KVANTIFIKÁCIÓ ÉS EPSZILON-INVARIANCIA NÉHÁNY EPSZILON-KALKULUSBAN

MOLNÁR ZOLTÁN GÁBOR

Tézisfüzet (PhD)

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra tanszék

Budapest, 2020

1. Bevezetés

Az epszilon szimbólumot először a göttingai logikai iskola alkalmazta, főképpen a Peano aritmetika konzisztenciájának (más néven Hilbert második problémájának) igazolására tett kísérleteik során. Így, már elég korán, a *Grundlagen der Mathematik* második kötetében Hilbert és Bernays vizsgálta az epszilon szimbólum és a klasszikus kvantifikáció kapcsolatát [Hilbert–Bernays, 1939].

Ismeretes, hogy ha φ elsőrendű formula és x indivduumváltozó, akkor

$$(\varepsilon x)\varphi(x)$$

a tárgyalási univerzum egy olyan individuumát jelöli amely „$\varphi(x)$ tulajdonságú, ha van egyáltalán $\varphi(x)$ tulajdonságú dolog". Itt, ε a Hilbert-féle epszilon szimbólum és a $(\varepsilon x)\varphi(x)$ kifejezést epszilon termnek nevezzük.

Az előbbi megfogalmazás nem csak azért problematikus, mert nem jelöli ki, hogy melyik az a dolog, amire referál, hanem azért is, mert bár érthetően hangzik, így nagyon ritkán hivatkozunk egy dologra a természetes nyelvben. A jobb megértés kedvéért, tekintsük a következő aritmetikai szituációt! Legyen $A(n)$ tetszőleges egyváltozós aritmetikai formula. Hogy $A(1)$ mit jelent, az teljesen érthető: „az 1-re teljesül az $A(n)$ tulajdonság". De mit jelent a

$$B((\varepsilon n)A(n))$$

mondat tetszőleges aritmetikai $B(n)$ formula esetén? Melyik dologról beszél ez egyáltalán, és hogyan lehetne a rá vonatkozó állítás igazságát vizsgálat tárgyává tenni?

Még Hilbert sem használt ilyen nyelvi megfogalmazást, csak egy axióma megköveteléséhez kötötte az epszilon termek tulajdonságait. Az általa Első epszilon axiómának nevezett kijelentés azt állítja, hogy ha x individuum-változó és $\varphi(x)$ elsőrendű formula, akkor

$$(\exists x)\varphi(x) \to \varphi((\varepsilon x)\varphi(x)).$$

Ugyan ez matematikai precizitással megmondja, hogy mi az epszilon termek tulajdonsága, de nyitva hagyja a kérdést, hogy mi lenne ezek természetes nyelvi megfogalmazása, és ha lenne a szokásos logikai kifejezésekkel történő megfogalmazása, akkor mi lenne ez. Bár a göttingai iskola gyakran használta az epszilon szimbólumot, máig nem tudjuk az általános ill. pontos választ.

A *Grundlagenben* a Második epszilon tétel azt mondja ki, amit ma úgy fogalmaznánk meg, hogy az epszilon kalkulus a klasszikus predikátumkalkulus konzervatív bővítése [Zach, 2017]. Ahogy Hilbert fogalmazott:

> [...] Nincs szükség arra, hogy az epszilon szimbólumot beépítsük a logikai-matematikai formalizmus végső bizonyításelméleti rendszerébe. Azt epszilon szimbólummal történő operáció úgy fogható fel, mint egy segédkalkulus működtetése, amely sok meta-matematikai probléma esetén hatékony eszköz. [Hilbert–Bernays, 1939, p. 13].

Nyilvánvalóan ez egy részválasz az epszilon termek jelentését firtató kérdésre. Nulladik közelítésben tisztáznunk kell a kapcsolatot az epszilon kifejezések és az egzisztenciális kvantor között. Az előbb említett korai tétel persze a klasszikus logika eredménye. Nem szükségszerűen áll fenn az intuicionista logika esetén, amelyben a kizárt harmadik elve nem feltétlenül általánosan érvényes tulajdonság. Különösképpen jól látható ez Bell eredményét követően, miután közismerté vált, hogy ha az intuicionista logika feletti aritmetika (az úgy nevezett Heyting aritmetika, HA) nyelvét az epszilon szimbólummal és az epszilon axiómákkal bővítjük, akkor az új rendszer nem marad konzervatív HA felett (nem marad pusztán segédkalkulus) [Bell, 1993a]. Világossá vált, hogy az intuicionista epszilon kalkulus nyelvi implementációjának módja drasztikusan meghatározza, hogy milyen erősségű logikai rendszer keletkezik a bővítésben. Egyfelől [Baaz–Zach, 2019] eredményei, másfelől [Mints, 1977] konklúziói furcsa diskrepanciát hordoznak magukban. Mi több, Mints előtt 1971-ben Shirai szintén olyan intuicionista epszilon kalkulust tudott definiálni, ami konzervatív az alaplogika felett.

A feladat most már az, hogy megtaláljuk melyik az a pont, ami a Bell-féle nem-konzervativitási eredményt okozza. [Abadi et al., 2004] típuselméleti rendszerének egy módosításával és építve a [Sorensen–Urzyczyn, 1998]-ben az egzisztenciális kvantorra megfogalmazott levezetési szabályra, dolgozatomban bizonyítom (a Curry–Howard-izomorfizmus technikával), hogy egy speciális típusos kalkuluban, amely az *elsőrendű* nyelvek egy fragmentumát modellezi, az implikációt és egzisztenciális kvantort tartalmazó intuicionista logika felett nem konzvervatív az epszilon-kiterjesztés (4. tétel). Bár az is igaz, hogy az epszilon szimbólumot alapul véve a rá épített egzisztenciális kvantoros logika már konzervatív (3. tétel). Sem [Abadi et al., 2004] sem az még nem publikált [Baaz–Zach, 2019] nem említi és nem dolgozza ki ezeket a tételeket. Módszereim a természetes levezetés technikáira alapulnak és a [Troelstra–Schwichtenberg, 2000] könyv szellemében közelítik meg a vizsgált levezetési rendszereket.

