KVANTUM ENTRÓPIÁK, RELATÍV ENTRÓPIÁK ÉS KAPCSOLÓDÓ MEGŐRZÉSI PROBLÉMÁK

VIROSZTEK DÁNIEL

Analízis Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Prof. Petz Dénes

Tézisfüzet

2016

1. Bevezetés

A mai értelemben vett valószínűségelmélet alapjait 1933-ban fektette le *Andrej Nyikolajevics Kolmogorov* [23]. A valószínűségszámítás központi objektuma — Kolmogorov megközelítése szerint — a *valószínűségi mező*. A valószínűségi mező nem más, mint egy $(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ hármas, ahol X tetszőleges halmaz, $\mathscr{A}\subseteq P(X)$ egy σ-algebra — itt $P(X)$ az X halmaz hatványhalmazát jelöli — $\mathbf{P}$ pedig egy véges pozitív mérték $\mathscr{A}$-n, amely normált, azaz $\mathbf{P}(X)=1$.

Ez azt jelenti, hogy a valószínűségi mező nem más, mint egy mértéktér, így a valószínűségszámítást akár a mértékelmélet egyik ágának is tekinthetnénk. Másfelől azonban a valószínűségelmélet struktúrája gazdagabb, mint a mértékelméleté, abban az értelemben, hogy jónéhány mértékelméleti fogalom intuitív jelentést nyer a valószínűségelméletben. Említsünk meg néhány ilyen fogalmat a teljesség igénye nélkül.

Az egyik legalapvetőbb koncepció, hogy a *mérhető halmazokat eseményeknek* tekintjük. Továbbá egy mérhető $f:(X,\mathscr{A})\to(\mathbb{K},\mathscr{B})$ függvényt valós vagy komplex *valószínűségi változónak* nevezünk, attól függően, hogy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Ennek megfelelően az f mérhető függvény $\int_X f\mathrm{d}\mathbf{P}$ *Lebesgue integrálját várható értéknek* hívjuk — ha létezik. Mivel a $\mathbf{P}$ mérték véges, viszonylag egyszerűen lehet egy mérhető függvény integrálhatóságát garantálni. Ha f lényegében korlátos, azaz $\mathbf{P}\left(\{x\in X:\left|f(x)\right|>K\}\right)=0$ valamely K pozitív szám esetén, akkor f integrálható, sőt, f bármely hatványa integrálható. Ez utóbbi tény azért érdekes, mert az $\int_X f^k\mathrm{d}\mathbf{P}$ integrált az f valószínűségi változó *k-adik momentumának* nevezzük, s így éppen azt láttuk, hogy a korlátosság garantálja az összes momentum létezését.f Jelölje $L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ a lényegében korlátos mérhető komplex függvények halmazát az $(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Vezessük be a következő jelölést:

$$L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P})=\left\{f:X\to\mathbb{C}\,\middle|\,f\text{ mérhető és }\int_X\left|f\right|^2\mathrm{d}\mathbf{P}<\infty\right\}.$$

Világos, hogy $L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ Hilbert tér az $\langle f,g\rangle=\int_X\overline{f}g\mathrm{d}\mathbf{P}$ belső szorzattal. Valamennyi korlátos mérhető $f:X\mapsto\mathbb{C}$ függvény meghatároz egy korlátos lineáris operátort az $L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ Hilbert téren a következőképpen. Legyen $f\in L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$. Definiáljuk az M_f *szorzásoperátort* az

$$M_f:L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P})\to L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P}),\ g\mapsto M_f(g):=fg$$

módon. Egyszerű számolás mutatja, hogy M_f lineáris, és M_f korlátosságának bizonyítása sem nehéz. így valamennyi $f\in L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ függvény esetén $M_f\in\mathscr{B}\left(L^2(X,\mathscr{A},\mathbf{P})\right)$. Továbbá M_f operátor-normája megegyezik

f szuprémum-normájával, vagyis $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. Ez utóbbi tényt ugyancsak nem nehéz igazolni. Az

$$M : L^\infty(X, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathscr{B}\left(L^2(X, \mathscr{A}, \mathbf{P})\right),\ f \mapsto M_f \tag{1}$$

leképezés az $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ függvényalgebra kanonikus izometrikus beágyazása a $\mathscr{B}\left(L^2(X, \mathscr{A}, \mathbf{P})\right)$ operátoralgebrába, amely messze nem kommutatív általában. Ez a beágyazás a valószínűségelmélet nemkommutatív általánosításának kiindulópontja.

1.1. A nemkommutatív valószínűségelmélet alapjai

1. Definíció (Normált algebra)**.** *Ha $\mathscr{A}$ egy egységelemes komplex algebra, amelyen értelmezünk egy $\|.\|$ normát, amely szubmultiplikatív, azaz $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ teljesül valamennyi $a, b \in \mathscr{A}$ elemre, és az egységelem normája* 1, *akkor $\mathscr{A}$-t* normált algebrának *nevezzük.*

2. Definíció (Banach algebra)**.** *Ha egy normált algebra ráadásul Banach tér — vagyis a normára nézve teljes, — akkor* Banach algebrának *nevezzük.*

3. Definíció (Involúció)**.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy komplex algebra. Egy $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $a \mapsto a^*$ leképezést* involúciónak *nevezünk, ha kielégíti a következő feltételeket.*

- *$*$ antilineáris: $(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^*$ valamennyi $a, b \in \mathscr{A}$ elemre és $\lambda \in \mathbb{C}$ számra.*
- $*^2 = \mathrm{id}$, *azaz $(a^*)^* = a$ minden $a \in \mathscr{A}$ esetén.*
- *$*$ antihomomorfizmus az algebra szorzatra nézve: $(ab)^* = b^* a^*$ valamennyi $a, b \in \mathscr{A}$ esetén.*

4. Definíció (C^*-algebra)**.** *Ha egy Banach algebrát ellátunk egy $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ involúcióval, amelyre teljesül, hogy $\|a^* a\| = \|a\|^2$ minden $a \in \mathscr{A}$ esetén, akkor a kapott struktúrát* C^*-algebrának *nevezzük.*

A C^*-algebrának ez az iménti definíciója absztraktnak tűnhet. Azonban nem veszítünk az általánosságból, ha a C^*-algebra elemeire úgy tekintünk, mint valamilyen Hilbert tér korlátos lineáris operátoraira. Valóban, minden C^*-algebra izomorf egy megfelelő $\mathscr{H}$ Hilbert tér $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátor-algebrájának egy — a norma topológiában — zárt egységelemes *-részalgebrájával. Továbbá minden kommutatív C^*-algebra izomorf valamely X kompakt Hausdorff tér $C(X)$ függvényalgebrájával. (A $C(X)$ szimbólum az X-en értelmezett folytonos komplex értékű függvények algebráját jelöli.)

