MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdálkodás- és Szervezéstudományi Doktori Iskola

Zibriczky Dávid

Eloszlásfüggetlen nem-parametrikus eszközárazás

Tézisfüzet

Témavezető: Dr. Ormos Mihály

BUDAPEST, 2016

Tartalomjegyzék

I Bevezetés

Az 1950-es években látott napvilágot (Markowitz, 1952) a közgazdaságtan egyik úttörő elméleti modellje, a modern portfólió elmélet („Modern Portfolio Theory”, MPT). A modell egy befektetés kockázatát a hozamának szórásával jellemzi, mely 1) egyrészt magába foglalja a piacra, vagy annak egy szegmensére jellemző szisztematikus (nem diverzifikálható) kockázatot, 2) másrészt a vállalat specifikus (egyedi) kockázatát. A modern portfólió elmélet szerint portfóliók összeállításával a befektetés kockázata csökkenthető, mivel kellő mennyiségű értékpapír bevételével az egyedi kockázatok aránya elenyészővé válik és csak a szisztematikus kockázat marad jelen. A modell ezen jól diverzifikált portfóliókat hatékony portfólióknak nevezi. Jellemzőjük, hogy adott várható hozamot a legkisebb kockázattal érik el (vagy adott kockázati szint esetén a legmagasabb várható hozamot produkálják), továbbá ezen portfóliók egy hiperbola jellegű alakzatban helyezkednek el a várható hozam – szórás koordináta-rendszerben, melyet a szakirodalom Markowitz-féle határnak (vagy „Efficient Frontier”-nek) hív. A modell segítségével egy racionális befektető eldöntheti, hogy mely hatékony portfólió maximalizálja a hasznosságfüggvényét, így segítséget nyújt a portfólió választási problémában. Amennyiben egy kockázatmentes eszköz is elérhető a piacon, a hatékony portfóliókból és a kockázatmentes eszközből építhető olyan kombináció („Tangency Portfolio”), mely átmenetet képez a kockázatmentes és a kockázatos portfóliók között. Ezen modell elsősorban a kockázatkerülő befektetők számára lehet vonzó választás. A modell a szórás, mint kockázati mérték köré épül, ami a hozamok normális eloszlását feltételezi. Számos tanulmány rávilágított azonban arra, hogy ezen feltételezés a napi hozamok esetén nem helytálló.

Az 1960-as években a modern portfólió elmélet továbbgondolásaként kidolgozták az ún. tőkepiaci árazási modellt („Capital Asset Pricing Model”, CAPM) (Treynor, 1962; Sharpe, 1964; Lintner 1965a,b; Mossin, 1966). Az eszközárazás célja egy egyensúlyi modell alkotása egy kockázati mérték és a várható hozam között, függetlenül attól, milyen mértéket definiálunk. A CAPM egyensúlyi modellje szerint létezik egy piaci portfólió, mely magába foglalja az összes, piacon elérhető kockázatos eszközt. Jól diverzifikáltsága révén a piaci portfólió hatékony, így a hatékony portfóliók mentén helyezkedik el a várható hozam – szórás koordináta-rendszerben. A CAPM feltételezi, hogy a befektetők racionálisak, így azok csak hatékony portfóliót tartanak a kezükben. Kockázati mértéke a béta, ami egy eszköz (vagy portfólió) hozamának relatív érzékenységét méri a piaci hozamokhoz képest. A modell lineáris kapcsolatot feltételez az eszközök hozama és a piaci hozam között, amit az ún. karakterisztikus egyenes („Characteristic Line”) ír le, meredeksége pedig a béta. Mivel a CAPM csak hatékony portfóliók alkalmazását feltételezi, a béta csak a szisztematikus kockázatot méri. Amennyiben a béta nagyobb mint 1, az eszköz (vagy portfólió) szisztematikus kockázata nagyobb, mint a piacé, és fordítva. A CAPM egyensúlyi modellje szerint a várható hozam a béta kockázati paraméter lineáris függvénye, melyet az ún. értékpapírpiaci egyenes („Security Market Line") ír le. A kockázati prémium elmélete szerint az értékpapírpiaci egyenes meredeksége pozitív, azaz nagyobb kockázatvállalás esetén magasabb hozamot várhat el a befektető. Mivel a CAPM egy jól értelmezhető, egyszerű modellt ad, nagyon gyakran alkalmazott módszer a pénzügyi elemzésekben, a feltételezései miatt azonban számos negatív kritikát kapott a tudományos világban.

Kutatásunk során olyan eszközárazási módszereket vizsgálunk, mely nem feltételez 1) lineáris kapcsolatot a várható hozam és kockázat között, 2) lineáris kapcsolatot az eszköz hozama és a piaci hozam között, 3) normális hozameloszlást, illetve 4) piaci portfóliót. A CAPM elméleti feltevései egyszerűsítik ugyan a modellt, de a gyakorlatban ezek megalapozottsága megkérdőjelezhető. A CAPM szerint a várható hozam kizárólag a béta függvénye, így a portfóliók egy egyenesen helyezkednek el a várható hozam – béta koordináta-rendszerben. Jensen (1968) empirikus vizsgálatai során azonban ettől különböző hozamokat mért, a béta által nem magyarázott kockázatmentes hozammal korrigált hozamtöbbletet a portfóliók egyedi teljesítményeként értelmezte. Az abnormális hozam egy másik reprezentációja a karakterisztikus egyenesek tengelymetszete (amit Jensen-alfának hív a szakirodalom), más megfogalmazásban egy konstans tag, amit a piaci hozamokkal nem lehet megmagyarázni. Mivel a béta becslésére a karakterisztikus egyenes meredekségét alkalmazzák, elengedhetetlen feltétel hogy az eszközök hozama és a piaci hozam között lineáris kapcsolat álljon fenn, különben a lineáris módszerek (például legkisebb négyzetek módszere) torzított becslést adhatnak a lineáris regresszió egyenesének meredekségére és a tengelymetszetére.

Jelen értekezésben egy egyváltozós nem-parametrikus, magfüggvény-alapú („kernel") regressziós módszert vezetünk be a várható hozam és kockázat, valamint az eszközök hozama és a piaci hozam közti kapcsolat modellezésére, mely nemlineáris esetben is alkalmazható. A regressziós modellek illeszkedésének jósága alapján igazoljuk, hogy a magfüggvény-alapú módszer pontosabb becslést ad, mint a lineáris regresszió, továbbá képes a kockázat és az abnormális hozam interpretálására. Ezen nem-parametrikus módszer segítségével levezetünk egy olyan hipotézisvizsgálati módszert, mely képes két változó közötti lineáris kapcsolat vizsgálatára, esetünkben a karakterisztikus- és az értékpapírpiaci egyenes igazolására. Empirikus eredményeink alapján a karakterisztikus egyenesek linearitásának hipotézise 95%-

os konfidencia szinten elvethető az amerikai részvények esetén, így alternatív, nem-lineáris kockázatbecslési és teljesítménymérési módszert alkalmazunk. Mindazonáltal igazoljuk, hogy az esetek döntő többségében harmadfokú polinomiális összefüggés már alkalmazható, amennyiben a linearitás sérül. A lineáris és magfüggvény-alapú kockázati mértékeket összehasonlítva azon megállapításra jutunk, hogy a CAPM szignifikánsan alulbecsüli a kockázatot, amennyiben a linearitás sérül, továbbá a linearitás feltételezése (hipotézise) jellemzően a kockázatosabb eszközök esetén vethető el.

A CAPM linearitás kapcsolatot feltételez a várható hozam és a béta között. Empirikus vizsgálatunk alapján a magfüggvény-alapú nem-parametrikus béta csak akkor különbözik szignifikánsan a lineáristól, ha a linearitás sérül, így egyaránt lineáris és nemlineáris esetben is ezt a módszert alkalmazzuk a kockázat becslésére. Eredményeink szerint az értékpapírpiaci egyenes linearitása semelyik szokásos szignifikancia szinten sem vethető el, így a lineáris kapcsolat feltételezése megalapozott. Számottevő eredményünk, hogy a kisvállalatok esetén az értékpapírpiaci egyenes meredeksége negatív, ami ellentmond a CAPM kockázati prémium elvének, továbbá szignifikáns tengelymetszet (abnormális hozam) mérhető, ami alátámasztja a kisvállalati hatást (Banz, 1981; Basu, 1983). Ezen eredmények alapján megfogalmazható az első tézisünk:

1. tézis (Erdős et al., 2010a,b; Erdős et al., 2011): A tőkepiaci árazási modell (CAPM) karakterisztikus egyenesének linearitása elvethető az amerikai részvények esetén. A béta jelentősen alulbecsüli a kockázatot azon értékpapírok esetén, melyek karakterisztikus egyenesére a linearitás elvethető. Másrészről az értékpapírpiaci egyenes linearitása nem vethető el. A kisvállalatokra illesztett értékpapírpiaci egyenes meredeksége negatív, ami ellentmond a tőkepiaci árazási modell kockázati prémium elvének.

