Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechnikai Tanszék

PhD tézisfüzet

Konfigurációs erőn alapuló végeselemes hálójavító eljárások alkalmazása képlékenységtani feladatok megoldásában

Szerző:
Hénap Gábor

Témavezető:
Dr. Szabó László

Budapest, 2015. január

Bevezetés

A különböző mérnöki problémák numerikus módszerekkel történő megoldása napjainkra széleskörűen elterjedté vált. Szinte minden tudományterülettel kapcsolatban rendelkezésre állnak különböző ipari szoftverek, melyekkel a tervezés folyamán szimulálható a vizsgált termék viselkedése. A szilárdtest mechanikában különösen elterjedt a végeselem módszer. Mivel egyre komplexebb feladatok megoldására nyílik lehetőség az egyre nagyobb kapacitású számítógépek megjelenésével, a feladat diszkretizálásának minősége kulcsfontosságú a megbízható eredmények eléréséhez. Ezt lehetőség szerint úgy kell megvalósítani, hogy a szoftver automatikusan képes legyen a feladat megfelelő diszkretizálására, minél kevésbé hagyatkozva a felhasználó mérnök tapasztalatára. Másik fontos kérdés a már elvégzett analízis megbízhatóságának megítélése és a paraméterek esetleges módosítása. Erre különböző adaptív módszerek állnak rendelkezésre a végeselemes analízisben, melyek segítenek a megfelelő háló kialakításában. Ezeknek egy változata a konfigurációs erő számításán alapuló módszerek csoportja. A konfigurációs erő fogalmának megjelenése J. D. Eshelby 50-es években megjelent cikkeihez köthető. Azóta a számítástechnika fejlődésével lehetővé vált széleskörű felhasználása. A végeselem módszerben a csomóponti konfigurációs erővektor felhasználható a háló átrendezésére oly módon, hogy a teljes potenciál minimumához tartozó megoldást érjük el, adott szabadsági fok mellett. Ezt r-adaptív eljárásnak nevezik. Mivel az itt felhasznált konfigurációs erő a diszkretizáció hibáját számszerűsíti, a lokális hálósűrítéssel működő h-adaptív módszer vezérlésére is felhasználható. Ezen eljárásokkal számos cikk foglalkozik, véges rugalmas alakváltozások esetében is. A megfelelő potenciálfüggvény definiálásával azonban a módszer kiterjeszthető rugalmas-képlékeny problémák esetére.

A végeselem módszer mellett, illetve azt kiegészítve, egyre inkább teret hódít az izogeometrikus analízis. Ez az eljárás a modellt meghatározó CAD geometria interpolációs függvényeit használja forma-függvényekként a numerikus megoldás során. Mivel itt az ún. kontroll háló és a fizikai háló – amely a vizsgált tartományt osztja részekre – elkülönül, az r-adaptív stratégia alkalmazására még tágabb mozgástér áll rendelkezésre, mint a hagyományos végeselem módszer esetében. Az izogeometrikus analízis sajátosságaihoz kötődő korlátozásokat szem előtt tartva, a konfigurációs erővel vezérelt h-adaptív módszer szintén kivitelezhető.

A megvalósított numerikus eljárások teszteléséhez elengedhetetlen a megfelelő tesztpéldák előállítása. Ezek zárt alakú analitikus megoldással rendelkező mechanikai feladatok. Az ilyen feladatok száma korlátozott és a megoldás csak bizonyos megkötésekkel érvényes. A rugalmas-képlékeny alakváltozás meghatározásával kapcsolatos problémák esetében ez különösen igaz. A rugalmas-képlékeny ék problémaköréhez kapcsolódóan – mely számos geometriai és terhelési esetet foglal magában – lehetőség van eddig nem vizsgált esetekre vonatkozó analitikus megoldások előállítására is.

Célkitűzések

A PhD disszertációhoz kötődő kutatásom elsődleges célja volt az előbbiekben vázolt, konfigurációs erőn alapuló adaptív hálójavító eljárások megvalósítása, rugalmas képlékeny feladatok numerikus megoldásához. Ehhez egy megfelelő potenciálfüggvény bevezetésére volt szükség, melyből levezethető a módszer működését megalapozó feltétel. Az ék-problémához kapcsolódóan, a numerikus megoldások validálásához, levezettem egy eddig nem vizsgált rugalmas-képlékeny feladat analitikus megoldását. Ez a megoldás, több más tesztpélda mellett, felhasználásra került az adaptív módszerek tesztelésénél. Ezen kívül további célként tűztem ki az r-adaptív hálójavító eljárás alkalmazásának vizsgálatát az izogeometrikus analízissel összefüggésben.

