1 Bevezetés

A sík és a tér sokszögekkel illetve poliéderekkel történő hézagtalan kitöltése már régóta a matematikusok és laikusok érdeklődésének középpontjában áll. Ennek ellenére az ezzel kapcsolatban felvethető legegyszerűbb probléma, azaz az euklideszi síkot egybevágó alakzatokkal kövező síkcsoportok osztályozása is későn, csak a XIX. század végén került megoldásra. Az analóg térbeli probléma megoldása utáni vizsgálatoknak újabb jelentős lökést adott az anyagszerkezeti kutatások megindulása. Ugyanakkor a felmerülő problémák sokfélesége lehetővé tette a tudományterület matematikán belüli fejlődését is.

Jelen dolgozat legnagyobb részben olyan osztályozási kérdésekre keres választ, amelyek a kövezések témaköréhez illeszkednek és az euklideszi síkon és térben vethetők fel.

A disszertáció második fejezete síkbeli klasszifikálási problémákra keres választ [Böl00c, Böl00b] munkáim alapján. Ennek első részében a Lord Kelvin féle problémakörhöz kötődve általánosítjuk G. Horváth Ákos [GHo97] egy izoperimetrikus típusú eredményét, és meghatározzuk mindazon alaptartományok adatait, amelyek síkcsoportok szerinti kövezést tesznek lehetővé és kerületük a lehető legkisebb. A második részben választ adunk arra a mintegy 20 éve nyitott kérdésre, hogy hány lényegesen különböző módon kövezhető az euklideszi sík unilaterális és laptranzitív módon három különböző méretű négyzettel.

Az értekezés harmadik fejezete az euklideszi térben végzett kutatásaimat foglalja össze. Előbb [Bölt. a.] alapján osztályozzuk az előbbi probléma térbeli megfelelőjét, azaz mindazon kockakövezéseket, melyek unilaterálisan és tranzitíven valósíthatók meg két különböző méretű kockával, majd [Böl00a] nyomán választ adunk G. Horváth Ákos egy rácsok extremális testjeivel kapcsolatban felmerült problémájára, ahol az un. gyengén-baráti poliédereket osztályozzuk.

A negyedik fejezetben egy olyan – a kövezéseket dimenziótól függetlenül leíró, un. D-szimbólumok módszerén alapuló – algoritmust ismertetünk [BKS] nyomán, amelynek segítségével korábbi [BM98, BM00] eredmények általánosabb keretben tárgyalhatók. Az algoritmus számítógépes megvalósításában Koponyásné Szél Mónika volt segítségemre. Az általa készített Pascal nyelvű programot szíves engedélyével a Mellékletben közlöm.

A disszertációban az alábbi tételek a szerző eredményei: **2. 2. 1. tétel, 2. 2. 2. tétel, 2. 3. 1. tétel, 3. 1. 1. tétel, 3. 2. 5. tétel, 4. 3. 1. tétel, 4. 3. 2. tétel, 4. 3. 3. tétel.**

2 Izoperimetrikus és osztályozási kérdések E^2-ben

A disszertáció második fejezetében olyan parkettázásokkal foglalkozunk, amelyek az euklideszi síkon valósíthatók meg. Az itt vizsgált két síkbeli problémát összekötő kapocs a planigon fogalma. Először éppen a planigonokra fogalmazunk és oldunk meg izoperimetrikus típusú kérdéseket, majd a második részben a planigonok felhasználásával sikerül lezárni egy mintegy 20 éve nyitott osztályozási problémát.

Felidézzük a planigon szó jelentését: Egy kövezést *(kő)tranzitívnek (izoéderesnek)* nevezünk, ha a csempék egy osztályba sorolódnak. t darab osztály esetén használjuk a *kő-t-tranzitív* elnevezést is. Kétdimenziós, kőtranzitív (=*laptranzitív*) mozaik esetében a sokszög köveket *planigonnak* nevezzük. Darabszámukra érvényes az alábbi tétel [GS87]:

2. 1. 3. tétel *Az euklideszi síkon pontosan 93 különböző, jelölt kövekkel kivitelezett laptranzitív kövezés létezik.* □

A fenti kövezések nem feltétlenül csak poligonokkal képzelhetők el, hiszen a szimmetriáik az oldalak deformálását is lehetővé teszik. Az említett 93 planigon közük csak azok tekinthetők a megfelelő Γ szimmetriacsoport alaptartományának, amelyek belsejükben nem tartalmaznak $\Gamma-$ekvivalens pontokat, azaz amelyek stabilizátora a triviális csoport. Az ilyen típusú planigonokat *fundamentális planigonnak* nevezzük. Belőlük 46 darab található, felsorolásukat és típusaikat lásd [DDS80], ill. [LM90, LMV].

1887-ben Sir William Thomson (Lord Kelvin) publikációt jelentetett meg a Filozófiai Magazinban, melyben a tér minimális felszínű felülettel való felosztásának problémáját tárgyalja. Pontosabban: olyan háromdimenziós cellarendszereket vizsgál, melyek "egyenlő és hasonló" poliéderekből állnak és felszínük a lehető legkisebb. Ezzel a munkával vette kezdetét egy gazdag és gyümölcsöző területe a geometriának, mely adott térfogatú, de minimális felszínű térfelosztások vizsgálatát tűzte ki célul tetszőleges dimenzióban, esetleg bizonyos korlátozások figyelembevételével. (A probléma irodalmához lásd pl. [Fej64], [Mor94], [Hep64], [Hep97], [Lin69], [CsL73], ill. [Hep95], [Bez00], [FK87], [Mac85], [Molt. a].)

G. Horváth Ákos [GHo97]-ben rácsok extremális testjeivel kapcsolatban tesz fel két kérdést, melyeket E^2-ben meg is válaszol.

1. Rögzített n-dimenziós rács esetén mely extremális testeknek van a legkisebb felszínük?
2. Az n-dimenziós extremális testek közül melyeknek legkisebb a felszínük (mely rács esetén)?

Minthogy az extremális testek térfogata megegyezik, ezért a feladat a Kelvin problémakörbe tartozik. Az euklideszi síkon a szerző igazolja, hogy tetszőleges rácsban a legkisebb kerületűek azok az extremális hatszögek, melyek csúcsai a középpont körül elhelyezkedő hat rácsháromszög izogonális pontjai. A második kérdés a síkon nyilván a szabályos háromszögrácshoz ill. az abban elhelyezett szabályos hatszöghöz vezet.

Jelen munkában és [Böl00c] publikációmban általánosítom a fenti problémákat és célul tűzöm ki az alábbi kérdések megválaszolását az euklideszi sík esetére:

1. Adott síkcsoportban, rögzített affin paraméter értékek (rögzített rács) mellett mely fundamentális tartománynak van a legkisebb kerülete?
2. Az affin paraméterek mely értékei szolgáltatják a legkisebb kerületű alaptartományt adott síkcsoportban, azaz mikor lesz az *IQ izoperimetrikus hányados* $\left(IQ := \frac{4T\pi}{K^2}\right)$ értéke a legnagyobb (T az alaptartomány területe, K a kerülete)?

