



**M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2**  
**CSONKA PÁL DOKTORI ISKOLA**

**ÜTEMEZÉSI ÉS KÖLTSÉGTERVEZÉSI FELADATOK  
ÁLTALÁNOSÍTÁSAI A PROJEKTMENEDZSMENT  
TERÜLETÉN**

**PhD Doktori értekezés**

**Csordás Helga**

**Építés kivitelezési Tanszék**

**2014**

# Tartalomjegyzék

<b>Tartalomjegyzék</b>	<b>1</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
1.1. Az értekezés célkitűzése . . . . .	2
1.2. Alapfeltevések . . . . .	2
1.2.1. A beruházási modellek jellemzői . . . . .	2
1.2.2. Típusfeladatok . . . . .	3
1.3. Felhasznált források . . . . .	4
1.3.1. Az építőipari gyakorlat . . . . .	4
1.3.2. Irodalomkutatás . . . . .	5
<b>2. Az értekezés új tudományos eredményei</b>	<b>10</b>
2.1. Technológiaváltás lehetősége a költségtervezési feladatban	10
2.1.1. A folyamrendezés módszere . . . . .	13
2.1.2. A folyamelterelés módszere . . . . .	14
2.1.3. A független folyamatok módszere . . . . .	16
2.2. Naptárasítás . . . . .	17
2.2.1. Ütemezés . . . . .	18
2.2.2. Költségtervezési feladat . . . . .	20
<b>3. További kutatási feladatok</b>	<b>24</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>25</b>

## 1. Bevezetés

### 1.1. Az értekezés célkitűzése

A dolgozat célja az operációkutatásban ismert beruházási modellek általánosítási lehetőségeinek vizsgálata annak érdekében, hogy az új tudományos eredmények az ismert ütemezési és költségtervezési elméleti modelleket közelebb vigyék a valós gyakorlati feltételekhez. A kutatás eredményei két csoportra oszthatók. Az első kutatási terület a költségtervezési feladat költségadatainak általánosítására irányul. Célja a költségtervezési feladat alkalmazása olyan ütemezési feltétel esetére, ahol egy folyamathoz több technológiai alternatíva is megadható. A másik kutatási terület a költségtervezési feladat idő-adatainak általánosítását célozza, azon belül is a folyamatok naptárasításának lehetőségét vizsgálja.

### 1.2. Alapfeltevések

#### 1.2.1. A beruházási modellek jellemzői

A beruházási modell leképezése irányított élhálózatra történik, melynek matematikai modellje a gráftechnikán alapul. A *gráf* csúcsok, vagy csomópontok és az őket összekötő élek halmaza. Legyen az élek halmaza  $A$ , a csomópontok halmaza  $N$ . A halmazok elemszáma  $|N| = n$  és  $|A| = m$ . A gráf egyes elemeihez társíthatók a feladat adatai. Legtöbb esetben az élekhez rendelünk valós, vagy természetes számokat. Ezt nevezzük az élek súlyozásának. Jelen dolgozat további részeire értelmezett tervütem háló jellemzői a következők:

1. Minden tevékenység pontosan egyszer szerepel.
2. Egy  $s$  forrással és egy  $r$  nyelővel rendelkezik és minden  $i \neq s, r$  csomóponton keresztül létezik a forrást és a nyelőt összekötő  $P(s, r) = \{s = x_0, x_1, \dots, i, \dots, x_k = r\}$  út.
3. Nem tartalmazhat azonos kezdő- és végcsomóponttal rendelkező párhuzamos éleket.
4. Az élek súlyszámainak előjele tetszőleges lehet, mely az éleket  $A^+$ ,  $A^0$  és  $A^-$  diszjunkt halmazokra osztja ( $A^+ \cup A^0 \cup A^- = A$ ).
5.  $H = \{i = x_0, x_1, \dots, x_k, x_0 = i\}$  hurok létezése megengedett, kivéve az egyetlen élből álló hurkot.

6. Az  $[N, A^+ \cup A^0]$  részgráf összefüggő és egy forrással rendelkezik.

### 1.2.2. Típusfeladatok

**Ütemezési feladat.** Ütemezés, vagy időtervezési feladat kapcsán a modellben az egyes tevékenységek és a köztük lévő kapcsolatok időbeli távolsága szerepel. Tehát minden folyamathoz - legyen az tevékenység, vagy kapcsolat - egyetlen időparaméter van társítva. Ezt  $\tau_{ij}$ -vel jelöljük és  $\forall ij \in A$ -ra értelmezzük. A feladat célja a minimális átfutási idő meghatározása. Erre a maximális út - minimális potenciál lineáris programozási feladat szolgáltat eredményt. A számítás  $\forall i \in N$ -re egy-egy potenciálértéket ad eredményül, melyet  $\mu_i$ -vel jelölünk. A feltétel

$$\mu_j - \mu_i \geq \tau_{ij}, \forall ij \in A \quad (1)$$

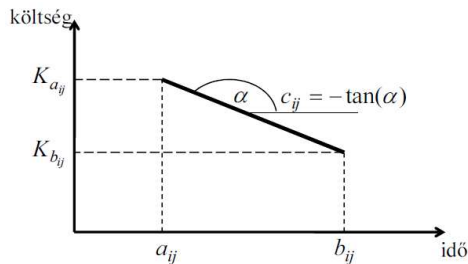
Ez egy minimális feltételt jelent a csomópontok, mint adott feladat kezdete és vége közötti időbeli távolságra. Projektek ütemezése kapcsán azonban felmerülhet az igény maximális feltételek alkalmazására is. Ennek tipikus esetei az állagmegóvás, vagy nagyértékű gép bérlési idejének korlátozása lehet. Ez a feltétel épp az előzővel ellentétes relációt kíván.

$$\mu_j - \mu_i \leq \tau_{ij}, \forall ij \in A \quad (2)$$

A feladat egységes kezelésének érdekében ez utóbbi feltételt át kell alakítani. Az átalakítás alapján a maximális feltételek negatív időparaméterrel és az értelmezés irányával ellentétes éllel vihetők be a modellbe.

**Költségtervezési feladat.** A feladat során feltesszük, hogy a beruházás részeként jelentkező folyamatok különböző folyamatidővel valósulhatnak meg. Egy valós folyamat megvalósításához szükséges minimális időtartam a *rohamidő*, jele  $a_{ij}$ , a hozzá tartozó költségszint  $K_{a_{ij}}$ . A folyamat megvalósításához szükséges minimális költségszinthez tartozó időtartam a *normálidő*, jele  $b_{ij}$ , a hozzá tartozó költségszint  $K_{b_{ij}}$ . A két érték közti időegységekhez tartozó költségszinteket lineáris interpolációval határozzuk meg. Az egyenes meredeksége  $c_{ij}$  *költségintenzitás*, mely az ismert értékekből számítható.  $c_{ij} = \frac{K_{a_{ij}} - K_{b_{ij}}}{b_{ij} - a_{ij}}$

Az egyes paraméterek közötti összefüggést a 1. ábra szemlélteti.



1. ábra: A költségtervezési feladat paraméterezése

### 1.3. Felhasznált források

#### 1.3.1. Az építőipari gyakorlat

Beruházások ütemezése során találkozhatunk olyan – elsősorban külföldi – példákkal, melyek azt mutatják, lehet pontos becsléseket adni az organizációs tervekre vonatkozóan, melyeket a kivitelezés során követni lehet. Egy saját felmérés során elemzésre került, hogy a magyar építőiparnak milyen tapasztalatai vannak ezen a téren.

