Nemlineáris PDE-k kvázi-Newton típusú iteratív megoldása nemegyenletes monotonitási feltételek mellett

PhD Disszertáció – Tézisfüzet

Borsos Benjámin

Analízis tanszék

Matematika Intézet

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Karátson János

2021

1 Bevezetés

Nemlineáris elliptikus feladatok számos esetben előfordulnak stacionárius állapotot leíró modellek esetén, lásd, pl. [12, 14, 19, 24, 29]. Említhetjük például a rugalmasságtant, glaciológiát, áramlási feladatokat, és más fizikai és egyéb problémákat, lásd, pl. [6, 15, 31, 33]. Ahogy ezek a munkák is muttatják. Elterjedt módszer ezen problémák megoldásához valamely végeselemes diszkretizáció (FEM) használata, majd valamilyen Newton-típusú módszer alkalmazása, lásd még [17, 24, 37].

A kvázi-Newton módszerek konstruálásához egy általános megközelítést ad meg [27], amelyben a közelítő Jacobi-operátorokat spektrális ekvivalenciával definiáljuk, így ezek változó prekondicionálóként is tekinthetőek. Ebből kifolyólag a változó prekondicionálás átmenetet biztosít a fix prekondicionálás és a Newton-módszer között. Fix prekondicionálással olyan egyszerű iteráció definiálható, mely gyakran előnyös globális konvergenciasebességet mutat megfelelő prekondicionálással támogatva, és ezekben az esetekben előnybe kerülhet a Newton-módszerrel szemben, mivel utóbbi esetében sok munka lehet a Jacobi-mátrixok előállítása (lásd, pl. [3, 4], a korai munkákat ebben a kutatási irányban, továbbá [34], és az ottani hivatkozásokat a későbbi alkalmazásokért). Ugyanakkor ez az egyszerű iteráció nem feltétlenül megfelelő erős nemlinearitások esetén. Ekkor a Newton-módszer kerülhet előnybe, mely bonyolultabb és esetében egy iterációs lépés drágább, de esetlegesen kedvezőbb konvergenciát nyújt az erős nemlinearitások esetén. A kvázi-Newton módszerek, melyek változó prekondicionálóként is felfoghatók, képesek lehetnek kombinálni e módszerek előnyeit. Alternatívaként a külső iteráció esetén használható Newton-módszer, a prekondicionáló pedig kihasználható a belső iterációban.

A Newton-típusú módszer lineáris segédegyenleteket ad, melyek megoldhatók direkt vagy közelítő módszerekkel, a probléma méretétől függően. Egy nagy mértékben elterjedt megközelítés konjugált gradiens-módszer (CGM) használata a belső iterációkban. Az ilyen külső-belső iterációk konstrukciói megtalálhatók [16, 36] forrásokban, az egyenletesen elliptikus feladatokhoz kapcsolódó elméletükhöz lásd [2, 37], lásd még [32, 40] a frissebb alkalmazásokért. A prekondicionált CGM könnyen formalizálható a korábban említett prekondicionálókkal.

Jelen disszertáció célja a korábbi eredmények kiterjesztése, melyek kihasználják az egyenletes ellipticitást. Utóbbi ugyanis számos valós feladatra nem áll fenn, például nem-newtoni áramlások, nemlineáris optika, minimálfelület feladatok, glaciológiai modellek, stb.

Mivel a vizsgálódásunk tárgyát képező peremértékfeladatok természetes alapterei bizonyos Szoboljev-terek, a funkcionálanalízis eszközeit használjuk az elméleti munkához. Ha adott egy nemlineáris peremértékfeladat, azt általában egy $F(u) = 0$ alakú operátoregyenletnek feleltethetjük meg, ahol F egy Hilbert- vagy Banach-teret képez a duálisába. Az eredeti nemlinearitástól függően F lehet olyan, ami esetén teljesülnek a megfelelő alsó, illetve felső ellipticitási feltételek, vagy lehet olyan, amely esetében ezek nem teljesülnek.

A disszertáció felépítése a következő.

A 2. fejezetben az itt bemutatott munka előzményei olvashatók, melyek bemutatják a kvázi-Newton-módszer konvergenciáját egyenletesen elliptikus (alsó és felső) határok esetén Hilbert-térben értelmezett feladatokra, mind a lokális, mind a globális konvergenciát tekintve. Továbbá rövid betekintést nyerünk a feltételekhez kapcsolódó peremérték-feladatokba és a kvázi-Newton módszerek szerepébe más Newton-típusú módszerek között. Ezen fejezet alapja [27].

A 3. és 4. fejezetek a kvázi-Newton módszerek erősebb nemlinearitást tartalmazó feladatokra való alkalmazhatóságát tárgyalják.

A 3. fejezetben az ellipticitási feltétel felső határát enyhítjük, és az így megkapható konvergenciaeredményeket nyerjük ki lokális és globális konvergenciára. A Lipschitz-feltételt is enyhítjük az általánosítás segítségével. Egy példafeladatot tárgyalunk egy, a nemlineáris optikából vett egyenlettel, numerikus eredményeket is bemutatunk.

A 4. fejezetben Banach-térben tárgyaljuk a konvergenciát enyhített alsó és felső ellipticitási határok mellett. Egy modellklasszifikáció olvasható, számos példát mutatunk. Az egyenletek valós modelleken alapulnak, amik kielégítik a feltételeinket, továbbá változó prekondicionálók is találhatók a fejezetben.

A 5. fejezet a külső-belső iterációk eredményeit mutatja inegzakt Newton-módszer esetében. Az eredményeket egy nemlineáris áramlási modell segítségével illusztráljuk.

A 6. fejezet egy egydimenziós negyedrendű műszaki modellt tárgyal, részletes elméleti és gyakorlati összehasonlítást adva három módszer között (egyszerű iteráció, kvázi-Newton-módszer, Newton-módszer).

A 7. egy háromdimenziós Stefan-Boltzmann sugárzást tartalmazó peremértékfeladatot mutat be. Egy nemnegativitási eredmény olvasható, majd végeselemes approximáció után a kvázi-Newton-módszer alkalmazhatóságát mutatjuk be.

A 3., 4., 5., 6. és 7. fejezetek rendre a szerző [7], [8], [9], [10] és [11] cikkein alapulnak. A numerikus vizsgálatokat Matlab-ban végeztük.

A 8. fejezet egy rövid bemutatót ad fejlesztők számára az eredményekről. A 9. fejezetben egy rövid általános összefoglaló olvasható.

2 Elméleti háttér

Ez a fejezet bemutat néhány, jelen munkát megelőző eredményt (lásd [27]), részint az olvashatóság elősegítése, részint a későbbi hivatkozhatóság végett.

Legyen H egy valós Hilbert-tér a $\langle .,. \rangle$ belső szorzattal, és a $\| \cdot \|$ normával. A következő energia-skalárszorzat az pozitív definit önadjungált A operátor esetén értelmezett:

$$\langle u, v \rangle_A := \langle Au, v \rangle \qquad (\forall u,\ v \in H), \tag{2.1}$$

a megfelelő norma pedig $\| \cdot \|_A$. Az $F : H \to H$ operátor esetén a következő operátoregyenletet vizsgáljuk:

$$F(u) = 0. \tag{2.2}$$

2.1 Alapkoncepció és motiváció

Ezen alfejezetben bemutatjuk a kvázi-Newton-módszer alapkoncepcióját, és helyét más módszerekhez képest. Lokális konvergenciát biztosító algoritmusokat mutatunk be, de a konceptuális ábrázolás fennáll általánosabb követelmények esetén is.