A CAPM-et ért negatív kritikák hatására számos többfaktoros modell jelent meg a tudományos világban. A kisvállalati hatás magyarázatára Fama és French (1996) a CAPM modellt két további faktorral bővítette ki – az „SMB” faktorral, mely a kis- és nagyvállalatok részvényeinek átlagos hozamkülönbsége és a „HML” faktorral, ami a magas és alacsony könyv szerinti érték/piaci érték aránnyal rendelkező vállalatokból összeállított portfóliók átlagos hozamkülönbsége – ezzel megalkotva a Fama-French-féle háromfaktoros modellt. Fama és French (1992, 1996) munkája alapján Carhart (1997) bevezetett egy további (momentum) faktort, mely a legjobban és legrosszabban teljesítő értékpapírok hozamkülönbsége a következő periódusban. A szakirodalom ezen modellt Carhart-féle négyfaktoros modellnek nevezi. Mindkét modell lineáris kapcsolatot feltételez a kockázati faktorok és a hozam között.

Hasonlóan a CAPM-en alkalmazott módszertanhoz, a többfaktoros modellek linearitását is megvizsgáljuk. Az értekezés során a korábban említett egyváltozós magfüggvény-alapú becslési és hipotézisvizsgálati módszert többváltozósra bővítjük ki. A többváltozós nem-parametrikus regresszió parciális deriváltjainak várható értékét mint az egyes kockázati faktorok együtthatóit, valamint azokkal nem magyarázható többlethozam összegét mint abnormális teljesítményt értelmezzük. Az empirikus vizsgálatok alapján sem a Fama-French-féle háromfaktoros-, sem a Carhart-féle négyfaktoros modell linearitása nem vethető el az értékpapírok hozama és a kockázati faktorok között, így a lineáris módszerek alkalmazása kockázati együtthatók becslésére megalapozott. Bár a linearitás feltevése helytálló, a lineáris becslő módszerek túlbecsülik a HML faktor együtthatóját. Elemzésünk szerint az SMB faktor együtthatója negatívan, a momentum faktor együtthatója pozitívan korrelál a vállalat méretével. A hipotézisvizsgálat alapján a második tézisünk a következőképpen fogalmazható meg:

2. tézis (Erdős et al., 2011): A Fama-French-féle faktorokkal bővített CAPM modell linearitásának hipotézise nem vethető el az amerikai részvények esetén, ezért a kockázati együtthatókra történő lineáris becslő módszerek alkalmazása megalapozott.

Kutatásunk másik irányvonala az entrópia, mint alternatív nem-parametrikus kockázati mérték vizsgálata. Az entrópia egy matematikailag definiált mérték, melyet egy rendszerben végbemenő folyamatok kimeneteinek megjósolhatatlanságára, rendezetlenségének karakterizálására alkalmaznak. Elsőként Rudolf Clausius (1870) vezette be a termodinamikában egy izolált rendszerben történő visszafordítható folyamat során bekövetkező hőenergia változás leírására. Az entrópia értelmezése a statisztikus mechanikában egy olyan bizonytalansági mérték, amely egy rendszer makroszkopikus tulajdonságainak (nyomás, hőmérséklet, térfogat) megfigyelése után az elemek elhelyezkedésének véletlenszerűségét jellemzi. Az entrópia egy további fontos alkalmazási területe az információelmélet, amelynek megalkotója Shannon volt (1948). Az entrópia az egyedi információmennyiség várható értéke, melyet egy üzenet küldés során a rendszer küld. Minél valószínűtlenebb egy üzenet fogadása, annál több információt tartalmaz, így nagyobb az entrópiája. Mivel az entrópia egy valószínűségi változó megjósolhatatlanságát méri, az a sejtésünk, hogy alkalmazható befektetések pénzügyi kockázatának modellezésére. Módszertanunkban az eszközök hozamának (kockázati prémiumának) folytonos (differenciális) entrópiáját alkalmazzuk, mint kockázati mértéket. Megjegyezzük, hogy a bevezetésben az entrópia alatt annak exponenciális függvénnyel vett transzformáltját értjük. Magasabb entrópia a hozamok nagyobb bizonytalanságát jelenti, melyet nagyobb kockázatként interpretálunk. Levezetjük, hogy az exponenciális függvényen alkalmazott Shannon-féle differenciális entrópia csak egy konstans tényezőben különbözik a szórástól, amennyiben a hozamok eloszlás normális. Számos tanulmány igazolta azonban azt, hogy a napi hozamok eloszlása nem normális így, a modern portfólió elméletben alkalmazott szórás torzított becslést adhat. Ezzel szemben az entrópia nem támaszt feltételezéseket az eloszlásra, így kevésbé torzított és pontosabb becslést adhat a kockázatra a szórással szemben.

Az értékezésben kétféle nevezetes entrópia függvényt vizsgálunk, a Shannon- és a Rényi entrópiát, továbbá háromféle entrópia becslést: a hisztogram- a „sample spacing”- és a magfüggvény-alapú módszereket. Az entrópiára vonatkozóan megvizsgáljuk, hogy teljesíti-e a koherens kockázati mértékre vonatkozó axiómákat (Artzner et al., 1999). Analitikus úton megmutatjuk, hogy az általunk definiált entrópia-alapú kockázati mérték teljesíti a pozitív homogenitást, valamint az eszközök normális hozamának feltételezésével a konvexitást és szubadditivitást. Másrészről viszont, mivel az entrópia nem teljesíti az invarianciára és monotonitásra vonatkozó axiómákat, az entrópiát nem tekintjük koherens kockázati mértéknek. Ennek ellenére megmutatjuk, hogy az entrópia eredményesen alkalmazható az eszközárazási problémára. A kockázati mértékek rugalmas, empirikus kiértékelése céljából egy módszertant definiálunk, mely képes mind a mintán belüli magyarázó-, mind a mintán kívüli előrejelző képesség rövid- és hosszú távú összehasonlítására. Eredményeink szerint a hisztogram-alapú becslés nyújtja a legkiegyensúlyozottabb pontosságot a magyarázó erő és előrejelző képesség tekintetében a vizsgált becslő módszerek közül, így levezetünk egy gyakorlatban is alkalmazható egyszerű becslő formulát mind a Shannon-, mind a Rényi entrópia függvényre. Méréseink során az entrópiát a szórással és CAPM bétával, mind referencia kockázati mértékekkel hasonlítjuk össze. A teljes adatsoron történő vizsgálat alapján, míg a kockázat és várható hozam közti lineáris egyenes tengelymetszete jelentős a szórás és CAPM béta esetén, addig az entrópia-alapú mértékek esetén ez nem szignifikáns, ami arra enged következtetni, hogy az entrópia képes a hozamok pontosabb karakterizálásra a sztenderd kockázati modellekhez képest. Empirikus eredményeink alapján a Shannon entrópia pontosabb becslést ad, mint a referencia mértékek, illetve megbízhatóbb, mint a CAPM béta. Mindazonáltal megemlítjük, hogy amennyiben a piaci trend azonosíthatóvá válik a reláció nem egyértelmű. Az egyváltozós módszertant többváltozósra egészítve megmutatjuk, hogy az entrópia alkalmas a többfaktoros (Fama-French és Carhart) árázási modellek pontosságának javítására, elsősorban a kevésbé jól diverzifikált portfóliók esetén. Az entrópiával kapcsolatos eredményeink alapján a harmadik tézisünk a következő:

3. tézis (Ormos and Zibriczky, 2014): A tőkepiaci eszközök kockázati prémiumának entrópiája hatékony mérték azok kockázatbecslésére. A hozamokra vonatkozó tanítómintán belül magyarázó- és tanítómintán kívüli előrejelző képessége pontosabb, mint a szórásé, illetve a CAPM béta paraméteré.

