

# Tézisfüzet

Önhasonló hamlazok és mértékek vetületei  
és véletlen és evolúciós apollóniai hálózatok fokszámeloszlása  
(Projections of self-similar sets and measures  
and Degrees of random and evolving Apollonian networks)

Lajos Vágó

## Supervisor

Prof. Károly Simon  
Professor of Mathematics

Department of Stochastics,  
Institute of Mathematics



**BME**  
**2020**

Disszertációm két témát ölel fel. Az első véletlen és determinisztikus önhasonló fraktálok geometriájával foglalkozik (1. Fejezet) és három cikkünk eredményeit összesíti [39, 40, 38]. A második témában véletlenszerűen fejlődő komplex hálózatokkal foglalkozunk (2. Fejezet) a [25] cikkünk alapján, melyeknek a konstrukciója véletlen fraktálokkal van kapcsolatban.

## 1. Önhasonló hamlazok és mértékek vetületei

Mandelbrot Fraktálokat definiált, hogy ezek segítségével írjon le fizikai jelenségeket [26, 27], így például turbulencia jelenségeket modellezett a fraktál, vagy Mandelbrot perkolációs halmaz segítségével [27]. Ettől kezdve sokan elkezdtek matematikai módszerekkel vizsgálni a fraktálokat, az elsők között született meg Hutchinson híres szemináriumi cikke [24]. Napjainkra hatalmas irodalma van a fraktálok elméletének, a legtöbbet hivatkozott könyvek között vannak például: [15, 18, 19]. A legegyszerűbb fraktálok az önhasonlóak (determinisztikus, vagy véletlen), ezeket a disszertációmban alterekre való vetületeiken keresztül vizsgáljuk.

### 1.1. Jelölések, alapok

Egy iterált függvény rendszer (IFR)  $\mathbb{R}^d$ -ben kontrakciók egy véges halmaza.

$$\mathcal{F} = \{\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}_{i=1}^N. \quad (1.1)$$

Hutchinson klasszikus tétele szerint [24] egy IFR-nek létezik egy invariáns halmaza melyet *attraktor*-nak hívunk, azaz:

**1.1. Tétel** (Hutchinson [24]). *Legyen  $\mathcal{F} = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$  egy  $\mathbb{R}^d$ -beli IFR. Ekkor egyértelműen létezik egy nemüres kompakt halmaz  $S \subset \mathbb{R}^d$  melyre*

$$S = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(S).$$

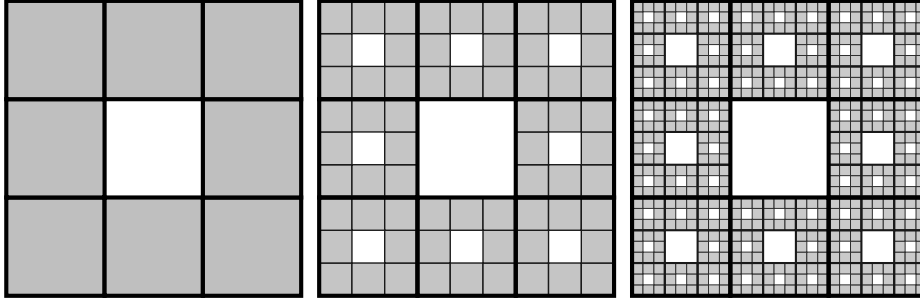
$S$  pontjait a  $\Sigma = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$  kód tér pontjaival azonosíthatjuk a következő képpen. Egy felől  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots) \in \Sigma$ -hoz rendelhetjük

$$\Pi(\mathbf{i}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{i_1, \dots, i_n}(0)\text{-t}, \quad (1.2)$$

mely létezik és  $S$ -ben van, mivel  $\varphi_i$ -k kontrakciók, ahol  $\varphi_{i_1, \dots, i_n}$ -nel  $\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}$ -t jelöljük.  $\Pi$ -t *természetes vetítésnek* hívjuk. Másfelől minden  $S$ -beli pont megkapható ilyen módon. Ezen felül könnyen belátható, hogy ugyan azt a pontot kapnánk, ha 0 helyett egy tetszőleges  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  pontra hattatnánk a  $\varphi_i$  függvényeket  $\Pi$  definíciójában. Ennek következményeként az attraktor könnyen megkapható úgy, hogy egy tetszőleges kompakt  $A$  halmazra hattatjuk a  $\mathfrak{S}(A) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(A)$  halmaz függvényét.



1. ábra. A Cantor halmaz első négy közelítése



2. ábra. A Sierpiński szőnyeg első három közelítése

$n$ -edik szintű cylinder halmaznak hívjuk a  $\varphi_{i_1, \dots, i_n}(S)$  halmazokat. Másként mondva, egy cylinderbe tartoznak azok a pontok, melyeknek a kódja azonos véges szóval kezdődik.