A nemlineáris peremértékfeladatok gyakran írhatók (2.2) egyenletnek megfelelően. Amennyiben ennek létezik egyértelmű u^* megoldása, megpróbálhatjuk a $(u_n) \subset H$ sorozattal közelíteni azt a következő algoritmus segítségével:

$$u_{n+1} := u_n + p_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\text{ahol :} \qquad B_n p_n = -F(u_n),$$

$B_n: H \to H$ lineáris segédoperátor és $(p_n) \subset H$ sorozat. A B_n különböző formalizációi esetén különböző módszereket kapunk.

A Szoboljev-gradiens-módszer esetén $B_n = \text{const.} \cdot I$, így az algoritmus egyszerűen $u_{n+1} = u_n - \text{const.} \cdot F(u_n)$, mely gyors számítást biztosít egy adott n esetén, ugyanakkor nagy számú iteráció kiszámítása válhat szükségessé.

Ezzel szemben a Newton-módszer a $B_n = F'(u_n)$ kifejezést használja, melyet bonyolult kiszámítani, de másodrendű konvergenciát biztosít.

A kvázi-Newton módszercsalád ötlete, hogy a fenti kettő közötti B_n lineáris segédoperátort válasszunk, szofisztikált módon, kombinálva e módszerek előnyeit. Ez a szofisztikált mód esetünkben megegyezik a prekondicionálás kettős ötletével:

(i) $F'(u_n)$ szimbolikus egyszerűsítése intuíció segítségével, mellyel jelentősen egyszerűbb operátort nyerünk, továbbá

(ii) spektrális ekvivalencia felállítása B_n és $F'(u_n)$ között, mely biztosítja a kedvező konvergenciát.

A változó prekondicionálás kifejezés azért használható, mert a B_n lineáris segédoperátor lehet különböző az egyes n indexek esetén, egyébként konstans prekondicionálásnak hívhatnánk.

A következő két alfejezetben bemutatjuk a jelen munkát megelőző eredményeket az irodalomban.

2.2 Lineáris konvergencia változó prekondicionálással

Tekintsük az alábbi tételt, mely lineáris konvergenciát biztosít [27]:

2.5 Feltételek *Legyen H egy valós Hilbert-tér, és $F: H \to H$ egy nemlineáris operátor. Legyen F Gâteaux-deriválható, és a derivált teljesítse az alábbi feltételeket:*

(i) Bármely $u \in H$ esetén az $F'(u)$ operátor önadjungált.

(ii) Léteznek olyan $\Lambda \geq \lambda > 0$ konstansok, hogy:

$$\lambda \|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq \Lambda\, \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H). \tag{2.3}$$

(iii) Létezik $L > 0$ konstans, hogy:

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq L\|u - v\| \qquad (u,\ v \in H).0 \tag{2.4}$$

Jelölje $u^* \in H$ a $F(u) = 0$ operátoregyenlet egyértelmű megoldását. Legyenek $M \geq m > 0$ adott konstansok, és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén válasszunk $B_n : H \to H$ korlátos lineáris önadjungált operátorokat, hogy:

$$m\langle B_n h, h\rangle \leq \langle F'(u_n)h, h\rangle \leq M\langle B_n h, h\rangle \qquad (\forall h \in H). \tag{2.5}$$

2.6 Algoritmus *A 2.5 feltételekkel, egy $u_0 \in H$ elemből indulva, definiálunk egy sorozatot a következő formula segítségével:*

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} B_n^{-1} F(u_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{2.6}$$

2.7 Tétel *A 2.5 feltételekkel a 2.6 algoritmus által generált sorozat lokálisan konvergál u^*-hoz, nevezetesen, létezik egy U környezete u^*-nak úgy, hogy egy adott $u_0 \in U$ esetén létezik a $C > 0$ konstans, hogy:*

$$\|u_n - u^*\| \le C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.7}$$

Ebben a *(ii)* feltételt az ellipticitási feltételnek hívjuk. Ez a feltétel túlságosan erős számos alkalmazás esetében (lásd a részleteket később, pl. 3.2. alfejezet), a fő célunk, hogy megmutassuk, hogy ezek az eredmények megkaphatók általánosabb feltételek mellett is.

A (2.5)-ben látható egyenlőtlenségláncot hívjuk a $F'(u)$ és B operátorok spektrális ekvivalenciájának, míg m és M a spektrális ekvivalencia konstansai, vagy spektrálhatárok.

Ha elhagyjuk a *(iii)* Lipschitz-feltételt, de fix spektrálhatárok érhetők el fix prekondicionálókkal, azaz $B_n \equiv B$ esetén, akkor globális konvergencia vezethető le (2.7) megtartásával (lásd [20]). Ugyanakkor, ha más segédoperátort használunk minden egyes n esetén (azaz változó prekondicionálást használunk), lokális lineáris konvergenciát kapunk Lipschitz-folytonos operátorok esetén. Ez a változó prekondicionálás alapvető fontosságú egy hasznos algoritmus esetén, és a konvergencia ismét globálissá tehető csillapítással, mint azt alább láthatjuk.

Bevezetjük a következő energianormákat:

$$\|h\|_u := \langle F'(u)^{-1}h, h \rangle^{1/2} \quad (\text{ha adott } u \in H), \qquad \|\cdot\|_* := \|\cdot\|_{u^*}, \qquad \|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{u_n} \tag{2.8}$$

(ha adott $n \in \mathbb{N}$).

Meg lehet mutatni, hogy fix u esetén a $\|\cdot\|_u$ és $\|\cdot\|$ normák ekvivalensek, nevezetesen:

$$\lambda^{1/2}\|h\|_u \le \|h\| \le \Lambda^{1/2}\|h\|_u \qquad (\forall h \in H). \tag{2.9}$$

2.3 Csillapított kvázi-Newton-módszer, mint változó prekondicionálás

Emlékeztetünk az alábbi normadefiníciókra (lásd (2.8)), ahol (u_n) egy iterációs sorozat és u^* a $F(u) = 0$ operátoregyenlet megoldása:

$$\|h\|_n = \langle F'(u_n)^{-1}h, h \rangle^{1/2} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \|h\|_* = \langle F'(u^*)^{-1}h, h \rangle^{1/2}. \tag{2.10}$$

A következő tétel általánosítja a 2.7 tételt. Csillapítás és változó prekondicionálás használatával legfeljebb másodrendű konvergenciát biztosít.

2.14 Feltételek *Legyen H egy valós Hilbert-tér és $F : H \to H$ egy nemlineáris operátor. Legyen F Gâteaux-deriválható és ez a derivált teljesítse az 2.5 feltételek (i)-(iii) pontjait.*

Jelölje u^* a $F(u) = 0$ operátoregyenlet egyértelmű megoldását.

