



Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Sebezhetőség és szenzorhelyezés ivóvízhálózatokban

Doktori disszertáció alapján készült tézisfüzet

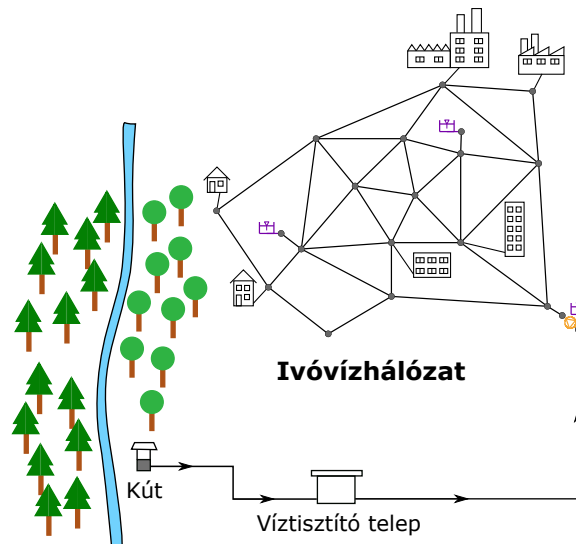
Készítette: Wéber Richárd
okleveles gépészeti modellező

Témavezető: Dr. Hős Csaba
egyetemi docens

Budapest, 2021. április 1.

1. Bevezetés

Mivel a tiszta ivóvíz napjainkban a lakosság egyik alapvető szüksége, az ivóvízhálózatok az egyik legegységesebb infrastrukturális részei a modern településeknek, a kis falvaktól egészen az óriási metropoliszokig. A nyers, kezeletlen víz kinyerhető folyók, tavak környéki fúrt kutakból, vagy környékbeli hegységek karsztrendszeréből. Egy tipikus elrendezés figyelhető meg a 1. ábrán. A kutak által kitermelt nyers víznek kezelésre van szüksége, amely tartalmazhat különböző méretű rácson szűrést, illetve klóradagolást a patogének és paraziták elpusztítására. Az ivóvízhálózat eljuttatja a tiszta ivóvizet a fogyasztási pontokhoz, pl. lakó övezetekbe vagy gyártelepekre. A 1. ábra továbbá mutatja az alapvető elemeit egy hálózatnak, vagyis, a csővezetékrendszert (szürke) néhány tartállyal (lila) és szivattyúval (sárga). A disszertáció célja a ivóvízhálózatok vizsgálata.



1. ábra. Lakossági ivóvízellátó rendszer egy tipikus elrendezésének illusztrációja.

Ezen rendszerek összetettsége gyorsan nő a fogyasztási pontok számával (ami a kiszolgált terület mérete), ezért ezen hálózatok műszerezése és felügyelete napjainkban is komoly kihívást jelent. Évtizedek óta alkalmaznak hidraulikai modelleket az ivóvízhálózatok leírására, manapság a nagy számítási kapacitásnak és a hatalmas adatbázisoknak köszönhetően még a legkisebb részleteket is be lehet építeni a modellbe, így ezek több ezer, akár tízezer csővezeték is tartalmazhat. A modell pontosságának növelés érdekében kalibrálás szükséges valódi mérési adatok felhasználásával. Mivel a rendelkezésre álló mérőműszerek száma - nyomástávadók és/vagy áramlásmérők - nagyságrendekkel kisebb mint az elérhető mérési pontok, komoly kihívást jelent a mérési helyek kijelölése, így valamilyen metrika szerint optimalizálni szükséges a mérési elrendezést. A másik nehézség, hogy a modell növekedésével a kalibrálandó modell paraméterek száma is nő, ezért a kalibrálási módszernek nagy számítási időre és magas szintű algoritmusokra van szüksége. Továbbá az ivóvízhálózatok robusztusságát vagy sebezhetőségét megbecsülni a tervezési fázisban, vagy akár működő

hálózatok esetén is komoly kihívás napjainkban. Még a hatalmas térinformatikai rendszerek és egy részletes, megfelelően kalibrált hidraulikai modell segítségével is, nehéz pontosan megbecsülni milyen következményekkel jár egy csőtörés.

A modell leíró matematikai egyenletei röviden kerülnek bemutatásra. Habár az áramlás egy csőhálózatban is szükségszerűen háromdimenziós, nagy ivóvízhálózatok modellezése során azt feltételezzük, hogy egydimenziós, ami, egyfelől megfelelő pontosságot biztosít, másfelől, kedvező számítási időt. Továbbá feltételezzük, hogy a közeg összenyomhatatlan és az áramlás időfüggetlen. Ugyan a szimulációkhoz egy házon belüli C++ kódot használtam (STACI), a megoldott egyenletek megegyeznek a széleskörűen alkalmazott EPANET [1] megoldóval.

Először az anyagmegmaradást megoldjuk minden csomópontra

$$\sum_{i \in \text{be}} Q_i - \sum_{j \in \text{ki}} Q_j = c \quad (1)$$

ahol feltételezzük, hogy a folyadék összenyomhatatlan. Q a térfogatáramot jelöli, az első tagban a "be" a befolyó, míg a másodikban a "ki" a kifolyó áramlásra utal és a c jelöli a csomóponti fogyasztást. Emellett a másik típusú egyenlet leírja a nyomáskülönbség kapcsolatát az ágakra (vagyis szivattyúkra, csövekre, szelepekre) az átfolyó térfogatárammal, formailag megadható

$$\Delta p = f(Q) \quad (2)$$

ahol a Δp jelöli a nyomáskülönbséget az ág két vége között és az f függvény a térfogatáram egy tipikusan nemlineáris függvénye. A pontos függvény az ágelem típusától függ. Összességében a két egyenletcsoportból felépíthető egy algebrai, nemlineáris egyenletrendszer, mely akár több ezer egyenletet tartalmaz, és megoldható hatékonyan a Newton-Raphson iteráció és a ritka LU dekompozíció segítségével. [2, 3]

2. Kalibráció és szenzorelhelyezés

2.1. Bevezetés

A kalibrálás célja, hogy csökkentsük az eltérést a matematikai modell és a valódi hálózaton vett mérések között a modell paramétereinek beállításával. Ivóvízhálózatok esetén, a mérés tipikusan tűzcsapokon vett nyomásmérést jelent; habár ritkán előfordulhat beépített áramlásmerő is. Egy kalibrálás két lépésből áll:

- mérési pontok meghatározása, vagyis mely csomópontokhoz telepítsünk nyomástávadót,
- és egy kalibrálási algoritmusból, mely azonosítja a modellparamétereket.

A szenzorelhelyezés és a kalibráció módszere is a modell kimenet pontosságára fókuszál, vagyis a cél, hogy a modell kimenete és a mérések közötti különbség a lehető legkisebb legyen a modellparaméterek beállításával. Fontos, hogy a két módszer itt egymás után kerül bemutatásra, de egymástól függetlenül is alkalmazhatók. A matematikai modell tartalmaz több típusú paramétert is, pl. érdesség, fogyasztás vagy csőátmérő, de ezen dolgozat az csőérdességi paraméter kalibrálásról szól, annak ellenére, hogy egyes esetekben más paraméterek is hasonló fontosságúak. Habár jelen munka során csak a csőérdességgel foglalkozunk, a módszertan kiterjeszthető a többi paraméter kalibrálására is. Végül, az utóbbi évtizedekben számos különböző módszer jelent meg az irodalomban mindkét kérdés megválaszolására, részletes összehasonlítások hiányában; egy új megközelítést is bemutatok, mely alkalmas összehasonlítani objektív alapokon a különböző szenzorelhelyezési módszereket a kalibrálás pontossága szempontjából.