Megvalósítás

A módszerek numerikus implementálása során kétféle feladatot kellett megoldani. Egyfelől szükség volt a kitűzött peremérték feladat numerikus megoldására. Erre a végeselem módszer esetében nagyrészt az ANSYS szoftver került felhasználásra. Abban az esetben, amikor a rugalmas-képlékeny analízisben a Tresca-féle képlékenységi feltételt kellett alkalmazni, a HYPLAS programcsomagot használtam, amely ezt lehetővé tette. Azok a programrészek, amelyek kutatás alapját képező eljárások megvalósítására szolgálnak *Wolfram Mathematica* környezetben készültek. Mivel a kutatás során nem elsősorban az algoritmusok kivitelezésének optimalizálása, hanem a megvalósíthatóság került előtérbe, ez a szoftver alkalmas volt a szükséges programrészek implementálására. Ezen kívül az

eredmények analitikus tesztpéldákkal való összevetésnél is hasznosnak bizonyult.
Az izogeometrikus analízis esetében nem állt rendelkezésre kereskedelmi szoftver az alapvető szilárdsági számítások elvégzésére sem. Ezért itt az egész eljárást, a modellezéstől az eredmények megjelenítéséig egyaránt a *Wolfram Mathematica* környezetben implementáltam.

1. Tézis

A konfigurációs erőn alapuló r- és h-adaptív eljárás rugalmas-képlékeny esetben is alkalmazható. Felhasználva az alakváltozási tenzornak egy rugalmas és egy képlékeny komponensre történő - kis alakváltozások esetén a szakirodalomban széles körben elfogadott- additív felbontását, a csomóponti konfigurációs erővektor a teljesen rugalmas esettel analóg módon számítható.
A korábban tisztán rugalmas esetre megadott összefüggések alapján, képlékeny potenciálfüggvény bevezetésével, illetve az alakváltozási tenzor additív felbontásával, egy rugalmas-képlékeny alakváltozásra érvényes egyensúlyi egyenletet vezettem le, melyből számítható a konfigurációs erő. Ez a numerikus közelítés hibájának indikátoraként használható a diszkretizáció paramétereinek javításához. A feltétel, mely a felhasznált potenciálfüggvény minimális értékéhez tartozik, lokális alakban a

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{e}\right)\boldsymbol{\delta}-\left(\mathbf{grad}^{T}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{grad}\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\mathbf{0}$$

egyensúlyi egyenlet csomópontokon való teljesülése. A számító eljárás numerikus implementálása után, rugalmas-ideálisan képlékeny anyagmodell felhasználásával, analitikus megoldással rendelkező tesztpéldákon mutattam be a módszer alkalmazhatóságát. A hálómódosítás során a csomópontok átrendezése a számított konfigurációs erővektor irányával, annak nagyságával arányosan adható meg. A kapott eredményeket az analitikus megoldásokkal összevetve a megoldás pontosságának javulása kimutatható. A kidolgozott módszer további előnye, hogy a képlékenységi feltétel megválasztásától független.

A tézishez kapcsolódó publikáció(k): [1], [2], [4], [5]

2. Tézis

Zárt alakú, analitikus megoldást állítottam elő a rugalmas-képlékeny ék problémakörének egy eddig nem vizsgált feladatára vonatkozóan. A megoldás 90°-os ékszög esetén, illetve a Mises-féle képlékenységi feltételt alkalmazva adja meg a feszültségmezőt sík-feszültség és a vízszintes peremen előírt csúsztatófeszültség mellett. Ez a megoldás azon túl, hogy kiegészíti a feladatkörrel kapcsolatos eddigi kutatásokat, jól alkalmazható numerikus módszerek validálására.