Továbbá fennállnak a következő feltételek:

(iv) *Minden egyes $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $M_n \geq m_n > 0$ konstansok és válasszunk egy korlátos lineáris önadjungált $B_n : H \to H$ operátort, amely esetén fennáll*

$$m_n\langle B_n h, h\rangle \leq \langle F'(u_n)h, h\rangle \leq M_n\langle B_n h, h\rangle \qquad (n \in \mathbb{N},\ h \in H),$$

továbbá, használva a $\mu(u_n) = L\lambda^{-2}\|F(u_n)\|$ jelölést, létezzenek a $K > 1$ és $\varepsilon > 0$ konstansok, hogy $M_n/m_n \leq 1 + 2/(\varepsilon + K\mu(u_n))$.

(v) *Definiáljuk a következőt:*

$$\tau_n = \min\left\{1, \frac{1 - Q_n}{2\rho_n}\right\}, \tag{2.11}$$

ahol $Q_n = \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n}(1+\mu(u_n))$, $\rho_n = 2LM_n^2\lambda^{-3/2}(M_n+m_n)^{-2}\|F(u_n)\|_n(1+\mu(u_n))^{1/2}$, $\mu(u_n)$ pedig a (iv) feltétel szerinti, és $\|\,.\,\|_n$ a (2.10) szerint kerül definiálásra. (A τ_n ezen értéke optimális kontraktivitást biztosít az n-edik lépésben a $\|\,.\,\|_*$ normában.)

2.15 Algoritmus *A 2.14 feltételekkel, tetszőleges $u_0 \in H$ esetén legyen (u_n) a következő sorozattal definiált*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2\tau_n}{M_n + m_n} B_n^{-1}F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.12}$$

2.16 Tétel *A 2.14 feltételekkel a 2.15 algoritmus által generált sorozat globálisan lineárisan konvergál u^*-hoz, nevezetesen,*

$$\|u_n - u^*\| \leq \lambda^{-1}\|F(u_n)\| \to 0; \tag{2.13}$$

nevezetesen,

$$\limsup \frac{\|F(u_{n+1})\|_*}{\|F(u_n)\|_*} \leq \limsup \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n} < 1\,. \tag{2.14}$$

Továbbá, ha feltesszük még, hogy $M_n/m_n \leq 1 + c_1\|F(u_n)\|^\gamma$ $(n \in \mathbb{N})$ valamilyen $c_1 > 0$ és $0 < \gamma \leq 1$ konstansokra, akkor

$$\|F(u_{n+1})\|_* \leq d_1\|F(u_n)\|_*^{1+\gamma} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.15}$$

valamely $d_1 > 0$ konstans esetén.

Hála a $\|\,.\,\|$ és $\|\,.\,\|_*$ normák ekvivalenciájának, a (2.14) és (2.15) szerinti konvergenciarendek az eredeti normában is kifejezhetők.

2.17 Következmény (Konvergenciarend az eredeti normában)

(a) *Ha* $\limsup M_n/m_n = K > 1$, *akkor*

$$\|u_n - u^*\| \leq \lambda^{-1}\|F(u_n)\| \leq \text{const.} \cdot \rho^n$$

ahol $\rho = (K-1)/(K+1)$.

(b) *Amennyiben $M_n/m_n \leq 1 + c_1\|F(u_n)\|^\gamma$ (ahol $c_1 > 0$, $0 < \gamma \leq 1$ konstansok), fennáll*

$$\|u_n - u^*\| \leq \lambda^{-1}\|F(u_n)\| \leq \text{const.} \cdot \rho^{(1+\gamma)^n}$$

valamely $0 < \rho < 1$ konstans esetén.

3 Kvázi-Newton változó prekondicionálás erős felső növekedési feltétel esetén Hilbert-térben

Jelen fejezet célja, hogy kiterjesszük az előző fejezet változó prekondicionáló megközelítését olyan feladatokra, melyekben erős nemlinearitás található, melyre már nem teljesül az egyenletes felső határ az ellipticitási feltételben. Ez a feltétel érvényes hatványrendű növekedési feltételt teljesítő nemlinearitásra, mely megjelenik számos fizikai modellben. Ezen fejezet eredményei [7] cikken alapulnak.

3.1 Változó prekondicionálás erősen nemlineáris operátoregyenletekre

Legyen H egy valós Hilbert-tér a $\langle .,. \rangle$ belső szorzattal és az ehhez tartozó $\| \cdot \|$ normával. A következő alakú operátoregyenletekkel foglalkozunk:

$$F(u) = 0,$$

ahol $F : H \to H$ adott nemlineáris operátor. Kiterjesztjük a 2.7 tételt úgy, hogy olyan nemlinearitásokra is érvényes eredményt kapjunk, melyek esetében nem áll fenn az egyenletes ellipticitási feltétel.

A megengedett erős nemlinearitásokba beletartoznak olyan operátorok is, amelyeknél a felső spektrálhatár az ellipticitási feltételben és a Lipschitz-összefüggés is csak a konstanst valamely olyan függvénnyel helyettesítve írható le, mely argumentumainak végtelenhez tartásával maga is végtelenhez tart. Ez a 2. fejezeten alapul, de a bizonyítást lényegileg újra kell gondolni, hogy követni és kezelni tudjuk a nemegyenletes nemlinearitás hatásait.

3.1 Feltételek *Legyen H egy valós Hilbert-tér, $F : H \to H$ egy nemlineáris operátor. Legyen F Gâteaux-deriválható, és a derivált teljesítse az alábbi feltételeket:*

(i) Bármely $u \in H$ esetén a $F'(u)$ operátor önadjungált.

(ii) Létezik egy $\lambda > 0$ kostans és egy folytonos növekvő $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, hogy a következő feltétel fennáll:

$$\lambda \|h\|^2 \le \langle F'(u)h, h\rangle \le \Lambda(\|u\|)\, \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H). \tag{3.1}$$

(iii) Létezik egy folytonos növekvő $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre fennáll:

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le L(\max\{\|u\|,\, \|v\|\})\, \|u - v\| \qquad (\forall u,\, h \in H). \tag{3.2}$$

Jelölje $u^* \in H$ a $F(u) = 0$ operátoregyenlet egyértelmű megoldását. Legyenek $M \ge m > 0$ adott konstansok, és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén válasszunk egy korlátos lineáris önadjungált $B_n : H \to H$ operátort, melyre:

$$m\langle B_n h, h\rangle \le \langle F'(u_n)h, h\rangle \le M\langle B_n h, h\rangle \qquad (\forall h \in H). \tag{3.3}$$

A következő algoritmus megegyezik a 2.6 algoritmussal, de megismételjük az olvashatóság érdekében:

3.2 Algoritmus *A 3.1 feltételekkel, az $u_0 \in H$ elemből indulva definiálunk egy sorozatot a következő formula segítségével:*

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} B_n^{-1} F(u_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.4}$$

3.3 Tétel *A 3.1 feltételekkel a 3.2 algoritmus szerint definiált sorozat lokálisan lineárisan konvergált az u^* megoldáshoz, nevezetesen, létezik egy U környezete az u^* elemnek, és adott $u_0 \in U$ esetén létezik $C > 0$, hogy:*

$$\|u_n - u^*\| \le C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.5}$$

3.2 Alkalmazás hatványrendű nemlineáris feladatokra

Ebben a fejezetben alkalmazzuk a megkapott iteratív módszert egy erősen nemlineáris, hatványrendű növekedési feltételt teljesítő elliptikus feladat végeselemes diszkretizáltjára. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ egy korlátos tartomány, legyenek $p \ge 3$ és $k_1, k_2 > 0$ adott konstansok, $g \in L^2(\Omega)$ egy adott függvény, és tekintsük a következő peremérték-feladatot.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mathrm{div}\big((k_1 + k_2 |\nabla u|^{p-2})\ \nabla u\big) & = & g, \\ u_{|\partial\Omega} & = & 0, \end{array} \right. \tag{3.6}$$

A (3.6) feladatnak létezik egyértelmű gyenge megoldása a $W_0^{1,p}(\Omega)$ Szoboljev-térben, lásd, pl., [41].