A fali érdesség áramlásra gyakorolt összetett hatása a mai napig jelentős kihívás a mérnökök számára, különösen, ha a modell számítási idő szempontjából rendkívül kedvezőnek és könnyen használhatónak kell lennie. Ivóvízhálózatok esetén az utóbbi évtizedekben két elterjedt modell ismeretes: a Darcy-Weisbach modell és a Hazen-Williams összefüggés. Az előbbi elméleti oldalon jelentősen megalapozottabb és általánosabb, az utóbbi egy tisztán empirikus formula, és alapvetően az Egyesült Államokban használják, továbbá kizárólag víz közegre és a turbulens tartományra érvényes. Mindkét modell tartalmaz egy paramétert, a Darcy-Weisbach esetén ez a relatív csőérdességi együttható (ε), míg a Hazen-Williams esetén a C-faktor. Újonnan beépített csővezeték esetén ezen együtthatók akár pontosan is becsülhetők, azonban az évek során a lerakódások miatt az időnkénti kalibrálás elkerülhetetlen.

2.2. Matematikai eszközök

A bemutatott módszerekhez két fontos matematikai eszközre van szükségünk. Az érzékenység vizsgálat a modell kimeneti mennyiségeinek (nevezetesen nyomás és/vagy térfogatáram) változását írja le a paraméterek, vagyis, a csőérdességi paraméter μ függvényében,

ahol a μ jelölheti a relatív csőérdességi együtthatót (ε) vagy a C-faktor. Tehát az i -edik csomópont nyomásának a változását leírható a j -edik csőérdesség függvényében

$$S_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial \mu_j}. \quad (3)$$

Ez a mennyiség minden csomópont-ág párra alacsony számítás idővel meghatározható a Jacobi-mátrix LU dekompozíciójával [3], és végeredményben az érzékenységi mátrixot kapjuk.

A nyomás-érdesség érzékenység alapján, definiálok egy mennyiséget minden csomópont-hoz, ami megmutatja mekkora mértékben változik az adott csomópont nyomása, az összes csőérdesség változtatása esetén. Matematikailag, ez a mátrix oszloponként vett összege a tagok abszolút értékének, vagyis

$$S_{\text{node},i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{edges}}} |S_{i,j}|. \quad (4)$$

$$(5)$$

Ezek a változók előrejelzik a nyomás növekedését (vagy csökkenését) abban az esetben, ha minden csővezeték érdességét egyszerre egyenlően növeljük.

A hidraulikus távolság a komplex hálózat elmélet egy matematikai eszköze. Egy ivóvízhálózat gráf szempontból modellezhető úgy, hogy a csővezetékek, szelepek, szivattyúk, stb. az élek, míg az elágazásaik a csomópontok. Gráfelméletben, az út definíció szerint sorozata az éleknek két csomópont között, lásd [4]. Hurkolt hálózat esetén nyilvánvalóan számos lehetséges út van két csomópont között, ezért egy kitüntetett út, amely mentén a legkevesebb él található, nevezetesen a legrövidebb út. A távolság pedig a legrövidebb út mentén található él száma. E mennyiség kiterjeszthető súlyozott gráfok esetére is, ahol a legrövidebb út az, ahol súlyok összege minimális és ez az összeg a távolság [4]. A mennyiség meghatározására egy C++ könyvtárat alkalmaztam, ez név szerint az `igraph` [5].

2.3. A kalibrációs technika

Az elmúlt évtizedekben számos módszert mutattak be az irodalomban hogyan kalibrálható az ivóvízhálózatot leíró modell, melyek legkülönbözőbb megközelítéseket alkalmaznak, pl. Levenberg-Marquardt algoritmus [6], particle swarm optimalizálás [7] vagy a "Bayesian-based, two-level Markov chain Monte Carlo-Particle Filter" módszer [8]. A legnépszerűbb tulajdonságokat röviden bemutatom.

- Elsőként, a legnépszerűbb kalibrálandó modellparaméter a csőérdességi együttható [9, 10] vagy a csomóponti fogyasztás [11, 12] (esetleg fogyasztási minta), néha mindkettő egyidejűleg [13, 8].

- Az ismeretlen paraméter csökkentése érdekében gyakran csoportokat hoznak létre és egy ismeretlent rendelnek hozzájuk. A csőérdesség esetében ez a csoportosítás jellemzően a cső anyaga alapján történik, míg fogyasztás esetén a földrajzi elhelyezkedés alapján. [13, 10, 7]
- Gyakran egy skalár mennyiséget definiálnak, ami jellemzően a modell kimenete és a mérés különbsége, vagy a modell paraméterek és a "valódiak" különbsége. [14, 15]
- Végül, a mérnökök egy bonyolult optimalizációs módszerrel csökkentik a célfüggvényt, vagyis a különbséget a modell és a mérés között. Az utóbbi években jellemzően heurisztikus módszereket alkalmaznak kiaknázva a folyamatosan növekvő számítási kapacitást [8, 9]. Ebből kifolyólag rendszerint jelentős CPU kapacitást igényelnek.

A disszertáció célja egy olyan kalibrációs módszer kidolgozása, mely kedvező számítási igény mellett biztosítja a magas pontosságot, olyan értelemben, hogy a modell kimenete (nyomásai) a lehető legjobban közelítik meg a mért értékeket. Ez azt is jelenti hogy a modellparaméterek talán nem lesznek olyan közel a "valódi" értékekhez, de az igazi csőérdesség meghatározása jelentősen bonyolultabb, illetve egy modell célja a pontos kimeneti értékek. Összességében, a céлом a modell kimenetét optimalizálni és nem a paramétereket magukat. Biztosítva ezen irányelveket, illetve merítve az irodalmi tapasztalatokból, két fontos aspektusa van a javasolt kalibrációs technikának.

- Minden csővezetékhez egyedi csőérdességi tényezőt rendel, vagyis csoportosítást nem alkalmazunk, mint pl. [16]. A csoportosítás komoly előnye, hogy az ismeretlen együtt-hatók számát nagyságrendekkel csökkenti, azonban olyan adatokra lehet szükség, melyek nem elérhetők vagy nagy bizonytalanság terheli (pl. csőanyag, fektetési év). Ez azt is jelenti, hogy az ismeretlen paraméterek száma akár nagyságrendekkel nagyobb mint az elérhető mérések száma.
- A módszer iteratív, vagyis nincs szükség heurisztikus optimumkeresőre (pl. genetikus algoritmus).

A módszer pontos lépései az 1. Tézisben részletesen be vannak mutatva.

2.4. A szenzorelhelyezési módszer

A mérés technika ugrásszerű fejlődésének köszönhetően manapság számos különböző célból használnak szenzorokat ivóvízhálózatok esetén: szivárgás detektálás [17], klórbomlás modellezés [18], fertőzés detektálás [19] vagy, ahogy ebben a disszertációban is, csőérdesség kalibrálás. Utóbbival kapcsolatban néhány különböző megközelítés jelent meg az irodalomban, pl. gráfelmélet felhasználása [20], geostatistikai eszközök [21] vagy általános hidraulikán alapuló módszerek [11]. Mégis a leginkább meghatározó irány az irodalomban a szenzorelhelyezéssel kapcsolatban, hogy csökkentsék a mérési hiba terjedését a kalibrált paraméterekre, vagy a modell kimenetére. Ez a megközelítés általánosan több tématerületen is megtalálható, vízhálózatok kapcsán eredetileg [22]-ban prezentálták.