A rugalmas-képlékeny ék problémájával elsőként főleg Paul M. Naghdi munkásságában találkozhatunk, aki munkatársaival számos esetre állított elő analitikus megoldást ebben a problémakörben. Az általam bemutatott esetre eddig nem közöltek analitikus megoldást. A levezetésben kis alakváltozás, sík-feszültségi állapot érvényes, illetve a Mises-féle képlékenységi feltételt alkalmaztam. A vizsgált ék szöge 90°. Az ék vízszintes peremén előírt csúsztatófeszültség működik. A megoldások végtelen negyedsíkra vonatkoznak. Rugalmas oldalról az egyensúlyi egyenlet, az anyagtörvény, illetve a kompatibilitási feltétel szükséges. A rugalmas-képlékeny tartományokban történő feszültség- és elmozdulásmező előállításához ezek kiegészülnek a Prandtl-Reuss egyenletekkel, melyek kapcsolatot teremtenek a feszültség- és alakváltozás sebességek között, a rugalmas-képlékeny zónában. A szakirodalomban található hasonló eredmények felhasználása numerikus módszerek validálására legtöbbször nehézkes, az analitikus megoldások komplikált és nehezen átlátható megadása miatt. Munkám során törekedtem arra, hogy ezt a problémát elkerülendő, az eredményeket lehetőség szerint világos, közvetlenül felhasználható zárt alakú összefüggésekkel foglaljam össze.

A tézishez kapcsolódó publikáció(k): [3], [4]

3. Tézis

A konfigurációs erőn alapuló r-adaptív eljárást továbbfejlesztettem az izogeometrikus analízisben történő használatra, kis rugalmas alakváltozások esetére. Az eljárás ez esetben a csomópont vektorra, a kontroll-háló pontjaira, illetve mindkettőre egyidejűleg alkalmazható.

Az r-adaptív módszer koncepciója a csomópont vektor elemeire alkalmazva kissé eltér a végeselem módszer kapcsán megszokott eljárástól. A háló sorait és oszlopait alkotó pontok elmozdítása csak egyidejűleg lehetséges, emiatt az ezen pontokban számolt átlagos diszkrét konfigurációs erővektor képezi az eljárás alapját. A csomópontokban számolt konfigurációs erő vektorok összeadásával adódik, melyeknek definíció szerint zérus értéket kellene adni. Ezután az adott sor, vagy oszlop pozícióját megadó alappont értékének módosítása megvalósítható az adott soron, vagy oszlopon számított eredő konfigurációs erővektor eredőjének segítségével. Ezen eredő adott sorra, vagy oszlopra merőleges komponensének abszolút értéke alapján, a szóban forgó alappont érték megváltozása ennek számszorosa lesz. Az új értékek meghatározása

$$\Xi_I^{\text{új}} = \Xi_I^{\text{régi}} - c \sum_{j=1}^{n_\eta} G_1\left(\xi_I, \eta_j\right),$$

$$\mathcal{H}_J^{\text{új}} = \mathcal{H}_J^{\text{régi}} - c \sum_{i=1}^{n_\xi} G_2\left(\xi_i, \eta_J\right)$$

algoritmus alapján történik. A vizsgált tartomány pereme nem változhat meg a folyamat során. Ez egyszerűen teljesíthető a csomópont vektorok első és utolsó elemének figyelmen kívül hagyásával a számítás során. A kontroll háló esetében szintén alkalmazható az eljárás, annak pontjai egymástól függetlenül szabadon elmozdíthatóak, amennyiben a tartomány pereme megőrzi eredeti alakját. A végeselem módszerben történő alkalmazással szemben, itt nem jelent problémát a kontroll pontok egybeolvadása, illetve az "elemtorzulás", így tágabb mozgástér áll rendelkezésre a diszkretizáció optimalizálására. Az algoritmus a végeselem módszerben alkalmazott r-adaptív eljárással analóg módon

$$\mathbf{B}^{\text{új}} = c \cdot \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{B}^{\text{régi}}$$

szerint működik. A felsorolt két módszer kombinálása szintén megvalósítható. Ilyenkor két lehetőség áll rendelkezésre. A csomópont vektor és a kontroll háló módosítása történhet egy iterációs lépésen belül, illetve lépésenként felváltva.

A tézishez kapcsolódó publikáció(k): [1]

Publikációk

[1] G. Hénap, The configurational force and its applications in finite element method (in hungarian), Építés – Építészettudomány 2 (2010) 35–55.

[2] G. Hénap, Configurational-force-based finite element mesh refinement for elastic-plastic problems, Periodica Polytechnica Mechanical Engineering 56 (2012) 23–26.

[3] G. Hénap, L. Szabó, Analytical solution of an elastic-plastic wedge subjected to uniform shear on its face, 39th Solid Mechanics Conference: Book of Abstracts (2014) 39-40.

[4] G. Hénap, L. Szabó, On numerical solution of elastic–plastic problems by using configurational force driven adaptive methods, Finite Elements in Analysis and Design 92 (2014) 50-59.

[5] G. Hénap, Konfigurációs erő analitikus és numerikus számítása kis rugalmas-képlékeny alakváltozás esetén, XI. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc (2011)