Alkalmazzuk a végeselem-módszert (FEM), hogy diszkretizáljuk a feladatot. Legyen V_h egy adott végeselemes altér, melyben bizonyos folytonos, szakaszonként polinomiális függvények találhatók, ekkor a következő kifejezést teljesítő $u \in V_h$ elemet keressük:

$$\int_\Omega (k_1 + k_2 |\nabla u|^{p-2}) \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega g v \qquad (\forall v \in V_h). \tag{3.7}$$

Célunk, hogy definiáljuk a megfelelő iteratív módszert erre a feladatra, és bizonyítsuk ennek konvergenciáját.

Az operátor gyenge alakja a következőképp írható fel:

$$\langle F(u), v \rangle = \int_\Omega f(\nabla u) \cdot \nabla v - \int_\Omega g v, \tag{3.8}$$

az $F'(u)$ Gâteaux-derivált a következőképp formalizálható:

$$\langle F'(u) h, v \rangle = \int_\Omega \partial_\eta f(\nabla u) \nabla h \cdot \nabla v, \tag{3.9}$$

A $B_n : V_h \to V_h$ segédoperátorokat az alábbi gyenge alak definiálja: adott $u_n \in V_h$ esetén az iteráció során legyen:

$$\langle B_n h, v\rangle \equiv \int_\Omega \left(k_1 + k_2|\nabla u_n|^{p-2}\right) \nabla h \cdot \nabla v \qquad (\forall h, v \in V_h), \tag{3.10}$$

és definiáljuk a következő iterációt:

$$\begin{cases} \text{megoldjuk a} \quad B_n z_n = F(u_n) \quad \text{egyenletet,} \\ \text{és} \quad u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} z_n \,. \end{cases} \tag{3.11}$$

3.12 Tétel *A (3.11) szerint definiált iteráció lokálisan konvergál a következő becslés szerint:*

$$\|u_n - u^*\|_{H_0^1} \leq C\Big(1 - \frac{2}{p}\Big)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.12}$$

3.3 Numerikus vizsgálatok

Tekintsük a következő peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big((\chi_1 + \chi_2|\nabla u|^2)\ \nabla u\big) &= g, \\ u_{|\partial\Omega} &= 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

ahol $\chi_1, \chi_2 > 0$ adott konstansok. Ilyen nemlineáris operátor található, pl., elektroreológiai folyadékmodellekben, lásd [13]. Vizsgálatunkat a $\Omega := [0,1]^2$ egységnégyzeten végezzük szakaszonként lineáris végeselemekkel. Az elméleti konvergenciatényező 1/2, függetlenül a χ_1, χ_2 konstansoktól (szuszceptibilitási együtthatók).

Lefuttattuk az iterációt számos fizikai és hálóparaméter esetén. Az u_0 kezdőfüggvény a Poisson-egyenlet megoldása g jobboldallal. Mértük az iteráció során a következő relatív reziduális hibát

$$\varepsilon_n := \frac{\|F(u_n)\|_{H_0^1}}{\|F(u_0)\|_{H_0^1}}.$$

Megfigyeltük, hogy a tényleges konvergencia nagyon közel van a várt elméleti hibához. Továbbá mind az iterációk száma, mind a relatív reziduális hibák robosztus viselkedést mutatnak bármely paraméter változtatása esetén.

4 Kvázi-Newton változó prekondicionálás nemegyenletes monotonitási feltételek mellett Banach térben

A korábbi fejezetekkel ellentétben, ahol Hilbert-teret használtunk, itt Banach-térben bizonyítjuk az elméleti eredményeket, mert utóbbi egy természetesebb alaptér a kapcsolódó feladatok esetében. Ezúttal nemegyenletes alsó határt is megengedünk az ellipticitási feltételben az enyhített felső határ mellett. Ezen fejezet eredményeit [8] tartalmazza.

4.1 Absztrakt iterációk Banach-terekben

A fő elméleti eredményeket két külön alfejezetben mutatjuk be. Először egy egyszerűbb algoritmust használunk fix spektrálhatárokkal, csillapítás nélkül, mely a 3.3 tételt általánosítja. A fő kihívás, hogy az erős felső növekedésen felül a nemegyenletes alsó határ is megengedett az ellipticitási feltételben. Ezt az általánosítást számos valós modell motiválja. Ezután egy általános algoritmust tárgyalunk, mely a 2.7 tételt terjeszti ki.

Eredményeinkhez a 2-3. fejezetek bizonyításainak teljes átírása volt szükséges: amellett, hogy Banach-térben dolgozunk, figyelemmel kell kísérnünk rekurzív becslések sorát, hogy megkerüljük az egyenletes alsó határ használatát, mely fel volt téve a korábbi bizonyítások esetén.

4.1.1 Kvázi-Newton-módszer fix spektrálhatárokkal

Legyen X egy valós Banach tér és X' ennek duálisa. Egy $v \in X'$ hatását a $u \in X$ elemre a $\langle v, u \rangle$ formalizmussal jelöljük. A $\|\cdot\|$ normajelet fogjuk használni mind a X, mind pedig a X' tereken, ez nem okoz félreértést a szövegkörnyezetnek köszönhetően. A következő operátoregyenlettel foglalkozunk:

$$F(u) = 0 \tag{4.1}$$

ahol $F: \ X \to X'$ egy nemlineáris operátor.

Hogy a korábbi (2.8) szerinti normát egy, a mostani elmélethez jobban igazodó jelölésre cseréljük, a következő energianormákat fogjuk használni az X' térben:

$$\|v\|_u := \langle v,\, F'(u)^{-1} v\rangle^{1/2} \quad (\text{ha adott } u \in X), \quad \|\cdot\|_* := \|\cdot\|_{u^*}, \quad \|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{u_n} \tag{4.2}$$

(ha adott $n \in \mathbb{N}$).

4.2 Feltételek *Legyen X egy valós Banach-tér és $F : X \to X'$ egy nemlineáris operátor. Létezzen F operátornak bihemifolytonos Gâteaux-deriváltja, mely teljesíti a következő tulajdonságokat:*

(i) Bármely $u \in X$ esetén az $F'(u)$ operátor szimmetrikus.