A fenti figyelemreméltó tények ellenére a C^*-algebra még mindig egy kicsit túl általános struktúra ahhoz, hogy a nemkommutatív valószínűségszámítás koncepcióit formalizáljuk benne. Azonban egy topológiai feltétel segítségével eljutunk az általánosság kívánatos szintjére.

5. Definíció (Neumann algebra)**.** *Ha egy C^*-algebra nemcsak az operátornormában, hanem a gyenge operátor topológiában is zárt, akkor* Neumann algebrának *nevezzük.*

Az iménti definíció korrekt, hiszen minden C^*-algebra izomorf valamely $\mathscr{H}$ Hilbert tér korlátos lineáris operátorainak egy részalgebrájával, így értelmes dolog a gyenge operátor topológiában való zártságról beszélni. Ezt a topológiát $\mathscr{B}(\mathscr{H})$-n a $\{p_{x,y} : x, y \in \mathscr{H}\}$ félnormacsalád indukálja, ahol $p_{x,y}(A) = |\langle Ax, y\rangle|$ $(A \in \mathscr{B}(\mathscr{H}))$.

Most már meg tudjuk válaszolni azt a kérdést, hogy *miért hívjuk a Neumann algebrák elméletét gyakran nemkommutatív valószínűségelméletnek.*

Az világos, hogy az $L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ függvénytér kommutatív Banach algebra akármilyen $(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ valószínűségi mező esetén. Továbbá könnyű látni, hogy ezek a Banach algebrák C^*-algebrák is a komplex konjugálással mint involúcióval. Köztudott, hogy $L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ éppen az $L^1(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ Banach tér Banach duálisa, ahol $L^1(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ a következőképpen van definiálva:

$$L^1(X,\mathscr{A},\mathbf{P}) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ mérhető és } \int_X |f| \,\mathrm{d}\mathbf{P} < \infty \right\}.$$

úgyhát $L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ egy kommutatív C^*-algebra, amely az $L^1(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ Banach tér duálisa. Ebből következik, hogy $L^\infty(X,\mathscr{A},\mathbf{P})$ kommutatív Neumann algebra. Az igazán érdekes az, hogy a fordított állítás szintén igaz, vagyis minden kommutatív Neumann algebra izomorf az $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$ algebrával valamely $(X,\mathscr{S},\mu)$ lokalizálható mértéktér esetén [34]. (A localizálható mértéktér fogalom véges mértékterek direkt összegét jelöli.)

Láttuk tehát, hogy minden valószínűségi mező meghatároz egy kommutatív Neumann algebrát — a korlátos valószínűségi változók algebráját — és minden kommutatív Neumann algebra meghatároz egy valószínűségi mezőt, normálástól eltekintve. Ez az oka annak, hogy a Neumann algebrák elméletét nemkommutatív valószínűségelméletként is szokás említeni.

2. A FŐ EREDMÉNYEK

Az előző fejezetet a valószínűségi mezők és a kommutatív Neumann algebrák közti összefüggés vázolásával zártuk. Szerencsére a valószínűségszámítás számtalan érdekes fogalma értelmezhető a nemkommutatív környezetben is. A továbbiakban két kitüntetett fogalomra fogunk fókuszálni, a *kovarianciára* és az *entrópiára.*

2.1. Kvantum kovarianciák felbonthatósága([4]) A következő problémát fogjuk vizsgálni: tudjuk-e valamilyen kompakt módon karakterizálni a *megfigyelhető mennyiségek* azon halmazait, melyekre az indukált kovariancia függvény *fedél (roof)*? (A *fedél* mint matematikai fogalom a 7. Definícióban van definiálva.) érdemes megjegyezni, hogy ez a kérdés nem érdekes kommutatív Neumann algebrák esetén, a következők miatt. Ismert, hogy egy kommutatív Neumann algebra minden *tiszta állapota* multiplikatív [21, 4.4.1. Prop.]. így bármelyik két megfigyelhető mennyiség kovarianciája zérus bármelyik tisza állapotban. Tehát a kovariancia függvény csak abban az esetben lehetne fedél, ha azonosan zérus lenne, ez viszont csak triviális valószínűségi mezőre teljesül.

Legyen $\mathscr{A}$ egy I_n típusú Neumann algebra, és legyen ϕ be egy — szükségszerűen normális — állapot on $\mathscr{A}$-n. Az $A, B \in \mathscr{A}$ önadjungált elemek *kovarianciája* a

$$\mathrm{Cov}_\phi (A, B) = \phi(AB) - \phi(A)\phi(B).$$

egyenlettel adott.

Egy A megfigyelhető mennyiség (az önadjungált elemeket gyakran megfigyelhető mennyiségeknek nevezzük) *varianciája* (vagy szórásnégyzete) a ϕ állapotban az

$$\mathrm{Var}_\phi(A) = \mathrm{Cov}_\phi(A, A) = \phi\left(A^2\right) - \left(\phi(A)\right)^2.$$

egyenlettel van definiálva. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\mathrm{Var}_\phi(A + \lambda I_{\mathscr{A}}) = \mathrm{Var}_\phi(A) \qquad (A \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{R})$$

igaz minden ϕ állapotra.

Több megfigyelhető mennyiség esetén hasznos bevezetni a *covariancia mátrix* fogalmát. Ha $A_1, \dots A_r$ az $\mathscr{A}$ algebra önadjungált elemei, akkor a kovariancia mátrixuk a következőképpen definiált:

$$\left[\mathbf{Cov}_\phi (A_1, \dots, A_r)\right]_{i,j} := \mathrm{Cov}_\phi \left(A_i, A_j\right) \qquad (1 \le i, j \le r).$$

Vegyük észre, hogy egy kovariancia mátrix szükségképpen önadjungált, hiszen $\phi\left(A_i A_j\right) = \overline{\phi\left(A_j A_i\right)}$.

A kovariancia egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy konkáv az állapotokon, azaz a

$$\mathbf{Cov}_{(.)} (A_1, \dots, A_r) : \mathscr{S}_{\mathscr{A}} \to \mathbf{M}_r^{sa}; \phi \mapsto \mathbf{Cov}_\phi (A_1, \dots, A_r) \tag{2}$$

leképezés konkáv a *Löwner* (szemidefinit) rendezésre nézve az $\mathbf{M}_r$ érkező téren.