A kérdések természetesen általánosabban, $d-$dimenzióban is felvethetők.

A megoldás során követett stratégia szerint a síkcsoportok paramétereit kapcsolatba hozzuk a csoport rácsával, az ennek megfelelő paramétereket pedig a Minkowski-redukált rácson keresztül fogjuk meg. Az első kérdésre adandó választ illetően bebizonyítjuk az alábbi tételt:

2. 2. 1. tétel *13 olyan síkcsoport létezik, amelyben a legkisebb kerületű alaptartomány független a rács affin paramétereitől. A* **pg, cm, pmg** *és* **pgg** *csoport esetén két minimális kerületű fundamentális tartománytípus található a lehetséges paraméterértékekhez. Táblázatosan foglaljuk össze az egyes síkcsoportok optimális planigon-típusait, a legkisebb kerület értékeit és a hozzájuk tartozó paraméterekre vonatkozó esetleges feltételeket.*

Csoport	A planigon típusa	Minimális kerület	Plusz feltétel
p1	$P_{6,7}$	$2\sqrt{a_{11}+a_{22}-a_{12}+\sqrt{3}\sqrt{det(a_{ij})}}$	—
p2	$P_{6,4}$	$\sqrt{3a_{11}+a_{22}+2\sqrt{3}\sqrt{det(a_{ij})}}$	—
pm	$P_{4A,12}$	$2a+b$	—
pg	$P_{6,6}$	$\sqrt{3}a+b$	$\frac{b}{a}\geq 1$
	$P_{6,3}$	$a+\sqrt{3}b$	$\frac{b}{a}\leq 1$
cm	$P_{5A,4}$	$b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{a}{2}$	$\frac{b}{a}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$P_{4A,13}$	$a+b$	$\frac{b}{a}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$
pmm	$P_{4A,14}$	$\sqrt{a_{11}}+\sqrt{a_{22}}$	—
pmg	$P_{5A,3}$	$a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{b}{2}$	$\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$
	$P_{4A,6}$	$a+b$	$\frac{b}{a}\leq\sqrt{3}$
pgg	$P_{6,5}$	$\sqrt{3}\sqrt{a_{11}}+\frac{1}{2}\sqrt{a_{22}}$	$\frac{1}{4}a_{22}\geq a_{11}$
	$P_{6,2}$	$\sqrt{a_{11}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a_{22}}$	$\frac{1}{4}a_{22}\leq a_{11}$
cmm	$P_{4A,5}$	$\sqrt{a_{11}}+\frac{\sqrt{a_{22}}}{2}$	—
p4	$P_{5B,1}$	$\sqrt{a_{11}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	—
p4m	$P_{3B,4}$	$a_{11}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	—
p4g	$P_{4A,16}$	$\sqrt{2a_{11}}$	—
p3	$P_{6,1}$	$2\sqrt{a_{11}}$	—
p3m1	$P_{3A,6}$	$\sqrt{3a_{11}}$	—
p31m	$P_{4B,2}$	$\sqrt{a_{11}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	—
p6	P_{5C}	$\sqrt{\frac{7}{3}a_{11}}$	—
p6m	P_{3D}	$\sqrt{a_{11}}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	—

Bizonyítás A bizonyítás során a három legnehezebb, legáltalánosabb csoporttal, a **p1, p2** ill. **pgg** csoportokkal foglalkozunk behatóan. A fennmaradó 14 síkbeli kristálycsoporthoz külön okoskodást már nem fűzünk; azokat a tárgyalt esetek analógiájára lehet származtatni. A megoldás olyan stratégiát követ, amely a minimális kerületet pont/ok bizonyos tartományon belüli optimális helyzetének keresésére vezeti vissza, s mely szerint a minimális kerület összefüggésbe hozható a pontot/-okat a tartomány csúcsaival (és egymással) összekötő élhálozattal. A megoldás során három lemmát használunk fel:

2. 2. 1. lemma

- *Ha az XYZ háromszög minden szöge kisebb, mint $\frac{2\pi}{3}$, akkor a $QX+QY+QZ$ szakaszösszeg akkor minimális, ha Q a háromszög izogonális pontja,*
- *Ha az XYZ háromszögben van olyan szög, mondjuk a Z-nél fekvő φ szög, melyre $\varphi\geq\frac{2\pi}{3}$, akkor a fenti összeg úgy minimális, ha Q egybeesik Z-vel.* □

2. 2. 2. lemma *A legkisebb szakaszösszeget a Minkowski-redukált bázishoz tartozó háromszög választása esetén kapjuk.* □

2. 2. 3. lemma *Ha a $DX+DY+DE+EZ+EW$ szakaszösszeg minimális, úgy az E és D pontokban összefutó szakaszok egyenlő szögeket ($\frac{2\pi}{3}$) zárnak közre.* □

Az idézett segédeszközök felhasználásával felderítjük az egyes alaptartománytípusokhoz tartozó legrövidebb kerületeket, melyeket minden síkcsoport esetén összehasonlítunk. A táblázatban a minimális kerületek vannak felsorolva, ahol szükséges, a rács paramétereinek feltüntetésével.

(a_{11}, a_{12}, a_{22} a Minkowski redukált bázisvektorok páronként vett skaláris szorzatait jelöli, az a és b betűk használatára akkor van szükség, amikor a rács alapján a szimmetriaelemek helyzete nem tisztázható egyértelműen; máskülönben ezek is szimmetriaelemek távolságával vannak kapcsolatban.)□

A második feltett kérdésre adandó választ az alábbi tételben foglaljuk össze.

2. 2. 2. tétel *A tizenhét síkcsoport között kilenc van, amelynél az affin paraméterek változtatásával az optimális planigon változtatható. A táblázat a minimális kerülethez tartozó feltételeket és az izoperimetrikus hányados értékét tartalmazza minden síkcsoportra.*

Síkcsoport	Izoperimetrikus hányados	Feltétel
p1	0.90690	$\frac{a_{11}}{a_{22}} = 1$ és $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{1}{2}$
p2	0.90690	$\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{1}{3}$ és $\frac{a_{12}}{a_{22}} = 0$
pm	0.78540	$a = \frac{b}{2}$
pg	0.90690	$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ vagy $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
cm	0.84179	$\frac{b}{a} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$
pmm	0.78540	$a_{11} = a_{22}$
pmg	0.84179	$\frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$
pgg	0.90690	$a_{11} = \frac{1}{12}a_{22}$ vagy $a_{11} = \frac{3}{4}a_{22}$
cmm	0.78540	$a_{11} = \frac{4}{5}a_{22}$
p4	0.84179	—
p4m	0.53901	—
p4g	0.78540	—
p3	0.90690	—
p3m1	0.60460	—
p31m	0.72901	—
p6	0.77734	—
p6m	0.48601	—

□

Ugyanezen fejezetben tárgyalom a sík három különböző méretű négyzettel megvalósítható unilaterális és (ekvi)tranzitív kövezéseinek osztályozásával kapcsolatos, mintegy 20 éve felvetett probléma megoldását. (Kövezés *unilaterális*, ha kizárjuk, hogy azonos méretű négyzetek egész él mentén találkozzanak.)