Szorosabban megközelítve a korábban vázolt jelentés-feltáró feladatot, érdemes megjegyezni, hogy a modern logika fejlődése során minden kezdeményezés, amely a formális nyelvet és ennek szemantikáját helyezte a logikai-matematikai vizsgálódások középpontjába, elérkezet a *határozott individuumleírásokhoz*. Ezt tette Gottlob Frege, Bertrand Russell és David Hilbert is. Mindhárman megfogalmazták javaslataikat, hogy a matematikai elméletekben az „az F egy G." alakú mondatokat hogyan kéne érteni (itt az „az F"-eket határozott individuumleírásnak nevezzük). Gondoljunk csak az olyan mondatokra, mint „A legkisebb pozitív prímszám páros." vagy „ A legnagyobb prímszám páratlan". Bár, kiderült, hogy ezen mondatok interpretációja a lényeget tekintve kvantifikációs feladat, a kérdésre nem adódott minden kételyt eloszlató válasz. A legnagyobb probléma nyilvánvalóan az az eset, amikor nincs egyetlen vagy létező F. Ekkor semmilyen értelmes intuíciónk nincs az F-ekre vonatkozóan, pláne nincs arra, hogy ezek G tulajdonságúak-e vagy sem. Russell javaslata alapján az „az F egy G" mondat kvantifikációs olvasata:

Van F, legfeljebb egy F van, és minden F egyben G is.

[Russell, 1905]. Itt említeném meg, Russell a *Principia* formális nyelvében a

$$(\iota x)\varphi(x)$$

termet használta az „az F" helyett [Whitehead-Russell, 1956]. Most már, Kneebone jól vázolja az epszilon szimbólummal kapcsolatos problémát :

> Az epszilon termekre abban az értelemben gondolhatunk úgy, mint a határozatlan individuumleírásokat megfogalmazó kifejezésekre, ahogyan a iota termek formalizálják szándékaink szerint a határozott individuumleírásokat [...] ([Kneebone, 1963, p. 101, ftn. 1])

Minthogy Russell elfogadható kvatifikációs olvasatot adott az iota termekre, reménykedhetünk abban, hogy a helyzet hasonló fordulatot vesz az epszilon termekkel kapcsolatban is. Valóban, Caicedo, majd később Blass és Gurevich bizonyította, hogy ha egy mondat epszilon invariáns (vagyis a mondat igazságértéke független a benne szereplő epszilon termek referenciájának megválasztásától), akkor a mondatnak létezik elsőrendű nyelven megfogalmazott ekvivalense [Caicedo, 1995] [Blass–Gurevich, 2000]. Igaz ugyan az is, hogy ennek az ekvivalensnek az általános, explicit formája nem ismert. A Moser és Zach által javasolt modellelméleti epszilon szemantikára alapozva, konstruáltam egy olyan szemantikát, amely bizonyos feltételek fennállása mellett explicit módon megadja egy ilyen formula alakját (6. tétel) [Molnár, 2013].

Tarski algebrizáló, a logikát cilindrikius algebrákra építő programja bizonyos értelemben tekinthető Russell kvantifikációs programjának folytatásaként. Hilbert Második epszilon axiómáján, azaz a

$$(\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varepsilon x)\varphi = (\varepsilon x)\psi$$

formula egy ekvivalencia-osztályozás révén cilindrikus algebrát generál az epszilon kalkulus modelljének univerzumán. Itt, modellen a Monk által kiválasztási struktúráknak nevezett modellekre gondolunk [Monk, 1976]. Ekkor algebrai kapcsolat keletkezik a modell cilindrikus algebrája és a generált modell között. Ezzel a teljesen új megközelítéssel a véges Boole- és monadikus algebrák esetén algebrai kapcsolatot tártam fel az algebra és ennek cilindrikus halmazalgebrája között. Bár nem kanonikus ez a kapcsolat (mint a Stone esetben), de legalább az izomorfia fenn áll (7. tétel, 8. állítás) [Molnár, 2011].

A 6. tételnél, az elsőrendű esetben talált részválasz élesíthető, amennyiben olyan formális rendszerben fogalmazzuk meg a problémát, amelyben a helyettesítés nem meta-operáció, hanem szintaktikai fogalom. Javaslatom az, hogy az egyszerű típusos lambda kalkulusban kell inkább feltenni a kérdést és ott kísérelni rá válaszolni. A Montague-szemantika felhasználásával és az applikáció operációjának felhasználásával a tételre általánosabb, voltaképpen minden értelmes feltétel melletti megfogalmazást találtam (8. tétel) [Molnár, 2017].