Mivel az $\mathscr{A}$ Neumann algebránk I_n típusú — vagyis izomorf a $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátor algebrával, ahol $\mathscr{H}$ az n-dimenziós complex Hilbert tér, — valamennyi állapotnak egyértelműen megfeleltethető egy sűrűségi operátor. Az egyszerűség kedvéért a következő jelölést fogjuk használni. Ha aϕ állapotot a D sűrűségi operátor reprezentálja, akkor $\mathrm{Cov}_D(.,.) := \mathrm{Cov}_\phi(.,.)$, és így tovább, $\mathrm{Var}_D(.) := \mathrm{Var}_\phi(.)$ és $\mathbf{Cov}_D(.,.,\dots,.) := \mathbf{Cov}_\phi(.,.,\dots,.)$.

Ezzel a jelöléssel a kovariancia mátrix leképezés imént említett konkavitása (2) így írható:

$$\mathbf{Cov}_D(A_1,\dots,A_r) \geq \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{Cov}_{D_k}(A_1,\dots,A_r) \quad \text{ha} \quad D = \sum_{k=1}^m \lambda_k D_k,$$

ahol $\lambda_k \geq 0$ és $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$.

Egy egyenlőtlenséggel kapcsolatban mindig érdekes megvizsgálni, hogy mikor teljesül egyenlőséggel. Az iménti konkavitási egyenlőtlenség esetében az egyenlőség vizsgálatában egy nemrég bevezetett fogalom, a *fedél (roof)* lesz segítségünkre.

6. Definíció (Fedél pont (roof point))**.** *Legyen Ω egy véges dimenziós valós lineáris tér egy kompakt, konvex részhalmaza. Legyen G egy leképezés Ω-ról egy részben rendezett halmazba. Azt mondjuk, hohy egy $\omega \in \Omega$ pont* fedél pont (roof point), *ha léteznek olyan $\pi_1,\dots,\pi_m$ extremális pontjai Ω-nak és léteznek olyan nemnegatív $p_1,\dots,p_m$ számok ($\sum_{k=1}^m p_k = 1$), melyekre*

$$\sum_{k=1}^m p_k \pi_k = \omega$$

és

$$\sum_{k=1}^m p_k G(\pi_k) = G(\omega)$$

teljesülnek.

7. Definíció (Fedél (roof))**.** *Egy, az Ω halmazon definiált G leképezést* fedélnek (roof) *nevezünk, ha minden $\omega \in \Omega$ fedél pont.*

Mivel $\mathscr{A}$ véges dimenziós, a sűrűségi operátorok halmaza az $\mathscr{A}$ önadjungált elemei alkotta véges dimenziós valós vektortérnek egy kompakt, konvex részhalmaza. A következő kérdést szeretnénk megválaszolni. *Igaz-e, hogy a* (2) *konkáv leképezés fedél az $\mathscr{S}_{\mathscr{A}}$ halmazon?* Jól ismert, hogy a sűrűségi operátorok halmazának extremális pontjai éppen az egyrangú projekciók. így át tudjuk fogalmazni a kérdésünket a következőképpen. Ha adott egy tetszőeges D sűrűség, tudunk-e hozzá találni $P_1,\dots,P_m$ egyrangú projekciókat és $p_1,\dots,p_m$ nemnegatív súlyokat ($\sum_{k=1}^m p_k = 1$) úgy, hogy

$$D = \sum_{k=1}^m p_k P_k \tag{3}$$

és

$$\mathbf{Cov}_D(A_1,\dots,A_r) = \sum_{k=1}^m p_k \mathbf{Cov}_{P_k}(A_1,\dots,A_r)$$

teljesüljenek? (A (3) felbontást a D operátor egy *extrém konvex felbontásának* nevezzük.)

Az $r = 1$ esetben a válasz pozitív, és ez a témával kapcsolatos első eredmény, *Petz* és *Tóth* munkája [33]. Ezt az eredményt általánosította később *Petz* és *Léka* azáltal, hogy megmutatták: az $r = 2$ esetben is pozitív választ kapunk a kérdésre [25]. Mi egy szükséges és elégséges feltételt adunk a (2) kovariancia függvény *fedélségére*a megfelelő megfigyelhető mennyiségek segítségével. Ez az eredmény megfigyelhető mennyiségek tetszőleges véges halmazára érvényes, és könnyen látható módon általánosítja az imént említett két korábbi eredményt.

Elevenítsük föl, hogy az $\mathscr{A}$ Neumann algebránk izomorf a $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátor-algebrával, ahol $\mathscr{H}$ egy n-dimenziós Hilbert-tér. Tetszőleges $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ altér esetén jelölje $Q^{\mathscr{K}}$ a $\mathscr{K}$ altérre vetítő merőleges projekciót. Legyen

$$A^{\mathscr{K}} := Q^{\mathscr{K}} A Q^{\mathscr{K}}$$

minden $A \in \mathscr{A}$ elemre, és

$$\mathscr{B}(\mathscr{K}) := Q^{\mathscr{K}} \mathscr{B}(\mathscr{H}) Q^{\mathscr{K}}, \qquad \mathscr{B}^{sa}(\mathscr{K}) := Q^{\mathscr{K}} \mathscr{B}^{sa}(\mathscr{H}) Q^{\mathscr{K}},$$

$$\mathscr{B}^{+}(\mathscr{K}) := Q^{\mathscr{K}} \mathscr{B}^{+}(\mathscr{H}) Q^{\mathscr{K}}, \qquad \mathscr{S}(\mathscr{K}) := \{X \in \mathscr{B}^{+}(\mathscr{K}) : \operatorname{Tr} X = 1\}.$$

8. Definíció. *Legyen* $\{A_1, \dots, A_r\}$ *az* $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *algebra önadjungált elemeinek egy halmaza. Azt mondjuk, hogy* $\{A_1, \dots, A_r\}$ variancia-felbontható, *ha minden* $D \in \mathscr{S}_{\mathscr{A}}$ *sűrűségnek létezik olyan*

$$D = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$$

extrém konvex felbontása, melyre

$$\mathbf{Cov}_D(A_1, \dots, A_r) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{Cov}_{P_k}(A_1, \dots, A_r)$$

teljesül.

Vagis $\{A_1, \dots, A_r\}$ pontosan akkor variancia-felbontható, ha a $D \mapsto \mathbf{Cov}_D(A_1, \dots, A_r)$ függvény fedél. A karakterizáló tételünk a következő.