Összességében azt lehet mondani, hogy a legnagyobb probléma az előkészítői munka hiányossága. ...A kikerülő tervek a nagy sietségben nem kellőképpen átgondoltak, és ennek alapján kell minél gyorsabban egy nyerő ajánlatot összeállítani. Ehhez azonban olyan ütemezési és finanszírozási feltételeket kell a kivitelezőnek bevállalnia, melybe semmilyen biztonsági tartalék nem fér bele. A kivitelezésben rengeteg erőforrás kerül megmozgatásra, melynek szervezésében sajnos mindig vannak buktatók. Ráadásul a legtöbb munkafázis egymásra épül. Tehát ha valamelyikben csúszás van, az kihat az összes többire. A határidő azonban szent és sérthetetlen! Így a késéseket valamivel kompenzálni kell. Ez általában túlórákat jelent, ami viszont többletköltséget eredményez. Azonban a költségkeret is tartalék nélkül van előírva, tehát más területen kell lefaragni. Ez pedig általában már a minőség, vagy éppen a műszaki tartalom rovására megy.

Tudományos megközelítésből olyan rugalmas költségoptimalizálási modellek kidolgozására van szükség, mely a projektek adottságait tartalmazzák, az idő és költségkeretek figyelembe vételével. Nevezetesen az elméletben már ismert költségtervezési feladatot kellene a gyakorlat

számára hasznos általánosításokkal bővíteni.

A témával kapcsolatosan megjelent publikáció:

**Beruházási ütemtervek hibaforrásai, Budapest, Építőmester 2007. szeptember - október, pp.68-70.**

### 1.3.2. Irodalomkutatás

**Topologikus sorrend.** A feladatok egyszerűbb kezelhetősége és az algoritmusok gyorsításának érdekében gyakran felmerül az igény a csomópontok topologikus sorrendben történő számozására. Ez azt jelenti, hogy a háló élei mindig a kisebb sorszámú csomópontból a nagyobb felé mutatnak. A feladat megoldását és peremfeltételeit többek között Ahuja et. al. [1] vagy Frank [12] munkáiban is meg lehet találni. Ahogy azt már Ők is megállapították könnyen belátható, hogy a hurkokat is tartalmazó háló esetében lehetetlen ilyen számozást megállapítani. Azonban az előzőekben bemutatott típusfeladatokban hurkok az ütemezésben kialakulhatnak.

Legyen a pozitív élek halmaza  $A^+$ , a negatív élek halmaza  $A^-$  és a maradék  $A^0$ . Belátható, hogy  $[N, A^+]$  részgráfban nem lehet hurok. A feladat realizálásának feltétele, hogy  $[N, A^+ \cup A^0]$  részgráf összefüggő, valamint hogy annak továbbra is egy kezdő és egy végpontja van, melyet a továbbiakban feltételként írunk elő. A hálónak azon  $ij$  élei, melyeknél  $i < j$ , a topológiai sorrend részei. Ezen élek összessége alkotja  $A^t$  élhalmazt.

**Útvariáns számlálás.** Útvariánsokat két kitüntetett ( $x$  és  $y$ ) elem között lehet számolni a háló csomópontjaira (és éleire egyaránt). Ekkor az  $M$  szomszédsági mátrixból képezhető  $VAR$  útvariánsokat követő mátrix a következő eljárással képezhető.

$$VAR_{ij} = \begin{cases} VAR_{ij} + VAR_{ik}, & \text{ha } VAR_{kj} > 0, i, j \neq k \\ VAR_{ij}, & \text{különben} \end{cases}$$

Ennek alapján az egyes elemekre meghatározható útvariánsok száma:

- A kiemelt elemek esetében  $var_x = var_y = VAR_{xy}$
- A köztes elemek esetében  $var_k = VAR_{xk} \cdot VAR_{ky}$ , mint a beérkező és kiinduló utak variációinak száma

Az eredmény jellemzői:

- Az aciklikus és topologikus feltételek következtében a  $VAR$  mátrixban csak a főátló felett lehetnek nem nulla értékek.
- Ha egy  $k$  elem nem része egyetlen a kitüntetett elemek közötti útnak sem, akkor  $var_k = 0$ .

**Ütemezési feladat.** A feladat lineáris programozáson alapul, ahol a *Primál feladat* mellé a párosítható egy *Duál feladtpár*. A feladtpár célfüggvényeinek szélsőértékei megegyeznek, mely egyben a feladat optimuma is.

**Primál feladat.** Adott  $[N, A]$  tervütem hálón,  $\tau_{ij} \forall ij \in A$  mellett keresendő azon  $\mu \Rightarrow \mu_i \forall i \in N$  potenciálrendszer, melyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \mu_j - \mu_i &\geq \tau_{ij}, \forall ij \in A & (3) \\ \mu_s &= 0 \\ \mu_r &\rightarrow \min \end{aligned}$$

**Duál feladat.** Adott  $[N, A]$  tervütem hálón keresendő azon  $f$  folyamrendszer, melyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{is \in A} f_{is} - \sum_{sj \in A} f_{sj} &= -1 \\ \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{kj \in A} f_{kj} &= 0 \quad \forall k \in N \setminus \{s, r\} & (4) \\ \sum_{ir \in A} f_{ir} - \sum_{rj \in A} f_{rj} &= 1 \\ \sum_{ij \in A} f_{ij} \cdot \tau_{ij} &\rightarrow \max \end{aligned}$$

A háló definíciójából következik, hogy  $\sum_{is \in A} f_{is} = 0$ , hiszen ilyen élek nem léteznek. A hálóban az  $f$  folyamrendszer egységnyi folyamat generál  $s$ -ből  $r$ -be, mely kijelöli azon  $P(s, r)$  ut(ak közül valamelyet), melyre

$$\sum_{ij \in P(s, r)} \tau_{ij} \rightarrow \max$$

**Hurok a hálóban.** A maximális feltételek lehetőségének következménye a hurkok megjelenése a hálóban. Tetszőleges  $H$  hurok *hurokértéke* a hurok mentén található időtartamok előjeles összege, jele  $\rho_H$ .

$$\rho_H = \sum_{ij \in H} \tau_{ij}$$

Negatív élek esetében lehetséges olyan hurok, melynek hurokértéke nem pozitív, tehát az ütemezési feladat ebben az esetben megoldható. A hurkok egymással is kapcsolatban lehetnek és ezáltal egymásra is hatással vannak. Egy azonos  $Q$  *hurokcsoportha* tartoznak mindazon csomópontok, melyekre létezik olyan hurok, mely az összes csomópontot érinti. A hurokcsoporthakon kívüli csomópontok *hurokmentes csoportokba* tartoznak, melyet  $W$  -vel jelölünk.

Hurkok keresésére többféle algoritmus is létezik. Jelen esetben a hálóban lévő összes hurokcsoporthat meg kell találni és be kell tudni azonosítani, hogy mely csomópontok tartoznak egy hurokcsoportha. Erre 1962-ben Warshall [35] bemutatott egy útkeresési eljárást, melyet később Vattai [34] is felhasznál és módosított. A feladat kiindulásaként meghatározandó a szomszédsági mátrix, mely  $M = n \times n$  méretű.

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } ij \in A \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ebből  $V$  *kapcsolati mátrix* a következő logikai függvény szerint alakul:

$$V_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nexists \text{ út } i\text{-ből } j\text{-be} \\ 1, & \text{ha } \exists P(i, j) \end{cases}$$

**Változó folyamatidők.** Az egyik első eredményt Klafszky [24] mutatta be még 1972-ben. Ebben olyan alapvető definíciók meghatározásra kerültek, mint az indulási időpont, a várakozási időtartam és az utazási időtartam.

Kifejezetten az építőipar számára kidolgozott modellt Hallefjorda és Wallace [18] cikke tartalmazza. A dolgozat feltételezése szerint minden, a beruházási modellbe épített feladat rendelkezik valamilyen erőforrás igényvel. Az erőforrások rendelkezésre állását egy-egy munkarendben lehet megjeleníteni, melyet egy alapnaptárhoz viszonyítunk. Ennek alapján minden egyes folyamathoz hozzárendelhető egy előrehaladási rend. A különböző erőforrások különböző munkarenddel rendelkezhetnek. Ha egy folyamatnak többféle erőforrás igénye van, akkor azok munkarendjének metszete lesz az előrehaladási rend.