2. Konzervativitás az intuicionista epszilon logikában

Ebben a részben az epszilon szimbólum és a kvantifikáció kapcsolatának problémáját bizonyításelméleti megközelítésben tárgyalom, a nyelv az elsőrendű nyelv implikációs-egzisztenciális fragmentuma lesz, a módszerek pedig a természetes levezetés rendszerét veszik alapul. Ez nem egy nagyon erős megszorítás, lévén az implikációs intiucionista logikának a propozicionális implikációs logika konzervatív bővítése. Két vonatkozást vizsgálok. Mi történik, ha az implikációs-egzisztenciális intuicionista logikát az epszilonnal operátorral bővítem. Illetve mi történik, ha az implikációs-epszilonos intuicionista logikát bővítjük az egzisztenciális kvantorral. Bizonyítom, hogy az első esetben a kiterjesztés nem konzervatív, amit Bell munkája (szemben a fordított esettel, amikor igen). Nem meglepő módon a nem levezethető mondat az epszilon termek úgy nevezett *egzisztenciafeltétele* lesz:

$$(\exists x)((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(x))$$

A *implikációs-egzisztenciális-epszilonos nyelv* az elsőrendű nyelvek szimbolizmusát használja, ennek a formuláinak halmazát $\mathrm{Fm}(L_{\exists\varepsilon})$ jelöli, a termek halmazát $\mathrm{Tm}(L_{\exists\varepsilon}))$ jelöli, amelyben azonban a ε operáció is egy termképző elem. Ekkor a levezetéseket kódoló nyelv a következő lesz:

$$\mathrm{Exp} ::= \mathrm{V} \mid (\mathrm{Exp}\mathrm{Exp}) \mid (\lambda \mathrm{V}.\mathrm{Exp}) \mid (\mathsf{pair}_{(\bullet \mathrm{Var})\mathrm{Fm}(L_{\exists\varepsilon})}(\mathrm{Exp}, \mathrm{Tm}(L_{\exists\varepsilon}))) \mid$$

$$\mid (\mathsf{ind}_{(\bullet \mathrm{Var})\mathrm{Fm}(L_{\exists\varepsilon}),\mathrm{Fm}(L_{\exists\varepsilon})}(\mathrm{Exp}, \mathrm{V}.\mathrm{Var}.\mathrm{Exp}))$$

ahol $\bullet$ az $\exists$ ill. ε értékeket veszi fel.
Definiáljuk tovább a leszűkített levezetéskód nyelveket, amelyek csak a $\to$ és $\exists$ és a $\to$ és ε operátorokat tartalmazzák

$$\mathrm{Exp}_{\exists} = \mathrm{Exp}\restriction_{\exists,\to}$$

$$\mathrm{Exp}_{\varepsilon} = \mathrm{Exp}\restriction_{\varepsilon,\to} .$$

A *kontextus* véges függvény:

$$\Gamma = \{(u_1, \varphi_1),\ \dots\ ,\ (u_n, \varphi_n),\ (t_1, \iota),\ \dots\ ,\ (t_m, \iota)\}$$

ahol $\{u_i\}_{i=1\dots n} \subseteq \mathrm{V}$ változók, $\{\varphi_i\}_{i=1\dots n} \subseteq \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$ formulák, és $\{t_i\}_{i=1\dots m} \subseteq \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}$ konstansok vagy változók. Az összes kontextusok halmaza $\mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$.

A triadikus *levezethetőség* relació $\vdash$ az $\mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists}) \times \mathrm{Exp} \times \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$ halmazon és rekurzívan van értelmezve az alábbi szabályokkal.
Változó típusolási szabály. Ha $u \in \mathrm{Var}$, $\varphi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$ és $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$, akkor

$$\boxed{\dfrac{}{\Gamma \cup \{(u : \varphi)\} \vdash u : \varphi}\text{var type}}$$

Változó fajta szabály. Ha $x \in \mathrm{V}$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$, akkor

$$\boxed{\dfrac{}{\Gamma \cup \{(x:\iota)\} \vdash x:\iota}\mathrm{var\,kind}}$$

Konstruktív term szabály. Ha $t_1,\ldots,t_n \in \mathrm{Tm}(L_{\varepsilon,\exists})$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$, és f egy n változós függvényjel, akkor

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash t_1:\iota,\ldots,\Gamma \vdash t_n:\iota}{\Gamma \vdash ft_1\ldots t_n:\iota}\mathrm{term\,kind}}$$

Konstruktív epszilon-term szabály. Ha $\varphi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$, $x \in \mathrm{V}$ és $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$, akkor

$$\boxed{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\varepsilon x)\varphi:\iota}\mathrm{epsilon\,kind}}$$

Implikáció bevezetési és kiküszöbölési szabály. Ha $u \in \mathrm{Var}$, $\varphi,\psi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$ és $P,Q \in \mathrm{Exp}$,akkor

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \cup \{u:\varphi\} \vdash P:\psi}{\Gamma \vdash \lambda u.P:\varphi \to \psi} \to \mathrm{intro}}$$

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash P:\varphi \to \psi, \quad \Gamma \vdash Q:\varphi}{\Gamma \vdash PQ:\psi} \to \mathrm{elim}}$$

Egzisztenciális kvantor bevezetési és kiküszöbölési szabály. Ha $u \in \mathrm{Var}$, $\varphi,\psi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$ and $P,Q \in \mathrm{Exp}$, akkor

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash P:\varphi[x/t] \qquad\qquad \Gamma \vdash t:\iota}{\Gamma \vdash \mathsf{pair}_{(\exists x)\varphi}(P,t):(\exists x)\varphi}\exists\mathrm{intro}}$$

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash P:(\exists x)\varphi \qquad\qquad \Gamma \cup \{u:\varphi, x:\iota\} \vdash Q:\psi}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\exists x)\varphi,\psi}(P,u.x.Q):\psi}\exists\mathrm{elim}}$$

az előbbi esetben $x \notin \mathrm{FreeVar}(t)$, az utóbbiban $x \notin \mathrm{FreeVar}(\mathrm{ran}(\Gamma) \cup \psi)$.