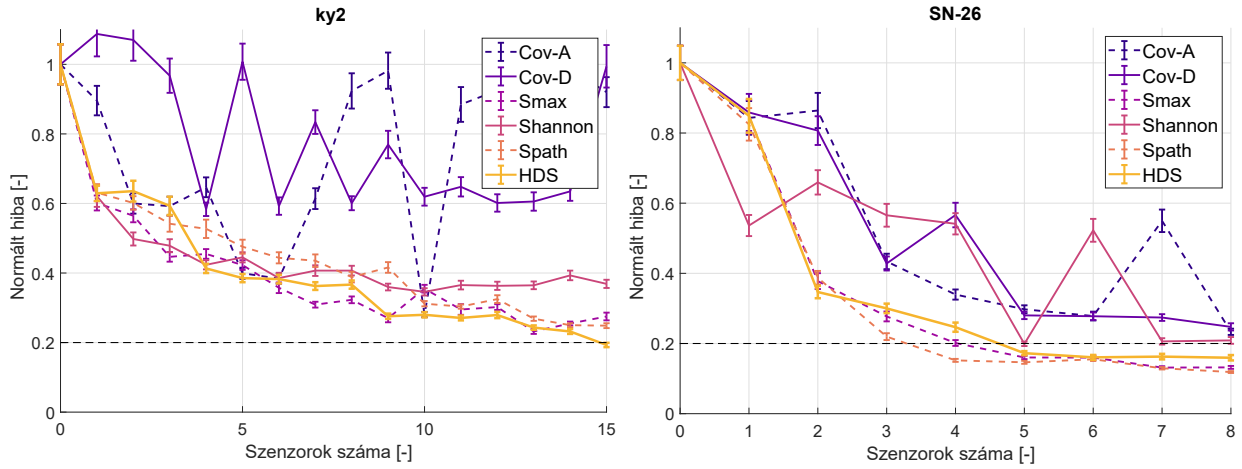
Irodalmi tapasztalatok és saját megfontolások alapján egy "jó" szenzorelhelyezés két követelményt teljesít. Elsőként, érzékeny csomópontok vannak kiválasztva. Mindazonáltal, nem célszerű a távadókat a tartályok, víztározók közelébe rakni, ahol a nyomás előírt vízmagasság által. Azonban, az érzékeny csomópontok jellemzően adott területeken összpontosulnak egy hálózaton belül, ezért egyszerűen kiválasztva a legérzékenyebb pontokat a mért csomópont torlódását eredményezi [23, 24]. A másik probléma a közeli pontokon való mérésnek, hogy a mért értékek nem lesznek matematikailag függetlenek, ami elvezet a második követelményhez: a mért csomópontoknak "távol" kell lennie egymástól "amennyire csak lehet".

Ez elvezet a következő két koncepcióhoz: a csomóponti érzékenységhöz ($S_{\text{node},i}$) és a hidraulikus távolsághoz (δ). Az előbbi az érzékenységi mátrix alapján definiálva van (lásd (3) egyenletet). Az utóbbi a gráf értelemben vett súlyozott távolság az adott csomópont és az előírt nyomású helyektől (pl. tartály) vagy a már mérésre kiválasztott pontoktól, ahol a súlyok a nyomásvesztések, vagyis a nyomáskülönbség a geodetikus magasságkülönbség nélkül. Minden csomópont jellemezhető a két mennyiség szorzatával, azaz $S_{\text{node},i}\delta$. Ezáltal ha kiválasztunk egy érzékeny pontot mérésre, a környezetének a súlya leesik; hasonlóan egy távoli pont alacsony érzékenységgel nem lesz alkalmas mérési pontnak. A módszer szakaszos, olyan értelemben, hogy a mérési pontokat egyesével adja hozzá, viszont csak a hidraulikus távolságokat számolja újra, ami számítási kapacitás szempontjából kedvező. Mindazonáltal, a módszer lépései világosak és iteráció vagy optimalizációtól mentesek. Mivel a módszer a hidraulikus távolság és az érzékenységre épül, hidraulikus távolságnak neveztem el, röviden HDS (az angol Hydraulic Distance with Sensitivity rövidítése miatt), továbbá a módszer pontos lépései megtalálhatók a 2. Tézisben.

2.5. Szenzorelhelyezések összehasonlítása

Ebben a fejezetben bemutatok egy módszert szenzorelhelyezések objektív összehasonlítására, a javasolt HDS technika mellett az irodalomban található legnépszerűbb algoritmusokra alkalmazva. A javasolt kalibrációs módszer lesz alkalmazva az összehasonlítás során. Ez biztosítja, hogy csak az elhelyezések lesznek eltérőek és a kalibrációs módszer állandó minden esetben. Habár a módszert az összes elérhető hálózaton elvégeztem, mind valódi, mind mesterséges hálózatokat is beleértve, jelen tézisfüzetben csak kettőt mutatok be röviden, melyek egy reprezentatív példaként szolgálnak, és további eredmények bemutatása nem változtat a konklúziókon. Az egyik bemutatott hálózat egy mesterséges, ky2 a szakirodalomból [25, 26], míg a másik egy valódi hálózat Sopron környékéről, nevezetesen SN-26. A javasolt módszer az 1. Tézisben található részletesen bemutatva.

A 2. ábra bal oldala mutatja az eredményeket a mesterséges ky2 hálózatra, míg a jobb oldala az SN-26 esetén. A különböző színekhez tartoznak a szenzorelhelyezési módszerek, a javasolt "HDS" néven jelölt, míg a többi módszer a szakirodalomból vett. Az nyomás-hibájának átlaga pontosan az 1. Tézisben definiált, és számszerűsíti az eltérést a modell kimenete és a névleges értékek között a kalibráláshoz fel nem használt értékeket is beleértve. Hibasávokkal jeleztem a szórás mértékét is száz kalibráció alapján. Amelyik módszer gyorsabban konvergál a nullába kedvezőbb. A fekete szaggatott vonal jelöli a 20%-os hibát.



2. ábra. A kalibrálás utáni hiba normáltjának átlaga és szórása a szenzorszám függvényében a ky2 és az SN-26 hálózatok esetén.

A ky2-es hálózat esetén (lásd a 2. ábra bal oldalát) négy módszer hasonlóan konvergál, de a HDS éri el először a 20%-ot. Az ábra bal oldalát tekintve három technika áll közel egymáshoz, itt az Spath módszer tűnik a legkedvezőbbnek.

Végül, fontos rávilágítani a módszerekhez szükséges számítási időkre, amennyire az optimális kiosztásra szükség van. A 1. táblázat tartalmazza a futási időket másodpercekben, mind soproni, mind mesterséges hálózatokra. Látható, hogy a kovariancia mátrix alapú megközelítések (Cov-A, Cov-D) jelentős mennyiségű CPU időt emésztnek fel a drága mátrixműveletek miatt (pl. pszeudinverz, determináns). Ellenkezőleg, a HDS és az Spath módszerek elhanyagolható mennyiségű idő alatt meghatározzák a szenzorok kiosztását, mivel ezen technikák iteráció és optimalizációtól mentesek.

Hálózat	Cov-A	Cov-D	Smax	Shannon	Spath	HDS
C-town	6750	3200	40	20	4	<1
ky2	4000	11800	32	30	6	<1
SN-12	400	100	10	10	3	<1
SN-26	8750	2066	20	14	10	<1

1. táblázat. Az optimális kiosztás meghatározásához szükséges CPU idők különböző módszerek estére.

1. Tézis

A szenzorelhelyezési technikák objektív úton összehasonlíthatók a csőérdességi paraméterek kalibrációjának szempontjából a következő lépések szerint.