IFR-ek attraktorára két közismert példa a *triadikus Cantor halmaz* és a *Sierpiński szőnyeg*. A Cantor halmaz (1-es Ábra) a  $[0, 1]$  intervallumnak része és a következő IFR attraktora:

$$\left\{ \frac{x}{3}, \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right\}.$$

Ahhoz, hogy a Sierpiński szőnyeget (Figure 2) definiálhassuk, legyen  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_8 \in \mathbb{R}^2$  a  $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \setminus \{(1, 1)\}$  halmaz 8 eleme tetszőleges sorrendben. Ekkor a Sierpiński szőnyeg a következő IFR attraktora:

$$\mathcal{S} := \left\{ \varphi_i(x, y) := \frac{1}{3}(x, y) + \frac{1}{3}\mathbf{t}_i \right\}_{i=1}^8. \quad (1.3)$$

Abban a speciális esetben, amikor az IFR-t definiáló függvények  $\varphi_i(\mathbf{x}) = r_i O_i(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_i$  lineárisak  $0 < r_i < 1$ ,  $O_i$  forgatásokkal és  $t_i \in \mathbb{R}$ -vel, akkor az  $S$  attraktort *önhasonló* halmaznak hívjuk, az  $r_i$  konstansokat *kontrakciós hányadosnak* és a  $t_i$ -ket pedig *eltolásnak*. A disszertációmban szereplő önhasonló halmazok majdnem mindegyike a fenti példákhoz hasonlóan nem tartalmaz forgatást. Tanulmányozunk még *önhasonló mértékeket* is  $S$ -en melyeket a következőképpen definiálunk. Ha adott egy valószínűségi vektor  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$  (azaz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  és  $w_i \geq 0$   $i = 1, \dots, n$ ) akkor legyen  $\mu = \mathbf{w}^N$  a végtelen szorzat mérték a  $\Sigma$  kódtéren. Ennek a  $\nu = \nu_{\mathbf{w}} = \Pi_* \mu$  előre toltját *önhasonló mértéknek* nevezzük, azaz  $H \subset \mathbb{R}^d$  Borel halmazokra

$$\nu(H) = \mu(\Pi^{-1}(H)). \quad (1.4)$$

Másképp szólva  $\nu$  az egyértelmű kompakt tartójú Radon valószínűségi mérték mely bármely  $H \subset \mathbb{R}^d$  Borel halmazra

$$\nu(H) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \nu(\varphi_i^{-1}(H)),$$

lásd [19].

Az attraktorok "mérésére" különféle dimenzió fogalmakat vezetünk be. A  $\dim_{\text{B}}$  box, vagy *Minkovski dimenziója* egy korlátos  $S \subset \mathbb{R}$  halmaznak

$$\dim_{\text{B}}(S) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{N_{\delta}(S)}{-\log \delta}, \quad (1.5)$$

ha a limesz létezik, ahol  $N_{\delta}(S)$  a legkisebb olyan szám, melyre  $N_{\delta}(S)$  darab  $\delta$  oldalú kockával le lehet fedni az  $S$  halmazt. A  $\overline{\dim}_{\text{B}}$  felső illetve  $\underline{\dim}_{\text{B}}$  alsó box dimenziókat analóg módon definiáljuk, csak limesz helyett lim inf illetve lim sup-pal, melyek így mindig léteznek. Könnyen látható, hogy a box dimenziója egy egyszerű halmaznak az amit várnánk, például egy szakasz 1, míg egy tömör négyzet 2 dimenziós. Bármilyen nemnegatív szám lehet egy durvább halmaz, mint például önhasonló halmazok dimenziója, ami nem nagyobb mint a tér dimenziója, melybe a halmaz be van ágyazva. Egy nemkívánatos tulajdonsága a box dimenzióknak, hogy megszámlálhatóan sok halmaz uniójának a dimenziója nem feltétlenül egyezik meg az egyes halmazok dimenziójának a szuprémumával, például  $\dim_{\text{B}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$ , mivel legalább  $1/\delta$  darab  $\delta$  hosszúságú szakaszra van szükségünk ennek a halmaznak a fedéséhez.