Mivel a Shannon entrópia csak egy konstans tényezőben tér el a modern portfólió elmélet szórásától, hasonló viselkedést sejtünk, nevezetesen azt, hogy 1) az entrópia képes mind a piaci, mind az egyedi kockázatok mérésére, 2) az entrópia képes a diverzifikáció által nyert kockázatcsökkenés kimutatására, valamint 3) a hatékony portfóliók egy hiperbola mentén helyezkednek el a kockázat – várható hozam koordináta-rendszerben. Mivel a napi hozamok nem normális eloszlást követnek, hasonló, de különböző karakterisztikát mérünk. Mintagenerálási módszerrel 99%-os konfidencia szinten megerősítjük a szubadditivitásra és konvexitásra vonatkozó hipotézisünket. Eredményeink alapján a diverzifikáció hatására egy 10 elemű egyenlően súlyozott véletlenszerű portfólió várható entrópiája 40%-kal alacsonyabb, mint egy értékpapíré. Ezek alapján megfogalmazható az utolsó tézisünk:

4. tézis (Ormos and Zibriczky, 2014): Az entrópia képes mind a piaci, mind az egyedi kockázat mérésére. Egy véletlenszerű portfólió elemszámának növelésével a várható entrópia csökken, így az entrópia alkalmas a diverzifikációs hatás kimutatására.

Az értekezés során a nem-parametrikus módszereket két fejezetben tárgyaljuk. A II. fejezetben a magfüggvény-alapú regressziós módszereket vizsgáljuk. A fejezet első felében levezetünk egy egyváltozós hipotézisvizsgálati módszert a CAPM linearitásának tesztelésére, továbbá nem-parametrikus megközelítést a kockázat becslésére és az abnormális teljesítmény mérésére. Az egyváltozós módszertan ismertetése után kiértékeljük a lineáris és nem-parametrikus módszereket a Standard & Poor's nagy-, közép- és kisvállalati index komponensein. A fejezet második felében a bevezetett egyváltozós módszertant többváltozósra egészítjük ki, továbbá megvizsgáljuk a Fama-French-féle háromfaktoros, illetve a Carhart-féle négyfaktoros modell linearitását. Ezen kívül, a többváltozós hipotézisvizsgálat segítségével egyváltozós polinom tesztet végzünk annak meghatározása érdekében, hogy megfogalmazható-e magasabb fokú összefüggés a nem-lineáris esetekben.

A III. fejezetben az entrópiát, mint kockázati mértéket vizsgáljuk. Először a diszkrét, illetve a folytonos (differenciális) entrópiát, valamint azok leggyakrabban alkalmazott nevezetes függvényeit, a Shannon- és Rényi entrópiát ismertetjük. Felvázoljuk a leggyakrabban alkalmazott becslő módszereket, illetve levezetünk egy egyszerű becslési formulát a legjobban teljesítő, hisztogram-alapú módszer alkalmazásával. Ezután részletesen megvizsgáljuk, hogy az entrópia teljesíti-e a koherencia axiómáit. Az empirikus vizsgálatok céljából egy módszertant definiálunk, mely rugalmasan képes mind a referencia kockázati mértékként használt szórás és CAPM béta, mind az entrópia különböző adatsoron történő mintán belüli és mintán kívüli kiértékelésére. Az eredmények taglalása során kitérünk a diverzifikáció mérésére, valamint a mintán belüli magyarázó és a mintán kívüli előrejelző képesség összehasonlítására. Legvégül a többfaktoros modellekre vonatkozó méréseket ismertetjük, kitérve a Fama-French- és Carhart-féle modellekre, a magasabb momentumokra és ezek kombinációira az entrópiával.

II Magfüggvény-alapú eszközárazás

A lineáris eszközárazási modellek csak abban az esetben alkalmazhatók torzításmentesen, amennyiben az felhasznált változók között lineáris kapcsolat áll fenn. Annak eldöntése érdekében, hogy a várható hozam (kockázati prémium) és a kockázati faktorok, valamint az értékpapírok hozama és a piaci hozam között lineáris kapcsolat áll fenn, egy hipotézisvizsgálati módszert vezetünk be. Mivel a változók közötti regressziós függvény ismeretlen, annak közelítésére egy nem-parametrikus magfüggvény-alapú („kernel") regressziós módszert alkalmazunk. A linearitás hipotézisét elvetjük, ha a lineáris regresszió szignifikánsan eltér a kernel regressziós görbétől. Egyváltozós esetben a CAPM modell karakterisztikus- és értékpapírpiaci egyeneseinek, többfaktoros esetben (Fama-French-féle háromfaktoros- és Carhart-féle négyfaktoros modell) a részvények napi hozama és a kockázati faktorok közötti lineáris feltételezés megalapozottságát vizsgáljuk. Amennyiben a linearitás hipotézise (feltételezése) sérül, a sztenderd lineáris módszerek (mint például a legkisebb négyzetek módszere) torzított becslést adhatnak a meredekségekre és a tengelymetszetre, így nemlineáris kockázati együttható-becslési módszereket vezetünk le. Az empirikus vizsgálatunkhoz 50-50 részvényt választunk a S&P különböző indexeiből (az S&P500-ból, az S&P MidCap 400-ból és az S&P SmallCap 600-ból), melyek 1999 és 2008 között forgalomban voltak. A vizsgált részvényekre, a piacra, a kockázatmentes hozamra, illetve a további kockázati (SMB, HML és momentum) faktorokra vonatkozó napi logaritmikus hozamadatokat a „Center of Research in Stock Prices" (CRSP) adatbázisából vettük.

II.1 Egyváltozós modellek

Y és X folytonos valószínűségi változó között a Nadaraya (1964) és Watson (1964) által bevezetett magfüggvény-alapú egyváltozós regressziós becslő függvény – a szakirodalomban Nadaraya-Watson becslő függvény – a következő képlettel írható le:

$$\hat{y} = \hat{m}_h(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{hi}(x)\, y_i\,, \tag{II.1}$$

ahol Nadaraya-Watson-féle súlyfüggvény

$$W_{hi}(x) = \frac{K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)}, \tag{II.2}$$

valamint $\hat{y}$ az x függvényében adott becslés, y_i és x_i Y és X változó egy-egy megfigyelése, a magfüggvény jelölése *K*, valamint a sávszélességé *h*. *K* és *h* helyes megválasztása optimalizálási probléma. Mivel Härdle et al (2004) szerint *K* megválasztása másodlagos fontosságú, egy normális eloszlású, minden pontban differenciálható („Gaussian") magfüggvényt alkalmazunk, azon megfontolásból, hogy később a kernel regresszió meredekségét fogjuk becsülni. Ahhoz, hogy megtaláljuk *h* sávszélesség optimális értékét, a következő általánosított, keresztvalidációval büntetett célfüggvényt minimalizáljuk:

$$CV(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{m}_h(x_i)\right)^2\left(1 - \frac{1}{n}W_{hi}(x_i)\right)^{-2}. \tag{II.3}$$

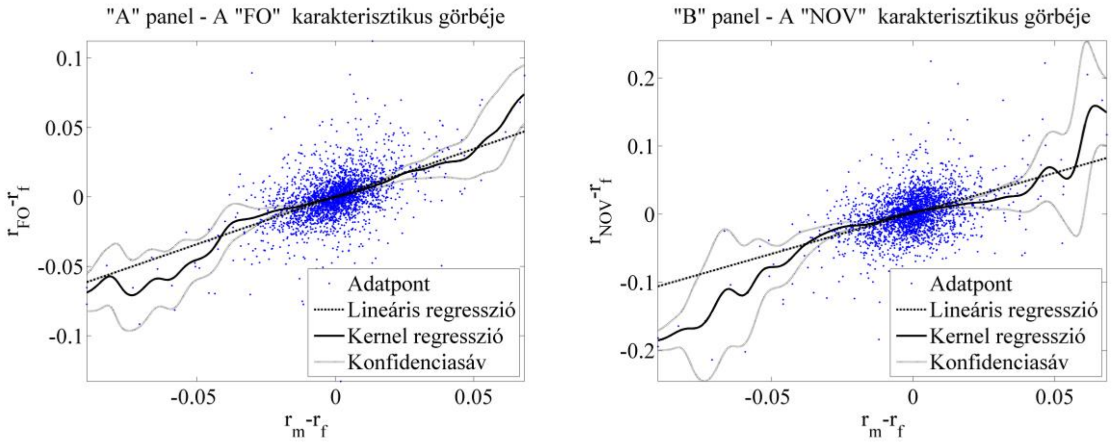
A $CV(h)$ minimalizálását egy ún. „simplex" minimum keresési eljárással végezzük egy megfelelően beállított, optimális közeli kezdőértékkel. A keresztvalidáció biztosítja, hogy a kernel regressziós modell ne tanuljon túl. A kernel és lineáris regresszió pontosságát a regresszió illeszkedésének jóságával (R^2) mérjük.