1. Válasszuk ki a mért csomópontok számát: N_{sampled} .
2. Végezzünk hidraulikai szimulációt névleges csőérdességi tényezőkkel és vízigényekkel. (p_{nom}). Mentsük el az összes csomóponti nyomás értéket (\mathbf{p}_{nom}).
3. A szenzorelhelyezési technika szerint válasszuk ki a mérési pontokat, összesen N_{sampled} darabot.
4. Vizsgáljuk meg a kezdeti érdességek hatását Monte-Carlo-módszer segítségével, vagyis zavarjuk meg őket egy normál eloszlású véletlen számmal (0 várható érték és előírt szórással, pl. 20%). Végezzünk kalibrációt a megzavart kezdeti érdességi értékekkel. A kalibrálás lépési a következők.

- (a) A mért csomópontok, ezek kimeneti értékei és a becsült paraméter vektor bemeneti adatok.
- (b) Végezzünk el egy hidraulikai számítást, majd határozzuk meg az \mathbf{S} érzékenységi mátrixot, ahol

$$S_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial \mu_j}.$$

- (c) Határozzuk meg a csökkentett érzékenységi mátrixot \mathbf{S}_r , mely csak a mintavételezett csomópontokhoz tartozó sorokat tartalmazza, vagyis töröljük a nem mért csomópontok sorait.
- (d) Számoljuk ki a nyomáskülönbséget a hidraulikai modell kimenete (ahol a becsült paraméterek szerepelnek) és a névleges értékek között

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{mod}} - \mathbf{p}_{\text{nom}}. \quad (6)$$

- (e) Oldjuk meg a $\mathbf{S}_r \Delta \boldsymbol{\mu} = \Delta \mathbf{p}$ lineáris egyenletrendszer a szinguláris érték felbontás módszerével a paraméter vektor frissítéséhez.
 - (f) Frissítsük a csőérdesség paraméter vektort és ismételjük meg a 2-es ponttól, amíg $\Delta \mathbf{p}$ kellően kicsi.
5. Értékeljük ki a hibát, vagyis vegyük a különbség normáltját a névleges és a kalibrált modell kimenetek között, matematikailag

$$e_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{nodes}}} (p_{\text{mod},i} - p_{\text{nom},i})^2}{N_{\text{nodes}}}}. \quad (7)$$

6. Az algoritmust végezzük el kellően sokszor, hogy megbízható statisztikát lehessen készíteni az e_p hiba átlagához és korrigált tapasztalati szórásához. Az ajánlott számítások száma legalább 100.

Ez a vizsgálat elvégezhető folyamatosan növekvő számú szenzorszám esetére (N_{sampled}), majd egy ábra készíthető ahol a vízszintes tengely mutatja a szenzorok számát, és a függőleges az e_p normált hibát. Amelyik szenzorelrendezés esetén gyorsabban konvergál nullához, kedvezőbb a többinél.

Kapcsolódó publikációk: [J2], [C1], [C2], [C3], [C4].

2. Tézis

A Hidraulikai Távolság Érzékenységgel módszer alkalmas meghatározni a szenzorok helyeit ivóvízhálózatok matematikai modelljének csőérdesség kalibrálásához, biztosítva a magas pontosságot és az elhanyagolható számítási időt. A módszer a következő lépésekből tevődik össze.

1. Becsüljük meg a csőérdességi tényezőket, ha lehetséges használjunk valódi adatokat (pl. csőanyag, fektetési év).
2. Jelöljük ki a betáplálási pontokat, vagyis víztározókat és tartályokat első mérési pontoknak, ha nincsenek eredetileg ellátva nyomástávadókkal.
3. Végezzünk hidraulikai szimulációt névleges működési feltételekkel (pl. átlag fogyasztás), számoljuk ki az érzékenységi mátrixot \mathbf{S} és a csomópont érzékenységeket \mathbf{S}_{node} , matematikailag

$$S_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial \mu_j} \quad \text{and} \quad S_{\text{node},i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{edges}}} S_{i,j},$$

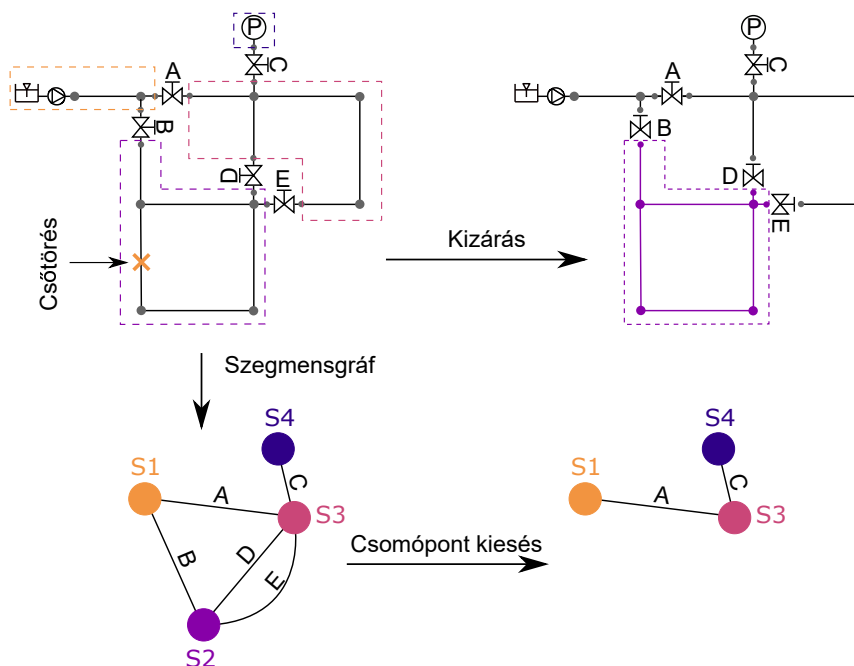
4. Minden csomóponthoz határozzuk meg a hidraulikai távolságot δ_i (a legkisebb kumulatív nyomásveszteség) a már mért pontoktól és az előírt nyomású pontoktól (vagyis tározó, tartály). Számoljuk ki a hidraulikai távolság δ_i és a csomóponti érzékenység $S_{\text{node},i}$ szorzatát minden i -edik csomóponthoz.
5. Keressük meg a maximumát a $\delta_i S_{\text{node},i}$ szorzatoknak és jelöljük ki a következő mért pontnak.
6. Ismételjük meg a 4-es lépéstől, amíg a kívánt számú szenzort el nem helyeztük.

Kapcsolódó publikációk: [J2], [C1], [C2], [C3], [C4].

3. A szegmensgráf topológiai vizsgálata

3.1. Bevezetés

Egy ivóvízhálózat megfelelő gráfrepresentációját meghatározni nem egyértelmű, a véletlenszerű csőtörések hatásának pontos vizsgálata a cél. A hagyományos megközelítés, ahol a csővezetékek (és a szivattyúk, szelepek) az élek, míg ezek találkozása a csomópontok nem tudja leírni egy csőtörés valódi hatásait, mivel egy csőtörés esetén tipikusan több mint egy csővezeték kiszakaszolására van szükség (lásd az 3. ábra jobb felső részét). Mindezt, egy ettől eltérő ötletet alkalmaztam, ahol a szakaszoló tolózárak az élek, és a legkisebb ön-magukban kiszakaszolható szigetek a csomópontok. Ezt a reprezentációt szegmensgráfnak hívják és eredetileg [27] mutatta be. A példahálózat szegmensgráfja az ábra bal alsó részén látható. Egy csővezeték eltörése könnyedén modellezhető gráf szempontból a csomópont kivételével, mivel ezen belüli elemek mind le lesznek választva hidraulikailag.