A háromféle négyzettel kivitelezett unilaterális-ekvitranzitív parkettázások osztályozása [GS 87]-ben szerepel, mint megoldott feladat (76. old. Fig. 2. 4. 5.). A megoldás D. Schattschneider nevéhez kötődik. 1998-ban megjelent cikkükben H. Martini, E. Makai és V. Soltan [MMS98] azt a célt tűzte ki, hogy mindazon parkettázásokat lokálisan jellemezze, melyekben három méretű négyzet szerepel, s az unilateralitás teljesül (de a tranzitivítás nem feltétlenül). Publikációjukban, mintegy melléktermékként, közlik egy általuk talált, eddig nem ismert unilaterális és ekvitranzitív parkettázás konstrukcióját, valamint B. Grünbaum két további, eddig szintén fel nem fedezett, ugyanilyen típusú kövezését. Az összes unilaterális-ekvitranzitív kövezés osztályozásának kérdése így ismét előtérbe került.

A dolgozat ezen része éppen ezt a kérdést válaszolja meg a planigonok segítségével a [BA00b] publikáció alapján.

A különböző típusú négyzeteket λ betűkkel jelöljük, alsó indexben feltüntetve az egyre növekvő méretre utaló 1, 2 vagy 3 számot. Korábbi eredményekből levezethető, hogy a két kisebb négyzet oldalhosszainak összege egyenlő a legnagyobb négyzet oldalával. Centrális szerepet tölt be a fenti négyzetekből összeálló, úgynevezett $L-$alakú blokk. (A két kisebb négyzetet egy közös csúcsnál összeillesztjük, majd a kapott alakzatot egy legnagyobb típusú négyzet oldalára fektetjük, úgy, hogy azt éppen fedje.) Ezt támasztja alá az alábbi

2. 3. 2. lemma *Három négyzettel kivitelezett ekvitranzitív-unilaterális kövezésekben minden λ_3 négyzet bennefogalaltatik egy $L-$alakú blokkban.* □

Következmény Az $L-$blokkok a tranzitivítás figyelembevételével vagy maguk szolgáltatják a kövezéshez tartozó csoport fundamentális tartományát, vagy tartalmazzák azt. Az alaptartományt tehát az egyes négyzetek automorfizmuscsoportjai szerinti faktorizálás után keletkező tartományok uniói alkothatják, így a cél most ezek vizsgálata. Megszorításokat tehetünk a szóbajövő csoportok vonatkozásában.

2. 3. 3. lemma *Három négyzettel kivitelezett ekvitranzitív-unilaterális kövezés Γ egybevágóság-csoportja csak* **p1, p2, pg** *vagy* **pgg** *lehet.* □

A megengedett transzformációk közül a négyzet automorfizmuscsoportjában csak az identitás és a félfordulat szerepel, így a fundamentális tartománytípusok vagy egész, vagy fél négyzetekből vannak összerakva. A fixpontmentes **p1** és **pg** csoportok esetén viszont az alaptartomány csak az egész $L-$blokk lehet.

Ezek után szisztematikusan megvizsgáljuk, hogy ezen tartományok közül melyik szerelhető fel valamely planigonhoz tartozó oldalpárosítással, azaz melyikük tekinthető valamely síkcsoport alaptartományának.

Alapos vizsgálódás után kiviláglik, hogy a megfelelő planigonok a következők: a **p1** csoporthoz a $P_{6,7}$, a **p2**-höz a $P_{6,4}$ ill. $P_{5A,1}$, **pgg**-hez $P_{6,5}, P_{6,2}$, $P_{5A,2}$ és $P_{5B,2}$, végül **pg**-hez ismét két lehetőség :$P_{6,6}, P_{6,3}$.

A bizonyítás aprólékos diszkussziót tartalmaz, melyben nagy segítséget jelent - bizonyos alaptartományok esetén - az $L-$blokk konkáv töröttvonalának lehetséges transzformációira vonatkozó esetszétválasztás.

Megjegyzem még, hogy a kérdéskör vizsgálata több matematikus érdeklődését is felkeltette. Közülük kiemelném D. Schattschneider munkáját [Scha00], amely az [MMS98] cikkben kimutatott, egyes négyzetekhez tartozó lokális környezetek, un. koronák vizsgálatával ragadja meg a problémát. Tudomásom szerint a dolgozatban vizsgált problémával L. Balke és bielefeldi kollégái is foglalkoztak. Módszerük a későbbiekben tárgyalt $D-$szimbólumokhoz kötődik.

3 Klasszifikációs problémák az euklideszi térben

A dolgozat ezen részében először természetes módon terjesztjük ki az előbbiekben a síkban tárgyalt kérdést a három dimenziós térre, de gyengített formában: *Keressük az euklideszi tér azon, két különböző méretű kockával történő kövezéseit, amelyekben még az unilateralitás illetve ekvitranzitivítás feltétele is teljesül. Kérdezzük a kövezéshez tartozó maximális tércsoportot is.*

A felhasznált jelölésekről: Ha egy kockát (mondjuk A-t) összes lapszomszédjával együtt tekintünk, akkor az *A-hoz tartozó csillagról* beszélünk, melyet $St(A)$-val is jelölünk. Ugyanerre használni fogjuk még a lokális környezet elnevezést is.

A fejezetben [Bölt. a.] dolgozat alapján, a vonatkozó eddigi eredmények ([Day64], [Daw84]) ismertetését követően rátérünk a térbeli eset vizsgálatára.

Itt egyelőre csak unilaterális, de nem feltétlenül ekvitranzitív kockakövezésekkel foglalkozunk. Három lemma bebizonyítása után fogalmazzuk meg a szakasz fő tételét.

3. 1. 1. lemma *A térben unilaterális módon kivitelezett, két méretű kockákkal megvalósuló kövezésekben λ_1 és λ_2 kockák kölcsönös helyzete csak egyféle lehet.* □

A lemma eredménye a síkbeli L-blokk térbeli analogonjának létezéséről szól. Bizonyításában felhasználjuk síkban elhelyezett λ_2 négyzetet négy, három és két oldalról unilaterális módon határoló λ_1 négyzetek elrendezéseinek típusait.