Azon folyamatok esetében, melyekhez nem rendelhető erőforrás, alkalmazható az alapnaptár, mely egyben a munkarendek viszonyítási alapja is. Ilyen például a technológiai szünet, mely folyamat minden naptári napot magában foglal. Tehát az alapnaptár tipikus esetben minden naptári napot tartalmaz.

A feladatokhoz rendelt  $\tau_{ij}$  időtartamok a szükséges munkanapok számát jelölik. A megadott műszaki tartalom és a hozzárendelt technológia alapján meghatározható a munkaigény. Az erőforrás kapacitásának megállapítása után  $\tau_{ij}$  értéke, mint alapérték, konstansnak tekinthető. Ennek megfelelően a tényleges, vagy naptárasított időtartam értéke a folyamat kezdési időpontjától ( $\mu_i$ ) függ, annak megfelelően változik. A naptárasítás ezen formáját Franck et. al. [11] is alkalmazta és az eddig bemutatott modellt használta fel. A dolgozatban is az  $\hat{O}$  jelölésük került alkalmazásra.

A hálóban minden  $ij$  élhez rendelhető egy  $d_{ij}$  naptárvektor, melyet a következő egységugrás függvény definiál.

$$d_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ ha a } t. \text{ napon rendelkezésre áll az erőforrás} \\ 0, \text{ különben} \end{array} \right\}$$

Tetszőleges  $\tau_{ij}$  tevékenységidőhöz és  $\mu_i$  kezdési időponthoz rendelhető  $\vartheta_{ij}(\mu_i)$  naptárasított tevékenységidő a  $d_{ij}$  naptárvektor segítségével számítható.

$$\tau_{ij} = \text{sgn}(\tau_{ij}) \sum_{t=\mu_i}^{\min\{\mu_i + \vartheta_{ij}(\mu_i)\}} d_{ij}(t) \quad (5)$$

A naptárasított tevékenységidő jellemzői a következők:

- A naptárvektor definíciójának köszönhetően abszolút értékben a naptárasított tevékenységidő nem kisebb az alapértékénél

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau_{ij} \leq \vartheta_{ij}(\mu_i) \\ \vartheta_{ij}(\mu_i) &\leq \tau_{ij} \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

- A naptárasított és alapértékek egymáshoz viszonyított relációja nem változik, vagyis tetszőleges  $\tau_{ij}^{(1)} < \tau_{ij}^{(2)}$  alapértékek esetén teljesül, hogy

$$\vartheta_{ij}^{(1)}(\mu_i) < \vartheta_{ij}^{(2)}(\mu_i) \quad (7)$$

- Ha egy tevékenység később kezdődik, akkor nem lehet korábban vége. Más szóval tetszőleges  $\varepsilon > 0$  érték esetén teljesül, hogy

$$\vartheta_{ij}(\mu_i + \varepsilon) \geq \vartheta_{ij}(\mu_i) - \varepsilon \quad (8)$$

A témával kapcsolatosan megjelent publikáció:

**Változó folyamatidők alkalmazása hálós modellezésben, ÉTE Építésszervezés és Építéstechnológia Konferencia 2009, Budapest**

**A költségtervezési alapeladat.** A költségtervezési feladat visszavezethető egy minimális költségű folyam feladatra. Ezen folyamalgoritmusok megtalálhatóak Ahuja [1] munkájában. A feladat megoldására 1969-ben megjelent Klafszky [25], majd 1992-ben Hajdu és Klafszky [15] dolgozata, melyek maximális folyam algoritmuson alapulnak, azonban csak minimális feltételek kezelésére alkalmasak. A 2004-ben és 2005-ben megjelent Mályusz [28] és [29] cikkekben már lehetőség van a maximális feltételek korlátlan alkalmazására is. A következőkben ez utóbbi feladat lineáris programozási feladatrendszerre kerül bemutatásra.

**Primál feladat.** Adott  $[N, A]$  digráfban keresendő azon  $\tau$  és  $\mu$  rendszer, melyekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + \mu_i - \mu_j &\leq 0 \\ -\tau_{ij} &\leq -a_{ij} \\ \tau_{ij} &\leq b_{ij} \\ \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot \tau_{ij} &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (9)$$

**Duál feladat.** Adott  $[N, A]$  digráfban keresendő azon  $f$  folyamrendszer, melyre teljesül, hogy

$$\sum_{kj \in A} f_{kj} - \sum_{ik \in A} f_{ik} = 0, \quad \forall k \in N \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) \cdot (b_{ij}) - \sum_{\substack{ij \in A \\ c_{ij} < f_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) \cdot (a_{ij}) \rightarrow \min$$

A folyamfeltételek nincsenek megkülönböztetve az  $s$  és  $r$  csomópontok esetére, tehát a folyam cirkulál. Ennek megfelelően a feladatban az  $[N, A]$  digráfot ki kell egészíteni egy  $rs$  éllel, mely a feladat megoldhatóságát nem korlátozhatja.

Maximális feltételek esetében legyen  $a_{ij} \leq b_{ij} \leq 0$  és  $c_{ij} = 0$  paraméterezés definiálva.

## 2. Az értekezés új tudományos eredményei

### 2.1. Technológiaváltás lehetősége a költségtervezési feladatban

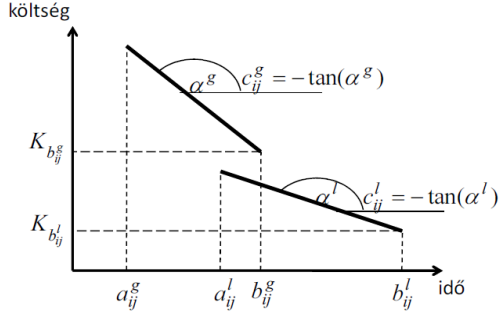
A költségtervezési feladat során a tevékenységekhez rendelt idő- és költségadatok meghatározásához el kell dönteni, hogy az adott tevékenység végrehajtásához milyen technológiai megoldást – erőforrást – alkalmazunk. Jellemzően az építőiparban azonban nem csak egy alternatíva alkalmas az adott műszaki feladat elvégzésére. Több variáns kipróbálásához az ismert optimalizálási feladatot minden egyes variánsra el kell végezni. Ha ez több tevékenység esetében is igaz, akkor minden variáns összes variációjára el kell végezni a feladatot. Ez esetben a futási idő exponenciálisan nő, ráadásul nagyon sok a redundáns számítás.

Elsőként megvizsgáltam, hogyan lehetséges több technológiai alternatíva beépítése a maximális folyam algoritmuson alapuló költségtervezési feladat matematikai modelljébe.

**1. Tézis.** *A technológiaváltás költségtervezési feladatba való beépítéséhez definiáltam az egységesített költséggörbét, meghatároztam paramétereinek feltételrendszerét. Definiáltam a technológiaváltás fogalmát és meghatároztam a hozzá rendelhető bemenő adatok értékeit. Megadtam egy matematikai modellt, mely alkalmas az ismert maximális folyam algoritmuson alapuló költségtervezési megoldás felhasználásához.*

Az eredeti feladattal analóg módon értelmezzük  $[N, A]$  digráfot, valamint az élkekhez rendelhető  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  és  $c_{ij}$  értékeket. Legyen  $B \in A$  olyan élhalmaz, melyben egy élhez több - jelen esetben a követhetőség érdekében kettő -  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  és  $c_{ij}$  paraméter tartozik. Tehát  $B$  halmazban vannak azon tevékenységek, melyekre több technológiai variáns van definiálva. Nyilvánvaló, hogy ezek időparaméterei különböznek, hisz emiatt történik a feladat bővítése. Ennek alapján legyen az egyik a lassabb ( $l$ ), a másik a gyorsabb ( $g$ ) az értelmezésnek megfelelően.