9. Tétel. *Az* $\{A_1, \dots, A_r\} \subset \mathscr{A}$ *halmaz pontosan akkor variancia-felbontható, ha*

$$\dim\left(\operatorname{span}\left\{I^{\mathscr{K}}, A_1^{\mathscr{K}}, \dots, A_r^{\mathscr{K}}\right\}\right) < (\dim \mathscr{K})^2 \tag{4}$$

valamennyi legalább kétdimenziós $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ *altérre.*

2.2. Az erős szubadditivitással kapcsolatos egyenlőtlenségek Tsallis entrópiákra ([5]**)** Ebben az alfejezetben az entrópia erős szubadditivitását vizsgáljuk. Nem triviális, de azért egyszerű számolások mutatják, hogy a *Shannon entrópia* erősen szubadditív. Egy jóval szofisztikáltabb gondolatmenet mutatja, hogy a Shannon entrópia nemkommutatív megfelelője, a *Neumann entrópia* is erősen szubadditív. Ez utóbbi tétel *Lieb* és *Ruskai* híres eredménye [26]. Mi a *Tsallis entrópiát* vizsgáljuk, amely a Neumann-entrópiának egy egyparaméteres általánosítása. Többek között megmutatjuk, hogy a Tsallis entrópia nem erősen szubadditív nemkommutatív Neumann algebrák esetén. Ez az eredmény abból a szempontból is érdekes, hogy a kommutatív esetben a Tsallis entrópia is erősen szubadditív [18, Thm 3.4], sőt a nemkommutatív esetben is legalább additív [9].

Legyen $\mathscr{A}$ egy I_n típusú Neumann-algebra, és jelöljük $\mathscr{H}$-val az $\mathscr{A}$-hoz tartozó n-dimenziós Hilbert-teret. (Azaz $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$.) Legyen ρ egy sűrűségi operátor, amely egy állapotot rerezentál $\mathscr{A}$-n. Vegyük észre, hogy ebben az esetben $\rho \in \mathscr{A}$, és az $f(\rho)$ kifejezés értelmes a folytonos függvénykalkulus szerint minden olyan f komplex függvényre, amely folytonos a ρ spektrumán. Egy ρ sűrűségi operátor Neumann entrópiája a

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho\ln\rho \tag{5}$$

egyenlettel adott [12, 20, 32]. Legyen a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér háromvéges dimenziós Hilbert-tér tenzorszorzata, vagyis $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \mathscr{H}_3$. Legyen $\rho_{123} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ egy sűrűségi operátor. A *redukált sűrűségeket* a parciális nyom segítségével definiáljuk. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$\rho_{12} := \mathrm{Tr}_3\,\rho_{123}, \qquad \rho_2 := \mathrm{Tr}_1\,\rho_{12}, \qquad \rho_{23} := \mathrm{Tr}_1\,\rho_{123}. \tag{6}$$

Mivel a mi esetünkben az állapotok egy-egyértelmű módon megfeleltethetők a sűrűségi operátoronak, a sűrűségeket néha állapotoknak fogjuk hívni, és ennek megfelelően a redukált sűrűségekre olykor redukált állapotokként hivatkozunk.

A kvantum információ-elmélet egyik legfontosabb eredménye a Neumann entrópia erős szubadditivitása, amely a következő alakban írható:

$$S(\rho_{123}) + S(\rho_2) \le S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}).$$

Ez az eredmény E. Lieb és M. B. Ruskai 1973-as munkája [26, 32]. A célunk, hogy ezt az egyenlőtlenséget általánosítsuk különböző módokon. A vizsgálatunk kulcsfontosságú objektuma a Tsallis-entrópia, amely a Neumann-entrópia egyparamteres kiterjesztése.

Tetszőleges q valós paraméter esetén a így definiáljuk az $\ln_q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ deformált logaritmus (vagy q-logaritmus) függvényt:

$$\ln_q x := \int_1^x t^{q-2} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{x^{q-1}-1}{q-1} & \text{ha } q \neq 1, \\ \ln x & \text{ha } q = 1. \end{cases} \tag{7}$$

A származtatott

$$S_q(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho \ln_q \rho$$

mennyiséget hívjuk Tsallis entrópiának [8, 16]. érdemes a $0 < q$ esetre szorítkozni, hiszen $\lim_{x\to 0^+} -x\ln_q x = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $0 < q$. Ha bevezetjük az $f_q(x) = x\ln_q x$ jelölést, a Tsallis entrópia az $S_q(\rho) = -\mathrm{Tr} f_q(\rho)$ alakban írható.

2.2.1. A Tsallis entrópia szubadditív, de nem erősen szubadditív. Legyenek $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ véges dimenziós Hilbert-terek. Ha ρ_{12} egy állapot a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-téren — azaz $\rho_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, és $0 \le \rho_{12}$, valamint $\mathrm{Tr}\,\rho_{12} = 1$, — akkor a redukált sűrűségei a $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho_{12}$ és a $\rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho_{12}$ egyenletekkel adottak a $\mathcal{H}_1$ és a $\mathcal{H}_2$ Hilbert-tereken.A Tsallis entrópia szubadditivitása az

$$S_q(\rho_{12}) \le S_q(\rho_1) + S_q(\rho_2) \tag{8}$$

egyenlőtlenség, amelyet Audenaert bizonyított 2007-ben $q > 1$ paraméterértékekre [9].

Ennek ellenére, az erős szubadditivitási egyenlőtlenség, amely az

$$S_q(\rho_{123}) + S_q(\rho_2) \le S_q(\rho_{12}) + S_q(\rho_{23}) \tag{9}$$

alakban írható, nem igaz általában.

10. Tétel. *Az egyetlen erősen szubadditív Tsallis-entrópia a Neumann-entrópia, vagyis a Tsallis entrópia csak a $q = 1$ paraméterérték esetén erősen szubadditív.*

Ezért az a célunk, hogy egy

$$S_q(\rho_{123}) + S_q(\rho_2) \le S_q(\rho_{12}) + S_q(\rho_{23}) + g_q(\rho_{123}), \tag{10}$$

alakú egyenlőtlenséget igazoljunk, ahol $g_1(\rho_{123}) = 0$. Egy ilyen eredmény az erős szubadditivitás általánosításának tekinthető.

A Neumann-entrópia erős szubadditivitása az Umegaki-féle relatív entrópia monotonitásából vezethető le, amely egy speciális kvázi-entrópia [15, 31]. Ezért hasznos lehet az erős szubadditivitási egyenlőtlenséget kvázi-entrópiák segítségével megfogalmazni. Erről szól a következő tétel.