A következő két lemmában a különböző típusú kockák lehetséges környezeteit határozzuk meg. Jelöljön X egy tetszőleges kicsi, A pedig egy tetszőleges nagy kockát. Ekkor

3. 1. 2. lemma *Két méretű kockákkal kivitelezett unilaterális kockakövezésben $St(X)$ egybevágóság erejéig egyértelmű.* □

Vezessünk be egy koordinátarendszert O kezdőponttal és OI, OJ, OK irányú x, y, z tengelyekkel. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $a = OI$ és $b = OE$ jelöléseket. Ekkor a központi λ_1 kocka középpontjának koordinátái a következők: $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. Az $St(X)$-beli λ_2 kockák középpontjainak koordinátái pedig rendre: $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{b}{2}), (a+\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), (\frac{b}{2}, a+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}), (a-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}), (a-\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}, a+\frac{b}{2})$.

Meglepő módon a fenti állítás megfelelője érvényes λ_2 kockára is.

3. 1. 3. lemma *Két méretű kockákkal kivitelezett unilaterális kockakövezésben $St(A)$ egybevágóság erejéig egyértelmű.* □

A lokális környezetben szereplő kockaközéppontok koordinátái a bevezetett koordinátarendszerben a következők:

- a központi kocka (A): $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$,
- a λ_1 kockáké: $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}), (b-\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}), (b+\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$,
  $(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -b+\frac{a}{2}), (-\frac{a}{2}, b-\frac{a}{2}, -b+\frac{a}{2}), (b-\frac{a}{2}, b-\frac{a}{2}, -b-\frac{a}{2})$,
- a λ_2 kockáké: $(a+\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), (\frac{b}{2}, a+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, a-\frac{b}{2})$,
  $(a-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}), (-a+\frac{b}{2}, -a+\frac{3b}{2}, -\frac{3b}{2}), (\frac{b}{2}, -a+\frac{b}{2}, -\frac{3b}{2}), (\frac{3b}{2}, \frac{b}{2}, -a-\frac{b}{2})$,
  $(-a+\frac{3b}{2}, \frac{3b}{2}, -a-\frac{b}{2}), (\frac{3b}{2}, a+\frac{b}{2}, -a+\frac{b}{2}), (-\frac{b}{2}, -a+\frac{b}{2}, a-\frac{3b}{2}), (a+\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$,
  $(-a+\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}, -\frac{b}{2})$.

Ezek után megfogalmazzuk állításunk térbeli megfelelőjét.

3. 1. 1. tétel *Az euklideszi háromdimenziós térben kombinatorikus ekvivariancia erejéig egyetlen két méretű kockával megvalósuló unilaterális kövezés létezik. A kitöltés ekvitranzitív. A hozzá tartozó maximális tércsoport a* **148. R$\bar{3}$** *jelű.* □

A leggazdagabb szimmetriájú tércsoport meghatározásához Poincare algoritmusát követjük (lásd pl. [Mol87]), azaz keresünk egy fundamentális tartományt és meghatározzuk a lappárosító transzformációkat. Egy alkalmas alaptartomány megtalálása után a krisztallográfiában megszokott módon homogén koordinátázással fejezzük most ki a fenti egybevágóságok analitikus alakját.

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{2b}{3} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{4b}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első két generátor harmadrendű forgatástükrözés ($\overline{3}$), míg az utolsó kettő harmadrendű csavarmozgás (3_1). A tengelyek egymással párhuzamosak. Az általuk generált kristálycsoport a **148. R$\overline{\mathbf{3}}$** [Hah83].

Megjegyezzük, hogy a dolgozatban tárgyalt kövezés megegyezik a bevezetőben már vázolt Rogers-féle konstrukcióval.

Sejtés Az euklideszi $d-$dimenziós térben kombinatorikus ekvivariancia erejéig pontosan egy unilaterális és ekvitranzitív, két méretű $d-$dimenziós kockával történő kövezés létezik.

Ebben a fejezetben tárgyaljuk még az un. gyengén-baráti poliéderek klasszifikálásának kérdését a három dimenziós térben.

A gyengén-baráti poliéderek fogalma és vizsgálatuk szükségessége rácsok extremális testeivel kapcsolatban merült fel és kezdődött el az utóbbi években G. Horváth Ákos kezdeményezésére.

Minkowski óta tudjuk, hogy bármely olyan K zárt, centrálszimmetrikus konvex test, amelynek centrumában rácspont helyezkedik el, továbbá térfogatára $V(K) > 2^n V(D)$ teljesül; szükségképpen tartalmaz további rácspontot. Azon testeket, melyeknek térfogata éppen $2^n V(D)$, *(az L rácsra vonatkozóan) extremális testeknek* nevezzük. Ezzel a tulajdonsággal bírnak például a rácspontokhoz tartozó $D-V$ cellák kétszeresre nagyítottjai.

G. Horváth Ákos [GHo96], [GHo99] munkáiban extremális testek határán elhelyezkedő rácspontokkal kapcsolatban végzett kutatásokat. Vizsgálataiban egy érdekes poliéderosztályhoz jutott el:

gyengén-barátinak nevez egy poliédert, ha tetszőleges átlójának középpontja egyúttal centruma a kérdéses átlót tartalmazó lapnak (esetleg magának a poliédernek).

Említett cikkében a szerző kitér rá, hogy a síkban csak a háromszögek és paralelogrammák teljesítik a fenti feltételt. Megemlíti, hogy a szimplexek, paralelotópok, kereszt-politópok és 1-szomszédos politópok egyúttal gyengén-barátiak is. A kombinatorikus osztályozás kérdése ezek után nyitott maradt, még három dimenzióban is.

[Bol00a] dolgozatomban előbb általánosítottam a gyengén-baráti poliéder fogalmát, majd erre az általánosabb osztályra válaszoltam meg a kombinatorikus osztályozás kérdését az euklideszi háromdimenziós tér esetére.

Az általánosítás: azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}$ *gyengén-baráti politóp*, ha mindazon átlók, melyek a $\mathcal{P}$ egy k-dimenziós lapjának belsejébe esnek ($k = 1, \ldots, n$), egymást közös felezőpontjukban metszik.

A fejezet fő eredménye a következőképpen fogalmazható meg:

3. 2. 5. tétel *A háromdimenziós euklideszi tér gyengén-baráti poliéderei a következők: tetraéder, paralelogramma alapú gúla, háromszög alapú hasáb, háromszög alapú bipiramis, paralelogramma alapú torzbipiramis, affin oktaéder, csonkolt paralelepipedon, paralelepipedon.* $\square$

A bizonyításban az alábbi lemma felhasználásával megkonstruáljuk az összes lehetséges gyengén-baráti poliédert.