Egy másik dimenzió fogalom a *Hausdorff dimenzió*. Ahhoz, hogy definiálhassuk először definiáljuk a  $\mathcal{H}^s$   $s$ -dimenziós Hausdorff tartalmát egy  $S \subset \mathbb{R}^d$  korlátos halmaznak a következőképpen:

$$\mathcal{H}^s(S) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^s(S) \quad (1.6)$$

ahol

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s \mid S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, |A_i| < \delta, A_i \subset \mathbb{R}^d \right\},$$

ahol  $|A_i|$  az  $A_i$  halmaz átmérője. Ekkor a  $\dim_{\text{H}}$  *Hausdorff dimenziója*  $S$ -nek a következő:

$$\dim_{\text{H}} S := \inf \{s \mid \mathcal{H}^s(S) = 0\} = \sup \{s \mid \mathcal{H}^s(S) = \infty\}.$$

$\mathbb{R}^d$ -n lévő  $\mathbf{m}$  mértékeknek is definiáljuk a *Hausdorff dimenzióját* a következőképpen:

$$\dim_{\text{H}} \mathbf{m} := \inf \{ \dim_{\text{H}} A : \mathbf{m}(A) > 0, \text{ and } A \text{ is a Borel set} \}, \quad (1.7)$$

lásd [19, p. 170] egy ekvivalens definícióért.

Egy  $H \subset \mathbb{R}^d$  halmaz pakolási dimenzióját a következőképpen definiáljuk [19, p. 23.]:

$$\dim_{\text{P}} H = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_{\text{B}} E_i : H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}, \quad (1.8)$$

ahol  $\overline{\dim_{\mathbb{B}}}$  a felső box dimenzió. A pakolási dimenziót a Hausdorff dimenzióval analóg módon is definiálhatjuk, fedések helyett pakolásokkal. Kényelmi okokból mi a fenti definíciót használjuk. A pakolási dimenzió legfontosabb tulajdonságait lásd itt: [19].

Egy önhasonló IFR *hasonlósági dimenziója* az az egyértelmű  $s > 0$  melyre

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1. \quad (1.9)$$

Az ehhez kapcsolódó  $\nu = \nu_{\mathbf{w}}$  önhasonló mérték hasonlósági dimenziója

$$\dim_{\mathbb{S}}(\nu) := \frac{\sum_{i=1}^N p_i \log p_i}{\sum_{i=1}^N p_i \log r_i}. \quad (1.10)$$

Adott  $\mathcal{F}$  esetén a maximum  $p_i = r_i^s$ -ben van, és a maximum értéke  $\mathcal{F}$ -nek az  $s$  hasonlósági dimenziója. Az ezekkel a súlyokkal képzett önhasonló mértéket *természetes mértéknek* nevezzük.

A különféle dimenzió fogalmak között az alábbi relációk állnak fenn. Ha  $S \subset \mathbb{R}^d$ , akkor

$$\dim_{\mathbb{H}} S \leq \overline{\dim_{\mathbb{B}}} S,$$

és ha  $S$  önhasonló, akkor

$$\dim_{\mathbb{B}} S = \dim_{\mathbb{H}} S \leq \dim_{\mathbb{S}} S.$$

További szeparációs feltételek mellett többet is állíthatunk. Azt mondjuk, hogy teljesül az erős szeparációs feltétel, ha

$$\varphi_i(S) \cap \varphi_j(S) = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

A nyílt halmaz feltétel teljesül, ha létezik olyan nem üres  $V$  halmaz, hogy

$$\begin{aligned} \varphi_i(V) &\subset V \quad \forall i, \text{ and} \\ \varphi_i(V) \cap \varphi_j(V) &= \emptyset \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

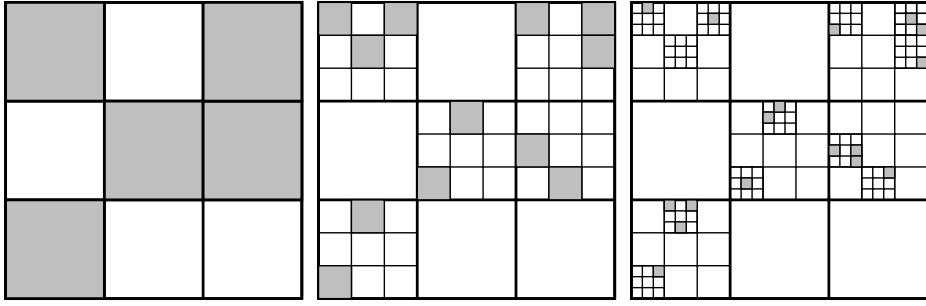
Nyilván való, hogy ha egy  $S$  önhasonló halmaz teljesíti az erős szeparációs feltételt, akkor a nyílt halmaz feltételt is teljesíti ha  $V$ -nek  $S$  egy kis nyílt környezetét vesszük. Például a triadikus Cantor halmaz (1-es ábra) teljesíti az erős szeparációs feltételt, míg a Sierpiński szőnyeg (2-es ábra) csak a nyílt halmaz feltételt. Hutchinson következő tétele szerint a következő dimenziók megegyeznek ha a nyílt halmaz feltétel fenn áll.