Egyenkénti költséggörbékük nem tér el az eredeti feladatban is alkalmazott függvényről (1. ábra). Paramétereik viszonyát a 2. ábra mutatja, melyet a továbbiakban feltételként írunk elő.

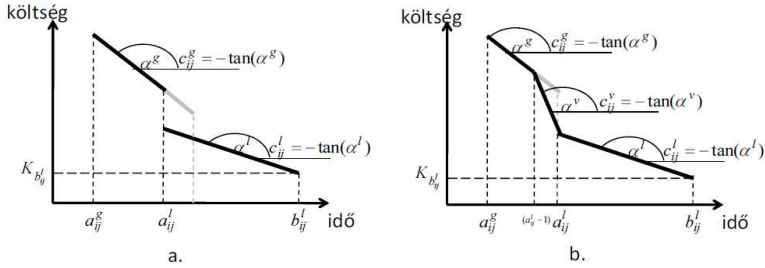


2. ábra: Többszörös paraméterezésű tevékenységek

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^g &< a_{ij}^l; & b_{ij}^g &< b_{ij}^l; & c_{ij}^g &> c_{ij}^l & (11) \\
 a_{ij}^l &\leq b_{ij}^g \\
 K_{b_{ij}^g} &\geq K_{b_{ij}^l} + (b_{ij}^l - b_{ij}^g) \cdot c_{ij}^l
 \end{aligned}$$

Az egységesítés során értelmezni szükséges a technológiaváltást, mely az  $[a_{ij}^l - 1; a_{ij}^l]$  egységnyi szakaszon következik be. Költségintenzitása a két költséggörbe adataiból származtatható.

$$c_{ij}^v = \frac{[K_{b_{ij}^g} + (b_{ij}^g - (a_{ij}^l - 1)) \cdot c_{ij}^g] - [K_{b_{ij}^l} + (b_{ij}^l - a_{ij}^l) \cdot c_{ij}^l]}{a_{ij}^l - (a_{ij}^l - 1)} \quad (12)$$

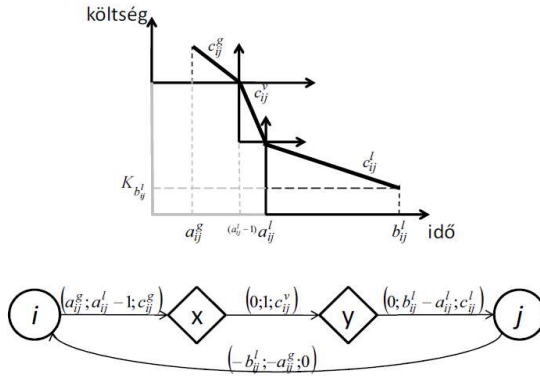


3. ábra: Egységesített költséggörbe

Az egységesített költséggörbe alapján a matematikai modellben  $B \in A$  azon élek halmaza, melyekre három  $c_{ij}$  érték van értelmezve úgy, hogy teljesítik (11) és (12) feltételeket. Bővítjük  $B$  halmaz elemeit úgy, hogy  $\forall ij \in B$  élhez rendeljünk két további csomópontot ( $x$  és  $y$ ), melyek az eredeti  $i$  és  $j$  csomópontok közé kerülnek, ezzel bővítve  $N$  halmazt. Ezen "belső" csomópontok a háló többi csomópontjával nem állnak közvetlen kapcsolatban, az  $ij \in A$  élt háromfelé osztják és képzik  $ix, xy, yj \in A$  élcsoportot. Az új élek a 3.b. ábrán látható egységesített költséggörbét meredekségük szerint szétválasztják. Így paraméterezésükben egyenként egy  $c_{ij}$  értékkel rendelkeznek. A 4. ábra megmutatja, hogyan esik szét a költséggörbe, valamint leolvashatóak az egyes normálidőkhöz rendelt költségek.

*Technológiaváltásnak* nevezzük, ha valamely  $xy \in B$  él esetében  $\tau_{xy}$  értéke 1 -ről 0 -ra csökken.

$K_{b_{ix}} = 0, K_{b_{xy}} = 0, K_{b_{yj}} = K_{b_{ij}}^l$ . Tehát a feladatot ezzel visszavezetjük az eredeti modellel analóg bemeneti adatstruktúrára. Ha a tevékenységidőre maximális feltételt is elő kell írni, az megtehető annak szakaszolása nélkül. Hiszen a maximális feltételre  $c_{ij} = 0$  van előírva.



4. ábra: Technológiaváltás hálós modellje

A feladat feltételei és célfüggvényei az eredeti feladattal megegyeznek, azzal a kiegészítéssel, hogy a  $B$  halmaz élcsoportjainak időtartamai csak és kizárólag a kívánt sorrendben változhatnak, mert értelmezésük szerint egymással szoros összefüggésben állnak.

A módszer következménye változó költségszintek alkalmazása. Emiatt az egyes lépésekben különböző konvex megoldáshalmazok érvényesek. Ez esetben azonban nem garantált, hogy a megoldás a globális optimumban van, mert a változó megoldáshalmazban nem definiálható egyértelműen ez a pont. A feladat megoldása során így az egyetlen - a konvex megoldáshalmazon optimális eredményt biztosító -, megkövetelhető jellemző, hogy a primál és duál célfüggvényértékek megegyezzenek. Ez az optimalitási kritériumok betartása mellett biztosítható.

A következőkben három módszer kerül bemutatásra.

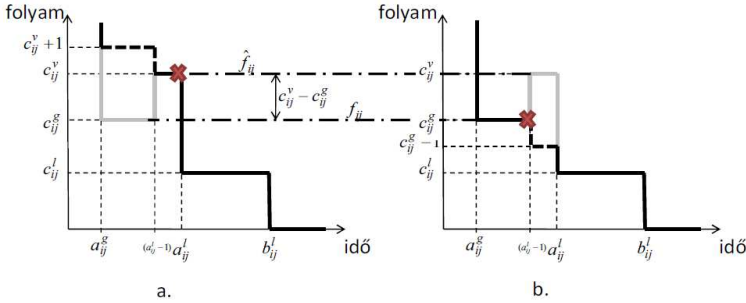
Elsőként megvizsgáltam az egységesített költséggörbére definiált matematikai modell alkalmazásának lehetőségét és kidolgoztam a folyamrendezés módszerét.

### 2.1.1. A folyamrendezés módszere

A maximális folyam algoritmus használatához a modellt úgy kell beállítani, hogy a kívánt sorrendben történjenek az időtartam módosítások. A szabad kapacitás értékek a költségintenzitások alapján számíthatók. Tehát a megoldás ezek változtatásával lehetséges. Ennek megfelelően  $B$  halmaz elemeire értelmezzük a következő költségparaméterezéseket

$$c_{ix} = \left\{ \begin{array}{l} \max \{ c_{ij}^g; c_{ij}^v + 1 \}, \text{ ha } \tau_{xy} = 1 \\ c_{ij}^g, \text{ különben} \end{array} \right\}$$

$$c_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^v, \text{ ha } \tau_{xy} = 1 \\ \min \{ c_{ij}^v; c_{ij}^g - 1 \}, \text{ különben} \end{array} \right\}$$



5. ábra: Folyamszintek technológiaváltáskor

Az 5. ábráról leolvasható, hogy technológiaváltás esetén a meglévő folyamatot csökkenteni kell  $c_{xy} - c_{ix}$  értékkel, vagyis folyamatot kell keresni  $r$ -ből  $s$ -be.