(ii) Létezik $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ folytonos nemnövekvő függvény, melyre:

$$\int_0^{+\infty} \lambda(t)\, dt \ = \ +\infty \tag{4.3}$$

valamint

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq \lambda(\|u\|)\, \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in X). \tag{4.4}$$

(iii) Létezik egy folytonos nemcsökkenő $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre:

$$\|F'(u) - F'(h)\| \leq L(\max\{\|u\|,\, \|h\|\})\, \|u - h\| \qquad (\forall u,\, h \in X). \tag{4.5}$$

Jelölje $u^* \in X$ a (4.1) egyértelmű megoldását. Legyen $M \geq m > 0$ adott konstans, és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén válaszunk egy korlátos szimmetrikus lineáris $B_n : X \to X'$ operátort, melyre:

$$m\langle B_n h, h\rangle \leq \langle F'(u_n)h, h\rangle \leq M\langle B_n h, h\rangle \qquad (\forall h \in X). \tag{4.6}$$

4.4 Algoritmus *A 4.2 feltételekkel, kiindulva valamely $u_0 \in H$ elemből, a következő formulával nyerünk egy sorozatot:*

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} B_n^{-1} F(u_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{4.7}$$

4.5 Tétel *A 4.2 feltételekkel a 4.4 algoritmus által generált sorozat lokálisan lineárisan konvergál az u^* megoldáshoz, nevezetesen létezik egy U környezete az u^* elemnek, hogy adott $u_0 \in U$ esetén létezik egy $C > 0$ konstans, hogy:*

$$\|u_n - u^*\| \le C \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{4.8}$$

4.1.2 Csillapított kvázi-Newton-módszer változó spektrálhatárokkal

Ezen alfejezetben az előző eredményt kiterjesztjük egy csillapított esetre, mely globális konvergenciát biztosít, továbbá megengedjük a változó spektrálhatárokat, mellyel akár másodrendű konvergenciát is elérhetünk. Ez a 2.16. tétel kiterjesztése a vizsgált általánosabb helyzetre.

4.11 Feltételek *Legyen X valós Banach-tér és $F : X \to X'$ nemlineáris operátor. Létezzen F operátornak bihemifolytonos Gâteaux-deriváltja, mely teljesíti a 4.2 feltételek (i)–(iii) pontjait.*

Jelölje $u^* \in X$ az $F(u) = 0$ egyenlet egyértelmű megoldását.

Továbbá a következő feltételek állnak fenn:

(iv) *$M_n \ge m_n > 0$ konsansok és a szimmetrikus lineáris $B_n : X \to X'$ operátorok teljesítik, hogy:*

$$m_n \langle B_n h, h\rangle \le \langle F'(u_n)h, h\rangle \le M_n \langle B_n h, h\rangle \qquad (n \in \mathbb{N},\ h \in X); \tag{4.9}$$

továbbá léteznek olyan $K > 1$ és $\varepsilon > 0$ konstansok, hogy $M_n/m_n \le 1 + 2/(\varepsilon + KR^*(\|F(u_n)\|_*))$.

(v) *Definiáljuk a*

$$\tau_n := \min\left\{1, \frac{1-Q_n}{2\rho_n}\right\}, \tag{4.10}$$

kifejezést, ahol $Q_n := \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n}(1 + R^*(\|F(u_n)\|_*))$, $\rho_n := H^*(\|F(u_n)\|_*)$.

4.12 Algoritmus *A 4.11 feltételekkel, tetszőleges $u_0 \in X$ elemből indulva legyen $(u_n) \subset X$ sorozat a következő kifejezés által definiált:*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2\tau_n}{M_n + m_n} B_n^{-1} F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.11}$$

4.13 Tétel *A 4.11 feltételekkel és a 4.12 algoritmus definíciójával fennáll a következő konvergencia*

$$\|u_n - u^*\| \le C_0 \|F(u_n)\| \to 0 \tag{4.12}$$

valamely C_0 konstans és a (4.2) szerinti $*$-norma mellett:

$$\limsup \frac{\|F(u_{n+1})\|_*}{\|F(u_n)\|_*} \le \limsup \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n} < 1\,. \tag{4.13}$$

Továbbá, ha feltesszük még, hogy $M_n/m_n \le 1 + c_1\|F(u_n)\|^\gamma$ $(n \in \mathbb{N})$ valamilyen $c_1 > 0$ és $0 < \gamma \le 1$ konstansokkal, akkor:

$$\|F(u_{n+1})\|_* \le d_1\|F(u_n)\|_*^{1+\gamma} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.14}$$

valamilyen $d_1 > 0$ konstans mellett.

4.2 Alkalmazás elliptikus feladatokra

A (4.3)–(4.5) ellipticitási feltételek számos feladatot lefednek különböző területekről, mint nem-Newtoni áramlások Carreau-típusú modellel, reológia, nemlineáris optika, minimálfelület, vagy szubszonikus áramlási feladatok. Egy megfelelően megválasztott B_n változó prekondicionáló, mely teljesíti a spektrális ekvivalenciát, jelentősen lecsökkentheti az iteráció költségét. Minket ezen feladatok végeselemes megoldása érdekel, ezért az iterációkat a megfelelő $V_h \subset W^{1,p}(\Omega)$ végeselemes altérben konstruáljuk meg.

A disszertációban a feltételeinkbe tartozó feladatok klasszifikációja olvasható. A legtágabb osztályt a következő általános nemlinearitási modell írja le:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\, f(x, \nabla u) &= \omega, \\ u_{|\partial\Omega} &= g \end{cases} \tag{4.15}$$

alkalmas $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ nemlineáris vektormezővel (azaz $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és f C^1-beli) η szerint szimmetrikus Jacobi-mátrixokkal, melyek kielégítik a következő feltételeket:

$$c_1 \left(k_0 + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi|^2 \le \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\eta)\,\xi\cdot\xi \le \widetilde{c}_1 \left(k_0 + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi|^2, \tag{4.16}$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\eta_1) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\eta_2)\right\| \le d_1 \max_{\eta\in[\eta_1,\eta_2]} \left\{(k_0 + |\eta|^2)^{\frac{p-3}{2}}\right\} |\eta_1 - \eta_2| \tag{4.17}$$

$(\forall x \in \Omega,\ \ \xi, \eta, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n)$ megfelelő

$$1 < p < \infty, \quad \widetilde{c}_1 \ge c_1 > 0, \quad k_0 > 0$$

konstansokkal. Feltesszük, hogy $\omega \in L^{p'}(\Omega)$ és g-nek létezik $\widetilde{g} \in W^{1,p}(\Omega)$ beterjesztése.

A vegyes peremfeltételek esetét is tárgyaljuk. Továbbá egy útmutatót biztosítunk prekondicionálók felírására, mint pl. (3.10). Ezen felül számos valós példát mutatunk, alább csak illusztráljuk ezt a következő glaciológiai modellel:

$$-\mathrm{div}\Big(\frac{2}{T_0+\sqrt{T_0^2+|\nabla u|}}\ \nabla u\Big) = P,$$

lásd [25], ahol Ω a gleccser által elfoglalt tartomány, P pedig a hidrosztatikus nyomás.

4.3 Numerikus kísérletek

Négy modellen végeztünk numerikus vizsgálatot, nevezetesen a szubszonikus áramlás, köbös nemlinearitás, minimálfelület, és egy glaciológiai példa esetében. Azt tapasztaltuk, hogy három modell robosztus viselkedést mutat (vagyis az iterációk száma egyenletesen korlátos a h hálóparaméter változtatásával), a minimálfelület-feladat esetében pedig enyhe függés tapasztalható h-tól. Ez összhangban áll az elméleti becslésekkel.

Megemlítjük, hogy a kvázi-Newton-módszer jóval könnyebben programozható a Newton-módszernél.