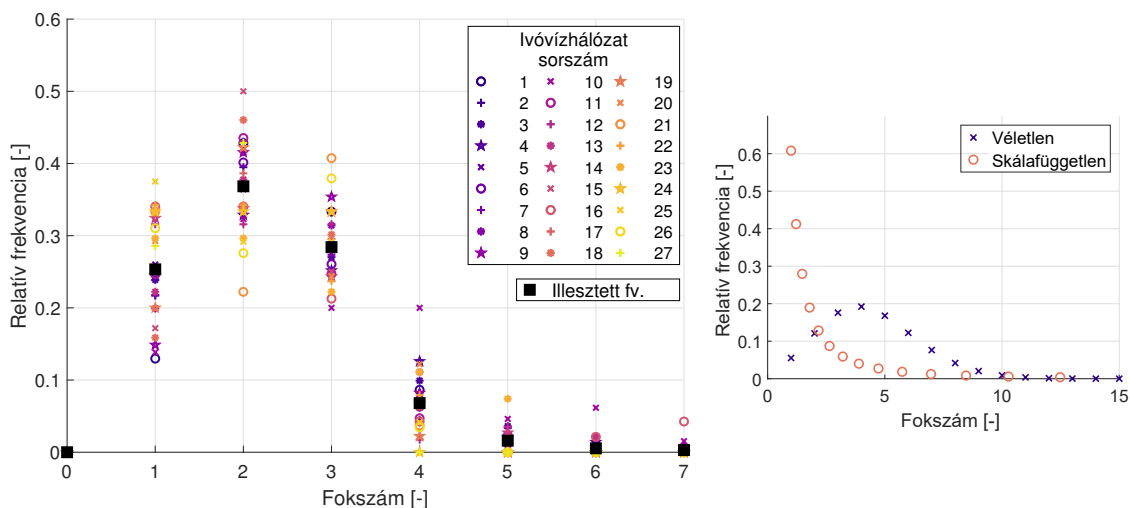


3. ábra. Egy kizárási terv bemutatása egy példa ivóvízhálózat segítségével. A szegmensgráf reprezentáció megfigyelhető az ábra bal alsó sarkában.

A komplex hálózat elméletben szokásos módszereket alkalmazunk a valódi ivóvízhálózatok vizsgálatára. Két fontos speciális gráf található az irodalomban: a véletlen gráf [28] és a skálafüggetlen [29]. Az előbbi robusztusnak tekinthető, mivel minden csomópontnak közel azonos számú kapcsolata (vagyis fokszáma) van, míg az utóbbi számos "hub"-ot tartalmaz, ahol az élek felhalmozódnak, ezáltal sebezhetővé téve a gráfot [4]. Hagyományosan, valódi hálózatokat véletlen gráfnak feltételezték, azonban az utóbbi években felfedezték, hogy ezen hálózatok nem írható le pontosan a véletlen gráf modellel. A fejezetek célja, hogy eldöntsük melyik speciális gráf típus írja le jobban egy valódi ivóvízhálózat szegmensgráfját.

3.2. Fokszámeloszlás

A gráfelmélet területén egy csomópont fokszáma megadja, hogy hány él kapcsolódik azon a csomóponton keresztül. A fokszámeloszlás p_k megmutatja, hogy mi a valószínűsége egy véletlenszerűen kiválasztott csomópontnak a fokszáma k . Mivel p_k valószínűség, egy normalizált érték, vagyis $\sum p_k = 1$, lásd [4]. A vizsgálat során 27 valódi ivóvízhálózat modellt használtam Nyugat-Magyarországról, Sopron környékéről. A valódi hálózatok szegmensgráfjainak fokszámeloszlása látható a 4. ábra bal oldalán, míg a speciális hálózatok fokszámeloszlásai a jobb oldalon. Ahogy látható a valódi hálózatok sokkal közelebb állnak a véletlen gráfokéhoz, mint a skálafüggetlen hálózatokhoz. Az ivóvízhálózatok nem tartalmaznak szegmenseket magas fokszámmal vagyis nem kapcsolódik hozzájuk sok tolvár, ami kritikussá tenné a gráfot topológiailag.



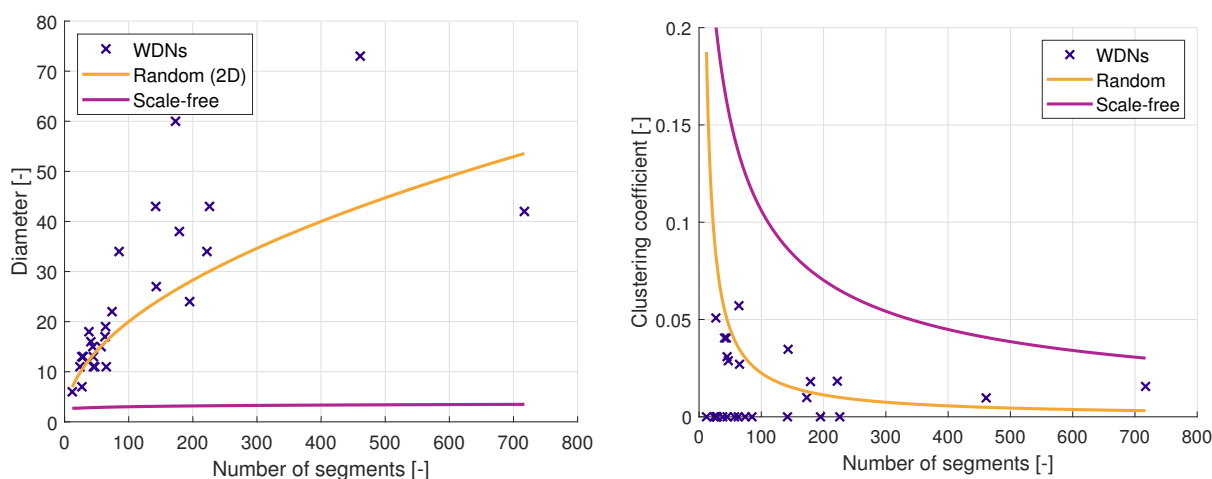
4. ábra. 27 valódi ivóvízhálózat szegmensgráfjainak fokszámeloszlása a bal oldalon és speciális gráfok fokszámeloszlásai a jobb oldalon.

3.3. Átmérő és klaszterezettségi együttható

A fokszámeloszlás mellett, az utóbbi évtizedekben számos topológiához köthető mutató jelent meg a hálózatok viselkedésének leírására (ismét lásd [4]), amelyek közül már sokat alkalmaztak ivóvízhálózatok esetén is, pl. [30]. Ebben a szakaszban kettőt mutatok be részletesebben, nevezetesen az átmérőt és a klaszterezettségi együtthatót. Ezen mutatók hatékony kiszámolásához az `igraph` csomagot használtam, lásd [5]. Két csomópont között egy útvonal egy élekből álló sorozat. Mivel hurkolt hálózatok esetén számos ilyen út megtalálható, a legrövidebb út a jelentős, amely mentén az élek száma minimális. Egy hálózat esetén az összes csomópont párra nézve meghatározható a legrövidebb út hossza, melyek közül a legnagyobb a hálózat átmérője. Speciális hálózat esetére közelítő összefüggések

érhető el a szakirodalomban [31, 4]. A 5. ábra bal oldal mutatja az összefüggéseket, és a valódi ivóvízhálózatok átmérőit a gráf méretének függvényében. Ahogy látható, a véletlen gráf becslése kis mértékben alulbecsül, míg a skálafüggetlen hálózatra vonatkozó összefüggés egy teljes nagyságrendet téved.