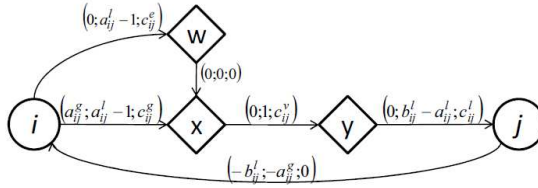
A probléma csak akkor merül fel, ha  $c_{ij}^g < c_{ij}^v$ . Ellenkező esetben a fizikai modellben meghatározott egységesített költséggörbe minden pontban konvex, így a lineáris programozási feladat triviálisan megoldható. Ha az említett reláció mégis teljesül, akkor a technológiaváltás után az  $ix$  és  $xy$  élek költségintenzitásának módosulása következtében ezen élek mentén nem megengedett szabad kapacitásértékek adódnak.

A témával kapcsolatosan megjelent publikáció:

**A Network Flow Algorithm For Time-Cost Trade-off With Technological Decision, 7th International Conference Organization, Technology And Management In Construction, Zadar, Croatia, 2006. (Co. Mályusz Levente) (ISBN 953-96245-6-8)**

### 2.1.2. A folyamelterelés módszere

A folyameltereléses módszer  $B$  halmazhoz tartozó éleinek matematikai modellje a 6. ábrán látható.



6. ábra: Folyameltereléses módszer matematikai modellje

A párhuzamos élek elkerülése érdekében tehát egy újabb ( $w$ ) csomópont beiktatása szükséges. A folyamelterelésre beiktatott  $iw$  él költségintenzitása az elterelendő folyam nagyságától függ és ebben az esetben sem lehet konstans.

$$c_{ij}^e = \max\{0; c_{ij}^v - c_{ij}^g + \tau_{xy}\}$$

A beiktatott  $iw$  élen a technológiaváltás során kapacitás csökkenés lép fel, mégis szükség visszafelé történő folyamkeresésre. Ha az  $iw$  él technológiaváltáskor lenne telített, lokális folyamrendezéssel egységnyi folyamat az  $ix$  élre irányítva elérhető, hogy a technológiaváltás után  $c_{iw} = c_{ij}^v - c_{ij}^g$  költségintenzitással rendelkező él szabad kapacitása zérus legyen. Ez pedig egy megengedett szabad kapacitásérték.

A  $B$  halmaz élcsoportjaira értelmezhető "felesleges" folyamok által generált látszatköltségek nagysága számítással meghatározható. Ennek értéke

$$\sum_{iw \in B} (b_{iw} - \tau_{iw}) \cdot c_{iw} = \sum_{\substack{ij \in B \\ c_{ij}^v > c_{ij}^g}} \max\{0; [(a_{ij}^l - 1) - \tau_{ij}] \cdot (c_{ij}^v - c_{ij}^g)\} \quad (13)$$

A témával kapcsolatosan megjelent publikációk:

**Beruházások erőforrásainak optimális kiválasztása a költségtervezési feladat alapján, 12. Projektmenedzsment Fórum, Budapest, 2009.**

**Optimal Selection of Recourses in Projects Based on the Classical Time - Cost Trade – Offs , Hungary, 2010., Periodica**



Polytechnica Social and Management Sciences , 2009. 17/1 pp. 47-55.

### 2.1.3. A független folyamatok módszere

A független folyamatok módszere azon a tényen alapszik, hogy a maximális folyam algoritmus alapján minden iterációs lépésben megengedett megoldásokat kell előállítani. Tehát az egyes lépések önmagukban is optimális megoldást adnak. Ha minden optimális eredményt kiinduló optimális megoldásnak tekintünk, akkor azokat egymástól függetlenül is kezelhetjük. A független folyamatokhoz rendelhető szabad kapacitás háló értékeit az 1. táblázat foglalja össze.

élosztály	opt.kritérium	$\mu$ rendszer	$z$ rendszer	
I	csak az 1.	$b_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$z_{ij} = 0$	$z_{ji} = 0$
II	2.és 3.	$a_{ij} < \mu_j - \mu_i < b_{ij}$	$z_{ij} = c_{ij}$	$z_{ji} = 0$
III	csak a 2.	$a_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$z_{ij} = \infty$	$z_{ji} = 0$
IV	csak a 3.	$\mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$z_{ij} = c_{ij}$	$z_{ji} = 0$
V	egyik sem	$a_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$z_{ij} = \infty$	$z_{ji} = 0$

1. táblázat: Az optimalitási feltételeknek megfelelő élosztályok független folyamatok esetében

Mivel az előzetesen átküldött folyamatok törlésre kerülnek, ezért soha nem állhat elő nem megengedett szabad kapacitás háló, így folyam viselkedésre sincs szükség, ami a technológiaváltás költségintenzitásának változtatásával volt lehetséges. Csupán azt kell biztosítani, hogy a technológiaváltás a gyorsabb tevékenység csökkentése előtt megtörténjen, így csak ennek paraméterezését kell módosítani. Legyen

$$c_{ix} = \tau_{xy} \cdot c_{xy} + c_{ix}$$

A témával kapcsolatosan megjelent publikáció:

**Activities With Multi-Parameters In Time-Cost Trade-Off, Hungary, 2011. Pollack Periodica, 2011. Vol. 6, No. 2, pp. 37–48.**

**2. Tézis.** *A technológiaváltás kezelésére létrehozott egységesített költséggörbét tartalmazó matematikai modell megoldására három algoritmust dolgoztam ki, melyek az ismert maximális folyam algoritmuson alapuló algoritmus különböző átalakításai:*

- *A folyamrendezés módszerében bebizonyítottam, hogy adott tevékenység technológiaváltása után mindig található az új optimalitási*

*kritériumoknak megfelelő folyamrendszer úgy, hogy a tevékenységhez tartozó  $\tau$  értékek nem változnak.*

- *A folyamelterelés módszerét alkalmazva az algoritmus minden lépése teljesíti az egyensúlyi feltételeket. A matematikai modellbe épített segédelemek az ütemezés költségét módosítják, azonban az általam megadott képlet alapján ennek mértéke pontosan számítható.*
- *A független folyamok módszere minden lépésben megengedett megoldást eredményez, valamint megmutattam hogy melyek azok az esetek, amikor ez a megoldás nem teljesíti az egyensúlyi feltételeket. Bebizonyítottam, hogy az algoritmus az egyensúlyi feltételek nem teljesítése esetén a következő iterációk során visszatér az azt teljesítő megoldások halmazába.*

A három algoritmus összehasonlítása során megmutattam, hogy a folyamrendezés algoritmus kedvezőtlen esetben a sorozatos visszafelé történő folyamkeresés és vágás következtében az eredeti feladathoz képest is hosszabb futási időt eredményezhet, ahol a variánsok egyenkénti alkalmazásával azok összes kombinációjára kell lefuttatni az algoritmust. A folyamelterelés és a független folyamok módszere feloldja ezt a problémát, tehát egyértelműen kedvezőbb megoldás. Míg az eredeti feladat futási ideje a variánsok számának növekedésével exponenciálisan nő, addig a független folyamok módszerével csupán polinomiális a növekedés.

A folyamelterelés módszerénél a látszatköltségek kezelése okoz többfeladatot, míg a független folyamok módszere nagymértékben elszakad a maximális folyam algoritmus LP megoldásától, ugyanakkor hatékonysága azzal szemben egyértelmű.

### 2.2. Naptárasítás

A naptárasítás lényege, hogy az ütemezésben résztvevő folyamatokra meghatározott szükséges munkaidők ( $\tau_{ij}$ ) a kezdési időpontjaik szerint ( $\mu_i$ ) a hozzájuk rendelt naptárvektor ( $d_{ij}$ ) alapján veszik fel változó idejű naptárasított tevékenységidejüket ( $\vartheta_{ij}(\mu_i)$ ). A feladat és így annak definiálása is  $T$  átfutási időn belül értelmezett. A cél a költségtervezési feladat naptárasítása, melynek egyik része az időtervezési feladat. A beruházási modell általános alkalmazhatósága érdekében a tervütem hálóban lehetőség van tetszőleges naptárak és maximális feltételek definiálására. Ennek hatására az ütemezésben olyan hurkok ( $H$ ) alakulhatnak ki, melyekre számolható hurokérték ( $\rho_H$ ) előjele változhat.