Epszilon bevezetési és kiküszöbölési szabály. Ha $u \in \mathrm{Var}$, $\varphi,\psi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_{\varepsilon,\exists})$ és $P,Q \in \mathrm{Exp}$, akkor

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash P:\varphi[x/t] \qquad\qquad \Gamma \vdash t:\iota}{\Gamma \vdash \mathsf{pair}_{(\varepsilon x)\varphi}(P,t):\varphi[x/(\varepsilon x)\varphi]}\varepsilon\mathrm{intro}}$$

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash P : \varphi[x/(\varepsilon x)\varphi] \qquad \Gamma \cup \{u : \varphi, x : \iota\} \vdash Q : \psi}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\varepsilon x)\varphi,\psi}(P, u.x.Q) : \psi}\varepsilon\text{elim}}$$

az előbbi esetben $x \notin \mathrm{FreeVar}(t)$, az utóbbibanx $\notin \mathrm{FreeVar}(\mathrm{ran}(\Gamma) \cup \psi)$.

1. Jelölés. A fenti szabályok definiálják az *intuicionista implikációs-egzisztenciális epszilon logikát* a $\mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$ nyelv és az Exp levezetéskódok felett, és

$$\mathrm{IL}^{\rightarrow}_{\exists\varepsilon}$$

mindezt jelöli.

2. Jelölés. A

$$\{\mathrm{var\,type}, \mathrm{var\,kind}, \mathrm{term}, \rightarrow \mathrm{intro}, \rightarrow \mathrm{elim}, \exists\mathrm{intro}, \exists\mathrm{elim}\}$$

szabályok a $\mathrm{Fm}(L_{\exists})$ nyelv felett és az $\mathrm{Exp}_{\exists}$ levezetéskódok felett az implikációs-egzisztenciális intuicionista logikát definiálják, amit

$$\mathrm{IL}^{\rightarrow}_{\exists}$$

jelöl.

3. Jelölés. A

$$\{\mathrm{var\,type}, \mathrm{var\,kind}, \mathrm{term}, \mathrm{epsilon\,kind}, \rightarrow \mathrm{intro}, \rightarrow \mathrm{elim}, \varepsilon\mathrm{intro}, \varepsilon\mathrm{elim}\}$$

szabályok a $\mathrm{Fm}(L_{\varepsilon})$ nyelv felett és az $\mathrm{Exp}_{\varepsilon}$ levezetéskódok felett az implikációs-epszilonos intuicionista logikát definiálják, amit

$$\mathrm{IL}^{\rightarrow}_{\varepsilon}$$

jelöl.

Az Első epszilon axióma kijelentése érvényes a rendszerben, tehát ez egy intenzionális epszilon kalkulus:

1. Tétel. A $\mathrm{IL}^{\rightarrow}_{\exists\varepsilon}$ levezetési rendszer egy intenzionális epszilon logika, azaz, ha $\varphi \in \mathrm{Fm}(L_{\varepsilon,\exists})$, akkor

$$\underset{\mathrm{IL}^{\rightarrow}_{\exists\varepsilon}}{\vdash} ((\exists x)\varphi) \rightarrow \varphi[x/(\varepsilon x)\varphi].$$

A természetes levezetés rendszerében értelmes felvetni a bizonyítások „vargabetűinek” kimetszésének kérdését. A következő levezetésekben, az epszilonmentes logikában felesleges lépések, úgy nevezett metszetek keletkeznek. Ha a $\to$ bevezetési szabályt közvetlenül kiküszöbölési szabály követ, akkor a redukciós lépes az úgy nevezett béta-szabály:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \cup \{u : \varphi\} \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash \lambda u.P : \boxed{\varphi \to \psi}} \qquad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash (\lambda u.P)Q : \psi} \to_\beta \Gamma \vdash P[u/Q] : \psi$$

ill. ha csak a levezetéskódot nézzük:

$$(\lambda u.P)Q \to_\beta P[u/Q].$$

A „vargabetű” redukciója $\exists$-re:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash P : \varphi[x/t] \qquad \Gamma \vdash t : \iota}{\Gamma \vdash \mathsf{pair}_{(\exists x)\varphi}(P, t) : \boxed{(\exists x)\varphi}} \qquad \Gamma \cup \{x : \iota, u : \varphi\} \vdash Q : \psi}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\exists x)\varphi,\psi}(\mathsf{pair}_{(\exists x)\varphi}(P, t), u.x.Q) : \psi} \to_\exists \Gamma \vdash Q[u/P][x/t] : \psi$$

vagy rövidebben:

$$\mathsf{ind}_{(\exists x)\varphi,\psi}(\mathsf{pair}_{(\exists x)\varphi}(P, t), u.x.Q) \to_\exists Q[u/P][x/t].$$

A

$$(\lambda u.P)Q$$

és

$$\mathsf{ind}_{(\exists x)\varphi,\psi}(\mathsf{pair}_{(\exists x)\varphi}(P, t), u.x.Q)$$

kifejezéseket *redexeknek* nevezzük. Az N levezetéskódot *normálnak* nevezzük, ha nem tartalmaz redexet.

2. Tétel. A $\mathrm{IL}_\exists^\to$ rendszer normalizálható: minden $M \in \mathrm{Exp}_\exists$, $\Gamma \in \mathrm{Cntx}(L_\exists)$, $\varphi \in \mathrm{Fm}(L_\exists)$-ra, amelyre $\Gamma \vdash M : \varphi$, van olyan normál $N \in \mathrm{Exp}_\exists$ kifejezés, amire $\Gamma \vdash M : \varphi$.

Könnyen bizonyítható, hogy az epszilonmentes fragmentumban az epszilon szimbólumok egzisztenciafeltétele nem levezethető.