A kernel regresszió bevezetésének lényege a valós regresszió pontosabb közelítése. Ahhoz, hogy a karakterisztikus- és értékpapírpiaci egyenesekre vonatkozó linearitás feltételezésének megalapozottságát megerősítsük, egy hipotézisvizsgálati módszert vezetünk be, mely egy $m_\theta(x)$ paraméteres (jelen esetben lineáris) regresszióról eldönti, hogy szignifikánsan különbözik-e a valós regressziótól. A vizsgálat során a nullhipotézis $H_0 : m(x) = m_\theta(x)$, az alternatív hipotézis pedig $H_1 : m(x) \neq m_\theta(x)$. Mivel az $m(x)$ valós regressziós függvény ismeretlen, annak közelítésére $\hat{m}_h(x)$ kernel regressziót alkalmazzuk. A paraméteres és a kernel regresszió közötti eltérést a következő formában mérjük:

$$T = \sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{m}_h(x_i) - \sum_{j=1}^{n}W_{hi}(x_j)m_{\hat{\theta}}(x_j)\right)^2. \tag{II.4}$$

Mivel a *T* eloszlása ismeretlen, egy ún. „wild bootstrapping" mintagenerálási eljárást alkalmazunk. Az eljárás során minden iterációban y függő változó új $y_i^* = m_{\hat{\theta}}(x_i) + \varepsilon_i^*$ mintáit generáljuk *i*=1,2,..,*n*-re, ahol ε_i^* az eredeti parametrikus regresszió $\hat{\varepsilon}_i$ hibatagjából „aranymetszés szabályával" generált hibatag. Az új minta alapján megbecsüljük annak θ^* paramétereit és kiszámoljuk T^* értékét, hasonlóan ahogy *T*-t számoltuk. Összesen k_b iterációt alkalmazunk. T^* egyoldali eloszlásának feltételezésével H_0 α szignifikancia szinten elvethető, ha $\Pr\left(T > T^*\right) \geq (1-\alpha)$ azaz, ha T^* minták legalább $(1-\alpha)$ része kisebb, mint T.

A II.1. ábra két paneljén két minta értékpapír („A" panel: lineáris, „B" panel: nemlineáris) lineáris regresszióval becsült karakterisztikus egyenese, kernel regresszióval becsült karakterisztikus görbéje, valamint az ahhoz tartozó konfidencia sávok láthatók. A „B" panelen lévő ábra azt sejteti, hogy a linearitás az eloszlás szélei felé sérül; mindazonáltal a mag fele közelítve is találhatunk linearitási problémákat.



II.1. ábra. Két minta értékpapír karakterisztikus egyenese és görbéje

Megjegyzés: A két ábra két minta vállalat karakterisztikus egyenesét és görbéjét mutatja. A bal oldali („FO" azonosítójú) részvény karakterisztikus egyenesére vonatkozó linearitást nem vetettük el, a jobb oldali („NOV" azonosítójú) részvényét viszont igen. A minta részvények kockázati prémiuma és a piaci portfólió kockázati prémiuma közötti összefüggést (1) kernel regresszióval becsültük meg (karakterisztikus görbe; vastag görbe), melyhez Nadaraya-Watson-féle súlyfüggvényt, Gauss magfüggvényt és optimálisan megválasztott sávszélességet alkalmaztunk; (2) valamint lineáris regresszióval (karakterisztikus egyenes; szaggatott vonal). A szürke görbék a becslés 95%-os konfidencia-sávját jelzik.

Amennyiben a karakterisztikus egyenes alkalmazhatóságára vonatkozó linearitás hipotézise sérül, a kockázat és abnormális teljesítmény lineáris becslése torzított lehet, így alternatív nemlineáris becslőmódszerek bevezetésére van szükség. Az $m(x)$ regresszió derivált-becslésére egy kernel-súlyozott legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(x) = \left(\hat{\beta}^{(0)}(x), \hat{\beta}^{(1)}(x), \ldots, \hat{\beta}^{(p)}(x)\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\boldsymbol{y}, \qquad \text{(II.5)}$$

ahol $\hat{\beta}^{(j)}(x)$ $m(x)$ j. deriváltjának becslése, $\mathbf{P}$ egy $n \times (p+1)$ méretű mátrix, melyet a magyarázó változók j=0,1,…,p.-rendű polinomjai alapján generáltunk, $\mathbf{W}$ egy magfüggvény-alapú súlymátrix, $\boldsymbol{y}$ pedig a célváltozó megfigyelése. A nem-parametrikus bétát a következő képlettel becsüljük:

$$\hat{\beta}_{KR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}^{(1)}(x_i), \tag{II.6}$$

továbbá az abnormális hozam (alfa) nem-parametrikus becslése:

$$\hat{\alpha}_{KR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}_{KR} x_i. \tag{II.7}$$

Az empirikus vizsgálat során az összes részvény esetén elvégeztük a karakterisztikus egyenesek tesztelését, továbbá a kockázat és abnormális hozam lineáris és kernel regressziós becslését. A II.1. táblázat összegzi az eredményeket, piaci kapitalizáció szerint átlagolva (nagy: S&P 500, közepes: S&P MidCap 400 és kisvállalatok: S&P SmallCap 600), illetve a teljes mintán (összes vállalaton) vizsgálva. Az illeszkedés jósága alapján a kernel regresszió minden szegmensben minden értékpapírra pontosabb becslést ad. Eredményeink szerint a karakterisztikus egyenesek linearitása az S&P 500 szegmens esetén, illetve a teljes mintára vonatkozóan elvethető, mivel azok komponenseinek több mint 5%-a esetén elvethető.

II.1. táblázat. A karakterisztikus egyenesek linearitásának tesztje, átlagos alfa és béta értékek

Szegmens	N	$N(H_1)$	$P(H_1)$	$\overline{R^2_{KR}}$	$\overline{R^2_{LR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{KR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{LR}}$
S&P 500	50	10	20,0%	0,264	0,244	0,041	0,042	0,972	0,975
S&P MidCap 400	50	2	4,0%	0,243	0,224	0,056	0,055	0,962	0,956
S&P SmallCap 600	50	2	4,0%	0,187	0,171	0,070	0,069	1,010	0,924
Összes vállalat	150	14	9,3%	0,231	0,213	0,056	0,055	0,981	0,952
Összes vállalat H_0	136	0	0%	0,227	0,209	0,055	0,054	0,947	0,926
Összes vállalat H_1	14	14	100%	0,276	0,252	0,064	0,063	1,316	1,206

Megjegyzés: A táblázat az 50-50 S&P 500, S&P MidCap 400 és S&P 600 indexből választott véletlenszerű részvény karakterisztikus egyenesein végzett linearitás teszt eredményeit, a karakterisztikus görbék és karakterisztikus egyenesek pontosságát, valamint az azokból számított kockázati paramétereket mutatja. A karakterisztikus görbék és egyenesek becslésére kétféle módszert alkalmaztunk: (1) Kernel regresszió-alapú nem-parametrikus CAPM, melyhez a Nadaraya-Watson-féle súlyfüggvényt, Gauss magfüggvényt és ahhoz keresztvalidációval megválasztott sávszélességet alkalmaztunk. (2) lineáris regresszióval, mely a sztenderd modellnek felel meg. Az első oszlop a szegmens (csoport) megnevezését mutatja. Az felsorolt indexek mellett a teljes mintán is elvégeztük a mérést, valamint azon csoportokban, ahol a karakterisztikus egyenesek linearitás hipotézise 95%-os konfidencia szinten elvethető (H_1), illetve nem vethető el (H_0). A második, harmadik és negyedik oszlop a csoportokban lévő vállalatok számát (N), valamint azon vállalatok számát és arányát mutatja, ahol a linearitás elvethető (P). A további oszlopok a kernel- és lineáris regresszió illeszkedésének jóságát, abnormális hozam (alfa) és kockázat (béta) becslését mutatja felváltva.

Csoportosítva az értékpapírokat aszerint, hogy a karakterisztikus egyenesükre vonatkozó linearitás nem vethető el (H_0), illetve elvethető (H_1), a következő állításokat tesszük. A lineáris regresszió szignifikánsan alulbecsüli a bétát a kernel regresszióhoz képest, amennyiben a linearitás hipotézise elvethető, egyébként a különbség statisztikailag nem szignifikáns. Másrészt a béta értéke jelentősen magasabb azon csoportban, ahol a linearitás hipotézisét elvetettük, ezért megfogalmazható, hogy a linearitás jellemzően a kockázatosabb értékpapírok esetén sérül. Az állításokat kétmintás *t*-próbák segítségével igazoljuk a II.2. táblázatban. Az abnormális teljesítményre vonatkozó becslések esetén nem találunk jelentős eltéréseket.