**1.2. Tétel.** [24] *Legyen  $S$  önhasonló halmaz melyre a nyílt halmaz feltétel teljesül. Legyen  $s = \dim_{\mathbb{S}} S$ . Ekkor*

$$0 < \mathcal{H}^s(S) < \infty.$$

*Továbbá,*

$$\dim_{\mathbb{B}} S = \dim_{\mathbb{H}} S = s.$$



3. ábra. A fraktál perkolációs halmaz első három szinthalmazának egy realizációja.

Megjegyezzük továbbá, hogy ha az erős szeparációs feltétel teljesül, akkor  $S$  minden pontjának egyértelmű kódja van a  $\Sigma$  kódtérben.

Disszertációmban vizsgálni fogjuk még a *Mandelbrot*, vagy *fraktál perkolációs halmazt* is (3-as ábra), mely egy véletlen (statisztikusan) önhasonló halmaz, melyet a következőképpen definiálunk.

**1.3. Definíció** (Mandelbrot perkoláció). Legyen  $M \geq 2$  egész,  $0 \leq p_{i,j} \leq 1$ ,  $i, j \in \{0, \dots, M-1\}$  valósak és legyen  $K = [0, 1]^2$ . Itaratív módon definiáljuk a halmazt. Először osszuk fel a  $K$  négyzetet  $K_{i,j}$  kis négyzetekre melyek oldalai  $1/M$  hosszúak,  $i, j \in \{0, \dots, M-1\}$ , és a  $K_{i,j}$  kis négyzeteket tartsuk meg  $p_{i,j}$  valószínűséggel, egymástól függetlenül. Az így fennmaradó kis négyzetek  $E_1$  uniója a Mandelbrot perkolációs halmaz első szinthalmaza. Ismételjük meg ezt a folyamatot a megtartott kis négyzeteken, hogy megkapjuk a második szinthalmazt, azaz osszuk fel ismét a kis négyzeteket  $M^2$  még kisebb négyzetre, ezek közül tartsunk meg néhányat ugyan úgy sorsolva mint előtte, függetlenül egymástól és minden más korábbi eseménytől. Az így kapott egyre kisebb és kisebb négyzeteken folytassuk ezt a folyamatot, hogy végül végtelen sok lépés után megkapjuk a Mandelbrot perkolációs halmazt:

$$E = E_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

$d$ -dimenziós fraktál perkolációs halmazok definíciója, az előbbinél formálisabb formában megtalálható a disszertációmban. Egy elágazási folyamatos érveléssel könnyen látható, hogy ha  $\sum_{i,j=0}^{M-1} p_{i,j} > 1$ , akkor az  $E$  halmaz nem üres pozitív valószínűséggel. A fraktál perkoláció elnevezés a halmaz azon tulajdonságából ered, hogy létezik egy  $p_c < 1$  kritikus valószínűség melyre  $p_{i,j} > p_c$  esetén az  $E$  halmaz pozitív valószínűséggel perkolál [8], azaz létezik  $E$ -nek egy részhalmaza, mely összefüggő és metszi az egység négyzet jobb és bal oldalát is. Másfelől, ha  $p_{i,j} < p_c$ , akkor a halmaz majdnem biztosan (m.b.) teljesen széteső.

A fraktál perkolációs halmaz egy másik jól ismert tulajdonsága, hogy feltéve, hogy nem üres, az  $E_\infty$  halmaz Hausdorff dimenziója m.b. konstans [34]:

$$\dim_{\text{H}} E = \frac{\log \sum_{i,j=0}^{M-1} p_{i,j}}{\log M}. \quad (1.11)$$

A determinisztikus önhasznó halmazokhoz hasonlóan ezen az  $E$  halmazon is definiálhatunk  $\mu$  természetes mértéket (feltéve, hogy  $E \neq \emptyset$ ), mint a következő gyenge limeszt:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_2|_{E_n}}{\mathcal{L}_2(E_n)},$$

ahol  $\mathcal{L}_2$  a 2-dimenziós Lebesgue mérték. Mauldin és Williams [31] alapján tudjuk, hogy a fenti limesz létezik.

Megjegyezzük, hogy minden a fraktál perkolációval, és az azon értelmezett természetes mértékkel kapcsolatos fogalom minden nehézség nélkül kiterjeszthető a síkról magasabb dimenziókba úgy, hogy ott az egység kockából indul ki a definíció.

Szeparációs feltevések hiányában az önhasznó halmazok geometriája rendkívül összetett lehet. Ilyen esetekben sokszor kihívást jelentő lenne valamit mondani a dimenziójáról, vagy geometriájáról egy adott ilyen halmaznak. E helyett ilyen halmazok paraméteres családjait vizsgáljuk, melyek a paraméter értékétől szabályosan függenek és olyan állításokat teszünk, melyek egy tipikus ilyen halmazra, vagy mértékre teljesülnek, ahol tipikus alatt mérték, vagy topológiai értelemben tipikusát értünk.

