongruens gömbök minimális sugarát, melyek lefedik az oktaédert. Jelöléseink a korábban bevezetettek, azaz O jelöli az oktaédert, O^d pedig a d-dimenziós keresztpolitópot, melynek csúcsai $\pm v_1, \ldots \pm v_d$. Ezen kívül jelöljük R_n^d-vel a d-dimenziós keresztpolitóp fedéséhez szükséges n darab kongruens gömb sugarának minimumát.

1. Két gömb esete

Tétel:
$R_2^3 = \frac{\sqrt{11}}{4}$, *a két gömb középpontja pedig például* $\pm(1/4, 1/4, 1/4)$.

$R_2^d = \sqrt{1-\frac{1}{d}}$, $d \geq 4$ *estén, a két gömb középpontja pedig O^d két szemköztes hiperlapjának súlypontja.*

2. d darab gömb esete

Tétel:

$$R_d^d = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{3}, & \text{ha } d = 3 \\ \sqrt{\dfrac{11}{20}}, & \text{ha } d \geq 4. \end{cases}$$

1. Állítás: *A* $(1/3, -1/3, 0)$*;* $(0, 1/3, -1/3)$*;* $(-1/3, 0, 1/3)$ *középpontú,* $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$ *sugarú 3 gömb lefedi* O^3*-t, tehát* $R_3^3 \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Állítás: *3 darab* $\frac{\sqrt{5}}{3}$*-nál kisebb sugarú gömb nem fedheti* O*-t.*

Az 1. és a 2. Állítás bizonyítja a kimondott Tételt $d = 3$ esetben.

3. Állítás: $d \geq 4$ *darab* $\sqrt{\dfrac{11}{20}}$ *sugarú gömb lefedi* O^d*-t, azaz* $R_d^d \leq \sqrt{\dfrac{11}{20}}$.

4. Állítás: *Ha az* R *sugarú* $B_1, \ldots, B_d$ *gömbök lefedik* O^d *éleit, akkor* $R \geq \sqrt{\frac{11}{20}}$.

A 3. és 4. Állítás bizonyítja a kimondott Tételt $d \geq 4$ esetben.

3. 2d darab gömb esete

Tétel: $R_d^{2d} = 1/2$.

5. fejezet

A d-dimenziós gömb fedése $d+3$ gömbbel

S^d fedését vizsgáljuk n darab egyenlő sugarú szférikus gömbbel, ha $d \geq 3$. (A $d = 2$ esetet lásd Fejes Tóth G. [**7**].) Nagyon kevés esetben ismert az S^d-t fedő egybevágó szférikus gömbök minimális sugara.

Sejtés: *Legyen* $d \geq 2$*,* n *az* S^d*-t fedő egybevágó minimális sugarú szférikus gömbök száma és* $d + 2 \leq n \leq 2d + 2$*. Ekkor a gömbök középpontjainak konvex burka* E^{d+1}*-ben előáll egységgömbbe írható, páronként ortogonális* $\lceil \frac{d+1}{n-d-1} \rceil$ *és* $\lfloor \frac{d+1}{n-d-1} \rfloor$ *dimenziós szabályos szimplexek konvex burkaként, ahol a szimplexek száma* $n - d - 1$*.*

Megjegyezzük, hogy a sejtés teljesül $d = 2$ esetén, (lásd Fejes Tóth G. [**7**]). Ebben a fejezetben az $n = d + 3$ esetet igazoljuk.

Tétel: *Ha $d+3$ minimális sugarú kongruens szférikus gömb lefedi S^d-t, akkor középpontjaik konvex burka E^{d+1}-ben megegyezik az egységgömb köré írható $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ és $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil$-dimenziós szimplexek konvex burkával.*

A tétel bizonyítása az alábbi lemmán alapszik.

Lemma: *A $\varphi < \frac{\pi}{2}$ sugarú szférikus gömbök pontosan akkor fedik le S^d-t, ha a gömbök középpontjainak konvex burka tartalmazza az origo középpontú $\cos\varphi$ sugarú gömböt E^{d+1}-ben.*

6. fejezet

A d-dimenziós gömb fedésének sűrűsége

C.A. Rogers [**12**] látta be egy nagyon bonyolult bizonyítás segítségével, hogy az S^d-t lefedő φ sugarú szférikus gömbök sűrűsége legfeljebb

$$(1 + c \cdot \tfrac{\ln\ln d}{\ln d}) \cdot d \cdot \left(\ln d + \ln \frac{1}{\sin\varphi}\right),$$

ahol c egy abszolút konstans.