11. Tétel. *Legyen ρ_{123} a $\mathcal{B}^{++}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$ kúp egy eleme. A Tsallis-entrópia erős szubadditivitása (9) ekvivalens az*

$$S^{U}_{-\ln_q}\left(\rho_{123}\,||\,\rho_{12}\otimes I_3\right) \geq S^{V}_{-\ln_q}\left(\rho_{23}\,||\,\rho_2\otimes I_3\right) \tag{11}$$

egyenlőtlenséggel, ahol

$$U = \rho_{123}^{\frac{1}{2}(q-1)}, \qquad V = \rho_{23}^{\frac{1}{2}(q-1)}. \tag{12}$$

Az előző tételt felhasználva levezettük a következő egyenlőtlenséget, amely (10) alakú.

12. Tétel. *Tetszőleges $0 < q \leq 2$ paraméterérték esetén*

$$S_q(\rho_{12}) + S_q(\rho_{23}) - S_q(\rho_{123}) - S_q(\rho_2)$$

$$\geq (q-1)\left(S_{\ln_q}^{(-\ln_q \rho_{123})^{\frac{1}{2}}}\left(\rho_{123}||\rho_{12}\otimes I_3\right) - S_{\ln_q}^{(-\ln_q \rho_{23})^{\frac{1}{2}}}\left(\rho_{23}\,||\,\rho_2\otimes I_3\right)\right)$$

teljesül.

Továbbá találtunk egy, a ρ_{123} állapot szerkezetére vonatkozó elégséges feltételt, ami garantálja az erős szubadditivitást bizonyos állapotokra.

13. Tétel. *Ha ρ_{123} és $I_1 \otimes \rho_{23}$ kommutálnak, és (a $\rho_{123} = \sum_j \lambda_j \left|\varphi_j\right\rangle\left\langle\varphi_j\right|$ és a $\rho_{12}\otimes I_3 = \sum_k \mu_k \left|\psi_k\right\rangle\left\langle\psi_k\right|$ jelöléseket használva) $\lambda_j \leq \mu_k$, ha $\langle\psi_k|\varphi_j\rangle \neq 0$, akkor bármely $1 \leq q \leq 2$ paraméterre az erős szubadditivitás*

$$S_q(\rho_{123}) + S_q(\rho_2) \leq S_q(\rho_{12}) + S_q(\rho_{23})$$

teljesül.

Vegyük észre, hogy ha ρ_{123} egy klasszikus valószínűségi eloszlás (azaz $\rho_{123} = \mathrm{Diag}(\{p_{jkl}\})$), akkor a 13. Tétel feltételei nyilván teljesülnek.

2.3. Bregman divergenciák együttes konvexitása ([6]) Ebben az alfejezetben bevezetjük a *Bregman divergenciákat* amelyek az *Umegaki relatív entrópia* egyfajta általánosításainak tekinthetők. Karakterizáljuk a Bregman divergenciák együttes konvexitását, és ennek az eredménynek a segítségével levezetünk egy éles egyenlőtlenséget, amely a Neumann-entrópia erős szubadditivitásának egy általánosítása.

Matematikai objektumok különbözőségének mérésére számtalan hasznos divergenciafogalom létezik. A divergenciák fontos osztályát alkotják a metrikák, de sok olyan fontos távolság-mérték is van, amely nem metrika. Ilyen például a négyzetes hiba függvény, amelyet a regresszió-analízisben használnak előszeretettel, vagy a Kullback-Leibler divergencia [24], amely két valószínűségi sűrűségfüggvény különbözőségének a mérésére szolgál. A Bregman divergenciát Lev Bregman [13] vezette be $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ konvex függvényekre (a gradienst $\nabla\phi$-vel jelöljük), úgy mint a

d-dimenziós $p, q \in \mathbb{R}^d$ vektorok különbözőségének ϕ-függő nemnegatív mértékét:

$$D_\phi(p,q) = \phi(p) - \phi(q) - \langle \nabla\phi(q), p - q\rangle. \tag{13}$$

A motiváció a konvex programozásból származott, de a Bregman divergenciákat ennél a diszciplinánál jóval szélesebb körben kezdték el alkalmazni. A fogalom jelentőségét mutatja az is, hogy valamennyi, eddig említett divergencia a Bregman divergenciák családjába tartozik [10].

2.3.1. Definíció és alapvető tulajdonságok Legyen $\mathcal{H}$ egy véges dimenziós Hilbert-tér, legyen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Az indukált

$$\varphi_f : \mathcal{B}^{++}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}, \ \ X \mapsto \varphi_f(X) := \operatorname{Tr} f(X)$$

leképezés szintén konvex [15]. Egy differenciálható konvex függvény alulról becsülhető az elsőfokú Taylor polinomjával, bázisponttól függetlenül. így a

$$\varphi_f(X) - \varphi_f(Y) - \mathbf{D}\varphi_f[Y](X-Y),$$

kifejezés, ahol $\mathbf{D}\varphi_f[Y]$ jelöli a φ_f függvény Fréchet deriváltját az Y pontban, nemnegatív tetszőleges $X, Y \in \mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$ esetén. A nyom linearitása miatt minden $Y \in \mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$ esetén $\mathbf{D}\varphi_f[Y] = \operatorname{Tr} \circ \mathbf{D} f[Y]$, ahol $\mathbf{D} f[Y]$ jelöli az $f : \mathcal{B}^{++}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}^{sa}(\mathcal{H})$ sztenderd operátor függvény Fréchet deriváltját az Y pontban. Most definiáljuk a vizsgálatunk tárgyát teljesen precízen.

Definíció. *Legyen $f \in C^1((0,\infty))$ egy konvex függvény és legyen $X, Y \in \mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$. Az X és Y elemek Bregman f-divergenciája a következőképpen van definiálva:*

$$H_f(X,Y) = \operatorname{Tr}\big(f(X) - f(Y) - \mathbf{D} f[Y](X-Y)\big). \tag{14}$$

Mivel f konvex, világos, hogy a Bregman-divergencia konvex az első változójában. Az eredeti Bregman-divergenciáról (13) Bauschke és Borwein megmutatták [11], hogy D_ϕ pontosan akkor együttesen konvex, azaz

$$D_\phi(tp_1 + (1-t)p_2, tq_1 + (1-t)q_2) \le tD_\phi(p_1,q_1) + (1-t)D_\phi(p_2,q_2),$$

ahol $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]$ — pontosan akkor teljesül, ha a ϕ Hesse-mátrixának inverze konkáv a Löwner-féle rendezésre nézve. Például, ha ϕ egy $\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, akkor D_ϕ pontosan akkor együttesen konvex, ha $1/\phi''$ konkáv. Ezen eredmény ismeretében érdekes lehet a következő karakterizáció.

14. Tétel. *Legyen $f \in C^2((0,\infty))$ konvex függvény, melyre $f'' > 0$ teljesül a $(0,\infty)$ intervallumon. A következő állítások ekvivalensek.*

(1) *A*

$$\mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}\left(\mathscr{B}^{sa}(\mathscr{H})\right); \quad X \mapsto \left(\mathbf{D}f'[X]\right)^{-1}$$

leképezés operátor konkáv.