### 2.2.1. Ütemezés

Legyen  $p$  a lehetséges  $P_i(s, r)$ ,  $i = 1..p$  utak variációinak száma.

Értelmezzük  $L$   $p \times n$  elemű mátrixot, mint az egyes  $P_i(s, r)$  útvariánsok mentén értelmezhető  $P_i(s, j)$ ,  $j \in P_i(s, r)$  úthosszak gyűjtőmátrixát.

$$L[i, j] \geq \sum_{\substack{xy \in P_i(s, j) \\ P_i(s, j) \in P_i(s, r)}} \vartheta_{xy}(L[i, x]) \quad (14)$$

$$i = 1..n, j = 1..p$$

Általában teljesül az egyenlőség, azonban hurkok esetében ez nem egyértelmű.

Ha valamely  $P_i(s, r)$  út része valamely  $H_k$  hurok, akkor egyértelműen megadható  $x \in N_{H_k}$ , az út mentén elsőként elért hurokpont. A hurokban tehát ez a körbeszámolás kezdőpontja. Ha (14) alapján körbeszámoljuk a hurkot, akkor visszaérve a kiindulási ponthoz, egy újabb (ellenőrző) értéket kapunk  $x$ -re. Az  $x$ -re kapott két érték különbsége a hurokérték. A hurokérték a hurok viselkedésének jellemzője. A "konstans" feladattól ismert, hogy ha a hurokérték pozitív, akkor az ütemezési feladatnak nincs véges megoldása. Viszont időtől függő élekkel rendelkező tervütem háló esetében a hurokérték a tevékenységidők függvényében változik. Ha az aktuális  $\rho_{H_k}$  pozitív, akkor a körbeszámolás eredményeképpen kapott ellenőrző értékről indulva újra körbeszámolható a hurok. Ez az iterációs számítás addig folytatható, míg az ellenőrző érték nagyobb a kiindulási értéknél és ez lesz az adott útvariánshoz rendelhető úthosszak értéke a  $H_k$  hurokban.

**3. Tézis.** *Bebizonyítottam, hogy a naptárak és maximális feltételek korlátozás nélküli alkalmazásával definiált ütemezési problémában számítható  $L_{ij}$  úthosszakra hurkok esetén a fent leírt iterációs számítás az első lehetséges megoldást eredményezi, valamint azt, hogy az iterációs számítás során meghatározott első lehetséges megoldásban a hurokérték zérus.*

*Kritikus hurok* alatt azon  $H_k$  hurkot értjük, melynek hurokértéke zérus.

Naptarasított folyamatidőkre értelmezhető *várakozási idő* alatt a kezdő és végcsomópont potenciálértékei között levő  $d_{ij}(t) = 1$  értékű

naptárelemek száma és a folyamat alapértéke közötti különbséget értjük és  $\omega_{ij}$ -vel jelöljük. Vagyis

$$\omega_{ij} = \left( \sum_{t=\mu_i}^{\mu_j} d_{ij}(t) \right) - \tau_{ij}, \forall ij \in A$$

*Naptárasított kritikus út* alatt azon  $P_k(s, r)$  utak alkotta részgráfot értjük, mely utak mentén  $\omega_{ij} = 0, \forall ij \in P_k(s, r)$ .

**4. Tézis.** *Megmutattam, hogy a maximális út - minimális potenciál lineáris programozási feladat alapján felírható egy primál - duál feladatpár a naptárasított folyamatidőkkel és a naptárak és maximális feltételek eredményezte hurkok korlátozás nélküli alkalmazásával definiált ütemezési problémára. Megmutattam, hogy a feladatnak a következő megoldásai lehetségesek.*

1. *Létezik véges megoldás. A feladatnak ekkor két megoldása lehet:*

(a) *Létezik egy vagy több  $P_k(s, r)$  naptárasított kritikus út, melyekre teljesül, hogy*

$$\mu_r = \max \{L_{kr} \mid k = 1, \dots, p\} = \sum_{ij \in P_k(s, r)} \vartheta_{ij}(\mu_i)$$

(b) *Létezik egy vagy több  $H_k$  kritikus hurok, mely a hálóban "szakadást" okoz, ahol  $\mu_j - \mu_i > \vartheta_{ij}(\mu_i), \forall ij \in A \mid i \notin N_{H_k}, j \in N_{H_k}$ . Ezáltal minden*

$$\begin{aligned} L_{ir} &> \sum_{xy \in P_i(s, r)} \vartheta_{xy}(L_{ix}) \\ j &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

2. *Nincs véges megoldás, ami a  $T$  átfutási idő túllépését jelenti. Ez lehet egy hurokban létrejövő többszöri iterációs ciklus eredménye, vagy csupán valamely útvariáns, melyek következtében létezik  $ij \in P(s, r)$ , melyre  $\vartheta_{ij}(\mu_i) = \infty$ .*

A naptárasított ütemezésre két algoritmust mutattam be. Az első szorosán követi a konstans folyamatidőkkel rendelkező probléma megol-

dására adott algoritmust, melyet **hagyományos módszernek** neveztem. Egy példa alapján bemutattam ennek a megoldásnak a hátrányait. Nevezetesen azt, hogy a hurokértékek előjelváltásának lehetősége miatt az algoritmus iterációi során nagyszámú felesleges számítás kerül elvégzésre. Ezt a jelenséget küszöböli ki a **hurokazonosítós módszer**. A két algoritmus összehasonlítása során az elvégzendő műveletek számában kimutatott különbség nagyságrendi eltérést mutat, mely a hurokcsoportok számával és a szükséges iterációk számának növekedésével egyenesen arányos.

A témával kapcsolatosan megjelent publikációk:

**Longest Path Problem in Networks with Loops and Time Dependent Edge Lengths, 8th International Conference Organization, Technology And Management In Construction, Umag, Croatia, 2008. (ISBN 953-96245-8-4)**

**Scheduling in Networks with Time Dependent Arc Lengths Based on a Loop Finder Algorithm, 2012., Croatia, Organization, Technology & Management in Construction: An International Journal, Vol. 4, No. 2, pp. 512-519. (ISSN: 1847-5450, EISSN: 1847-6228)**

### 2.2.2. Költségtervezési feladat

Az ütemezési feladat elemzése után megvizsgáltam a költségtervezési feladat naptárasításának lehetőségét. Első megközelítésben Cai et. al. [5] egy logisztikai alapeladatára kidolgozott algoritmus átalakítását végeztem el. A kapott megoldás azonban nem alkalmas sem a negatív folyamatidők sem a hurok alkalmazására, melyeket ellenpéldával igazoltam.

A témával kapcsolatosan megjelent publikáció:

**Calendarization in Time-Cost Trade-off Based on a Transit Problem 10th International Conference Organization, Technology And Management In Construction, Sibenik, Croatia, 2011. (ISBN 978-953-7686-01-7)**

A beruházási modell általános alkalmazhatósága érdekében ezen ismeretek alapján egy teljesen új megoldás kidolgozására volt szükség.

A naptárak és a maximális feltételek következtében kialakuló hurkok korlátozás nélküli alkalmazása esetére kidolgoztam egy heurisztikus módszert a költségtervezési feladat naptárasítására. Az algoritmus olyan  $\mu$

és  $\vartheta$  rendszereket hoz létre, melyek jellemzői megegyeznek a - bizonyítottan optimális megoldást nyújtó - maximális folyam algoritmuson alapuló algoritmus eredményeinek jellemzőivel.