Legyen

$$\mathcal{F}_\alpha := \left\{ \varphi_i^\alpha(x) := r_{\alpha,i} \cdot x + t_i^{(\alpha)} \right\}_{i=1}^m, \quad \alpha \in A, \quad (1.12)$$

önhasznó IFR-ek egy egyparaméteres családját  $\mathbb{R}$  felett, és legyen  $\mu$  mérték a  $\Sigma := \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$  szimbolikus tér felett. Az előre tolt mértékek családját  $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ -val, míg az önhasznó mértékekét  $\{\nu_{\alpha, \mathbf{w}}\}_\alpha$ -val jelöljük adott  $\mathbf{w}$  valószínűségi vektor esetén.

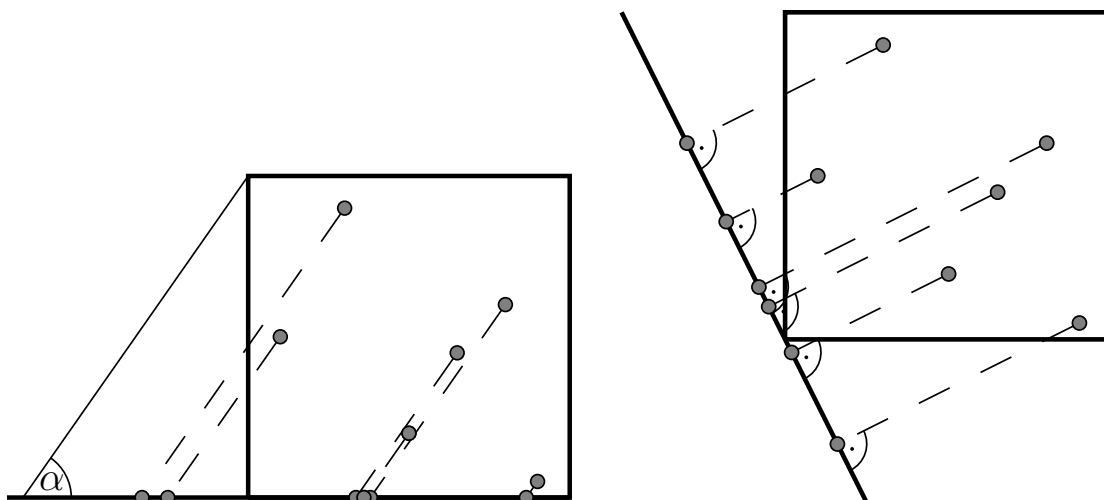
A leghétköznapibb példák erre adott önhasznó halmaz, vagy mérték lineáris vetületeinek a családját.

**1.4. Definíció.** Adott  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . A következő lineáris vetületeket fogjuk vizsgálni: (lásd 4-es ábra):

- Legyen  $\Pi_\alpha$  az  $\mathbb{R}^2$ -ből a  $\Delta$ -val jelölt  $x$  tengelyre menő lineáris vetület  $\alpha$  szögben, azaz párhuzamosan az  $(1, \tan \alpha)$  vektorral. Néha  $\Delta$ -t  $\mathbb{R}$ -rel azonosítjuk.
- Vizsgáljuk továbbá a  $\text{proj}_\alpha$  origán átmenő egyenesekre való merőleges vetületeket, melyek az  $x$  tengellyel  $\alpha$  szöget zárnak be.

Megjegyezzük, hogy a [35] cikkben a  $\Pi_\alpha$  vetületet kicsit másként definiálják a szerzők, hiszen ott a  $K$  egység négyzet átlójára vetítünk. Mi itt más definíciót használunk, mivel ezt könnyebben lehet magas dimenzióra általánosítani.

Mind a  $\Pi_\alpha$  miond pedig a  $\text{proj}_\alpha$  képe egy síkbeli önhasznó halmaznak vagy mértéknek melyet forgatások nélkül definiálunk önhasznó lesz az egyenesen azonos összehúzási arányokkal, így egy  $\alpha$ -val paraméterezett családot kapunk.



4. ábra.  $\Pi_\alpha$  (balra) és  $\text{proj}_\alpha$  (jobbra) vetületek.

## 1.2. Problémák, fő eredmények

Ebben a fejezetben összegezzük, hogy mivel járultunk hozzá az önhasonló halmazok és mértékek megértéséhez a Simon Károllyal közös három publikációnkkal [39, 40, 38]. Továbbá ismertetünk néhány kapcsolódó eredményt más szerzőktől, melyet világosan elszeparálunk a mi eredményeinktől fejezet címeikkel, melyek úgy végződnek, hogy *Problémák, kapcsolódó irodalom*, illetve *A mi eredményeink*.