3. 2. 1. lemma *Jelöljön $\mathcal{P}$ egy konvex poliédert és legyen P egy olyan pont, amelyre vert conv$(\mathcal{P} \cup P) = (vert\mathcal{P}) \cup P$. Ha a P nem esik a $\mathcal{P}$ egyetlen lapsíkjára sem, akkor a $\mathcal{P}$ valódi testátlóinak száma kisebb, mint a $\mathcal{P} \cup P$ konvex burka testátlóinak száma.* $\square$

Előbb sorra vesszük az átlót nem tartalmazó testeket és kiderítjük, hogy legfeljebb hat csúcsuk lehet. Ez egyúttal felső becslést ad gyengén-baráti poliéder átlóinak maximális számára. A vizsgálandó esetek köre ezzel jelentősen leszűkül:

Átlók száma	A hozzáadott pontok száma
1	3,4,5
2	2,3,4
3	0,1,2,3
4	0,1,2
5	0,1
6	0

Megjegyzés Véges osztályozás szempontjából $n \geq 5$ esetén a feladat érdektelenné válik, mert a ciklikus politópok (melyek bármely két csúcsát él köti össze) gyengén-barátiak és ezekből végtelen sok típus van. Így a feladat teljesen lezárható a négydimenziós eset megoldásával. Itt nem triviális ciklikus politópok még nincsenek (csak a szimplexek). Észrevehető, hogy – a 3. 2. 4. ábrához tartozó indokláshoz hasonlóan most is – a testátlók számára vonatkozó felső becslés a négydimenziós átlómentes poliéderek maximális csúcsszámával adható meg, ha ez utóbbi szám véges. Ez garantálná a véges diszkussziót. Meg kellene első lépésben keresni mindazon 4 dimenziós politópokat, melyek nem tartalmaznak testátlót, háromdimenziós lapjaik pedig gyengén-barátiak.

4 Kövezések osztályozása $D-$szimbólumok alapján

A fejezetben előbb egy olyan módszert mutatunk be, melynek segítségével kövezésekkel kapcsolatos osztályozási kérdések vizsgálhatók kombinatorikusan, de tetszőleges dimenzióban, később meg is fogalmazunk ilyen osztályozási tételeket, végezetül olyan, számítógépre implementált algoritmust közlünk, amely lehetőséget ad a korábbi eredmények általánosítására.

Adott $d-$dimenziós kövezéshez egyértelműen rendelhetünk hozzá egy olyan szimbólumot, mely a kövezés kombinatorikus struktúráját leírja, s amely a komputer számára könnyen kezelhető. Ez nem más, mint a szakirodalomban Delaney-Dress szimbólumként ismert (és Molnár Emil javaslatára D-szimbólumként is említett) kövezéseket színezett gráfként és hozzá kapcsolódó mátrixfüggvényként reprezentáló leírás. Az elmélet a kétdimenziós, állandó görbületű síkok parkettázásaira részletesen ki van dolgozva, a magasabb dimenziós kövezésekre pedig részeredmények vannak. (Lásd pl. [DS84], [Hus93], [DHZ92], [Hus95], [BH96], [DHM93], [Mol93], [DoH97], [DeH97], [Mol96].)

Képezzük egy adott $\mathcal{T}$ kövezés $\mathcal{C}$ *formális baricentrikus felbontását.* A szimpliciális felbontáson a szomszédságot σ_i *szomszédsági operációkkal* is leírhatjuk a következő módon:

$$\sigma_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C} : C \mapsto \sigma_i C$$

akkor áll fenn, ha C és $\sigma_i C$ i-szomszédosak.

Szemeljünk ki most egy tetszőleges C baricentrikus szimplexet és képezzük ennek Γ-pályáját (orbit):

$$C^\Gamma := \left\{ C^\gamma \middle| \gamma \in \Gamma \right\}.$$

Ha feltesszük, hogy a kövezésnek kompakt alaptartománya van, akkor a pályák száma véges.

Jelölje $\mathcal{D} := \mathcal{C}/\Gamma$ a szimplexpályák halmazát és D_k egy tetszőleges pályát ($1 \leq k \leq n$). Minthogy a kövezés szimmetriái i-szomszédokat i-szomszédoknak feleltetnek meg, ezért a σ_i szomszédsági operációk felcserélhetők Γ csoport elemeivel. Ez azt jelenti, hogy értelmezhetjük a D_k pályák i-szomszédságát is: D_1 és D_2 akkor i-szomszédosak, ha $C_2 = \sigma_i C_1$ fennáll minden $C_1 \in D_1$ és $C_2 \in D_2$ esetén.

A $(\mathcal{T}, \Gamma)$ kövezéshez tartozó *Delaney-Dress diagram (gráf) (röviden $D-$gráf)* alatt azt a színezett gráfot értjük, amelynek csúcsai a $\mathcal{D}$ halmaz elemei, és két csúcs pontosan akkor van összekötve egy i-színű ($i = 0, \ldots, d$) éllel, ha a csúcsokhoz tartozó pályahalmazok i-szomszédosak.

Minden $D \in \mathcal{D}$ esetén legyen $m_{ij}, 0 \leq i \leq j \leq d$ a következő:

$$m_{ij}(D) := \min \left\{ m \middle| \left(\sigma_j \sigma_i\right)^m C = C, \quad C \in D \right\}.$$

$(\mathcal{T}, \Gamma)$ parkettázás *Delaney-Dress szimbóluma ($D-$szimbóluma)* a kövezéshez tartozó $D-$gráfból és a pályákhoz tartozó m_{ij} mátrixfüggvényből áll. Jelölése: $(\mathcal{D}; m)$.

Két $D-$szimbólum $((\mathcal{D}; m),\ (\mathcal{D}'; m'))$ akkor *izomorf*, ha létezik olyan π bijekció $\mathcal{D}$ és $\mathcal{D}'$ között, melyre $\sigma_k\left(D^\pi\right) = \left(\sigma_k D\right)^\pi$, továbbá $m'_{ij}(\pi D) = m_{ij}(D)$, hacsak $D \in \mathcal{D}, (0 \leq k \leq d, 0 \leq i \leq j \leq d)$.

Ismert tétel, hogy egyazon $D-$szimbólumhoz nem tartozhat két különböző (nem ekvivariáns) kövezés és viszont [Dre87].

Legyen $(\mathcal{D}; m)$ egy kétdimenziós $D-$szimbólum. Az ehhez tartozó *görbületi állandó* a következőképpen van definiálva:

$$\kappa(\mathcal{D}, m) := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right).$$

A görbületi állandó segítségével több is megfogalmazható [Dre87]:

4. 1. 3. tétel *A $(\mathcal{D}; m)$ kétdimenziós $D-$szimbólum*

- *a hiperbolikus síkon megvalósuló parkettázáshoz vezet, ha $\kappa(\mathcal{D}, m) < 0$;*
- *az euklideszi síkon megvalósuló parkettázáshoz vezet, ha $\kappa(\mathcal{D}, m) = 0$;*
- *a szférikus síkon megvalósuló parkettázáshoz vezet, ha $\kappa(\mathcal{D}, m) > 0$ és a szimbólum nem a fentiekben említett négy eset közül való.* $\square$

$(\mathcal{T}, \Gamma)$ $d-$dimenziós parkettázáshoz és $(\mathcal{D}, m)$ ehhez tartozó $D-$szimbólumhoz újabb mátrixfüggvényeket vezethetünk be az alábbiak szerint:

$$r_{ij}(D) := \min \left\{ r : \left(\sigma_j \sigma_i\right)^r D = D \right\},$$

hacsak $D \in \mathcal{D}$, $(0 \leq i \leq j \leq d)$.