1. Állítás.

$$\nvdash_{\mathrm{IL}_\exists^\to} (\exists x)(((\exists x)\varphi) \to \varphi)$$

3. Tétel. $\mathrm{IL}_{\exists\varepsilon}^\to$ konzervatív $\mathrm{IL}_\varepsilon^\to$ felett, azaz

$$\text{if } \{\varphi\} \cup \Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(L_\varepsilon) \text{ and } \Gamma \underset{\mathrm{IL}^{\to}_{\exists\varepsilon}}{\vdash} \varphi, \text{ then } \Gamma \underset{\mathrm{IL}^{\to}_{\varepsilon}}{\vdash} \varphi.$$

A tétel ellenpárja nem teljesül:

4. Tétel. $\mathrm{IL}^{\to}_{\exists\varepsilon}$ nem konzervatív $\mathrm{IL}^{\to}_{\exists}$ felett.

Ebben a konstrukcióban $\mathrm{IL}^{\to}_{\exists}$ olyan gyengére lett választva, hogy a $(\exists x)(((\exists x)\varphi) \to \varphi)$ formula benne nem levezethető és $\mathrm{IL}^{\to}_{\exists\varepsilon}$ olyan erősre, hogy itt már igen.

3. Intenzionális szemantika

Igazoltam, hogy ha egy monadikus predikátum szintaktikailag független egy epszilon termtől és a mondat amiben az epszilon term szerepel epszilon invariáns, akkor van explicit sima elsőrendű átfogalmazása (6. tétel).

1. Definíció (Epszilon invariancia osztály felett)**.** A $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ formula *epszilon invariáns a* K *elsőrendű modellosztály felett*, ha minden $\mathfrak{M} \in \mathsf{K}$ modellre, $a \in {}^{\omega}M$ értékelésre és f és g kiválasztófüggvényre, amire $(\mathfrak{M}, f), (\mathfrak{M}, g) \in \mathsf{Ext}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ az telejsül, hogy

$$(\mathfrak{M}, f) \models \varphi[a] \quad \text{iff} \quad (\mathfrak{M}, g) \models \varphi[a].$$

Blass, Gurevich és Caicedo igazolta az alábbi tételt az extenzionális modellekre (Ext), azaz modellekre, ahol a kiválasztó függvény a szokásos egy nemüres részhalmazhoz egy benne lévő elemet rendelő függvény:

5. Tétel (Blass–Gurevich–Caicedo)**.** Ha $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ epszilon invariáns, akkor van epszilon mentes $\psi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_\exists)$, hogy

$$\varphi^{(\mathfrak{M},f)} = \psi^{\mathfrak{M}}$$

minden $(\mathfrak{M}, f) \in \mathsf{Ext}(\mathcal{L}_\varepsilon)$-re. (Cf. [Blass–Gurevich, 2000, Prop. 3.2])

Érdemesnek tartottam alkalmazni az intenzionális modellek (Int) fogalmát (Moser és Zach után), amelyek esetén a kiválasztó függvények nem csak a formulák igazságtartományaiból választ eleme, hanem termről-termre más értékű tud lenni. Ahhoz, hogy ezzel a helyettesítés megőrizze értelmes jellegét, be kell vezetni az epszilon mátrix fogalmát.

2. Definíció (Epszilon mátrix)**.** Szerepeljen a t term a φ formulában. Ha t szerepel egy másik epszilon term-ben, az s-ben φ-ben, akkor t-t *belsőnek* nevezzük φ-ben, máskülönben *külső*. Az

$$(\varepsilon x)\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

term *a* $(\varepsilon x)\varphi$ *mátrixa*, ha

(1) $y_1, ..., y_n \notin \mathrm{Var}((\varepsilon x)\varphi)$,
(2) $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ egy $(n+1)$-változós formula,
(3) $t_1, \ldots, t_k$ különböző epszilon termek és külsők φ-ben úgy, hogy

$$(\varepsilon x)\varphi = (\varepsilon x)\psi(x, y_1, \ldots, y_n)[t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n].$$

Ekkor teljesül a következő tétel:

2. Állítás (Molnár 2013)**.** Legyen K elsőrendű modellosztály és legyen $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}_\varepsilon)$. Ha $\mathsf{K} \underset{\mathrm{Int}}{\models} \varphi$, akkor φ epszilon invariáns a K osztály felett.

Térjünk rá a szóban forgó explicit ekvivalens átfogalmazásra!

3. Definíció. Legyen

$$\mathsf{InvSub}(\varphi, \vartheta)$$

a

$$(\,(\exists x)\varphi \wedge (\forall x)(\varphi \to \vartheta)\,) \vee (\,\neg(\exists x)\varphi \wedge (\forall x)\vartheta\,)$$

formula.

Célunk az alábbi típusú meta-ekvivalenciák igazolása:

$$\vdash \vartheta[(\varepsilon x)\varphi/x] \quad \text{iff} \quad \vdash \mathsf{InvSub}(\varphi, \vartheta)$$

szemantikai feltételek nélkül. Alább ECε a klasszikus epszilon kalkulust jelöli, azaz a klasszikus predikátumkalkulust az első epsilon axiómával ellátva. Elsőként is:

3. Állítás (Molnár 2013)**.** Ha φ, ϑ monadikus formulák, akkor

$$\underset{\mathrm{EC}\varepsilon}{\vdash} \vartheta[(\varepsilon x)\varphi/x] \;\leftarrow\; \mathsf{InvSub}(\varphi, \vartheta).$$

Szükség van még néhány definícióra.