**5. Tézis.** *Az ütemezési feladat, valamint a logisztikai probléma peremfeltételei alapján kidolgozott költségtervezési feladat naptárasításának eredményeit felhasználva elkészítettem a naptárak és maximális feltételek eredményezte hurkok korlátozás nélküli alkalmazásával definiált beruházási modell peremfeltételei-vel rendelkező költségtervezési feladat heurisztikus módszeren alapuló naptárasított algoritmusát. Definiáltam az időhatékonyság és költséghatékonyság fogalmát, valamint bebizonyítottam, hogy az algoritmus véges lépésben véget ér. Az iterációk száma legfeljebb  $\sum_{i=1}^{m^t} (b_i - a_i)$ , ahol  $m^t = |A^t|$ .*

A kidolgozott algoritmus már alaplépéseiben is eltér a konstans folyamtidőkre alkalmas maximális folyam algoritmuson alapuló megoldástól.

A költséghatékonysági vizsgálaton alapuló algoritmus egy nagy valószínűséggel nem optimális  $\tau \Rightarrow \tau_{ij} = a_{ij}, \forall ij \in A$  rendszerből indul ki.

*Időhatékonyságnak* nevezzük és  $\lambda_{ij}(\tau_{ij}, \mu_i)$  -vel jelöljük azon naptári napok számát, mely alatt adott tevékenységidő adott kezdési időpont-hoz viszonyítva további egy munkanappal megnövelhető. Legyen  $\tau_{ij} = \sum_{t=\mu_i}^{\tau_{ij}} d_{ij}(t)$  és  $\tau_{ij} + 1 = \sum_{t=\mu_i}^{\tau_{ij}+1} d_{ij}(t)$ . Ekkor  $\lambda_{ij}(\tau_{ij}, \mu_i) = \frac{1}{\tau_{ij} - \mu_i}$ .

Adott  $ij$  él *költséghatékonysága*, melyet a továbbiakban  $ce_{ij}$  jelöl, egyenesen arányos az él költségintenzitásával ( $c_{ij}$ ) valamint az él aktuális időhatékonyságával ( $\lambda_{ij}(\tau_{ij}, \mu_i)$ ), és fordítottan arányos a rajta áthaladó feszes útvariánsok aktuális számával ( $var_{ij}$ ). Tehát

$$ce_{ij} = \frac{c_{ij} \cdot \lambda_{ij}(\tau_{ij}, \mu_i)}{var_{ij}}$$

Az aktuális ütemezésnek megfelelően az élekre meghatározhatók azok költséghatékonyságai. Ezekből a maximálisat választva a legnagyobb költségcsökkentés érhető el a lokális és globális tartalékidők legcsekélyebb csökkentése mellett.

*Külső tartalékidőn* a tényleges átfutási idő ( $\mu_r$ ) és a rendelkezésre álló maximális átfutási idő ( $T$ ) különbségét értjük. *Belső tartalékidő* a nem kritikus feszes utakon megjelenő fel nem használt időtartam, mely ezen utakat elválasztja a kritikusság állapotától. A globális szemlélet miatt a tartalékidők ilyen irányú értelmezésében csak az alapnaptárt

vehetjük mértékadónak, mely általában minden naptári napot magába foglal.

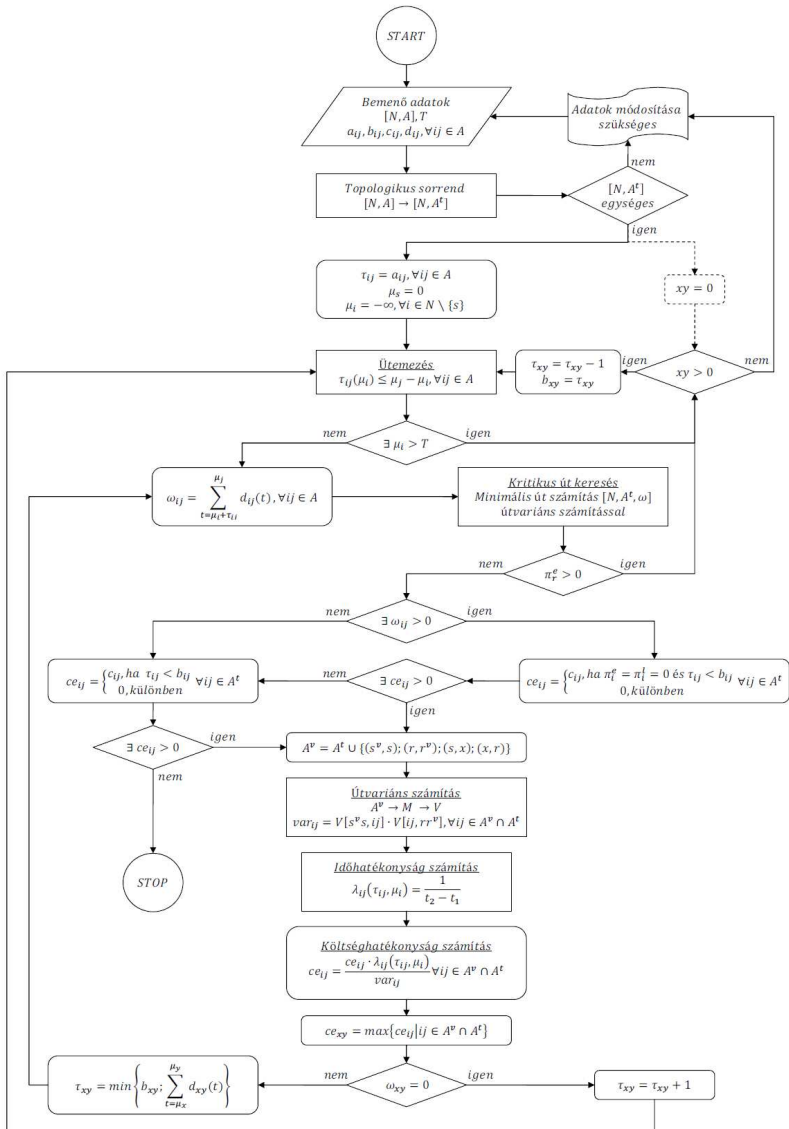
**Az algoritmus.** Az algoritmus folyamatábrája a 7. ábrán látható.

Az algoritmus alapgondolatai:

- Az algoritmus által elfogadott megoldások mindegyike naptárasított kritikus úttal kell rendelkezzen. Ellenkező esetben az előző iterációban megtett módosítások visszavonásra kerülnek. Ez azt jelenti, hogy véges megoldásban nem elfogadható a kritikus hurkok miatti "szakadás", mely a valóságban teljes projekt átmeneti leállását jelenti.
- Elsődlegesen a költségcsökkentést a belső tartalékok felszámolásával / megszüntetésével kell megvalósítani, hiszen ekkor ugyanazon átfutási időhöz egyre alacsonyabb költségszinttel rendelkező megoldások társulnak.
- Ha adott átfutási időhöz elfogytak a belső tartalékidők, akkor a megoldás optimálisnak tekinthető.

Az algoritmus mindaddig nem növeli az átfutási időt, amíg az adott átfutáshoz meg nem találja a legalacsonyabb költségshoz tartozó megoldást. Ez a feltétel biztosítja az eredeti költségtervezési feladat megoldásában is az optimális megoldást.

A matematikai módszereken túlmenően az algoritmust Scilab 5.3.0. programban kódoltam. A megoldás igazolására konstans folyamatidejű feladatokat teszteltem, melyek a maximális folyamalgoritmuson alapuló megoldás eredményeivel azonos értékeket adtak.