II.2. táblázat. Kétmintás *t*-próba a bétára vonatkozóan különböző csoportosítással

1. csoport	N	Átlag	Var.	2. csoport	N	Átlag	Var.	*t*	*p*	szig.
H_0 kernel béta	136	0,9468	0,1279	H_0 lineáris béta	136	0,9257	0,0948	1,86	0,0629	
H_1 kernel béta	14	1,3157	0,1874	H_1 lineáris béta	14	1,2064	0,1173	2,39	0,0326	*
H_1 kernel béta	14	1,3157	0,1874	H_0 kernel béta	136	0,9468	0,1279	3,08	0,0076	**

Megjegyzés: A táblázat összegzi a különböző csoportok között végzett *t*-próba eredményeit. Az első, valamint második blokkban található 4-4 oszlop a következőket tartalmazza: (1) a csoport nevét, (2) a csoporton belül lévő vállalatok számát, (3-4) a csoporton belüli béta várható értékét és varianciáját. H_1 jelöli azon csoportot mely vállalatainak karakterisztikus egyenesére vonatkozó linearitás hipotézise sérül, H_0 pedig amelyre elfogadható. A béták kernel- és lineáris regresszióval lettek megbecsülve, melyet a csoport nevében tűntetünk fel. Az utolsó három oszlop a kétmintás *t*-próba eredményeit tartalmazza; *t* a teszt statisztika értéke, *p* annak a valószínűsége, hogy a két csoportban mért béta várható értéke milyen valószínűséggel nem tér el, a szig. pedig a szignifikancia szint jelzése, ahol ** és * az 1%-os és 5%-os szintet jelöli.

Az értékpapírpiaci egyenesek tesztelésére a nem-parametrikus bétákat alkalmazzuk, mint a várható hozam magyarázó változóit. A II.3. táblázat összegzi a linearitás teszt eredményét, az értékpapírpiaci egyenes illeszkedésének jóságát, valamint annak becsült paramétereit a már bemutatott kapitalizáció-alapú csoportosítással. Az eredmények alapján az értékpapírpiaci egyenesek lineáris feltevése egyik szegmensben sem vethető el (mivel a *p*-értékek magasabbak, mint 0,05). Mindazonáltal megjegyezzük, hogy a kernel regresszió pontosabb becslést ad, mint a lineáris regresszió. Az értékpapírpiaci egyenes meredeksége $(\hat{\beta}')$ a kisvállalatok esetén negatív, ami ellentmond a kockázati prémium elvének, továbbá szignifikáns tengelymetszet mérhető ugyanebben a szegmensben, ami alátámasztja a kisvállalati hatást (Banz, 1981; Basu, 1983), ami arra enged következteni, hogy a béta ezen szegmensben nem képes egyedül a várható hozam magyarázatára.

II.3. táblázat. Értékpapírpiaci egyenesek vizsgálata

Szegmens	N	$E(r-r_f)$	p	R^2_{KR}	R^2_{LR}	$\hat{\alpha}'_{KR}$	$\hat{\alpha}'_{LR}$	$\hat{\beta}'_{KR}$	$\hat{\beta}'_{LR}$
S&P 500	50	0,0357	0,144	0,117	0,052	0,028	0,007	0,008	0,029
S&P MidCap 400	50	0,0483	0,728	0,131	0,104	0,009	0,001	0,041	0,049*
S&P SmallCap 600	50	0,0548	0,760	0,089	0,026	0,087	0,081**	-0,034	-0,028
Összes vállalat	150	0,0462	0,688	0,042	0,010	0,037	0,031*	0,009	0,015

Megjegyzés: A táblázat az S&P500, S&P MidCap 400, S&P SmallCap 600 szegmensre, valamint az összes vállalatra vonatkozó értékpapírpiaci egyenesek paramétereit mutatja. Az értékpapírpiaci egyeneseket kernel- és lineáris regresszióval becsültük meg az értékpapírok várható kockázati prémiuma és a nem-parametrikus béta alapján. A kernel regresszióhoz a Nadaraya-Watson-féle súlyfüggvényt illetve Gauss magfüggvényt alkalmaztunk, melynek sávszélességét keresztvalidációval határoztuk meg. Az első oszlop a szegmens megnevezését tartalmazza, a második a szegmens mintaszámát, a harmadik oszlop a szegmensben lévő vállalatok átlagos kockázati prémiumát. *p* az értékpapírpiaci egyenesre vonatkozó linearitás vizsgálat *p*-értéke. A következő oszlopokban a felváltva a lineáris és kernel regresszióval megbecsült értékpapírpiaci egyenes illeszkedésének jóságát, várható abnormális hozamát ($\hat{\alpha}'_{KR}$, $\hat{\alpha}'_{LR}$) és várható meredekségét ($\hat{\beta}'_{KR}$, $\hat{\beta}'_{LR}$) foglaljuk össze. A lineáris regresszió $\hat{\alpha}'_{LR}$ és $\hat{\beta}'_{LR}$ paraméterének 1%-os és 5%-os szignifikancia szintjét **-gal illetve *-gal jelöljük.

II.2 Többváltozós modellek

A többfaktoros modellek linearitásának tesztelésére az előző alfejezetben bemutatott egyváltozós nem-paraméteres módszertant kibővítjük. Az általánosított, többváltozós kernel regressziós becslés (Nadaraya, 1964; Watson, 1964) a következő:

$$\hat{y} = \hat{m}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} W_{\mathbf{H}i}(\boldsymbol{x})\, y_i , \tag{II.8}$$

ahol a többváltozós Nadaray-Watson súlyozó függvény

$$W_{\mathbf{H}i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\kappa_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x})}{\sum_{i=1}^{n} \kappa_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x})}, \tag{II.9}$$

továbbá $\kappa_{\mathbf{H}}$ a többváltozós magfüggvény, $\mathbf{H}$ sávszélesség mátrixot, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ pedig egy *d*-dimenziós magyarázóváltozó vektor. Többváltozós esetben az optimalizálási cél a $\kappa_{\mathbf{H}}$ kernel függvény és $\mathbf{H}$ sávszélesség helyes megválasztása. Fama és French (1993) eredményei szerint a piaci portfólió közelítése, az SMB és a HML faktor nem mutat szignifikáns korrelációt, így a többváltozós $\mathbf{H}$ sávszélesség mátrix esetén dimenziónként egy sávszélesség értéket alkalmazunk, azaz egy sávszélesség vektorral kitöltött diagonális mátrixot:

$$\kappa_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\kappa(\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})}{\det(\mathbf{H})} = \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{h_k} K\left(\frac{u_k}{h_k}\right). \tag{II.10}$$

Ezen egyszerűsítés alapján, a többváltozós optimalizálási problémát visszavezetjük *d* darab egyváltozós problémára, melyet az előző fejezetben tárgyaltuk. A becslés pontosságát a többváltozós regresszió illeszkedésének jóságával mérjük. A többváltozós hipotézisvizsgálat módszertana hasonló az előző fejezetben tárgyalt módszerhez, annyi különbséggel, hogy ez esetben a célfüggvényünk $T_M = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{m}_{\mathbf{H}}\left(\boldsymbol{x}_i\right) - \sum_{j=1}^{n} W_{\mathbf{H}i}\left(\boldsymbol{x}_j\right) m_{\hat{\theta}}\left(\boldsymbol{x}_j\right)\right)^2$. Az egyváltozós módszer analógiájára bevezetjük a többváltozós paraméterbecslést is. Az $m(\boldsymbol{x})$ többváltozós regresszió $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ pontban vett deriváltjának közelítését kernel-súlyozott legkisebb négyeztek módszerével becsüljük:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}(\boldsymbol{x}), \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}(\boldsymbol{x}), ..., \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(p)}(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\boldsymbol{y}, \tag{II.11}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}(\boldsymbol{x})$ $m(\boldsymbol{x})$ j. deriváltjának becslése, **D** egy $n \times (pd + 1)$ méretű mátrix, melyet a magyarázó változó vektorok j=0,1,…,p.-rendű polinomjaiból generáltunk, **W** egy magfüggvény-alapú súlymátrix, továbbá $\boldsymbol{y}$ a magyarázó változók egy megfigyelése. A nem-parametrikus bétavektort a

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{KR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}(\boldsymbol{x}_i), \tag{II.12}$$

képlettel becsüljük, továbbá a nem-parametrikus alfa becslése a következő:

$$\hat{\alpha}_{KR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{KR}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}. \tag{II.13}$$

A többváltozós modellek vizsgálata során a linearitás feltevésének tesztelését végezzük a részvények hozama és a kockázati faktorok között, továbbá a megbecsüljük a kockázati együtthatókat és az abnormális hozamot lineáris- és kernel regressziós módszerrel. A hipotézisvizsgálat alapján a Fama-French modellre vonatkozó a legalacsonyabb p érték 0,08, illetve a Carhart modellre vonatkozó legkisebb érték 0,09, így 95%-os konfidencia szinten egyik részvényre vonatkozó linearitás hipotézisét sem vetjük el, azaz a lineáris módszerek alkalmazása megalapozottnak bizonyul ezen többváltozós modelleken. A II.4. táblázat összegzi az eredményeket kapitalizáció szerinti bontásban (nagy-: S&P 500, közepes-: S&P MidCap 400 és kisvállalatok: S&P SmallCap 600), továbbá az összes vállalatra nézve a Fama-French-féle háromfaktoros- („A” panel) és a Carhart-féle négyfaktoros modell („B” panel) esetén. Bár a linearitást nem vetettük el, a kernel regresszió illeszkedésének jósága szignifikánsan magasabb a lineáris regresszióhoz képest. Az eredmények alapján többváltozós esetben a béták között már nincs szignifikáns eltérés, azonban a HML faktor együtthatóját ($\hat{\beta}_{H,LR}$) a lineáris regresszió szignifikánsan túlbecsüli.