(2) *A*

$$H_f : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to [0,\infty); \quad (X,Y) \mapsto H_f(X,Y)$$

Bregman f-divergencia együttesen konvex.

Ezenkívül egy elégséges feltételt is sikerült találni a Bregman f-divergencia együttes konvexitására.

15. Tétel. *Legyen $f \in C^2((0,\infty))$ konvex függvény. Ha f'' is operátor konvex és (mint valós-valós függvény) nemnövekvő, akkor a*

$$H_f : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \times \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to [0,\infty); \quad (X,Y) \mapsto H_f(X,Y)$$

Bregman f-divergencia együttesen konvex.

Az előző tétel alkalmazásaként levezettünk egy, a Tsallis entrópiára vonatkozó éles egyenlőtlenséget, amely általánosítja a Neumann-entrópia erős szubadditivitását.

16. Tétel. *Ha $\mathscr{H}_i$ véges dimenziós Hilbert-tér ($i \in \{1,2,3\}$), $d_i = \dim \mathscr{H}_i$, $1 \le q \le 2$, akkor minden $\rho_{123} \in \mathscr{B}^+(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \mathscr{H}_3)$ operátorra a*

$$d_3^{1-q} \operatorname{Tr} \rho_{12}^q + d_1^{1-q} \operatorname{Tr} \rho_{23}^q \le \operatorname{Tr} \rho_{123}^q + (d_1 d_3)^{1-q} \operatorname{Tr} \rho_2^q. \tag{15}$$

egyenlőtlenség teljesül.

2.4. Bregman- és Jensen-divergenciákat őrző leképezések ([1]) Könnyű látni, hogy pozitív operátorok Bregman-divergenciái invariánsak az unitér konjugálásra nézve. Ugyancsak nem nehéz belátni, hogy nem csak az unitér konjugálások őrzik meg a Bregman-divergenciákat. Természetesen adódik a kérdés, hogy mik is azok a transzformációk, amelyekre nézve a Bregman divergenciák invariánsak. Ez a kérdés elvezet minket a *megőrzési problémák* rendkívül széles témaköréhez.

Egy megőrzési probléma a következőképpen néz ki. Legyen H egy tetszőleges halmaz. Legyen $\phi : H \to H$ egy leképezés. Legyen m pozitív egész szám, K egy halmaz, és $X : H^m \to K$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy a ϕ transzformáció *megőri* X-et, ha vagy

$$X\left(\phi(A_1),\dots,\phi(A_m)\right) = X(A_1,\dots,A_m) \qquad (A_1,\dots,A_m \in H), \tag{16}$$

vagy pedig

$$X\left(\phi(A_1),\dots,\phi(A_m)\right) = \phi\left(X(A_1,\dots,A_m)\right) \qquad (A_1,\dots,A_m \in H) \tag{17}$$

teljesül — attól függően, hogy milyen leképezés az X. (A (17) egyenlet csak akkor jöhet szóba, ha $K = H$.) Adott H, K és X esetén a *megőrzési* *probléma* megoldása nem más, mint megkeresni azokat a ϕ transzformációkat, amelyek megőrzik X-et. Az alábbi táblázat bemutat néhány megőrzési problémát.

H	m	K	X	Egyenlet	A probéma neve
$\mathbb{R}^n$	2	$[0,\infty)$	$(a,b)\mapsto \\|a-b\\|$	(16)	$\mathbb{R}^n$ izometriái
$\mathbf{M}_n$	1	$\mathbb{C}$	$A\mapsto \mathrm{Det} A$	(16)	determinánsőrző leképezések
$\mathbf{M}_n^{sa}$	2	$\{0,1\}$	$(A,B)\mapsto \mathbb{1}_{A\leq B}$	(16)	rendezéstartó leképezések
$\mathbf{M}_n^{++}$	2	$\mathbf{M}_n^{++}$	$(A,B)\mapsto ABA$	(17)	hármasszorzat-tartó leképezések
$\mathbf{M}_n^{+}$	2	$[-\infty,\infty]$	$(A,B)\mapsto S_f(A,B)$	(16)	Kvantum f-divergencia megőrzői
$\mathbf{M}_n^{++}$	m	$\mathbf{M}_n^{++}$	$(A_1,\dots,A_m)\mapsto M_G(A_1,\dots,A_m)$	(17)	Többvált. geom. közép őrzői

A fenti felsorolásból is látható, hogy a megőrzési problémák igen sokfélék lehetnek. (A táblázatban $\mathbf{M}_n$ ($\mathbf{M}_n^{sa},\mathbf{M}_n^{+},\mathbf{M}_n^{++}$) jelöli a $n\times n$-es komplex (önadjungált, pozitív szemidefinit, pozitív definit) mátrixok halmazát.)

A megőrzési problémák világát *Lajos Molnár* monográfiája [29] mutatja be rendkívül részletesen.

Legyen $\mathcal{H}$ egy véges dimenziós Hilbert-tér. Ha f egy differenciálható konvex függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, akkor a hozzá tartozó Bregman f-divergencia a

$$H_f(X,Y)=\mathrm{Tr}\big(f(X)-f(Y)-f'(Y)(X-Y)\big),\quad X,Y\in\mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$$

módon van definiálva a $\mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$ kúpon. Ha $\lim_{x\to 0+} f(x)$ és $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ léteznek, akkor f és f' is kiterjeszthetők folytonos módon a $[0,\infty)$ intervallumra, és ekkor a Bregman f-divergencia jóldefiniált pozitív szemidefinit operátorok esetén is. Ha f egy konvex függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, és $\lambda\in(0,1)$ adott, akkor a Jensen $\lambda-f$-divergencia a

$$J_{f,\lambda}(X,Y)=\mathrm{Tr}\big(\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)-f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\big).$$

egyenlettel adott $\mathcal{B}^{++}(\mathcal{H})$-n. Ha $\lim_{x\to 0+} f(x)$ létezik, akkor a Jensen $\lambda-f$-divergencia jól definiált pozitív szemidefinit operátorok esetén is.

A fő eredményeink a Bregman- és Jensen-divergenciákat megőrző transzformációkról így szólnak.

17. Tétel. *Legyen f egy differenciálható szigorúan konvex függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, melyre teljesül, hogy f' alulról korlátos, viszont fölülről nem. Legyen $\phi : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$ egy bijekció, amely kielégíti a*

$$H_f\left(\phi(A),\phi(B)\right) = H_f(A,B), \quad A,B \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}).$$

egyenletet. Ekkor létezik olyan $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ unitér vagy antiunitér operátor, amely implementálja ϕ-t, azaz

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$$

teljesül.