4. Definíció. Az α kifejezés *elkerüli a* $\mathrm{mat}((\varepsilon x)\varphi)$ *mátrixot* ha α-nak van olyan $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ kifejezés-konstrukciós sorozata, hogy

$$\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cap \mathrm{mat}((\varepsilon x)\varphi) = \emptyset.$$

[Molnár, 2013]

5. Definíció. Legyen K elsőrendű modellosztály a t szignatúra felett. A ϑ formula *epszilon invariáns* $(\varepsilon x)\varphi$*-ban a* K *felett*, ha minden $\mathfrak{M} \in \mathsf{K}$-re és minden f, g kiválasztófüggvényre amelyre $(\mathfrak{M}, f), (\mathfrak{M}, g) \in \mathsf{Int}(\mathcal{L}_\varepsilon)$, $f = g$ a $(\mathrm{Mat} \setminus \{\mathrm{mat}((\varepsilon x)\varphi)\}) \times \mathcal{P}(M) \times {}^{<\omega}M$ halmazon és minden $a \in {}^{\omega}M$ esetén

$$(\mathfrak{M}, f) \models \vartheta[a] \text{ iff } (\mathfrak{M}, g) \models \vartheta[a].$$

[Molnár, 2013]

Végül a tételek:

4. Állítás (Molnár 2013)**.** Legyen φ és ϑ monadikus formulák. Ha ϑ, φ elkerüli $\mathrm{mat}((\varepsilon x)\varphi)$-t, és $\vartheta[(\varepsilon x)\varphi/x]$ epszilon invariáns $(\varepsilon x)\varphi$-ban $\mathfrak{M}$ felett, akkor minden f-re, amire $(\mathfrak{M}, f) \in \mathsf{Int}(\mathcal{L}_\varepsilon)$

$$(\mathfrak{M}, f) \models \vartheta[(\varepsilon x)\varphi/x] \to \mathsf{InvSub}(\varphi, \vartheta).$$

6. Tétel (Molnár 2013)**.** Ha a $\varphi(x)$ és $\vartheta(x)$ monadikus formulák elkerülik a $\mathrm{mat}((\varepsilon x)\varphi)$ halmazt és Γ epszilon-invariáns mondatok összessége, akkor

$$\Gamma \underset{\mathrm{EC}\varepsilon}{\vdash} \vartheta[(\varepsilon x)\varphi/x] \quad \text{iff} \quad \Gamma \underset{\mathrm{EC}\varepsilon}{\vdash} \mathsf{InvSub}(\varphi, \vartheta).$$

4. Az extenzionális szemantika és az algebrai megközelítés

A Második epszilon axióma egyik jótékony hatása, hogy a kalkulus teljessé válik kiválasztási struktúra szemantikára nézve (ezek a kalkulusok az *extenzionális* epszilon kalkulusok). Egy másik következménye, hogy egy Boole- vagy monadikus algebra generálódik egy teljes és ellentmondásmentes elmélet kanonikus modellje felett, ami izomorf az elmélet Lindenbaum–Tarski algebrája egy faktoralgebrájával. Speciálisan, véges monadikus vagy Boole-algebrák esetén a kanonikus modell izomorf az Második epszilon axióma által generált algebrával.

Legyen $(\mathfrak{M}, f)$ kiválasztási modell (f kiválasztófüggvény az M nemüres részhalmazai felett). Ekkor $\mathbf{LT}\,\mathfrak{M}f$ jelöli a modell Lindenbaum–Tarski formulaalgebráját a következő univerzummal:

$$\mathrm{LT}\,\mathfrak{M}f = \mathrm{Form}(\mathcal{L}_\varepsilon)/_{\mathfrak{M}\models.\leftrightarrow}.$$

5. Állítás (Molnár, 2011)**.** Legyen $\mathfrak{M}$ elsőrendű modell, Γ mondatok teljes és konzisztens halmaza egy extenzionális epszilon kalkulusban.

(a) Minden $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}_{v_i}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ formulára

$$\text{if } \varphi(v_i)^\Gamma = \psi(v_i)^\Gamma \text{ then } \left((\varepsilon v_i)\varphi\right)/_{=_\Gamma} \;=\; \left((\varepsilon v_i)\psi\right)/_{=_\Gamma}$$

(b) Van olyan f kiválasztófüggvény, amelyre tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}_\varepsilon)$, $t \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ esetén és tetszőleges $a = (a_1/_{=_\Gamma}, a_2/_{=_\Gamma}, ...)$ értékelésére az $\mathfrak{M}$ modellnek

$$(\mathfrak{M}, f) \models \varphi[a] \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \varphi[a_1/v_1, ..., a_n/v_n]$$

ill.

$$\Gamma \vdash t^{\mathfrak{M}f}[a] = t[a_1/v_1, ..., a_n/v_n]$$

mi több, a

$$\{\{(t/_{=_\Gamma}) \in M \mid \Gamma \vdash \varphi[t/v_i]\} \mid \varphi \in \mathrm{Fm}_{v_i}(\mathcal{L}_\varepsilon)\}$$

halmaz esetén f egyértelmű [Molnár, 2011].

Ha $(\mathfrak{M}, f)$ kiválasztási modell, akkor a

$$\Phi : \mathrm{Nr}_1\, \mathbf{LT}\, \mathfrak{M}f \to \mathrm{Can}\, \mathfrak{M}f, \quad \Phi(\varphi/_{\mathfrak{M}\models .\leftrightarrow .}) = ((\varepsilon v_0)\varphi)/_{=_{\mathrm{Th}\,\mathfrak{M}f}}$$

függvény *szűrjekció.*

6. Definíció. Jelölje $\mathbf{Can}\,(\mathfrak{M}, f)$ a Φ által generált algebrát.

6. Állítás (Molnár, 2011)**.**

$$\mathbf{Nr}_1\, \mathbf{LT}\, \mathfrak{M}f/\mathrm{Ker}\,\Phi \cong \mathbf{Can}\,\mathfrak{M}f$$

7. Definíció. Legyen $(\mathfrak{N}, g)$ modellje a Γ teljes és ellentmondásmentes mondathalmaznak és jelölje a Γ *kanonikus algebráját* $\mathfrak{Can}(\Gamma)$ és ennek univerzumát $\mathrm{Can}(\Gamma)$. Ekkor

$$\eta : \mathrm{Can}(\Gamma) \to N,\ \eta((\varepsilon v_i)\varphi)^{\mathfrak{Can}\,\Gamma} = ((\varepsilon v_i)\varphi)^{\mathfrak{N}g}$$

-t kanonikus injekciónak nevezzük.