II.4. táblázat. Többfaktoros modellek alfa és a kockázati együttható becslése

„A” panel – Fama-French-féle háromfaktoros modell

Szegmens	$\overline{R^2_{KR}}$	$\overline{R^2_{LR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{KR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{3,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{3,LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{S,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{S,LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{H,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{H,LR}}$
S&P 500	0,38	0,28	0,034	0,034	1,041	1,025	0,190	0,107	0,200	0,249
S&P MidCap 400	0,36	0,27	0,036	0,034	1,024	1,034	0,591	0,571	0,393	0,508
S&P SmallCap 600	0,32	0,22	0,046	0,043	0,965	0,971	0,855	0,861	0,226	0,371
Összes vállalat	0,35	0,26	0,039	0,037	1,010	1,010	0,545	0,513	0,273	0,376

„B” panel – Carhart-féle négyfaktoros modell

Szegmens	$\overline{R^2_{KR}}$	$\overline{R^2_{LR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{KR}}$	$\overline{\hat{\alpha}_{LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{4,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{4,LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{S,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{S,LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{H,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{H,LR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{M,KR}}$	$\overline{\hat{\beta}_{M,LR}}$
S&P 500	0,47	0,29	0,037	0,038	1,00	1,00	0,21	0,12	0,17	0,22	-0,059	-0,079
S&P MC. 400	0,46	0,28	0,041	0,041	0,97	0,99	0,59	0,59	0,34	0,45	-0,118	-0,156
S&P SC. 600	0,40	0,22	0,051	0,048	0,94	0,94	0,87	0,88	0,23	0,32	-0,161	-0,132
Összes vállalat	0,44	0,26	0,043	0,043	0,97	0,98	0,55	0,53	0,25	0,33	-0,113	-0,122

Megjegyzés: A táblázat az 50-50 S&P 500, S&P MidCap 400 és S&P 600 indexből választott véletlenszerű részvény kockázati prémiumára illesztett Fama-French-féle háromfaktoros („A” panel) és Carhart-féle négyfaktoros („B” panel) modell illeszkedésének átlagos jóságát és átlagos kockázati együtthatóit mutatja különböző csoportosítással. A részvények kockázati prémiumai és a piaci portfólió, valamint kockázati faktorok közötti regresszió modellezésére kernel- és lineáris regressziót alkalmaztunk. Fama-French modell esetén a kockázati faktorok az SMB és HML, illetve a Carhart modell esetén további MOM faktort használtunk. Az SMB a kis- és nagyvállalatok részvényeinek átlagos hozamkülönbsége, a HML a magas és alacsony könyv szerinti érték/piaci érték aránnyal rendelkező vállalatokból összeállított portfóliók átlagos hozamkülönbsége, a MOM a legjobban és legrosszabban teljesítő értékpapírokból épített portfóliók hozamkülönbsége a következő periódusban. A kernel regresszióhoz a Nadaraya-Watson-féle súlyfüggvényt illetve többváltozós Gauss magfüggvényt alkalmaztunk, melynek sávszélesség mátrixát keresztvalidációval határoztuk meg. Az első oszlop a szegmens (csoport) megnevezését mutatja. Az felsorolt indexek mellett a teljes mintán is elvégeztük a mérést. A további oszlopok felváltva a kernel- és lineáris regresszió illeszkedésének átlagos jóságát, továbbá a kockázati együtthatók átlagos mértékét mutatják.

III Entrópia-alapú eszközárazás

Az entrópiát mint pénzügyi kockázati mértéket vizsgáljuk. Az eszközárazási problémára a differenciális entrópiát alkalmazzuk, megvizsgálva a nevezetes entrópia függvényeket, azaz a Shannon- és Rényi entrópiát. Kitérünk az entrópia becsléséhez szükséges módszerekre, továbbá megvizsgáljuk, hogy az általunk definiált entrópia-alapú kockázati mérték teljesíti-e a koherens kockázati mértékre vonatkozó axiómákat. Az empirikus vizsgálatainkhoz egy rugalmas módszertant definiálunk, mely képes bármely egy- vagy többváltozós kockázati mérték várható hozamra vonatkozó mintán belüli magyarázó erejének, illetve mintán kívüli előrejelző képességének vizsgálatára és összevetésére. Elemzésünk során megvizsgáljuk, hogyan viselkedik az entrópia diverzifikáció hatására, illetve összevetjük a pontossági mutatók eredményét a szórással és a CAPM bétával. Kitekintésként megmérünk különböző többváltozós kockázati modelleket is, illetve megvizsgáljuk, hogy alkalmazható-e az entrópia a sztenderd többfaktoros modellek pontosságának javítására. Empirikus vizsgálatunk során véletlenszerűen 150 értékpapírt választottunk a Standard & Poor’s 500 részvényindexből, majd ezek napi logaritmikus hozamán 27 éves időtartamra vonatkozóan végeztünk méréseket. A piaci portfólió közelítésére, a kockázatmentes hozamra, illetve a további SMB, HML és momentum faktorokra vonatkozó adatokat egyaránt a CRSP adatbázisából szereztük ugyanezen időtartamra.

III.1 Entrópia mint kockázati mérték

Egy valós halmazon értelmezett X folytonos valószínűségi változó bizonytalanságát karakterizáló mérték a folytonos (differenciális) entrópia, melynek általános képlete a következő (Rényi, 1961):

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int f(x)^\alpha \, dx \,. \tag{III.1}$$

Speciális esete a Shannon entrópia $(\alpha = 1)$, mely

$$H_1(X) = -\int f(x) \ln f(x) \, dx \tag{III.2}$$

képlettel írható fel, illetve széleskörűen alkalmazott esete a Rényi entrópia $(\alpha = 2)$, ami

$$H_2(X) = -\ln \int f(x)^2 \, dx \,. \tag{III.3}$$

Az entrópia ún. „plug-in” általános becslése

$$H_{\alpha,n}(X)=\frac{1}{1-\alpha}\ln\int_{A_n} f_n(x)^{\alpha}\,dx, \tag{III.4}$$

ahol $f_n(x)$ $f(x)$ sűrűségfüggvény becslése X n darab megfigyelése alapján, továbbá A_n az integrálás tartománya. A leggyakrabban alkalmazott sűrűségfüggvény becslési módszerek vizsgálata alapján a hisztogram-alapú módszert találjuk összességében a legpontosabbnak és legmegbízhatóbbnak a mintán belüli magyarázó- illetve a mintán kívüli előrejelző képességét tekintve. $f(x)$ hisztogram-alapú becslése $f_n(x)=\frac{\nu_j}{nh}$, if $x\in(t_j,t_{j+1})$, ahol ν_j a megfigyelések száma, melyek a *j*. rekeszbe esnek, illetve *h* a rekesz méretének nagysága. Mivel a „plug-in" becslési módszer integrálási műveletet tartalmaz, nehéz implementálni, így levezetünk egy egyszerűbb képletet mind a Shannon-, mind a Rényi entrópia hisztogram-alapú becslésére:

$$H_{1,n}(X)=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{g}\nu_j\ln\left(\frac{\nu_j}{nh}\right), \tag{III.5}$$

$$H_{2,n}(X)=-\ln\sum_{j=1}^{g}h\left(\frac{\nu_j}{nh}\right)^2 \tag{III.6}$$

Mivel a $H_\alpha(X)$ differenciális entrópia nem teljesíti a pozitív homogenitás axiómáját, illetve negatív értékeket is felvehet, egy exponenciális transzformációt alkalmazunk a jobb alkalmazhatóság érdekében. Ezek alapján *A* eszköz entrópia-alapú kockázata a következő:

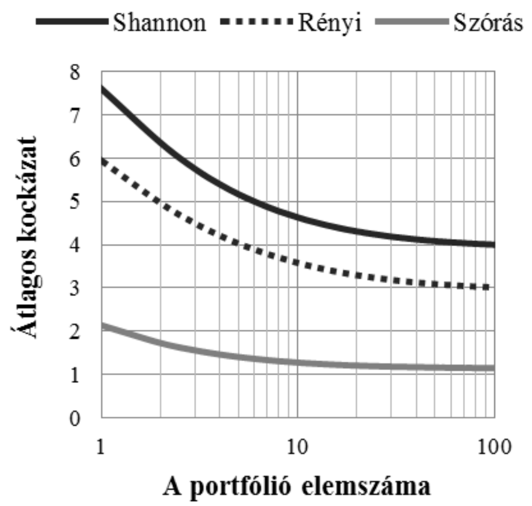
$$\hat{\kappa}_H(A)=e^{H_n(R_A-R_F)}, \tag{III.7}$$

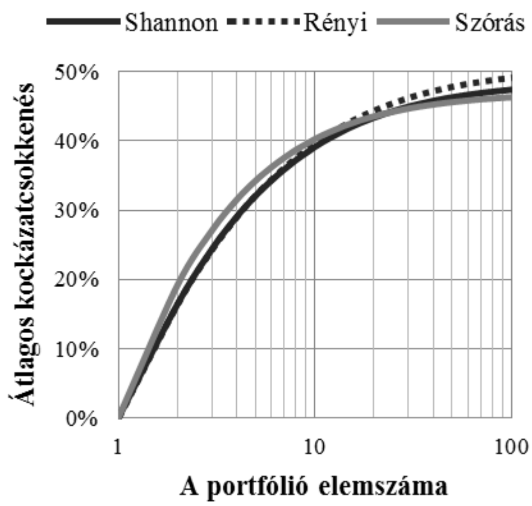
ahol R_A az *A* eszköz hozamának valószínűségi változója, R_F a kockázatmentes hozam. A módszer a kockázatot a piaci portfóliótól függetlenül becsli. Az értekezésben levezetjük, hogy amennyiben R_A-R_F normális eloszlást követ, a Shannon entrópia-alapú kockázati mérték mindössze konstans $\sqrt{2\pi e}$ együtthatóban különbözik a szórástól.

Artzner és szerzőtársai szerint (1999) egy kockázati mérték koherens, ha teljesíti az invarianciára, szubadditivitásra, pozitív homogenitásra és monotonitásra vonatkozó axiómákat. Az értekezésben analitikusan igazoljuk, hogy a (III.7) egyenletben definiált kockázati mérték teljesíti a pozitív homogenitást, valamint a portfóliók hozamának normális eloszlása esetén a szubdadditivitást és konvexitást. Továbbá levezetjük azt is, hogy az entrópia-alapú kockázati mérték nem teljesíti az invarianciára és monotonitásra vonatkozó axiómákat, így nem tekintjük koherensnek. Mindazonáltal megjegyezzük, hogy a koherencia nem feltétele az eszközárazásnak, továbbá megmutatjuk, hogy az entrópia eredményesen alkalmazható a várható hozam (kockázati prémium) magyarázatára és előrejelzésére.

III.2 Empirikus eredmények

1 millió véletlenszerűen súlyozott portfóliópár generálásával empirikusan igazoljuk, hogy 99%-os konfidenciaszint mellett az entrópia képes a diverzifikációs hatás kimutatására bármely két portfólió között. Egy további mérésben 10 millió, egyenlően súlyozott, különböző elemszámú véletlenszerű portfóliót generáltunk, melynek kockázatát szórással és entrópia-alapú kockázati mértékekkel megbecsültünk, majd a kockázati mértékeket elemszámok szerint átlagoltuk. Az eredményeket a III.1. ábra illusztrálja. A bal oldali ábra alapján látható, hogy a várható kockázat egy véletlen, egyenlően súlyozott portfólió elemszámának növelésével csökken. A jobb oldali ábra szerint 10 véletlen értékpapírból épített portfólió entrópia-alapú kockázatának mértéke 40%-kal csökken egy egyelemű értékpapírhoz képest. A két ábra arra enged következtetni, hogy az entrópia hasonlóan, de mégsem ugyanúgy viselkedik, mint a modern portfólió elméletben alkalmazott szórás.

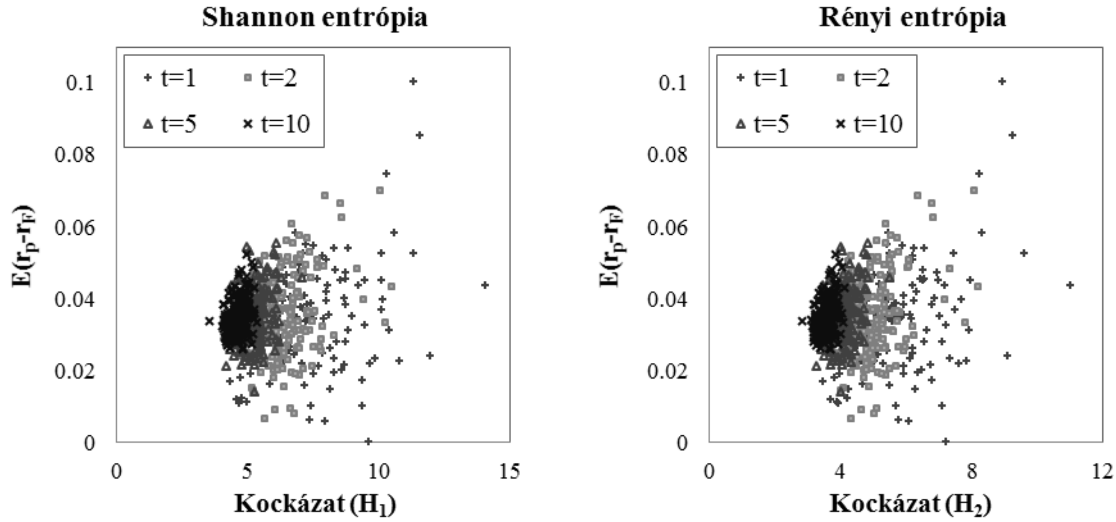




III.1. ábra. A kockázat átlagos értéke és a kockázat átlagos relatív csökkenés a portfólió elemszámának függvényében

Megjegyzés: Az S&P 500 indexből véletlenszerűen választott 150 részvényből 10 millió különböző elemszámú (elemszámonként legfeljebb 100 ezer) egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk. A portfóliók kockázatát szórással (szürke vonal), Shannon entrópiával (fekete vonal) és Rényi entrópiával (fekete szaggatott vonal) becsültük meg a vizsgált perióduson (1985-2011), majd elemszámonként átlagot képeztünk. A bal ábra kockázat várható mértékét, a jobb ábra a várható kockázat-csökkenést mutatja egy részvény átlagos kockázatához képest portfólió elemszámának függvényében.

Megvizsgáltuk, hogyan helyezkednek el a véletlenszerű portfóliók a kockázat – várható hozam koordináta-rendszerben a diverzifikálás hatására. 200-200 véletlenszerű, egyenlően súlyozott 2, 5 és 10 elemű portfóliót generáltunk az egyes értékpapírok mellett, majd megbecsültük ezek entrópiáját. A III.2. ábra alapján a diverzifikáció hatására a portfóliók balra tömörülnek, továbbá hiperbola jellegű elrendeződést vesznek fel, hasonlóan a modern portfólió elmélethez (Markowitz, 1952).



III.2. ábra. Véletlenszerű, különböző elemszámú portfóliók elhelyezkedése a várható kockázati prémium – kockázat koordináta-rendszerben

Megjegyzés: Az ábrák a részvények és portfóliók várható kockázati prémiuma és a kockázata közötti összefüggést mutatják a diverzifikáció függvényében. Az S&P 500 indexből véletlenszerűen választott 150 részvényt, valamint ezekből előállított 2, 5 és 10 elemű 200 darab véletlenszerű egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk. A portfólió elemszámát *t*-vel jelöljük. A bal oldali ábra esetén a kockázatot Shannon entrópiával, a jobb ábra esetén pedig Rényi entrópiával becsültük a vizsgált perióduson (1985-2011).