18. Tétel. *Legyen f differenciálható szigorúan konvex függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, tegyük fel, hogy $\lim_{x\to 0+} f(x)$ létezik és véges, valamint hogy f' fölülről nem korlátos. Legyen $\lambda \in (0,1)$ adott. Ha $\phi : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$ szürjektív leképezés, amely kielégíti a*

$$J_{f,\lambda}\left(\phi(A),\phi(B)\right) = J_{f,\lambda}(A,B), \quad A,B \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}),$$

egyenletet, akkor létezik $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ unitér vagy antiunitér operátor, melyre

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$$

teljesül.

2.5. Jordan-hármasszorzat-tartó leképezések ([2]) Most egy másik, pozitív operátorokkal kapcsolatos megőrzési problémára térünk át: leírjuk a kétdimenziós Hilbert-téren ható pozitív definit operátorok kúpjának Jordan-hármasszorzat-tartó transzformációit. Ezek a transzformációk olyan leképezések, melyek morfizmusok az $(A,B) \mapsto ABA$ Jordan-hármasszorzatra nézve, amely szorzat jól ismert a gyűrűelméletben. A legfőbb motivációnk ezen leképezések vizsgálatához az, hogy természetes módon kerülnek elő, amikor bizonyos pozitív kúpok között ható izometriákat vagy általánosított izometriákat szeretnénk meghatározni. A részletekért érdemes elolvasni a [28, 27, 30] cikkeket.

A fő eredményünk így hangzik.

19. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ egy kétdimenziós Hilbert-tér. Legyen $\phi : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$ egy folytonos Jordan-hármasszorzat-tartó leképezés. Ekkor ϕ biztosan a következő alakok valamelyikében áll elő:*

- *létezik olyan $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor és c valós szám, hogy*

$$\phi(A) = (\mathrm{Det} A)^c UAU^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H});$$

- *létezik olyan $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor és d valós szám, hogy*

$$\phi(A) = (\mathrm{Det} A)^d VA^{-1}V^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H});$$

- *létezik olyan* $W \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *unitér operátor és* c_1, c_2 *valós számok, hogy*

$$\phi(A) = W\mathrm{Diag}[(\mathrm{Det}A)^{c_1}, (\mathrm{Det}A)^{c_2}]W^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}).$$

A következő tétel, amely a Jordan-hármasszorzattartó *bijekciókat* írja le, következik az előző, endomorfizmusokra vonatkozó tételünkből.

20. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\dim(\mathscr{H}) = 2$. *Ha* $\phi : \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$ *egy folytonos Jordan-hármasszorzat-tartó bijekció, akkor* ϕ *a következő alakok valamelyikében áll elő:*

(c1) *létezik* $c \neq -1/2$ *valós szám és* $U \in \mathbf{SU}(2)$ *operátor, hogy*

$$\phi(A) = (\mathrm{Det}A)^c UAU^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H});$$

(c2) *létezik* $d \neq 1/2$ *valós szám és* $V \in \mathbf{SU}(2)$ *operátor, hogy*

$$\phi(A) = (\mathrm{Det}A)^d VA^{-1}V^*, \quad A \in \mathscr{B}^{++}(\mathscr{H}).$$

A fenti tétel a következő közvetlen következménnyel jár. A $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ esetben a szerzőknek sikerült leírni a $\mathscr{B}^{++}(\mathscr{H})$ kúp szürjektív izometriáit általánosított távolság-mértékek egy kimondottan általános családjára [30, Theorem 1]. Könnyű látni, hogy [30, Theorem 1] gondolatmenetét követve és a 20. Tételt alkalmazva a [30] dolgozat eredménye érvényes lesz az $\dim(\mathscr{H}) = 2$ esetben is.

Az *effektek* fontos szerepet játszanak a kvantummechanika bizonyos területein, például a méréselméletben [14]. Matematikailag az effekteket olyan pozitív szemidefinit operátorokkal írjuk le, amelyeket majorál az identitás operátor (a szemidefinit rendezés értelmében). Az effektek halmazát *effekt algebrának* is szokás hívni, annak ellenére, hogy nyilván nem egy, a klasszikus értelemben vett algebráról van szó. A [19] cikkben Gudder és Nagy bevezették a $\circ$ operációt, amelyet effektek *szekvenciális szorzatának neveztek,* és amely szorosan kapcsolódik a Jordan-hármasszorzathoz. A szekvenciáis szorzatot így definiálták:

$$A \circ B = A^{1/2} B A^{1/2},$$

ahol A, B tetszőleges effektek. A kapcsolódó endomorfizmusokat, vagyis az effekt algebra azon ϕ leképezéseit, melyek kielégítik a

$$\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B)$$

egyenletet valamennyi A, B effekt esetén, szekvenciális endomorfizmusoknak hívjuk.

Következzék a 19. Tétel egy alkalmazása, amely leírja a kétdimenziós Hilbert-tér feletti effekt algebra szekvenciális endomorfizmusait.

21. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\dim(\mathscr{H}) = 2$ *és* $\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ *folytonos szekvenciális endomorfizmus. Ekkor a következő négy lehetőség adódik.*

(d1) *létezik olyan $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor és c nemnegatív valós szám, hogy*

$$\phi(A) = (\mathrm{Det} A)^c UAU^*, \quad A \in \mathbb{E}_2;$$

(d2) *létezik olyan $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor*

$$\phi(A) = V(\mathrm{adj}\, A)V^*, \quad A \in \mathbb{E}_2;$$

(d3) *létezik olyan $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor és olyan $d > 1$ valós szám, hogy*

$$\phi(A) = \begin{cases} (\mathrm{Det} A)^d VA^{-1}V^*, & \textit{ha } A \in \mathbb{E}_2 \textit{ invertálható;} \\ 0, & \textit{különben;} \end{cases}$$

(d4) *létezik olyan $W \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ unitér operátor és léteznek olyan c_1, c_2 nemnegatív valós számok, hogy*

$$\phi(A) = W\mathrm{Diag}[(\mathrm{Det} A)^{c_1}, (\mathrm{Det} A)^{c_2}]W^*, \quad A \in \mathbb{E}_2.$$

Itt a $0^0 = 1$ konvenciót használjuk.