7. ábra: Költséghatékonysági vizsgálaton alapuló költségtervezési feladat algoritmus



## 3. További kutatási feladatok

A költségtervezési feladat naptárasítása nagy előrelépés a modell gyakorlatban való alkalmazhatósága irányában. Természetesen ez még nem a teljes valóság leképezése.

1. A módszer heurisztikus jellemzőinek megerősítése további tesztlések futtatásával vizsgálható.
2. Sok más feltételt is meg lehet fogalmazni, melyekre példát mutatnak a korábbi eredmények is. Ilyen lehetőség például a technológiaváltás is. Az egyik kutatási irány lehet ezen feltételek beépítésének vizsgálata a naptárasított modellbe.
3. Egy másik kutatási téma lehet a kidolgozott naptárasított költségtervezési modell további általánosítása. Például érdemes lehet vizsgálni az ütemezés során megjelenő kritikus hurkok esetén a "kis szakadások" kezelhetőségét.
  - A "szakadás" megengedett értékének ideális nagyságát.
  - A lehetséges módszerek összevetését, vagy együttes alkalmazásuk lehetőségeit.

Hosszútávú feladat a kidolgozott modell gyakorlati használatban is történő hasznosítása, mely végeredményben egy új projektmenedzsment szoftver kidolgozását eredményezheti.

## Irodalomjegyzék

- [1] Ahuja, R.K., Magnati, T.L., Orlin, J.B., 1993., *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 164-165.
- [2] Ahuja, V., Thiruvengadam, V., 2004., *Project scheduling and monitoring: current research status*, Construction Innovation, Vol. 4., pp. 19–31,
- [3] Bellman, R. 1958., *On a Routing Problem*, Quarterly of Applied Mathematics, 16(1), pp. 87-90.
- [4] Bérubé, J.F., Potuin, J.Y., Vaucher, J., 2006., *Time Dependent Shortest Path Through a Fixed Sequence of Nodes: Application to a Travel Planning Problem*, Computers and Operation Research, Vol. 33., pp. 1838-1856.
- [5] Cai, X., Sha, D., Wong, C.K., 2007., *Time-varying network optimization*, Springer, pp. 21-24.
- [6] Cheng, C.E. , Ding, Q., Lin, B.M.T., 2004., *A concise survey of scheduling with time-dependent processing times*, European Journal of Operation Research, Vol.152., pp. 1-13.
- [7] Christodoulou, S., 2009., *Construction imitating ants: Resource-unconstrained scheduling with artificial ants*, Automation in Construction, Vol.18. pp. 285-293.
- [8] Dean, B. C., 2004., *Algorithms for Minimum-Cost Paths in Time-Dependent Networks with Waiting Policies*, Networks, Vol. 44., Iss. 1., pp. 41 - 46.
- [9] Dijkstra, E. W., 1959., *A Note on Two Problems in Connexion With Graphs*, Numerische Mathematik, Vol.1., pp. 269–271.
- [10] Floyd, R.W., 1962., *Algorithm 97: Shortest path* Communications of the ACM, Vol. 5., No.6., pp. 345.
- [11] Franck, B., Neumann, K., Schwindt, C., 2001., *Project scheduling with calendars* OR Spektrum, Vol 23., pp. 325-334.
- [12] Frank A., 2008., *Operációkutatás*, Oktatási segédanyag, ELTE TTK Operációkutatási Tanszék (<http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/opkut/ulin.2008.pdf>)

- [13] Fulkerson, R. D., 1961., *A network flow computation for project cost curves*, Management Science Vol. 2., No. 2. January, pp. 167-168.
- [14] Hajdu M., 1993., *An algorithm for solving the cost optimization problem in precedence diagramming method*, Periodica Polytechnica ser. Civil Engineering, Vol. 37., No. 3., pp. 231-247.
- [15] Hajdu M., Klafszky E., 1993., *An algorithm to solve the cost optimization problem through an activity on arrow type network (CPM/cost problem)*, Periodica Polytechnica ser. Architecture, Vol. 37, No. 1-4., pp. 27-40.
- [16] Hajdu M., 1996, *PDM Time Cost Trade Off: Activities Are Splittable or Non-Splittable*, Optimization, Vol. 38., pp. 155-171.
- [17] Hajdu, M., Mályusz, L., 1996., *A minimális és maximális átfutási idő probléma megoldása speciális esetben*, Közúti Közlekedés- és Mélyépítéstudományi Szemle Vol 3., pp. 133-137.
- [18] Hallefjorda, Å. , Wallace, S., 1998, *Work patterns in project scheduling*, Annals of Operations Research Vol.82., pp. 1-81.
- [19] Hamacher, H.W., Tjandra, S.A., 2002., *Earliest Arrival Flow Model with Time Dependent Capacity for Solving Evacuation Problems*, Pedestrian and Evacuation Dynamics, pp. 267-276.
- [20] Jordán T., 2007., *Ütemezés, Oktatási segédanyag, ELTE, Operációkutatási Tanszék* (<http://www.cs.elte.hu/~jordan/utemezes/index.html>)
- [21] Karp, R.M., Orlin, J.B., 1981., *Parametric shortest path algorithms with an application to cyclic staffing*, Discrete Appl. Math., Vol.3., pp. 37-45.
- [22] Kelley, J.E., 1959., *Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis*, Operation Research, Vol. 9., No3.
- [23] Kelley, J.E., Walker, M.R., 1959., *Critical Path Planning and Scheduling*, Proc. the Eastern Joint Computer Conference, Boston
- [24] Klafszky, E., 1972., *Determination of Shortest Path in a Network with Time-Dependent Edge-Lengths*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Vol 3., pp. 255-257.
- [25] Klafszky E., 1969., *Hálózati folyamatok*, Budapest

- [26] Komáromi É., 2005., *Operációkutatás No.2., Lineáris Programozás*, Oktatási segédanyag, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Operációkutatás Tanszék ([http://gazdasz2.atw.hu/linearis\\_programozas\\_jegyz\\_nemme.pdf](http://gazdasz2.atw.hu/linearis_programozas_jegyz_nemme.pdf))
- [27] Levner, E., Kats, V., 1998., *A parametric critical path problem and an application for cyclic scheduling*, Discrete Appl. Math., Vol. 87., pp. 149-158.
- [28] Mályusz L., 2004., *A költségtervezési Time-cost trade-off feladat általánosítása és megoldása*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. 21., pp. 365-377.
- [29] Mályusz L., 2005., *Monoton Növekedő költségfüggvényű tevékenységek alkalmazása a költségtervezési Time-cost trade-off feladatban*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol.22., pp. 199-213.
- [30] Mályusz L., *Döntéstámogató módszerek*, Oktatási segédanyag, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építéskivitelezési Tanszék
- [31] Moore, E.F., 1957., *The Shortest Path Through a Maze*, Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching (Cambridge, Massachusetts, 2-5 April, 1957), Harvard University Press, Cambridge, pp. 285-292.
- [32] Nagy T., 2009., *Hálózati folyamatok*, Oktatási segédanyag, Kelet-Magyarországi Informatika Tananyag Tárház, Miskolci Egyetem ([http://www.uni-miskolc.hu/~matente/2012\\_tav/HALOZATI\\_FOLYAMOK.html#d5e222](http://www.uni-miskolc.hu/~matente/2012_tav/HALOZATI_FOLYAMOK.html#d5e222))
- [33] Orda, A., Rom, R., 1990., *Shortest-Path and Minimum-Delay Algorithms in Networks with Time-Dependent Edge-Length*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 37., No. 3., July, pp. 607-625.
- [34] Vattai Z., 1993., *Branch & Bound technika alkalmazása építőipari sorolási feladatok megoldására*, Budapesti Műszaki Egyetem, doktori értekezés
- [35] Warshall, S., 1962., *A Theorem on Boolean Matrices*, Journal of the ACM , Vol. 9. , Iss. 1., pp. 11-12.