A tesztek többsége esetén a teljes számítási idő a kvázi-Newton-módszer esetében kevesebb volt, mint a Newton-módszer esetében, azaz a lineáris rendszerek olcsóbb összeállítása kompenzálja a nagyobb számú iteráció szükségességét.

Mindent egybevetve, a numerikus tesztek megerősítik a módszer konvergenciáját és hatékonyságát, valamint jelzik tágabb alkalmazhatóságát egyes, nem teljes mértékben az elmélet hatókörébe tartozó modellek esetére.

5 Külső-belső iterációk: inegzakt Newton-módszer prekondicionált KG-vel támogatva

5.1 Bevezetés

Diszkretizált nemlineáris elliptikus feladatok megoldására a korábbi fejezetek kvázi-Newton módszerei mellett egy elterjedt megközelítés Newton-típusú iterációs megoldó alkalmazása úgy, hogy a belső iterációkban konjugált gradiens-módszert használunk.

Ezen fejezet, melynek alapja [9], bemutat egy inegzakt Newton-módszert, melyben a belső iteráció prekondicionált konjugált gradiens-módszer segítségével történik, nemegyenletesen elliptikus feladatokra, a [7, 8, 27] szerinti elmélet segítségével. A prekondicionálók spektrálisan ekvivalens operátorokon alapulnak. Emellett a numerikus kísérletek eredményeit mutatjuk be, melyekhez egy szubszonikus áramlási modellt használunk (lásd [5]).

5.2 Absztrakt külső-belső iteráció Banach-terekben

Az alábbi tétel konvergenciaeredményt mutat külső iterációra Banach-térben. A használt feltételek pontosan a 4. fejezetnek megfelelőek.

5.2 Algoritmus *Tetszőleges $u_0 \in X$ esetén legyen $(u_n) \subset X$ a következő kifejezéssel definiált sorozat:*

$$u_{n+1} = u_n + p_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.1}$$

ahol p_n teljesíti, hogy:

$$\|F'(u_n)\, p_n + F(u_n)\|_n \le \delta_n \|F(u_n)\|_n \qquad (0 < \delta_n \le \delta_0 < 1), \tag{5.2}$$

valamint

$$\exists c_\gamma > 0,\ 0 < \gamma \le 1, \text{ such that } \delta_n \le c_\gamma \|F(u_n)\|_n^\gamma. \tag{5.3}$$

5.3 Tétel *Tekintjük a 4.2 feltételeket a prekondicionálók nélkül. Akkor az 5.2 algoritmus által definiált sorozat lokálisan konvergál a u^* megoldáshoz $(1+\gamma)$ rendben, nevezetesen, létezik* *egy U környezete az u^* megoldásnak, hogy adott $u_0 \in U$ esetén léteznek $C > 0$ és $0 < Q < 1$ konstansok, hogy:*

$$\|u_n - u^*\| \leq CQ^{(1+\gamma)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A disszertációban a belső iterációt prekondicionált konjugált gradiens-módszerként specifikáltuk, és egy lineáris konvergenciaeredményt mutattunk a belső iterációra. A terjedelem miatt a tételt nem mutatjuk itt be.

5.3 Numerikus kísérletek

Futtattunk numerikus teszteket a szubszonikus áramlási példára, nevezetesen a külső és a belső iterációk számának meghatározására. Megfigyeltük továbbá, hogy ugyan az elmélet 8 iteráció alatt garantálja a meghatározott megállási kritérium teljesülését, jóval kevesebb iteráció is megfelelő lehet.

6 Robusztus iteratív megoldók nemlineáris Gao gerendaelemre

6.1 Bevezetés

A vékony gerendák deformációjának vizsgálata egy sokat vizsgált terület a rugalmasságtanban és a műszaki gyakorlatban, mivel ezek a rugalmas szerkezetek számos alkalommal fellépnek alkalmazásokban, lásd, például, [1, 26, 35, 38, 39].

Egy alátámasztott, hajlító igénybevételnek kitett gerenda jelentős deformációjának vizsgálata [21, 23] által került bemutatásra. A következő modell egy klasszikus Winkler-alátámasztáson nyugvó gerendát mutat be, ami egy széles körben elterjedt koncepció a műszaki gyakorlatban, lásd [18]. Itt a gerenda u lehajlását a következő egyenlet írja le:

$$EIu^{IV} - E\alpha(u')^2u'' + k_F u = f \qquad \text{in } J := [0, b] \tag{6.1}$$

a következő konstansokkal: $E > 0$ a rugalmassági modulusz, $I > 0$ a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, $\alpha = 3h(1-\nu^2)$, ahol h a tengelytől mért vastagság és $\nu > 0$ jelöli a Poisson-tényezőt, valamint $k_F > 0$ a megtámasztás rugalmassági együtthatója. Továbbá a gerendára merőleges megoszló terhelést q jelöli, és $f = (1 - \nu^2)q$.

Ezen fejezet eredményeinek alapja [10].

6.2 A gerendához kapcsolódó feladat numerikus megoldása

6.2.1 Gyenge alak és végeselemes megoldás

A gyenge alak a $H^2(J)$ Szoboljev-teret használja, valamint, a peremfeltételek figyelembevételével a kövekező térben dolgozunk:

$$H_0^2(J) = \{u \in H^2(J) : \; u(0) = u'(0) = u(b) = u'(b) = 0\},$$

amely esetében a következő skalárszorzatot és normát definiáljuk:

$$\langle u, v\rangle_{H_0^2} := \int_0^b u''v'', \qquad \|u\|^2_{H_0^2} = \int_0^b (u'')^2\,. \tag{6.2}$$

Ekkor a feladat $u_* \in H_0^2(J)$ gyenge megoldása teljesíti, hogy:

$$\int_0^b \big(u_*''v'' + \beta(u_*')^3 v' + ku_*v\big) = \int_0^b gv \qquad (\forall v \in H_0^2(J)). \tag{6.3}$$

6.2.2 A linearizált operátor tulajdonságai

A következő tulajdonságok állnak fenn. Nagy mértékben az általánosított Hölder-egyenlőtlenségekre, valamint Szoboljev beágyazásokra támaszkodtunk.

6.5 Propozíció *Létezik egy h-tól nem függő folytonos, növekvő $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre:*

$$\|h\|^2_{H_0^2} \le \langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^2} \le \Lambda(\|u\|_{H_0^2})\,\|h\|^2_{H_0^2} \qquad (\forall u, h \in V_h). \tag{6.4}$$

Nevezetesen $\Lambda(t) = 1 + kC_2^4 + 3\beta C_4^4 t^2$.

6.6 Propozíció *Létezik egy h-tól nem függő folytonos, növekvő $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, függvény, melyre:*

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le L(\max\{\|u\|_{H_0^2},\, \|v\|_{H_0^2}\})\,\|u - v\|_{H_0^2} \qquad (\forall u,\ h \in V_h). \tag{6.5}$$

Nevezetesen $L(t) = 6C_4^4\beta t$.