Az r_{ij} és m_{ij} mátrixfüggvények között teremt kapcsolatot a következő, természetes szám értékű függvény ($D \in \mathcal{D}$ és $0 \leq i \leq j \leq d$):

$$v_{ij}(D) := m_{ij}(D) / r_{ij}(D).$$

Fontos körülmény, hogy $r_{ij}(D)$ osztója $m_{ij}(D)$-nek, azaz speciálisan $r_{ij}(D) = 1$ vagy 2, hacsak $|i - j| > 1$.

A fejezetben először [BM98] és [BM00] alapján tárgyalni fogjuk a sík négy illetve öt elemű D-szimbólummal rendelkező parkettázásainak osztályozását. Az osztályozás alapgondolata Molnár Emil egy – [Mol96]-ban részletesen ismertetett – D-szimbólumok rendezésére alkalmas algoritmusán nyugszik. Ezen eljárás segítségével találta meg Molnár Emil a sík 4 illetve 5 elemű D-szimbólumait és rendezte őket sorba. A kézzel végrehajtott vizsgálatot megkönnyítették D-szimbólumokkal kapcsolatban végzett korábbi kutatásai és észrevételei, melyek alapján a szóbajövő gráfokat már ki lehetett találni. A szerző a realizálhatósággal, dualitással, ábrázolással kapcsolatos feladatok megoldásában működött közre.

[BM98] és [BM00] publikációinkban az említett síkbeli eseteket részletesen is vizsgáltuk. Az ott közölt eredmények ismertetése előtt – magyarázatképpen – szükséges néhány fogalmat bevezetni.

Két $D-$szimbólumot *duálisnak* nevezünk, ha az egyikből a $\sigma_0 \leftrightarrow \sigma_d, \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_{d-1}, \ldots$ operációk cseréjével kapott szimbólum izomorf a másikkal.

Egy Delaney-Dress szimbólum *önduális*, ha önmagával duális.

Az egyes szimbólumokhoz tartozó realizációkat táblázatok tartalmazzák. Ezekben feltüntettük: a D-diagramok mindegyikét, a csúcs-, él- és laptranzitivitási osztályok számának feltüntetésével; a kövezések jeleivel és a hozzájuk tartozó paraméterekkel, ill. a Conway és Macbeath jelölésekkel. Megvizsgáltuk azt is, hogy az adott csoport maximális-e; azaz találhatók-e, és ha igen, akkor milyen paraméterértékek, melyre a csoport kisebb elemszámú $D-$szimbólum szimmetriacsoportjának részcsoportjává válik. Ekkor a szupercsoportot is feltüntettük.

Mindkét táblázat tartalmazza a bevezetésben tárgyalt, realizációt eldöntő görbületi állandónak megfelelő Diofantikus egyenletek megoldásait. Ezek ismeretében az alaptartomány már ismert. A baricentrikus háromszögpályák szomszédsági operációinak figyelembe vételével ismertek a tartomány oldalpárosításai, azaz maga a kövezésen ható szimmetriacsoport. Euklideszi esetben ($n = 4$ esetén) a síkcsoportokat is feltüntettük.

Ezek után a következő tételeket fogalmazzuk meg.

4. 2. 1. tétel *A síkbeli, négyelemű $D-$diagramok pontosan 22 izomorfia osztályba sorolhatók. Ezek között 8 osztály önduális, míg a többi 7 duális párokat alkot.* □

4. 2. 2. tétel *A síkbeli, ötelemű $D-$diagramok pontosan 13 izomorfia osztályba sorolhatók. Ezek között 3 osztály önduális (2 ezekből nem maximális, 1 pedig esetleg maximális), míg a többi 5 duális párokat alkot.* □

4. 2. 3. tétel *Az euklideszi síkon pontosan 37 darab 4 baricentrikus háromszögpályával rendelkező kövezés létezik. Ezek között 15 duális pár és 7 önduális mozaik létezik, melyek 15 síkcsoport szerint tesznek lehetővé parkettázást. Az eredményeket egy - itt nem közölt - táblázat tartalmazza.* □

4. 2. 4. tétel *Az euklideszi síkon pontosan 15 darab 5 baricentrikus háromszögpályával rendelkező kövezés létezik. Ezek között 7 duális pár és 1 önduális mozaik létezik. Az eredményeket egy - itt nem közölt- táblázat tartalmazza.* □

Dolgozatom lezárásaként közlöm egy olyan új, könnyen számítógépre alkalmazható algoritmus leírását, mely elvileg tetszőleges csúcsszámú és tetszőlegesen sok színű $D-$gráfokat állít elő. A módszer számítógépre adaptálásával egyrészt a fentebb felsorolt tételeket sikerült ismételten igazolni; másrészt új eredményeket találtunk és továbbiak is várhatók. Ezek közül ízelítőképpen csak az 5 elemű térbeli D-diagramok osztályozását említjük a fejezet végén.

Legyen adott egy $D-$diagram. Tételezzük fel először, hogy a gráf csúcsai már valahogyan meg vannak számozva. A csúcsokat összekötő i-színű éleket involutív permutációk írják le a σ_i operációkról ismertetettek szerint. Az n csúcspontú gráfhoz található involutív permutációk számát jelölje a_n.

4. 3. 1. lemma *$n \geq 3$ esetén az n-elemű involutív permutációk a_n számára $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ teljesül ($a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$), vagy másképpen: $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)(2n-1)\ldots(2n-[2k-1])}{2^k k!}$.* □

Ennek felhasználásával egyszerű módon becslést adhatunk az a_n értékre vonatkozóan (külön páros és külön páratlan indexű tagokra):

$$\left(\frac{4t}{e}\right)^t \sqrt{\frac{\pi t}{2}} > a_{2t} > \left(\frac{2t}{e}\right)^t \sqrt{\frac{\pi t}{2}},$$

és

$$\frac{(2t+1)^{2t+1}}{t^t e^{t+1}}\sqrt{\frac{2t+1}{t}} > a_{2t+1} > \frac{(2t+1)^{2t+1}}{(2t)^t e^{t+1}}\sqrt{\frac{2t+1}{t}}.$$

Legyen az előállítandó Delaney-Dress szimbólumnak n csúcsa és legyen a diagram $d-$dimenziós, azaz $d+1$ színnel színezve. Az egymással nem izomorf gráfokat egy **ALGORITMUS** szerint gyártjuk le, melyet nem, csak továbbfejlesztett változatát ismertetjük.

Ezen általam kidolgozott **ALGORITMUS**-t Koponyásné Szél Mónika tanszéki kollégám ($n = 4, d = 2, 3; n = 5; d = 2$ esetekre) Pascal nyelven számítógépre implementálta. A kapott eredmények alátámasztották az előző fejezetbeli 4. 2. 1 és 4. 2. 2 tételekben foglaltakat, továbbá Molnár Emil egy még nem publikált kézzel levezetett listáját, mely a térbeli 4 elemű D-gráfokat sorolja fel. (A nem izomorf gráfok száma itt 82.)