7. Állítás. Ha $(\mathfrak{N}, g)$ kiválasztási modell, akkor az $\eta : \mathrm{CanTh}(\mathfrak{N}, g) \to N$ kanonikus injekció elemi beágyazás $\mathfrak{Can}\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, g)$-ból $(\mathfrak{N}, g)$-ba.

Tudjuk, hogy a Boole algebra izomorf a második duálisával a Stone-leképezésen keresztül. A kérdés, hogy mit mondhatunk az első duálisról vagy legalább is a Lindenbaum–Tarski algebráról. Ha $(\mathfrak{M}, f)$ véges Boole-algebra, akkor van egy szorosabb algebrai kapcsolat a modell cilindrikus algebrája és a $\mathfrak{Can}\,\mathfrak{M}f$ kanonikus modell között. Az alábbi tétel és állítás ezeket a kapcsolatokat fogalmazza meg.

7. Tétel (Molnár, 2011)**.** Legyen $(\mathfrak{B}, g) \in \mathsf{BA}$ Boole-algebra, ill. $(\mathfrak{M}, f) \in \mathsf{CA}_1$ monadikus algebra $\mathfrak{Can}\,\mathfrak{B}g$ mint kiválasztási modellek, és $\mathfrak{Can}\,\mathfrak{M}f$ legyenek végesek. Ekkor

(1) $\mathfrak{Can}\,\mathfrak{B}g \cong \mathbf{Can}\,\mathfrak{B}g \upharpoonright \mathcal{L}_\varepsilon^{\mathrm{BA}}$
(2) $\mathfrak{Can}\,\mathfrak{M}f \cong \mathbf{Can}\,\mathfrak{M}f \quad \text{iff} \quad \mathbf{Nr}_0\,\mathfrak{Can}\,\mathfrak{M}f \cong \mathbf{2}$.

8. Állítás (Molnár, 2011)**.** Legyen $(\mathfrak{B}, g) \in \mathsf{BA}$ be finite Boole-kiválasztási-struktúra. Ekkor

$$\mathbf{Cs}\,(\mathfrak{B}, g) \upharpoonright \mathcal{L}_\varepsilon^{\mathrm{BA}}/\mathrm{Ker}\,\Phi \cong \mathfrak{Can}\,\mathfrak{B}g.$$

5. Epszilon logika az egyszerű típusos lambda alkulusban

Ez a rész az extenzionális epszilon kalkulus lambda kalkulusbeli reprezentációjáról szól. Az ε operátorral bővített elsőrendű logikában, a kvantifikációs átfogalmazás problémáját sikerült megválaszolni ([Molnár, 2013]), mindazonáltal sok nehézkes technikai feltétel fennállása esetén. Ha az elsőrendű nyelvet elhagyva áttérünk az egyszerű típusos lambda kalkulusra, akkor a probléma világosabb megoldást nyer. A lényeg, hogy FOL-ban a $\psi[x/(\varepsilon x)\varphi]$ helyettesítés csak meta-nyelvi operáció, míg a lambda kalkulusban a tárgynyelvbe van kódolva az MN applikáció révén, vagy legalább is tekinthető ilyennek. Természetesen, ahogy az epszilon invariancia is tisztán szemantikai fogalom, ezek a tételek is halmazelméleti modellekben, a Montague-szemantikában lesznek érvényesek.
Legyen T hosszú normálformában ahol a végtípus szentenciális (o a propozíciók típusát kódoló típus), azaz

$$\Gamma \vdash \lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P : \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to o$$

ahol $P = \lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P$. Továbbá legyen $R_1, \ldots, R_n$ úgy típusolva a *Gamma* kontextusban, hogy

$$\Gamma \vdash R_1 : \alpha_1 \to o, \ldots, \Gamma \vdash R_n : \alpha_n \to o.$$

Az alábbi tétel azt mondja, hogy ha

$$(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.T)((\varepsilon x_1)R_1) \ldots ((\varepsilon x_n)R_n)$$

minden nem-epszilon részkifejezése epszilon-invariáns, akkor van explicit kvantoros megfogalmazása.

8. Tétel. Legyen $P, R \in \mathrm{Exp}(\mathcal{L}_\lambda^{\forall\varepsilon})$, $\mathfrak{M}$ Montague-modell, Γ kontextus, $\Gamma \vdash \lambda x.P : \alpha \to o$, $\Gamma \vdash \lambda x.R : \alpha \to o$, továbbá legyen $(\lambda x.P)(\varepsilon_\alpha x)R$, P és R epszilon-invariáns az $\mathfrak{M}$ Montague-modell felett. Ekkor minden a értékelésre és g kiválasztási függvényre:

$$[\![(\lambda x.P)(\varepsilon_\alpha x)R]\!]_a^{(\mathfrak{M},g)} = [\![((\forall x)(\neg R) \,\&\, (\forall x)P) \vee (((\exists x)R) \,\&\, (\forall x)(R \to P))]\!]_a^{(\mathfrak{M},g)}.$$