### 1.2.1. Mandelbrot perkolációs halmazok vetületei: Problémák, kapcsolódó irodalom

Természetes azt várnunk, hogy ha egy 1-nél nagyobb Hausdorff dimenziós halmazt vetítünk az egyenesre, akkor a vetületnek nagyoknak kell lennie. Marstrand egy klasszikus, alapvető tétele [29] megerősíti ezt a várakozást Lebesgue tipikus irányban vett vetületekre. Az 1-dimenziós Lebesgue mértéket jelöljük  $\mathcal{L}$ -lel.

**1.5. Tétel** (Marstrand [29]). *Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  Borel halmaz. Ekkor*

- (i) *ha  $\dim_{\text{H}} A \leq 1$ , akkor  $\dim_{\text{H}}(\text{proj}_\alpha A) = \dim_{\text{H}} A$   $\mathcal{L}$  majdnem minden  $\alpha$ -ra;*
- (ii) *vagy, ha  $\dim_{\text{H}} A > 1$ , akkor  $\mathcal{L}(\text{proj}_\alpha A) > 0$   $\mathcal{L}$  majdnem minden  $\alpha$ -ra.*

Később Mattila [30] kiterjesztette Marstrand [29] eredményeit  $\mathbb{R}^d$ -ből  $\mathbb{R}^k$ -ba menő vetületekre, ahol  $1 \leq k \leq d - 1$ . Az utóbbi évtizedekben sok tanulmány foglalkozik *fraktál halmazok* vetületeivel, vagy kiegészítve, vagy erősítve Marstrand eredményeit speciális esetekben. [14] összefoglalja ezt a témát. Itt röviden megemlítjük azokat az irányokat, melyekhez a kutatásunk hozzá járult, melyek mindegyike véletlen és determinisztikus önhasonló halmazok és mértékek vetületeivel kapcsolatos.

Tézisemben először az  $E$  fraktál perkolációs halmaz vetületeit vizsgáljuk. Marstrand tétele 1.5 és (1.11) alapján tudjuk, hogy, ha  $E \neq \emptyset$ , akkor m.b.  $\mathcal{L}$  m.m.



$\alpha \in [0, \pi)$  esetén:

(i)  $\dim_{\text{H}} \text{proj}_{\alpha} E = s$ , if  $s \leq 1$ , and

(ii)  $\mathcal{L}(\text{proj}_{\alpha} E) > 0$  if  $s > 1$ ,

ahol  $s = \frac{\log \sum_{i,j=0}^{M-1} p_{i,j}}{\log M}$  az  $E \neq \emptyset$  m.b. Hausdorff dimenziója. Azaz Lebesgue mérték és Hausdorff dimenzió szempontjából a tipikus vetületei  $E$ -nek olyanok, mint azt várnánk. Adott  $\alpha$ -ra viszont ebből a tételből nem vonhatunk le semmilyen következtetést. Az első munka, ami rögzített  $\alpha$  iránnyal foglalkozik Falconer és Grimmett cikke [16, 17]. Ők  $d$ -ből  $k$  dimenzióba menő merőleges vetületekkel foglalkoznak, de az egyszerűség kedvéért mi csak a síkban mondjuk ki fő eredményüket.

**1.6. Tétel** (Falconer and Grimmett [16]). *Tegyük fel, hogy bármely  $i \in \{0, \dots, M - 1\}$ -re*

$$\sum_{j=0}^{M-1} p_{i,j} > 1.$$

*Ekkor m.b., ha  $E \neq \emptyset$ , akkor  $\text{proj}_0 E$  tartalmaz belső pontot.*

*Másfelől, ha valamely  $i \in \{0, \dots, M - 1\}$ -re*

$$\sum_{j=0}^{M-1} p_{i,j} < 1,$$

*akkor m.b.  $\text{proj}_0 E$  üres.*

Könnyen látható, hogy ha  $p \geq p_c$  (a perkoláció kritikus valószínűségét a 5-dik oldalon találhatjuk meg) akkor m.b. az  $E$  vetületei tartalmaznak belső pontot, feltéve, hogy  $E \neq \emptyset$ . Valóban, legyen  $p^* > 0$  annak a valószínűsége, hogy  $E$  perkolál. A statisztikus önhasonlóság alapján tudjuk, hogy tetszőleges  $n$ -re, bármely  $K_{i_n, j_n}$  kis négyzet ugyan ekkora  $p^*$  valószínűséggel perkolál, feltéve, hogy  $K_{i_n, j_n} \neq \emptyset$ . Ezen felül elszeparált kis négyzeteken történő események függetlenek. Ezért m.b., feltéve  $E \neq \emptyset$ , léteznie kell olyan kis négyzetnek, ami perkolál, és így  $\text{proj}_0 E$  perkolál. Ezzel szemben, ha  $p$  a  $(1/M, p_c)$  intervallumba esik, akkor  $E$  m.b. dimenziója  $> 1$ , de  $E$  teljesen széteső. Mivel  $p_c$  közel van 1-hez, így ez az intervallum nem üres, például tudjuk, hogy  $0.993 > p_c(M = 2) > 0.881$  és  $0.94 > p_c(M = 3) > 0.784$ , lásd Don cikkét [11].