A másik széleskörűen elterjedt paraméter az átlagos klaszterezettségi együttható, ami jellemezi egy gráfnak a sűrűségét, vagyis hogy milyen közel áll a teljes gráfhoz (ahol az összes csomópont között található közvetlen él). Ez a mennyiség definíció szerint megadja, hogy hányada valósul meg a lehetséges kapcsolatoknak egy véletlenül kiválasztott csomópont szomszédai között, lásd [32]. A klaszterezettségi együttható ezért egy nulla és egy közötti szám, amely eggyel egyenlő, az összes szomszéd kapcsolódik közvetlenül, míg ha nulla egyik sem. Skálafüggetlen hálózatok esetén ez a mennyiség várhatóan magas a megjelenő magas fokszámú pontok miatt, míg véletlen hálózat esetén közel nulla. Erre a mérőszámra is található közelítő összefüggések a szakirodalomban [31]. A 5. ábra jobb oldala mutatja az eredményeket a közelítésekről és a valódi hálózatok eredményeiről is. A skálafüggetlen közelítés láthatóan pontatlan, míg a véletlen lényegesen jobb.



5. ábra. Valódi ivóvízhálózatok szegmensgráfjainak átmérője (bal oldal) és átlagos klaszterezettségi együtthatója (jobb oldal) összehasonlítva a közelítő összefüggésekkel.

3.4. Valódi ivóvízhálózatok általános fokszámeloszlása

A szakasz célja, hogy egy általános függvényt definiáljon, mely alkalmas közelítőleg leírni egy általános valódi vízhálózatok fokszámeloszlásait. A fokszámeloszlás jellege és a topológiai paraméterek alapján egy vízhálózat véletlen gráfként viselkedik, ezért a Poisson eloszlás tűnik kézenfekvőnek az irodalom alapján [4]. Ennek ellenére, mivel egy vízhálózat természetéből adódóan síkba kiteríthető és minden csomópont kapcsolódik, vagyis nincsenek "magányos" pontok élek nélkül; ez megközelítés nem megfelelő. Például, ha egy véletlen gráf, melynek az átlagfokszáma 2.25, a csomópontjainak több mint 10%-ának nulla a fokszáma.

Ezen nehézségek miatt, egy új megközelítést alkalmaztam a vízhálózatok szegmensgráfjainak fokszámelszólásainak leírására. A függvény definíció szerint a valódi eloszlások pontonként vett átlagokból lett meghatározva, a pontos értékekért lásd 4. Tézis. Az illesztett függvény szintén megfelel az eloszlás függvény kritériumának, vagyis az összege a pontoknak egyenlő eggyel. Az illesztett függvény szintén látható a 4. ábrán.

3. Tézis

Valódi ivóvízhálózatok szegmensgráfjaiban az élek a szakaszoló tolózárak, míg a csomópontok a legkisebb szigetek (szegmensek). Ezek a gráfok egy véletlen, összefüggő síkg-
ráfokra jellemző tulajdonságokkal bírnak.

Kapcsolódó publikációk: [J1], [J3], [J4].

4. Tézis

Valódi ivóvízhálózatok szegmensgráfjaiban az élek a szakaszoló tolózárak, míg a csomópontok a legkisebb szigetek (szegmensek). Az alább látható táblázatban az értékek leírják a tipikus magyarországi ivóvízhálózatok szegmensgráfjainak fokszámeloszlásait 85%-os sikerrel, ha a szignifikancia szint 95%.

Fokszám	Rel. frek.
0	0
1	0.2538
2	0.3690
3	0.2846
4	0.0682
5	0.0160
6	0.0055
7	0.0029

Kapcsolódó publikációk: [J1], [J3], [J4].

4. Ivóvízhálózatok sebezhetősége

4.1. Lokális sebezhetőség definíciója

[33] áttekintette a szakirodalomban található definíciókat az ivóvízhálózatok sebezhetősége kapcsán, és legtöbbször tisztán topológia alapú. A sebezhetőség célja, ezen disszertáció esetében, hogy leírja a hidraulikai viselkedését egy ivóvízhálózatnak egy véletlenszerű csőtörés esetében, ezért a definíció is hidraulikai megközelítésű. A szakirodalomban található legtöbb sebezhetőség a csővezetékhez vagy a csomópontokhoz tartozik, azonban ebben a disszertációban a lokális sebezhetőség a szegmenshez tartozik, hasonlóan mint [34] folyóiratcikkekben. Ennek eredményeképpen minden elem egy szegmensből egyenlő lokális sebezhetőséggel rendelkezik, mivel bármelyik meghibásodása a teljes szegmens kiesését jelenti.

A javasolt sebezhetőség dimenziótlan, ezért különböző eltérő méretű ivóvízhálózatok esetén is használható összehasonlításra. Elsőként, definiáljunk egy meghibásodási rátát (α_i) minden szegmenshez, ez mutatja meg hogy mekkora az esélye egy szegmensben belül a csőtörésnek. Ez a jellemző normált, vagyis $\sum \alpha_i = 1$. Számos különböző tényező növelheti egy csőtörés kockázatát, pl. csőanyag, fektetési év, a környező talaj pH értéke, megnövekedett forgalom a felszínen [35, 36]. Ebben a disszertációban két megközelítést alkalmazok. Az első esetben α_i az i -edik szegmensben található relatív csőhossz, vagyis azt feltételezzük, hogy minden folyóméter cső egyenlő eséllyel törik el. A második közelítés során már figyelembe vesszük a csövek anyagát is, illetve az elmúlt 28 év csőtörési statisztikáját. Másodikként, vegyük az i -edik szegmens kizárása esetén kieső relatív fogyasztást, mely az 1D-s hidraulikai megoldó alapján megbecsülhető, vagyis $b_i = \sum d_i - \sum c_i$, ahol d_i jelöli a névleges fogyasztást és c_i a ténylegesen kiszolgált ivóvíz mennyiségét. A b_i értékek dimenziótlaníthatók az vízigények összegével, vagyis $\beta_i = b_i / \sum d_i$.

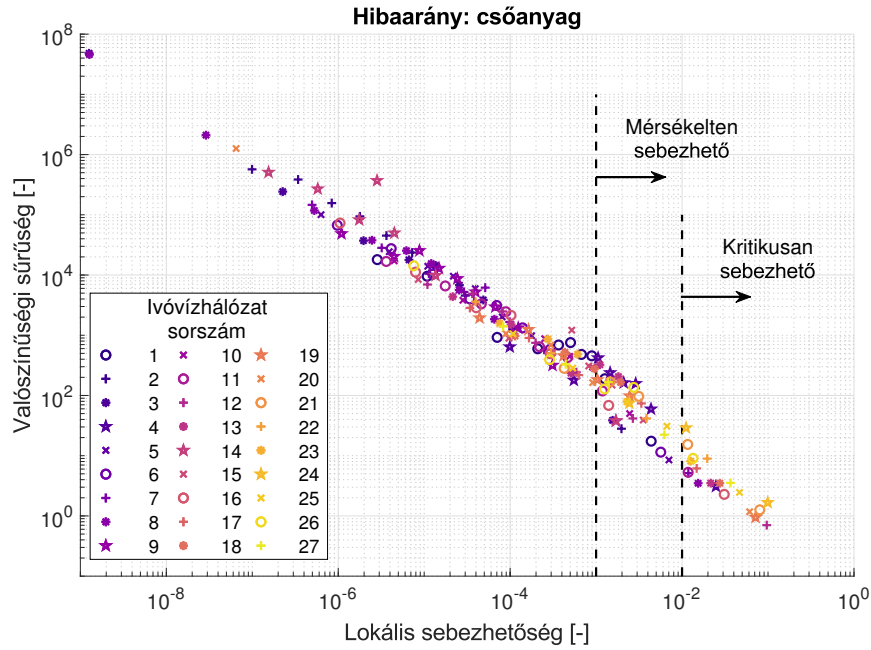
Felhasználva a korábban bemutatott mennyiségeket a hálózat i -edik szegmensének lokális sebezhetősége (γ_i) meghatározható

$$\gamma_i = \alpha_i \beta_i. \quad (8)$$

Ez a mérőszám szintén dimenziótlan és szegmens-specifikus, továbbá a szorzata a hibaránynak (α_i) és a relatív vízkiesésnek (β_i), amit az i -edik szegmens kizárása okoz. A definíció szerint a lokális sebezhetőség magas, ha a szegmensben magas a meghibásodási valószínűség és jelentős mértékű kiesést okoz annak kiszakasztása.