A helyzet hasonló Russell leíráselméletéhez. Ez a megközelítés sem ad egyetlen formulát arra, hogy az epszilon invariáns, epszilon termeket tartalmazó mondatokat hogyan kell átfogalmazni, de lehetőséget teremt ennek megkeresésére. Ilyen összetettebb (epszilon invariáns) átfogalmazásához vezessük be az alábbi kifejezést:

$$\mathsf{cases}(\lambda x_1 \dots \lambda x_n.P, R_1, \dots, R_n) =$$

$$= \bigvee_{(e_1,\dots,e_n)\in\{0,1\}^n} (\mathsf{Q}^{e_1} x_1)R_1 \,\&\, \dots \,\&\, (\mathsf{Q}^{e_n} x_n)R_n \,\&\, ((\forall x_1)\dots(\forall x_n)(R_1^{e_1} \,\&\, \dots \,\&\, R_n^{e_n}) \to P)$$

ahol

$$\mathsf{Q}^0 = \neg\exists$$
$$\mathsf{Q}^1 = \exists$$
$$R_i^0 = (\forall z)(z = z)$$
$$R_i^1 = R_i$$

és z új változó (itt tehát R_i^0 tetszőleges igaz mondat).

9. Állítás. Legyen $\mathfrak{M}$ Montague-modell, Γ kontextus, $\Gamma \vdash \lambda x_1 \dots \lambda x_n.P : \alpha_1 \to \dots \to \alpha_n \to o$, $\Gamma \vdash \lambda x_1.R_1 : \alpha_1 \to o, \dots, \Gamma \vdash \lambda x_n.R_n : \alpha_n \to o$, és $\mathrm{FV}(R_i) \subseteq \{x_i\}$. Tegyük fel, hogy $(\lambda x_1 \dots \lambda x_n.P)(\varepsilon x_1)R_1 \dots (\varepsilon x_n)R_n$ minden olyan komponense, ami nem epszilon term, epszilon invariáns az $\mathfrak{M}$ modell felett. Ekkor minden a értékelésre és g $\mathfrak{M}$ feletti kiválasztási függvényere:

$$[\![(\lambda x_1 \dots \lambda x_n.P)(\varepsilon x_1)R_1 \dots (\varepsilon x_n)R_n]\!]_a^{(\mathfrak{M},g)} = [\![\mathsf{cases}(\lambda x_1 \dots \lambda x_n.P, R_1, \dots, R_n)]\!]_a^{(\mathfrak{M},g)}$$

Hivatkozások

[Abadi et al., 2004] Abadi M., Gonthier G., Werner B., *Choice in Dynamic Linking.* In: Walukiewicz I. (eds) Foundations of Software Science and Computation Structures. FoSSaCS 2004. Lecture Notes in Computer Science, vol 2987. Springer, Berlin, Heidelberg.

[Baaz–Zach, 2019] Baaz, M., Zach, R. *The First Epsilon Theorem in Pure Intuitionistic and Intermediate Logics* `https://arxiv.org/abs/1907.04477` unpublished (2019)

[Bell, 1993a] Bell, J. L. *Hilbert's epsilon operator and classical logic*, Journal of Philosophical Logic 22 (1):1–18 (1993)

[Blass–Gurevich, 2000] Blass, A. & Gurevich, Y., *The Logic of Choice*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 65, No. 3 (Sep., 2000), pp. 1264-1310

[Caicedo, 1995] Caicedo, Xavier, *Hilbert's ε symbol in the presence of generalized quantifiers* In Quantifiers: Logics, Models, and Computation II Synthese Library, Vol. 249 (1995) p. 63-78.

[Hilbert–Bernays, 1939] Hilbert, D. & Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik,* Vol. 2 (1939) Berlin, Springer.

[Kneebone, 1963] Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics*, Van Nostrand, London, (1963).

[Mints, 1977] Mints, G., *Heyting predicate calculus with epsilon symbol,* Journal of Soviet Mathematics, (1977) vol. 8, no. 3, pp. 317–323.

[Molnár, 2011] Molnár, Z., *Induced Cylindric Algebras of Choice Structures,* Bulletin of the Section of Logic, 2011, 40, 3-4/2011, pp. 119-28.

[Molnár, 2013] Molnár, Z., *Epsilon-Invariant Substitutions and Indefinite Descriptions,* Logic Journal of the IGPL, (2013) 21 (5), pp. 812-829.

[Molnár, 2017] Molnár, Z., *Indefinite descriptions in typed lambda calculus,* In: K + K = 120 Papers dedicated to László Kálmán and András Kornai on the occasion of their 60th birthdays. Editors: Beáta Gyuris, Katalin Mády, and Gábor Recski. Research Institute for Linguistics, Hungarian Academy of Sciences. ISBN 978-963-9074-73-6, 2017.

[Monk, 1976] Monk, J. D., *Mathematical Logic,* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1976)

[Russell, 1905] Russell, B., *On Denoting,* in: Mind, New Series, Vol. 14, No. 56 (Oct. 1905), pp. 479-493.

[Shirai, 1971] Shirai K., *Intuitionistic predicate calculus with epsilon-symbol,* Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, (1971) vol. 4, no. 1, pp. 49–67.

[Sorensen–Urzyczyn, 1998] Sorensen, M. H. B., Urzyczyn, P., *Curry–Howard Isomorphism* (1998) unpublished `http://disi.unitn.it/~bernardi/RSISE11/Papers/curry-howard.pdf`

[Troelstra–Schwichtenberg, 2000] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H., *Basic Proof Theory,* second edition. Cambridge: Cambridge University Press. (2000)

[Whitehead-Russell, 1956] Whitehead, A. N., Russell, B., *Principia Mathematica,* Vol I. Cambridge: Cambridge University Press, 1956.

[Zach, 2017] Zach, R. *Semantics and Proof Theory of the Epsilon Calculus.* In: Ghosh S., Prasad S. (eds) Logic and Its Applications. ICLA 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10119. Springer, Berlin, Heidelberg.