Ebben a fejezetben egyszerűbb bizonyítást adunk egy javított sűrűségbecslésre.

Tétel: *Ha $\varphi < \frac{\pi}{2}$, akkor létezik S^d-nek φ sugarú gömbökkel történő fedése, melynek sűrűsége legfeljebb*

$$(1 + c \cdot \tfrac{\ln\ln d}{\ln d}) \cdot d \ln d,$$

ahol c egy abszolút konstans.

Megjegyzés: ifj. Böröczky K. és Wintsche G. [**4**], belátja, hogy S^d-nek létezik olyan fedése tetszőleges sugarú egyforma gömbi gömbökkel, ahol bármely pont legfeljebb $400 \cdot d \ln d$-szer van lefedve.

Ha φ kicsi, akkor a φ sugarú szférikus gömbökkel való optimális fedés sűrűsége közel van az Euklideszi tér egyenlő sugarú gömbökkel való fedésének minimális sűrűségéhez. Ez utóbbi sűrűségre Coxeter-Few-Rogers [**5**] adott $c \cdot d$ alakú alsó becslést, ahol $c > 0$ abszolút konstans. Tehát ha φ kicsi, akkor a φ sugarú szférikus gömbökkel való fedés sűrűsége legalább $\frac{c}{2} \cdot d$, azaz a Tétel jelentősen nem javítható.

Hivatkozások

[1] **Bezdek, K.**: Densest packing of small number of congruent spheres in polyhedra. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 30 (1987), 177–194.

[2] **Bezdek, A.; Bezdek, K. and R. Connelly**: Finite and Unifom Stability of Sphere Packings. *Discrete Comput. Geom.* 20 (1998), 111–130.

[3] **Böröczky, K. Jr.; Wintsche, G.**: Sphere packings in the regular crosspolytope. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 43 (2000), 151–157 (2001).

[4] **Böröczky, K. Jr.; Wintsche, G.**: Coverings by spherical balls. *Disc. Comp. Geom. The Goodman–Pollack Festschrift, Springer* (közlésre elfogadva).

[5] **Coxeter, H.S.M.; Few, L.; Rogers, C.A.**: Covering space with equal spheres. *Mathematika* 6 (1959), 147–157.

[6] **Dalla, L.; Larmann, D.G.; Mani-Levitska, P.; Zong Ch.**: The blocking numbers of convex bodies. *Disc. Comp. Geom.* 24 (2000), 267–277.

[7] **Fejes Tóth, G.**: Packing and Covering. *Handbook of Discrete and Combinatorial Geometry, CRC Press New York,* 19–41.

[8] **Fodor, F.**: The densest packing of 19 congruent circles in a circle. *Geom. Dedicata,* 74 (1999), 139–145.

[9] **Golser, G.**: Dichteste Kugelpackungen im Oktaeder. *Studia Sci. Math. Hungar.* 12 (1977), no. 3-4, 337–343.

[10] **Melissen, J.B.M.**: Packing and covering with circles. *PhD dissertation, University of Utrecht,* 1997.

[11] **Pach, J.; Pankaj, K.A.**: Combinatorial Geometry. *John Wiley & Sons, Inc.,* 1995. 65p.

[12] **Rogers, C.A.**: Covering a sphere with spheres. *Mathematika* 10 (1963), 157–164.

[13] **Ryshkov, S. S.; Chepanov, S. A.; Yakovlev, N. N.**: On the disjointness of point systems. *(Russian) Translated in Proc. Steklov Inst. Math.* 1992, no. 4, 163–172.

[14] **Schaer, J.**: The densest packing of 9 circles in a square. *Canad. Math. Bull.* 8 (1965) 273–277.

[15] **Schaer, J.**: The densest packing of five spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 271–274.

[16] **Schaer, J.**: The densest packing of six spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 275–280.

[17] **Schaer, J.**: On the densest packing of spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 265–270.

[18] **Schaer, J.**: The densest packing of ten congruent spheres in a cube. *Intuitive geometry (Szeged, 1991), 403–424, Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* 63, North-Holland, Amsterdam, 1994.