4.2. Lokális sebezhetőség eloszlása

A sebezhetőség vizsgálatot minden valódi hálózat esetén elvégeztem mind a két hibaarány esetén, itt a pontosabbnak tekinthető csőanyag alapú megközelítést mutatom be röviden. Habár minden hálózatot meg lett vizsgálat, csak 27 eredményét mutatom be, mert ezen hálózatok voltak elegendően nagyok az eloszlások vizsgálatára. A 6. ábra mutatja a lokális sebezhetőségek eloszlását mind a 27 hálózat esetén logaritmikus skálán. A pontok egy lineáris egyenes mentén helyezkednek el, vagyis hatványfüggvény eloszlásra utal, ami hasonlít a skálafüggetlen hálózatoknál látott fokszámeloszlásra. Skálafüggetlen hálózatok



6. ábra. A lokális sebezhetőségek sűrűségfüggvénye 27 valódi hálózat esetén, ha a hibarányt a csőanyagából közelítjük. A szegmensek, melyen 1%-nál magasabb sebezhetőséggel rendelkeznek (vagyis pl. 10% hibarány, 10% vízkiesés) magasan sebezhetőek.

esetén egy csomópont fokszáma nagyságrendekkel lehet nagyobb, mint az átlagérték; az ilyen csomópont " elvesztése " könnyedén a hálózat szétkapcsolódásához vezethet. A lineáris trend (vagyis hatvány függvény eloszlás) jelzi, hogy a rendszer nagy része gyengén sebezhető (vagy egyáltalán nem), míg néhány tartomány közepesen, de legfontosabb, hogy található pár darab szegmens, amik magasan sebezhetőek. Például a SN-8 hálózat esetén, az esélye hogy egy véletlenül kiválasztott szegmens sebezhetősége magasabb mint 10^{-2} (vagyis magasan sebezhető) több mint 5%, ami azt jelenti, hogy a hálózat 5%-a különösen kritikus.

4.3. Hálózati sebezhetőség

A lokális sebezhetőségek hálózaton belüli eloszlásának fontossága mellett, hasonlóan értékes a különböző hálózatok összehasonlítása a teljes minőségük tükrében sebezhetőség szempontjából. Ezáltal, megkönnyítve a közmű cégeket a döntéshozatalban és az erőforrások optimális elosztásában rendszer karbantartás során. Mindezért, a hálózati sebezhetőséget vezetjük be, mely a súlyozott átlaga a relatív vízkiesésnek (β)

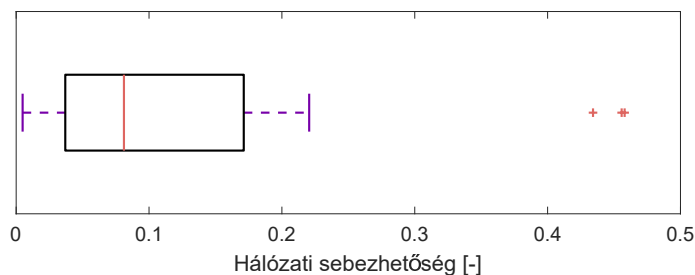
$$\Gamma = \frac{\sum_i \beta_i \alpha_i}{\sum_i \alpha_i}. \quad (9)$$

Mivel ez a súlyozott átlaga a relatív vízigény kielégítetlenségeknek, Γ megmutatja, mekkora a várható értéke a kieső relatív vízmennyiségnek egy véletlenszerűen bekövetkező csőtörés-

nek a hidraulikai modell alapján. Mivel a meghibásodási arány (α) egy normált mennyiség, az összefüggés egyszerűsíthető

$$\Gamma = \sum_i \beta_i \alpha_i = \sum_i \gamma_i. \quad (10)$$

Ez azt jelenti, hogy a lokális sebezhetőségek összege a hálózati sebezhetőség.



7. ábra. 27 valódi ivóvízhálózat hálózati sebezhetőségének ábrázolása box-plot segítségével, 3 kiugró értéket kiemelve.

5. Tézis

Egy ivóvízhálózat szegmensének lokális sebezhetősége γ_i a meghibásodási valószínűség α_i és a szegmens kiesése esetén ki nem szolgált relatív fogyasztás β_i szorzata: $\gamma_i = \alpha_i \beta_i$. Ezen jellemző sűrűségfüggvénye hatványfüggvény eloszlást mutat.

Kapcsolódó publikációk: [J1], [J3], [J4].

6. Tézis

A hálózati sebezhetőség Γ a súlyozott átlaga a ki nem szolgált relatív fogyasztásoknak β_i , ahol a súlyok a meghibásodási arányok α_i . Ez a paraméter megmutatja a várható értéket a ki nem szolgált relatív fogyasztásoknak egy a hálózatban bekövetkező véletlenszerű csőtörés esetén. A hálózati sebezhetőség a lokális sebezhetőségek összege.

Kapcsolódó publikációk: [J1], [J3], [J4].

Megjelent cikkek

Folyóiratcikkek

- [J1] **Richárd Wéber**, Tamás Huzsvár, Dr. Csaba Hős, Vulnerability analysis of water distribution networks to accidental pipe burst, *Water Research*, 184(1), 2020, doi: 10.1016/j.watres.2020.116178, IF(2019): 9.13
- [J2] **Richárd Wéber**, Dr. Csaba Hős: Efficient Technique for Pipe Roughness Calibration and Sensor Placement for Water Distribution Systems, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 146(1), 2020, doi: 10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001150, IF(2018): 3.404
- [J3] Tamás Huzsvár, **Richárd Wéber**, Dr. Csaba Hős: Analysis of the Segment Graph of Water Distribution Networks. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 63(4):295-300, 2019, doi: 10.3311/PPme.13739
- [J4] **Wéber Richárd**, Huzsvár Tamás, Dr. Hős Csaba: Mire lehet még használni egy ivóvízhálózat hidraulikai modelljét?, *MASZESZ HÍRCSATORNA*, (2):35-43, 2020

Konferenciatickek

- [C1] **Richárd Wéber**, Dr. Csaba Hős: Comparison of sensor placement strategies on water distribution systems in the aspect of roughness calibration, *11 th Eastern European Young Water Professionals Conference*, Prague, 2019.10.01.-2019.10.05., Water for All, Water for Nature, Reliable Water Supply, Wastewater, Treatment and Reuse, (2019)
- [C2] **Richárd Wéber**, Dr. Csaba Hős: Opimal measurement layout on water distribution system, *10 th Eastern European Young Water Professionals Conference*, Zagreb, 2018.05.07.-2018.05.13., New Technologies in Water Sector, (2018)
- [C3] **Wéber Richárd**, Dr. Hős Csaba: Optimális mérési elrendezés vízhálózaton, *XXVI. Nemzetközi Gépészeti Találkozó OGÉT*, Marosvásárhely, 2018.04.26.-2018.04.29., (2018)
- [C4] **Wéber Richárd**, Dr. Hős Csaba: Hidraulikus alaphálózatok érzékenység vizsgálata, *XXV. Nemzetközi Gépészeti Találkozó OGÉT*, Déva, 2017.04.27.-2017.04.30., Déva, (2017)

Hivatkozások

- [1] L. A. Rossman, „EPANET 2: users manual,” *Cincinnati US Environmental Protection Agency National Risk Management Research Laboratory*, vol. 38, no. September, p. 200, 2000.