Több mint 20 évre volt szükség, hogy olyan irányokról is tudjunk hasonlót állítani, melyek nem párhuzamosak koordináta tengelyekkel. Rams és Simon [36, 35] bizonyították a meglepő állítást, mi szerint, kevés feltételezés mellett, az  $E$  fraktál perkolációs halmaz vetületei esetén nincs kivételes irány Marstrand tételében 1.5, m.b., ha  $E \neq \emptyset$ . Az a tétel a [35] cikkben, mely a 1.5 tétel (ii) pontjához kapcsolódik, egy  $A(\alpha)$ -nak nevezett feltevésen alapszik. A szerzők megmutatják, hogy ez a feltevés minden  $\alpha \in (0, \pi/2)$  esetén fenn áll abban az esetben, amikor a négyzetek megtartási valószínűségei megegyeznek,  $p_{i,j} \equiv p$  és  $p > 1/M$ , azaz a hasonlósági dimenzió  $> 1$ .

**1.7. Tétel** (Rams and Simon [35]). *Tegyük fel, hogy az  $A(\alpha)$  feltétel teljesül minden  $\alpha \in (0, \pi/2)$ -re. Ekkor m.b., minden  $\alpha \in (0, \pi/2)$ -re egyszerre igaz, hogy az  $\text{proj}_\alpha(E)$  merőleges vetületeiknek van belső pontjuk, feltéve, hogy  $E \neq \emptyset$ .*

Megjegyezzük, hogy a [35] cikkben alkalmazott módszerek könnyen lehetővé teszik, hogy az állítást kiterjesszük  $\alpha$ -k egy  $D \subset (0, \pi/2)$  részhalmazára, és így a vetületben lévő belső pontok létezését csak az  $\alpha \in D$  halmazta igazoljuk, és az  $A(\alpha)$  feltételt is csak itt kelljen ellenőriznünk. A lent található 1.10 tételt már így mondjuk ki.

A [35] cikk szerzői mutatnak még olyan nemtriviális inhomogén vaószínűségekkel definiált eseteket, melyben Condition  $A(\alpha)$  teljesül minden  $\alpha \in (0, \pi/2)$ -re. Például, ha  $M = 3$ , akkor még ha a középső négyzetet biztosan el is dobjuk,  $p_{1,1} = 0$ , akkor is, ha minden más  $(i, j)$ -re  $p_{i,j} > 1/2$ , akkor az  $A(\alpha)$  feltevés teljesül minden  $\alpha \in (0, \pi/2)$  esetén, és így m.b. lesz intervallum minden merőleges vetületben. A későbbiekben az  $M = 3$ ,  $p_{1,1} = 0$  és  $p_{i,j} = p > 0$ ,  $(i, j) \neq (1, 1)$  paraméterekkel definiált fraktál perkolációs halmazt véletlen Sierpiński szőnyegnek fogjuk nevezni.

Most pedig ismertetjük, hogy mi mivel járultunk hozzá ennek a területnek a megértéséhez.

### Mandelbrot perkolációs halmazok vetületei: A mi eredményeink

Először egy olyan inhomogén fraktál perkolációs halmazt vizsgálunk, melyre a 1.7 tétel kiterjesztése teljesül  $\alpha$ -k egy  $D$  intervallumára. Ez a halmaz egy Cantor-szerű véletlen szőnyeg, melyet az  $M = 3$  és  $p_{1,j} = 0$ ,  $j = 0, \dots, 2$  és  $p_{i,j} > 1/2$  minden más esetben paraméterekkel definiálunk.

**1.8. Tétel** ([39]). *Vegyük a fenti Cantor-szerű  $E$  szőnyeget. Ekkor az  $A(\alpha)$  feltevés teljesül minden  $\alpha \in (\pi/4, 3\pi/4)$  esetén. Így a 1.7 tétel alapján, m.b., feltéve hogy  $E \neq \emptyset$ , minden egyes  $\text{proj}_\alpha(E)$ ,  $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$  halmaznak van belső pontja. Ezzel szemben  $\text{proj}_0(E)$  nem tartalmazhat belső pontot, hiszen a triadikus Cantor halmaz része.*

Ez a halmaz tehát lényegesen más tulajdonságokat mutat, mint a homogén fraktál perkolációs halmaz. A homogén esetben m.b. teljesen széteső a halmaz, ha a hasonlósági dimenziója  $< 1$ , vagy ha  $> 1$  és a halmaz nem üres, akkor pedig *minden* irányú vetülete tartalmaz intervallumot. Ezzel szemben a fenti Cantor-szerű véletlen szőnyegnek van egy ivételes iránya a vetület belüli intervallumok létezésének szempontjából, de ezzel együtt van  $\alpha$  irányoknak egy intervalluma is, melyekre a vetület tartalmaz belső pontot.