6.2.3 Végeselemek spline függvényekből

A következő szakaszonként köbös $f_1,\ f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényeket használjuk:

$$f_i(x) = \begin{cases} f_i^*(x) & x \in [0,\ 1] \\ (-1)^{(i-1)} f_i^*(-x) & x \in [-1,\ 0) \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2),$$

ahol $f_1^*(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $f_2^*(x) = x^3 - 2x^2 + x$. A bázisfüggvényeket a L_k affin transzformációval nyerjük ($k \in K$), ahol $L_k(f_i)$ értelmezési tartománya $[h(k-1), h(k+1)]$, ahol $i = 1,\ 2$.

6.2.4 Az iteratív megoldók: konstrukció, konvergencia és rácsfüggetlenség

6.12 Tétel *Az egyes iteratív módszerek esetén a következő konvergenciabecsléseket kapjuk:*

- *Egyszerű iteráció/gradiens-módszer:*

$$\frac{\|F(u_{n+1})\|_{H_0^2}}{\|F(u_n)\|_{H_0^2}} \le \frac{\Lambda_0 - \lambda}{\Lambda_0 + \lambda}, \quad \textit{ahol } \Lambda_0 = 1 + kC_2^4 + 3\beta C_4^4 \left(\|u_0\| + \frac{1}{\lambda}\|F(u_0)\|\right)^2.$$

- *Newton-módszer:*

$$\frac{\|F(u_{n+1})\|_{H_0^2}}{\|F(u_n)\|_{H_0^2}^2} \le \frac{L_0}{2\lambda^2}, \quad \textit{ahol } L_0 = 6C_4^4\beta\left(\|u_0\| + \frac{2}{\lambda}\|F(u_0)\|\right).$$

- *Kvázi-Newton/változó prekondicionálás*

$$\limsup \frac{\|F(u_{n+1})\|_*}{\|F(u_n)\|_*} \le \limsup \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n}.$$

Ezek fennállnak globálisan az egyszerű iterációra és lokálisan a Newton és a kvázi-Newton módszerekre.

Elérhető globális konvergencia a Newton és a kvázi-Newton módszerek esetében is csillapítás bevonásával (lásd 4.13 tétel), azonban ezt itt nem tárgyaljuk a terjedelem miatt.

6.3 Numerikus kísérletek, konklúzió

Számos numerikus kísérletet végeztünk ezen a numerikus modellen. Elmondható, hogy mindhárom vizsgált módszer robosztus, és a kvázi-Newton módszer képes helyettesíteni a Newton-módszert ezen nemlineáris modell esetén.

A Szoboljev-gradiens-módszer nagyon hatékony több ezer, illetve több elem esetén, egyébként a kvázi-Newton-módszer alkalmazandó. Ezek a ritka hálók is érdekesek lehetnek, mert [22] szerint 32 elem már megfelelő pontos számításokhoz.

7 Stefan-Boltzmann hősugárzási feladat 3D-ben

Ebben a fejezetben röviden bemutatunk egy stacionárius hővezetési feladatot nemlineáris Stefan-Boltzmann hősugárzási peremfeltételekkel $\mathbb{R}^3$ egy korlátos tartományán. Ez a fejezet [11] eredményeit mutatja be, melyet [30] motivált, a munka célja utóbbi cikk eredményeinek kétirányú kiterjesztése.

A feladat tárgya a következő elliptikus hővezetési feladat:

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla u\big) = f \quad \text{in } \Omega, \tag{7.1}$$

az alábbi vegyes Dirichlet-, illetve nemlineáris Stefan-Boltzmann hősugárzási peremfeltételekkel:

$$u_{|\partial\Omega} = \overline{u} \quad \text{on } \Gamma_D, \tag{7.2}$$

$$\alpha u + \nu^{\mathrm{T}} A\nabla u + \beta u^4 = g \quad \text{on } \Gamma_N, \tag{7.3}$$

Eredményeinket az általános anizotróp esetre kaptuk meg nemdiagonális teljes A mátrix esetére. A (7.1)–(7.3) feladat eredeti alakjában nem teszi lehetővé konvex potenciál felírását, mert a $u \mapsto u^4$ tag nem monoton. Tekintsük most a feladatot úgy, hogy ezt a tagot a $|u|^3 u$ taggal helyettesítjük. A [28] cikk módszerének átültetésével a nemnegativitási eredmény megkapható erre a feladatra, azaz az általános anizotróp esetben is működik [30] approximációs elmélete.

Továbbá homogenizálnunk kellett a peremérték-feladatot a $z := u - \bar{u}$ kifejezés segítségével, mert a korábban ismertetett tételek alkalmazása esetén követelmény, hogy a megoldás és a tesztfüggvény egyazon Banach-térből származzanak. Így a 4.13 tétel egy speciális esetét használhattuk, egy bizonyos segédoperátorral.

A numerikus kísérletek a [30] cikk mintafeladatán alapultak, de anizotróp hővezetési mátrixot használtunk, ill. megvizsgáltuk a kvázi-Newton módszereket. Az eredmények illusztrálták a módszerek robosztusságát, és a kvázi-Newton-módszer kedvezőbbnek bizonyult a Newton-módszernél a vizsgált paraméterkombinációk esetében.

8 Összefoglalás

Ebben a disszertációban megmutatjuk, hogy a kvázi-Newton módszerekre vonatkozó konvergenciaeredmények kiterjeszthetők jóval általánosabb esetre is, melyben enyhített ellipticitási és Lipschitz-feltételek szerepelnek, valamint Hilbert- helyett Banach-térben dolgozhatunk. Nevezetesen hasonló, kedvező eredmények kaphatók, mint a szigorú feltételek esetén.

Először a felső ellipticitási feltételt enyhítettük a Lipschitz-feltétellel együtt Hilbert-térben.

Ezt követően Banach-térben dolgoztunk, és az alsó határon enyhítettünk. A lokális és a globális konvergenciára vonatkozó eredmények is megmaradtak. Egy részletes klasszifikáció olvasható a modellekre vonatkozóan, melyek a használt feltételek hatókörébe esnek.

Ezeken felül külső-belső iterációkat vizsgáltunk Banach-térben prekondicionált konjugált gradiens-módszert használva a belső iterációk során csillapítás nélkül. Kedvező konvergenciaeredményeket kaptunk.

Megvizsgáltunk egy egydimenziós negyedrendű nemlineáris gerendamodellt, a Szoboljev-gradiens-módszer, a kvázi-Newton-módszer és a Newton-módszer részletes bemutatásával az adott nemlinearitás esetére.

Egy peremen fellépő nemlinearitást tartalmazó modellt vizsgáltunk nemnegativitási és végeselemes approximációs eredmények segítségével. Továbbá megmutattuk a kvázi-Newton-módszer alkalmazhatóságát erre az esetre és prekondicionálókat javasoltunk.

Az elméleti eredményeket számos numerikus szimuláció támasztja alá.

Megfigyelhető, hogy a kvázi-Newton-módszer tökéletes robosztusságot mutat szinte minden vizsgált nemlinearitás esetében.

Tapasztalati csillapítási együtthatók elengedhetetlenek ehhez hasonló munka esetében. Ha ezen együtthatókat bevonjuk a vizsgált módszerekbe, a kvázi-Newton-módszer gyorsabb lehet a Newton-módszernél a teljes számítási időt tekintve, azaz számítási költséget tekintve kedvezőbb.

References

[1] Andrews, K.T. et al.,, Analysis and simulations of a nonlinear dynamic beam, *Z. Angew. Math. Phys.,* vol. 63 (2012), no. 6, pp. 1005–1019.