- [2] G. Halász, K. Gergely, and L. Kullmann, *Áramlás a csőhálózatokban*. Budapest: Műegyetem Kiadó, 2002.
- [3] R. C. Mittal and A. Al-Kurdi, „LU-decomposition and numerical structure for solving large sparse nonsymmetric linear systems,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 43, no. 1-2, pp. 131–155, 2002.
- [4] A. L. Barabási, *Network Science*. Cambridge University Press, 2016.
- [5] G. Csardi and T. Nepusz, „igraph Reference Manual,” p. 812, 2012.
- [6] T. Koppel and A. Vassiljev, „Calibration of a model of an operational water distribution system containing pipes of different age,” *Advances in Engineering Software*, vol. 40, no. 8, pp. 659–664, 2009.
- [7] G. Meirelles, D. Manzi, B. Brentan, T. Goulart, and E. Luvizotto, „Calibration Model for Water Distribution Network Using Pressures Estimated by Artificial Neural Networks,” *Water Resources Management*, vol. 31, no. 13, pp. 4339–4351, 2017.
- [8] X. Xie, H. Zhang, and D. Hou, „Bayesian Approach for Joint Estimation of Demand and Roughness in Water Distribution Systems,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 143, no. 8, p. 04017034, 2017.
- [9] A. Khedr, B. Tolson, and S. Ziemann, „Water distribution system calibration: Manual versus optimization-based approach,” *Procedia Engineering*, vol. 119, no. 1, pp. 725–733, 2015.
- [10] K. Du, R.-y. Ding, Z.-h. Wang, Z.-g. Song, B.-f. Xu, M. Zhou, Y. Bai, and J. Zhang, „Direct Inversion Algorithm for Pipe Resistance Coefficient Calibration of Water Distribution Systems,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 144, no. 7, p. 04018027, 2018.
- [11] G. Sanz and R. Pérez, „Comparison of demand calibration in water distribution networks using pressure and flow sensors,” *Procedia Engineering*, vol. 119, no. 1, pp. 771–780, 2015.
- [12] N. C. Do, A. R. Simpson, M. Asce, J. W. Deuerlein, and O. Piller, „Calibration of water demand multipliers in water distribution systems using genetic algorithms,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 142, no. 11, p. 4016044, 2016.
- [13] Q. Zhang, F. Zheng, H.-f. Duan, Y. Jia, T. Zhang, and X. Guo, „Efficient Numerical Approach for Simultaneous Calibration of Pipe Roughness Coefficients and Nodal Demands for Water Distribution Systems,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 144, no. 10, pp. 1–12, 2018.

- [14] T. Gao, „Roughness and Demand Estimation in Water Distribution Networks Using Head Loss Adjustment,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 143, no. 12, p. 04017070, 2017.
- [15] M. Dini and M. Tabesh, „A New Method for Simultaneous Calibration of Demand Pattern and Hazen-Williams Coefficients in Water Distribution Systems,” *Water Resources Management*, vol. 28, no. 7, pp. 2021–2034, 2014.
- [16] K. N. Mallick, I. Ahmed, K. S. Tickle, and K. Lansey, „Determining Pipe Groupings for Water Distribution Networks,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 128, no. April, pp. 130–139, 2002.
- [17] J. Francés-Chust, B. M. Brentan, S. Carpitella, J. Izquierdo, and I. Montalvo, „Optimal placement of pressure sensors using fuzzy DEMATEL-based sensor influence,” *Water (Switzerland)*, vol. 12, no. 2, 2020.
- [18] X. Xie, B. Zeng, and M. Nachabe, „Sampling design for water distribution network chlorine decay calibration,” *Urban Water Journal*, vol. 12, no. 3, pp. 190–199, 2015.
- [19] Q. Zhang, F. Zheng, Z. Kapelan, D. Savic, G. He, and Y. Ma, „Assessing the global resilience of water quality sensor placement strategies within water distribution systems,” *Water Research*, vol. 172, p. 115527, 2020.
- [20] O. Giustolisi, A. Simone, and D. B. Laucelli, „A proposal of optimal sampling design using a modularity strategy,” *Water Resources Research*, vol. 52, no. 8, pp. 6171–6185, 2016.
- [21] F. Soroush and M. J. Abedini, „Optimal selection of number and location of pressure sensors in water distribution systems using geostatistical tools coupled with genetic algorithm,” *Journal of Hydroinformatics*, vol. 21, no. 6, pp. 1030–1047, 2019.
- [22] C. A. Bush and J. G. Uber, „Sampling Design Methods for Water Distribution Model Calibration,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 124, no. 6, pp. 334–344, 1998.
- [23] W. de Schaetzen, G. Walters, and D. Savic, „Optimal sampling design for model calibration using shortest path, genetic and entropy algorithms,” *Urban Water*, vol. 2, no. 2, pp. 141–152, 2000.
- [24] K. Klapcsik, R. Varga, and C. Hos, „Optimal Pressure Measurement Layout Planning in Real-Life Water Distribution Systems,” *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, vol. 62, no. 1, pp. 51–64, 2018.
- [25] M. D. Jolly, A. D. Lothes, L. S. Bryson, and L. Ormsbee, „Research database of water distribution system models,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 140, no. 4, pp. 410–416, 2014.

- [26] H. Hwang and K. Lansey, „Water Distribution System Classification Using System Characteristics and Graph-Theory Metrics,” *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 143, no. 12, p. 04017071, 2017.
- [27] T. Walski, „Water distribution valve topology for reliability analysis.pdf,” *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 42, pp. 21–27, 1993.
- [28] P. Erdős and A. Rényi, „On random graphs I,” *Publicationes Mathematicae*, vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- [29] A. L. Barabási and R. Albert, „Emergence of Scaling in Random Networks,” vol. 286, no. October, pp. 509–512, 1999.
- [30] A. Yazdani, R. A. Otoo, and P. Jeffrey, „Resilience enhancing expansion strategies for water distribution systems: A network theory approach,” *Environmental Modelling and Software*, vol. 26, no. 12, pp. 1574–1582, 2011.
- [31] B. Bollobás and O. Riordan, „The diameter of a scale-free random graph,” *Combinatorica*, vol. 24, no. 1, pp. 5–34, 2004.
- [32] F. Meng, G. Fu, R. Farmani, C. Sweetapple, and D. Butler, „Topological attributes of network resilience: A study in water distribution systems,” *Water Research*, vol. 143, pp. 376–386, 2018.
- [33] M. Maiolo, D. Pantusa, M. Carini, G. Capano, F. Chiaravalloti, and A. Procopio, „A new vulnerability measure for water distribution network,” *Water (Switzerland)*, vol. 10, no. 8, 2018.
- [34] N. Abdel-Mottaleb and T. Walski, „Identifying Vulnerable and Critical Water Distribution Segments,” pp. 329–339, 2020.
- [35] F. Roland, *Ivóvízhálózatok rekonstrukciós stratégiájának kiválasztása térbeli és időbeli meghibásodás modellezéssel*. 2012.
- [36] I. Bogárdi and R. Fülöp, „A spatial probabilistic model of pipeline failures,” *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, vol. 55, no. 2, pp. 161–168, 2011.