A kockázati mértékek empirikus kiértékeléséhez egy módszertant definiálunk, mely alkalmas mind a mintán belüli magyarázó-, mind a mintán kívüli előrejelző képesség összehasonlítására. Mind a magyarázó- mind az előrejelző képesség esetén a lineáris regresszió illeszkedésének jóságát mérjük a kockázati mértékek (mint magyarázó változók) és az azonos, illetve későbbi időszakban mért várható hozam (mint függő változó) között. A Shannon- és Rényi entrópia mellett referencia mértékként a szórást és CAPM bétát alkalmazzuk, melyet különböző mintákon értékelünk ki. A mérési eredményeket, valamint a minták leírását az III.1. táblázatban foglaljuk össze.

III.1. táblázat. A kockázati mértékek pontosságának összehasonlítása különböző mintákon

Kockázati mérték	$R^2_{I,lt}$	$R^2_{I,bull}$	$R^2_{I,bear}$	$\overline{R^2_{I,st}}$	$\overline{R^2_{O,st}}$	$\sigma_R\left(R^2_{I,st}\right)$	$\sigma_R\left(R^2_{O,st}\right)$
Szórás	0,0783	0,3390	0,3671	0,0794	0,0970	0,75	0,65
CAPM béta	0,0617	0,3667	0,4369	0,1331	0,0645	0,98	1,02
Shannon entrópia	0,1298	0,4345	0,3961	0,1338	0,1015	0,69	0,64
Rényi entrópia	0,1571	0,4236	0,3855	0,1282	0,0934	0,62	0,60

Megjegyzés: A táblázat a vizsgált kockázati mértékek a várható kockázati prémiumra vonatkozó hosszú- és rövid-távú magyarázó erejét (mintán belüli R^2-et), valamint előrejelző képességét (mintán kívüli R^2-et) összegzi. Az S&P 500 indexből véletlenszerűen választott 150 részvény kockázatát szórással, CAPM bétával, Shannon- és Rényi entrópiával becsültük meg a következő periódusokon: (1) a teljes mintán, mely 1985 elejétől 2011 végéig tart; (2) a teljes minta emelkedő trendű periódusaiban; (3) a teljes minta csökkenő trendű periódusaiban; (4) 18 darab 10-éves periódus alapján, melyeket 1-1 éves eltolással generáltunk (1985-1994)-től (2002-2011)-ig. Ezen minták első 5 évében becsültük a kockázatot, majd ugyanezen mintán mértük a rövid távú magyarázó erőt és a rákövetkező második 5 éves perióduson az előrejelző képességet. A második, harmadik és negyedik oszlop a hosszú távú magyarázó képességet méri a teljes mintán, illetve az emelkedő és csökkenő trend ismeretében. Az 5. és 6. oszlop a 18 darab mintán mért átlagos magyarázó- és előrejelző képességet mutatja, az utolsó két oszlop pedig ezen mintákban mért relatív szórást.

A III.1. táblázat alapján a következőket állítjuk. A Shannon entrópia a teljes mintán, illetve a rövid távú mintákon pontosabb becslést ad, mint a szórás és a CAPM béta, továbbá a Rényi entrópia hosszú távú magyarázó képessége a legjobb. A „rövid távú" mintákban az entrópia-alapú kockázati mértékek megbízhatóbb becslést adnak a CAPM bétához képest, mivel jelentősebb kisebb a teljesítményük ingadozása (relatív szórása). A szórás és az entrópia-alapú mértékek ingadozásának mértéke statisztikailag nem különbözik. Amennyiben a piaci trend azonosíthatóvá válik, jelentősen magasabb magyarázó erőt mérünk mindegyik kockázati mérték esetén. Mindazonáltal megjegyezzük, hogy ez esetben az entrópia-alapú mértékek és a CAPM béta teljesítménye közötti reláció vegyes.

Kiegészítésként különböző többváltozós kockázati modellt is megvizsgálunk. Eredményeink alapján a Fama-French-féle háromfaktoros és Carhart-féle négyfaktoros modellek pontossága jelentősen magasabb. Kimutatjuk, hogy az entrópia képes ezen modellek magyarázó- és előrejelző képességének növelésére, elsősorban a kevésbé jól diverzifikált portfóliók esetén. További érdekesség, hogy a magasabb momentumok jelentősen javítják az entrópia-alapú kockázati mértékek pontosságát. Az értekezésben további kockázati modell kombinációt vizsgálunk, melyek hozzájárulhatnak a vizsgált árazási modellek hatékonyságának pontosabb megértéséhez.

Hivatkozások

1 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, *9*(3), 203—228. doi:10.1111/1467-9965.00068

2 Banz, R. W. (1981). The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, *9*(1), 3—18. doi:10.1016/0304-405X(81)90018-0

3 Basu, S. (1983). The relationship between earnings' yield, market value and return for NYSE common stocks: Further evidence. *Journal of financial economics*, *12*(1), 129—156. doi:10.1016/0304-405X(83)90031-4

4 Clausius, R. (1870). XVI. On a mechanical theorem applicable to heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *40*(265), 122—127. doi:10.1080/14786447008640370

5 Fama, E. F. & French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, *47*(2), 427—465. doi: 10.1111/j.1540-6261.1992.tb04398.x

6 Fama, E. F. & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, *33*(1), 3-56. doi:10.1016/0304-405X(93)90023-5

7 Fama, E. F. & French, K. R. (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The Journal of Finance*, *51*(1), 55—84. doi:10.2307/2329302

8 Härdle, W., Müller, M., Sperlich, S., Werwatz, A. (2004): *Nonparametric and Semiparametric Models*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag. Chapter 1-4. doi:10.1007/978-3-642-17146-8

9 Lintner, J. (1965a). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, *47*(1), 13—37. doi:10.2307/1924119

10 Lintner, J. (1965b). Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*, *20*(4), 587—615. doi:10.1111/j.1540-6261.1965.tb02930.x

11 Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77—91. doi:10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

12 Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, *34*(4), 768—783. doi:10.2307/1910098

13 Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, *9*(1), 141—142. doi:10.1137/1109020

14 Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425—442. doi:10.2307/2977928

15 Treynor, J. L. (1962). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Robert Korajczyk (Ed.), *Asset Pricing and Portfolio Performance*. London: Risk Books. 1999

16 Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, *26*(4), 359—372.

Kapcsolódó saját publikációk

Tézisekben hivatkozott folyóirat cikkek

1 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2011). Non-parametric and semi-parametric asset pricing. *Economic Modelling*, *28*(3), 1150—1162. doi:10.1016/j.econmod.2010.12.008 (IF: 0.701)

2 Ormos, M. & Zibriczky, D. (2014). Entropy-Based Financial Asset Pricing. *PLoS ONE*, *9*(12): e115742. doi:10.1371/journal.pone.0115742 (IF: 3.234)

3 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2010b). Non-parametric Asset Pricing: Evidence from US Stocks. *The Empirical Economics Letters*, *9*(6), 573—580

4 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2010a). Egyenes-e a tőkepiaci árazási modell (CAPM) karakterisztikus és értékpapír-piaci egyenese?. *Közgazdasági Szemle*, *57*(3), 201—221.

További folyóirat cikkek

5 Ormos, M. & Zibriczky, D. Entrópia mint pénzügyi kockázati mérték. *Szigma*, *Kézirat javított változata bírálat alatt.*

Konferencia cikkek

6 Ormos, M. & Zibriczky D. (2013, June). Entropy Based Asset Pricing. In Aaro Hazak (Ed.), *5th International Conference "Economic Challenges in Enlarged Europe"*. Tallinn, Estonia (pp. 1—20, paper 2).

7 Ormos, M. & Zibriczky, D. (2013, June). Asset pricing and entropy. In – *Proceedings of the 10th International Scientific Conference on European Financial Systems 2013*, Brno, Czech Republic, (pp. 241—248).

8 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2010, May). Non-linear Asset Pricing. In L. Galetic, M. Spremic. & M. Ivanov (Eds.), *5th International Conference "An Enterprise Odyssey: From Crisis to Prosperity–Challenges for Government and Business".* Opatija, Croatia (pp. 564—590). (ISBN: 953-6025-34-5)

9 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2010, January) Kernel Based Asset Pricing. In: P. Cervinek & P. Musil (Eds.), *2nd international PhD students conference – New Economic Challenges*. Brno, Czech Republic (pp. 16—23). (ISBN:978-80-210-5111-9)

Poszterek

10 Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2009, June). *Non-parametric Asset Pricing: Evidence from U.S. Stocks*. Poster presented at Morgan Stanley-BME Financial Innovation Centre Kick-off & Workshop, Budapest, Hungary