[2] Antal, I., Karátson, J., Mesh independent superlinear convergence of an inner-outer iterative method for semilinear elliptic interface problems, *J. Comput. Appl. Math.,* vol. 226 (2009), no. 2, pp. 190–196.

[3] Axelsson, O., *A mixed variable finite element method for the efficient solution of nonlinear diffusion and potential flow equations*, in Advances in Multi-grid Methods, Notes Numer. Fluid Mech. 11, D. Braess, W. Hackbusch, and U. Trottenberg, eds., Viewig, Braunschweig, 1985, pp. 1–11.

[4] Axelsson, O., Gustafsson, I., *An efficient finite element method for nonlinear diffusion problems*, Bull. Greek Math. Soc., 32 (1991), pp. 45–61.

[5] Axelsson, O., Maubach, J., On the updating and assembly of the Hessian matrix in finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 71 (1988), pp. 41–67.

[6] Banz, L., Lamichhane, B. P., Stephan, E. P., Higher order mixed FEM for the obstacle problem of the p-Laplace equation using biorthogonal systems, *Comput. Methods Appl. Math.,* vol. 19 (2018), no. 2, pp. 169–188.

[7] Borsos, B., Karátson, J., Variable preconditioning for strongly nonlinear elliptic problems, *J. Comput. Appl. Math.,* vol. 350 (2019), pp. 155–164.

[8] Borsos, B., Karátson, J., Quasi-Newton Variable Preconditioning for non-uniformly monotone elliptic problems posed in Banach Spaces, *IMA J. Numer. Anal.*, 2021, https://doi.org/10.1093/imanum/drab024

[9] Borsos, B., An inexact Newton method with inner preconditioned CG for non-uniformly monotone elliptic problems, to appear in *Mathematical Modelling and Analysis*, 2021.

[10] Borsos, B., Karátson, J., Robust iterative solvers for nonlinear Gao beam models in elasticity, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2021, https://doi.org/10.1515/cmam-2020-0133.

[11] Borsos, B., Karátson, J., Numerical solution of nonlinear anisotropic elliptic Stefan-Boltzmann heat radiation problems in 3D using Newton type methods, *Computers and Mathematics with Applications*, submitted, 2021.

[12] Böhmer, K., *Numerical methods for nonlinear elliptic differential equations,* Oxford University Press, Oxford, 2010.

[13] Busuioc, V., Cioranescu, D., On a class of electrorheological fluids. Contributions in honor of the memory of Ennio De Giorgi, *Ricerche Mat.,* 49 (2000), suppl., 29–60.

[14] Ciarlet, Ph., *Linear and nonlinear functional analysis with applications,* SIAM, Philadelphia, 2013.

[15] Cioranescu, D., Girault, V., Rajagopal, K. R., *Mechanics and mathematics of fluids of the differential type*, Advances in Mechanics and Mathematics 35, Springer, 2016.

[16] Deuflhard, P., Global inexact Newton methods for very large scale nonlinear problems, *Impact Comput. Sci. Engrg.,* vol. 3, no. 4: 366-393, 1991.

[17] Deuflhard, P., Weiser, M., Global inexact Newton multilevel FEM for nonlinear elliptic problems, in Multigrid Methods V, *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.,* vol. 3 (1998), pp. 71–89, Springer, Berlin.

[18] Dillard, D. A., Mukherjee, B., Karnal, P., Batra, R. C., Frechette, J., A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications, *Soft Matter*, vol. 14 (2018), 3669–3683.

[19] Faragó, I., Karátson, J., *Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems via Preconditioning Operators: Theory and Application,* Advances in Computation, Volume 11, NOVA Science Publishers, New York, 2002.

[20] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K., *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[21] Gao, D.Y., Nonlinear elastic beam theory with application in contact problems and variational approaches, *Mech. Res. Commun.,* vol. 23 (1996), pp. 11–17.

[22] Gao, D.Y., Machalová, J., Solution of contact problems for Gao beam and elastic foundation, *Mathematics and Mechanics of Solids.,* vol. 23, no. 3, pp. 473–488.

[23] Gao, D.Y., Machalová, J., Netuka. H., Mixed finite element solutions to contact problems of nonlinear Gao beam on elastic foundation, *Nonlin. Anal. Real World Appl.,* vol. 22 (2015), pp. 537–550.

[24] Glowinski, R., *Variational Methods for the Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems*, SIAM, Philadelphia, 2015.

[25] Glowinski, R., Rappaz, J., Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid flow model in glaciology, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis,* vol. 37 (2003), no. 1, pp. 175–186.

[26] Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J., Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis,* vol. 4 (1996), North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 313–485.

[27] Karátson J., Faragó I., Variable preconditioning via quasi-Newton methods for nonlinear problems in Hilbert space, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 41 (2004), no. 4, pp. 1242-1262.

[28] Karátson, J., Korotov, S., Discrete maximum principles for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions, *Numer. Math.,* vol. 192 (2005), no. 1, pp. 75-88.

[29] Křižek, M., Neittaanmäki, P., *Mathematical and Numerical Modeling in Electrical Engineering: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

[30] Liu, L., Huang, M., Yuan, K., Křížek, M., Numerical Approximation of a Nonlinear 3D Heat Radiation Problem, *Adv. Appl. Math. Mech.*, vol. 1 (2009), no. 1, pp. 125–139.

[31] Machalová, J., Netuka. H., Solution of contact problems for Gao beam and elastic foundation, *Math. Mech. Solids,* vol. 23 (2018), no. 3, pp. 473–488.

[32] Mang, A., Biros, G., A semi-Lagrangian two-level preconditioned Newton-Krylov solver for constrained diffeomorphic image registration, *SIAM J. Sci. Comput.,* vol. 39 (2017), no. 6, B1064-B1101.

[33] Mustafa, M., Mushtaq, A., Hayat, T., Alsaedi, A., Model to study the non-linear radiation heat transfer in the stagnation-point flow of power-law fluid, *Internat. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow,* vol. 25 (2015), no. 5, pp. 1107–1119.

[34] Neuberger, J. W., *Sobolev gradients and differential equations,* Second edition, Lecture Notes in Mathematics, 1670. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[35] Reddy, J.N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.

[36] Rieder, A., Inexact Newton regularization using conjugate gradients as inner iteration, *SIAM J. Numer. Anal.,* vol. 43 (2005), no. 2, pp. 604-622.

[37] Rossi, T., Toivanen, J., Parallel fictitious domain method for a non-linear elliptic Neumann boundary value problem, *Numer. Linear Algebra Appl.,* vol. 6 (1999), no. 1, pp. 51–60.

[38] Stoykov, S., Hofreither, C., Margenov, S., Isogeometric analysis for nonlinear dynamics of Timoshenko beams, *Numerical methods and applications*, 138–146, Lecture Notes in Comput. Sci. 8962, Springer, 2015.

[39] Strang, G., *Computational Science and Engineering*, Wellesley-Cambridge Press, MA, 2007.

[40] Xie, F., Wu, Q.-B., Dai, P.-F., Modified Newton-SHSS method for a class of systems of nonlinear equations, *Comput. Appl. Math.,* vol. 38 (2019), no. 1, paper no. 19.

[41] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications,* Springer, 1986