2.6. Az Einstein gyrocsoport endomorfizusai ([3]**)** A relativisztikus sebességösszeadást 1905-ben definiálta Einstein híres dolgozatában, melyben lefektette a speciális relativitáselmélet alapjait [17]. Valójában az egész elmélet nagyban az Einstein-féle sebességösszeadáson alapszik, [17]. Az ehhez a művelethez tartozó algebrai struktúra a gyrocsoportok közé tartozik. A gyrocsoportok általános elméletét Ungar dolgozta ki [35].

A háromdimenziós Einstein gyrocsoport a $(\mathbf{B}, \oplus)$ pár, ahol $\mathbf{B} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{u}\| < 1\}$és $\oplus$ egy művelet $\mathbf{B}$-n, amely a

$$\oplus : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \to \mathbf{B};\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} := \frac{1}{1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{v} + \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} \right) \tag{18}$$

módon van definiálva, ahol $\gamma_{\mathbf{u}} = \left(1 - \|\mathbf{u}\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ az úgynevezett Lorentz-faktor. A $\oplus$ műveletet Einstein-féle sebességösszeadásnak vagy relativisztikus összegnek nevezzük (lásd [7, 22]).

A fő eredményünket a kétdimenziós Hilbert-téren ható pozitív operátorok kúpján ható Jordan-hármasszorzat-tartó leképezések struktúráját meghatározó tételünk alkalmazásával nyerjük. A másik összetevő Kim izomorfizmustétele [22, Theorem 3.4].

A fő tételünk így hangzik.

22. Tétel. *Legyen $\beta : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ egy folytonos endomorfizmus az $\oplus$ műveletre nézve, azaz elégítse ki a*

$$\beta(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{u}) \oplus \beta(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}$$

egyenletet. Ekkor

- *vagy létezik egy $O \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ortogonális mátrix, hogy*

$$\beta(\mathbf{v}) = O\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{B},$$

- *vagy*

$$\beta(\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{B}.$$

HIVATKOZÁSOK

Kapcsolódó saját publikációk

[1] L. Molnár, J. Pitrik and D. Virosztek, *Maps on positive definite matrices preserving Bregman and Jensen divergences,* Linear Algebra Appl. **495** (2016), 174–189.
[2] L. Molnár and D. Virosztek, *Continuous Jordan triple endomorphisms of* $\mathbb{P}_2$, J. Math. Anal. Appl. **438(2)** (2016), 828-839.
[3] L. Molnár and D. Virosztek, *On algebraic endomorphisms of the Einstein gyrogroup,* J. Math. Phys. **56**, 082302 (2015).
[4] D. Petz and D. Virosztek, *A characterization theorem for matrix variances,* Acta Sci. Math. (Szeged) **80** (2014), 681-687.
[5] D. Petz and D. Virosztek, *Some inequalities for quantum Tsallis entropy related to the strong subadditivity,* Math. Inequal. Appl. **18(2)** (2015), 555-568.
[6] J. Pitrik and D. Virosztek, *On the joint convexity of the Bregman divergence of matrices,* Lett. Math. Phys. **105** (2015), 675-692.

Kapcsolódó publikációk más szerzőktől

[7] T. Abe, *Gyrometric preserving maps on Einstein gyrogroups, Möbius gyrogroups and proper velocity gyrogroups,* Nonlinear Functional Analysis and Applications **19** (2014), 1-17.
[8] J. Aczél and Z. Daróczy, *On Measures of Information and Their Characterizations*, Academic Press, San Diego, 1975.
[9] K. M. R. Audenaert, *Subadditivity of q-entropies for $q > 1$*, J. Math. Phys. **48**(2007), 083507.
[10] A. Banerjee et al., *Clustering with Bregman divergences*, J. Mach. Learn. Res. **6**(2005), 1705-1749.
[11] H. Bauschke and J. Borwein, *Joint and separate convexity of the Bregman distance*, Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Haifa 2000), D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich (editors), Elsevier, pp. 23-36, 2001.
[12] R. Bhatia, *Matrix Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1996.
[13] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming,* USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics **7(3)**(1967), 200-217.
[14] P. Busch, P.J. Lahti and P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement,* Springer-Verlag, 1991.
[15] E. Carlen, *Trace inequalities and quantum entropy: an introductory course,* Contemp. Math. **529** (2010), 73-140.
[16] Z. Daróczi, *General information functions*, Information and Control **16**(1970), 36 - 51.
[17] A. Einstein, *Einstein's Miraculous Years: Five Papers That Changed the Face of Physics,* Princeton University, Princeton, NJ, 1998.

[18] S. Furuichi, *Information theoretical properties of Tsallis entropies*, J. Math. Phys. **47**, 023302 (2006)

[19] S. Gudder and G. Nagy, *Sequential quantum measurements*, J. Math. Phys. **42** (2001), 5212–5222.

[20] F. Hiai and D. Petz, *Introduction to Matrix Analysis and Applications*, Hindustan Book Agency and Springer Verlag, 2014.

[21] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Volumes I and II, Academic Press, Orlando, 1983 and 1986.

[22] S. Kim, *Distances of qubit density matrices on Bloch sphere*, J. Math. Phys. **52**, 102303 (2011).

[23] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Springer Verlag, Berlin, 1933; English translation: *Foundations of the Theory of Probability,* Chelsea Publishing Co., New York, 1956.

[24] S. Kullback and R.A: Leibler, *On information and sufficiency*, Ann. Math. Statist. **22(1)**(1951), 79 - 86.

[25] Z. Léka and D. Petz, *Some decompositions of matrix variances*, Probability and Mathematical Statistics, **33**(2013), 191-199.

[26] E. Lieb and M. B. Ruskai, *Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy*, J. Math. Phys. **14**(1973), 1938-1941.

[27] L. Molnár, *General Mazur-Ulam type theorems and some applications,* in Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics, W. Arendt, R. Chill, Y. Tomilov (Eds.), Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 250, pp. 311-342, Birkhäuser, 2015.

[28] L. Molnár, *Jordan triple endomorphisms and isometries of spaces of positive definite matrices,* Linear Multilinear Alg. **63** (2015), 12–33.

[29] L. Molnár, *Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1895, p. 236, Springer, 2007.

[30] L. Molnár and P. Szokol, *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures,* Linear Algebra Appl. **466** (2015), 141–159.

[31] M. Nielsen and D. Petz, *A simple proof of the strong subadditivity inequality*, Quantum Information & Computation, **6**(2005), 507 - 513.

[32] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993. Second edition 2004.

[33] D. Petz and G. Tóth, *Matrix variances with projections*, Acta Sci. Math. (Szeged), **78**(2012), 683–688.

[34] M. Rédei and S.J. Summers, *Quantum probability theory,* Studies in the History and Philosophy of Modern Physics **38** (2007), 390-417.

[35] A.A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity,* World Scientific, Singapore, 2008.