Az összefüggő gráfok nagy száma, illetve az ekvivalenciát biztosító táblázat elemszámmal rohamosan növekvő mérete miatt azonban szükségessé vált az algoritmus módosítása:

ALGORITMUS2 Tegyük fel, hogy az előállítandó d-dimenziós Delaney-Dress diagramnak n csúcsa van. Ekkor

- tekintsük először úgy, mintha a gráf csúcsai már valahogyan meg lennének számozva, és készítsük el az a_n darab involutív permutációt majd rendezzük őket sorba;
- állapodjunk meg, hogy ezekből rendezett permutáció $(d+1)$-eseket úgy fogunk alkotni, hogy a permutációk a $d+1$-esben az előző rendezés szerint nem csökkenő sorrendben kövessék egymást. A $d+1$-esek így rendezve vannak. (Fontos, hogy a permutáció $d+1$-eseket nem gyártjuk le mint halmazt!!);
- vegyük az első, még nem tekintett rendezett permutáció $d+1$-est, és vizsgáljuk meg, hogy összefüggő-e. Ha nem, akkor folytassuk a következő, még nem vizsgált $d+1$-essel, ha igen, akkor lépjünk tovább;
- képezzük ehhez a permutáció $d+1$-eshez a (fentebb ismertetett) táblázat első oszlopa szerinti konjugáltjait és rendezzük a kapott permutáció sorozatot. Ha ez a rendezés szerint megelőzi a kiindulásit, akkor folytassuk az eljárást az ezelőtti ponttól. Ha nem, akkor képezzük a második oszlop szerinti konjugáltat és folytassuk az eljárást. Ha az összes oszlopon végigértünk és a kiindulási permutáció $d+1$-est egyik képe sem előzte meg, akkor a vizsgált permutációsorozat már az összefüggő, egymásba átszámozható, nem izomorf gráfokat kifejező permutáció $d+1$-esek egyik reprezentánsa. Folytassuk az algoritmust az ezelőtti ponttól kezdve, amíg erre lehetőség van;
- tekintsük az első reprezentánst és hozzuk belőle létre a permutációk permutálásával képezhető összes különböző rendezett $d+1$-est. Minden egyes frissen létrehozott permutáció $d+1$-est vizsgáljunk abból a szempontból, hogy abban a k és $k+j$-dik helyen álló permutációk szorzatának négyzete az identitás-e $(1 \leq k \leq d-1, 2 \leq j \leq d-k)$. Amennyiben ez akárcsak egyszer is nem áll fenn, a permutációsorozatot hagyjuk el. Folytassuk a leírt eljárást a következő reprezentánssal, amíg erre lehetőség van;
- végezetül vizsgáljuk a táblázat megfelelő elemeinek kiszámításával és azok rendezésével, hogy az eljárás végén megmaradó permutáció $d+1$-esek izomorf gráfokat határoznak-e meg, ha igen, válasszunk ezekből reprezentánst.

4. 3. 2. tétel *A fenti algoritmus eredményéül kapott készlet írja le a nem izomorf $d-$dimenziós, n csúcsú $D-$gráfokat.* $\square$

Az alábbi táblázatban az újabb algoritmus művelet és memóriaigényét tüntetjük fel. (Rövidítést fogunk használni: $\circ$ jelöli, ha minden egyes $d+1$-eshez ennyi műveletre van szükség.)

Fázis	Műveletigény	Memóriaigény
Rendezés	$O(a_n)$	$O(na_n)$
$d+1$-esek	$O(a_n^{(d+1)})$	–
Összefüggés	$O(nd), \circ$	–
Táblázat létrehozása soronként	$O((d+1)n!)$	–
Izomorfia eldöntése	$O(n!nln(n)), \circ$	$O(nd)$
Sokszorozás, r_{ij} szerinti szűrés	$O((d+1)!n^2d^2), \circ$	$O(n(d+1)+(d+1)!)$
Izomorfia eldöntése	$O(n!nln(n)), \circ$	$O(nd)$

Az algoritmus segítségével további eredmények várhatók. A dolgozatban csak az egyik kapcsolódó eredményt közöljük:

4. 3. 3. tétel *Az öt elemű, nem izomorf, térbeli D-gráfok száma 33. Felsorolásukat az alábbi táblázat tartalmazza. (A permutációk rendre a $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ szomszédságokat fejezik ki.)* $\square$

12345,12345,13254,21435	12345,13254,21435,12345
13254,21435,12345,12345	12345,12354,21435,13254
12345,13254,21435,12354	12354,21435,13254,12345
13254,21435,12354,12345	12345,12354,21435,13254
12345,13254,21435,12354	12354,21435,13254,12345
13254,21435,12354,12345	12345,12354,42513,13254
12345,13254,42513,12354	12354,42513,13254,12345
13254,42513,12354,12345	12345,21435,12354,34125
21435,12354,34125,12345	12345,13254,21435,13254
13254,21435,13254,12345	12345,13254,21354,14523
12345,14523,21354,13254	13254,21354,14523,12345
14523,21354,13254,12345	12345,13254,21435,14523
13254,21435,14523,12345	12354,12435,13254,21345
12354,12435,13254,21345	21345,13254,12435,12354
12354,43215,21354,13254	12354,45312,13254,21354
21354,13254,45312,12354	12354,14523,21354,13254
13254,21354,14523,12354	

5 Irodalomjegyzék

[BH96] L. Balke - D. H. Huson: Two-dimensional groups, orbifolds and tilings, *Geom. Dedicata* **60** (1996), 89–106.

[Bez00] K. Bezdek: On a stronger form of Rogers's lemma and the minimum surface area of Voronoi cells in unit ball packings of E^d, *J. reine angew. Math.* **518** (2000), 131–143.

[Bie12] L. Bieberbach: Über die Bewegungsgruppe der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung) Die Gruppe mit einem endlichen Fundamentalbereich, *Math. Ann.* **72** (1912), 400–412.

[Böl00a] A. Bölcskei:On weakly-neighbourly polyhedra, *Studia Sci. Math. Hung.* **36** (2000), 111–121.

[Böl00b] A. Bölcskei: Classification of unilateral and equitransitive tilings by squares of three sizes, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, **41** (2000), 267–277.

[Böl00c] A. Bölcskei: Plane fundamental domains with minimal perimeters, *Periodica Mathematica Hung.* **40(2)** (2000), 147–165.

[Bölt. a.] A. Bölcskei: Filling space with cubes of two sizes, (közlésre elfogadva a Publ. Math c. folyóiratban)

[BM98] A. Bölcskei - E. Molnár: How to Design Nice Tilings? *KoG, Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics* **3** (1998), 21–28.

[BM00] A. Bölcskei - E. Molnár: On classification of tilings in the planes of constant curvature by $D-$symbols, In *Proceedings of the* 4^{rd} *International Conference on Applied Informatics (2000)*, 117–128.

[BSK] A. Bölcskei - M. Szél-Koponyás: $D-$gráfok előállítása számítógéppel, kézirat, 2001

[BBNWZ78] H. Brown - R. Bülow - J. Neubüser - H. Wondratschek - H. Zassenhaus: Crystallographic groups of four-dimensional space, New York, John Wiley and Sons XIV (1978)

[CsL73] G. Csóka - Gy. Lampért: On some regular circle systems in the plane (in Russian), *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* (1973), 69–85.

[Daw84] R. J. M. Dawson: On filling space with different integer cubes, *J. Combin. Theory* **A 36** (1984), 221–229.

[Day64] D. E. Daykin: Space filling with unequal cubes, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 340–341.

[DHZ92] O. Delgado Friedrichs - D. H. Huson - E. Zamorzaeva: The classification of 2-isohedral tilings of the plane, *Geom. Dedicata* **42** (1992), 43–117.

[DeH97] O. Delgado Friedrichs - D. H. Huson: Orbifold triangulation and crystallographic goups, *Periodica Mathematica Hung.* **34** (1997), 29–55.

[Del59] B. N. Delone: Theory of planigons (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **23** (1959), 365–386.

[DDS80] B. N. Delone - N. P. Dolbilin - M. I. Štogrin : Combinatorial and Metric Theory of Planigons, *Proc. Steklov Inst. Math. (4)* **148** (1980), 111–141.

[DDS80] B. N. Delone - N. M. Sandakova : Theory of stereohedra, *Proc. Steklov Inst. Math.* (1961), 28–51.

[DoH97] N. P. Dolbilin - D. H. Huson: Peridic Delone Tilings, *Per. Math. Hung.* **34 (1-2)** (1997), 57–64.

[Dre87] A. W. M. Dress: Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds, *Adv. in Math.* **63** (1987), No. 2, 196–212.

[DHM93] A. W. M. Dress - D. H. Huson - E. Molnár: The classifications of face-transitive periodic three-dimensional tilings, *Acta Crystallographica* **A 49** (1993), 806–817.

[DS84] A. W. Dress - R. Scharlau: Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen, *Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen* **164** (1984), Coxeter-Festschrift

[Fej64] L. Fejes Tóth: Regular Figures, Pergamon Press, Oxford - New York - London - Paris (1964)

[FK87] W. Fischer - E. Koch: On 3-periodic minimal surfaces, *Zeitschrift f-r Kristallographie* **179** (1987), 31–52.

[GHo96] Á. G. Horváth: On the DIRICHLET-VORONOI cell of unimodular lattices, *Geometriae Dedicata* **63** (1996), 183–191.

[GHo97] Á. G. Horváth: Extremal polygons with minimal perimeter, *Periodica Mathematica Hung. Vol.* **34** (1997), 83-92.

[GHo99] Á. G. Horváth: On the boundary of an extremal body, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)* **40** (1999), 331–342.

[Grü67] B. Grünbaum: Konvex polytopes, *Pure and Applied Mathematics Volume* **XVI**,Interscience Publishers John Wiley I& Sons, Ltd. 1967

[GS87] B. Grünbaum - G. C. Shepard : Tilings and Patterns, *W. H. Freeman*, 1987, 72–81.

[Hah83] International Tables for X-ray Crystallography, Vol. 1., Henry, N. F. M. and Lonsdale, K. Symmetry Groups, *Kynoch Press, Birmingham*, 1969. New edition by Theo Hahn, Vol. A, *Reidel Co, Dordrecht*, 1983

[Hep64] A. Heppes: Isogonale sphärische Netze, *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* (1964), 41–48.

[Hep95] A. Heppes: On surface-minimizing polyhedral decompositions, *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), 529–539.

[Hep97] A. Heppes: A note on shortest partitioning nets of the 2-sphere, *Intuitive geometry1995, Bolyai Society Studies 6* (1997), 347–355.

[Hor64] J. Horváth: Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **7** (1964), 49–53.

[Hus93] D. H. Huson: The generation and classification of tile-k-transitive tilings of the Euclidean plane, the sphere and hyperbolic plane, *Geom. Dedicata* **47** (1993), 269–296.

[Hus95] D. H. Huson: Ribbon tilings from spherical ones, *Geom. Dedicata* **63** (1996), 147–152.

[Lin69] L. Lindelöf: Propriétés générales des poliédres etc., *St. Petersburg Bull. Ac. Sc.* **14**, 258–259.

[LM90] Z. Lučić - E. Molnár : Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry group, *Arch. Math.* **54** (1990), 511–520.

[LMV] Z. Lučić - E. Molnár - N. Vasiljević: Combinatorial structure of fundamental polygons of finite area for plane discontinuous groups, (manuscript, 1998)

[Mac 85] A. L. Mackay: Non-Euclidean crystallography *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **48** *Intuitive Geometry*, Siófok (Hungary) 1985, 347–371, North-Holland (1987).

[MMS98] H. Martini - E. Makai - V. Soltan : Unilateral Tilings of the Plane with Squares of Three Sizes, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)* **39** (1998), 481–495.

[Min97] H. Minkowski: Allgemeine Lehrsätze über konvexen Polyeder, *Nachr. K. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* **ii** (1897), 198–219.

[Min10] H. Minkowski: Geometrie der Zahlen, Leipzig und Berlin, (1910)

[Mol87] E. Molnár: Minimal presentation of the 10 compact Euclidean space forms by fundamental domains, *Studia Sci. Math. Hung.* **22** (1987), 19–51.

[Mol92] E. Molnár: Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hung.* **59(1-2)** (1992), 175–216.

[Mol93] E. Molnár: Klassifikation der hyperbolischen Dodekaederpflasterungen von maximalen flächentransitiven Bewegungsgruppen, *Mathematica Pannonica* **4/1** (1993), 113-136.

[Mol94] E. Molnár: Symmetry breaking of the cube tiling and the spatial chess board by $D-$symbols, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, **35** (1994), 205–238.

[Mol96] E. Molnár: Discontinuous groups in homogeneous Riemannian spaces by classification of $D-$symbols, *Publicationes Math. Debrecen* **49** (1996) 3-4, 265–294.

[Molt. a.] E. Molnár: Minimal surfaces and crystallography (megjelenik a 25. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium konferenciakötetében) (2000)

[Mor94] F. Morgan: Soap bubbles in R^2 and in surfaces, *Pacific J. Math.* **165** (1994), 347–361.

[PSchu00] W. Plesken - T. Schulz: Counting crystallographic groups in low dimensions, (manuscript 2000)

[Scha00] D. Schattschneider: Unilateral and Equitransitive Tilings by Squares, *Discrete and Computational Geometry* **24** (2000), 519–525.