Most pedig mutatunk egy másik példát is, melynek több kivételes iránya is van, azaz olyan fraktál perkolációs halmazt, melyre  $\dim_{\mathbb{H}} > 1$ , de m.b. a  $\text{proj}_\alpha$  vetületeke nem tartalmaznak belső pontot bizonyos  $\alpha$  irányokra.

**1.9. Tétel** ([39]). *Tekintsünk  $E_\varepsilon$  véletlen Sierpiński szőnyeget, melyeket  $M = 3$ ,  $p_{1,1} = 0$  és  $p_{i,j} = 3/8 + \varepsilon$  minden más esetben  $(i, j)$  paraméterekkel konstruálunk, ahol  $\varepsilon > 0$ . Ekkor  $\dim_{\mathbb{H}} E_\varepsilon > 1$  m.b., ha  $E_\varepsilon \neq \emptyset$ . Ekkor bármely olyan  $\alpha \in (0, \pi/2)$ -re, melyre  $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$  van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy m.b.  $\text{proj}_\alpha E_\varepsilon$  nem tartalmaz belső pontot.*

Következésképpen, tetszőleges  $n$  természetes szám esetén van olyan  $\varepsilon > 0$  és  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  különböző irányok, hogy ha  $p_{i,j} = 3/8 + \varepsilon$  a középső négyzet kivételével, akkor ezen irányok mindegyike kivételes, de a halmaz dimenziója  $> 1$ .

Végül kiterjesztjük a [35] cikk eredményeit a magas dimenziós esetekre, így például  $\mathbb{R}^d$ -ből  $\mathbb{R}^k$ -ba menő merőleges vetületekre, ahol  $1 \leq k \leq d - 1$ . Ezeket a vetületeket most is  $\text{proj}_\alpha$ -val jelöljük, de most az  $\alpha$  paraméter már nem egy szöget jelöl. A  $\text{proj}_\alpha$  vetítések  $S_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ -be képeznek. A 1.7 tételhez hasonlóan az A feltétel egy magas dimenziós analógiáját tesszük fel, melyről megmutatjuk, hogy teljesül a homogén esetben minimális feltevések mellett, és bizonyos inhomogén esetekben is.

**1.10. Tétel.** [38] *Rögzítsük a  $d \geq 2$  és  $1 \leq k < d$  paramétereket, és tegyük fel, hogy az  $A(\alpha)$  feltétel teljesül minden  $\alpha \in D$ -re, ahol  $D$  az  $\alpha$ -k egy olyan halmaza, hogy  $S_\alpha$  nem koordináta sík. Ekkor E majdnem minden nem üres realizációja esetén, minden  $\alpha$  merőleges vetületre egyszerre igaz, hogy  $\text{proj}_\alpha(E)$  tartalmaz belső pontot (az  $\mathbb{R}^k$ -beli topológiai szerint).*

### 1.2.2. Átfedő cylinder halmazok: Problémák, kapcsolódó irodalom

A véletlen vagy determinisztikus önhasonló halmazok vetületeinek tanulmányozása során komoly kihívást jelenthet az *átfedések* struktúrája, azaz, hogy hogyan fednek át a cylinder halmazok. Az egyenesekre vett  $\text{proj}_\alpha S$  vetületei az  $S$  önhasonló halmazoknak minden esetben átfedéseket tartalmaznak, ha  $\dim_{\mathbb{H}} S > 1$ . Egyes esetekben annyira jelentősek ezek az átfedések, hogy a Hausdorff dimenzió esik, azaz  $\dim_{\mathbb{H}}(\text{proj}_\alpha S) < \dim_{\mathbb{H}} S \leq 1$ , vagy  $\dim_{\mathbb{H}}(\text{proj}_\alpha S) < 1$  annak ellenére, hogy  $\dim_{\mathbb{H}} S > 1$ . Ez történik például a Sierpiński szőnyeg  $\text{proj}_\alpha$  vetületei esetében akkor, ha  $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$  [28]. Így ezek az irányok kivételesek Marstrand tételében 1.5. Egy alapvető kérdése a területnek, hogy milyen az átfedések struktúrája a Marstrand tételében kivételes irányoknál önhasonló halmazok esetében.

Azt mondjuk, hogy egy önhasonló halmaznak *pontos átfedése* van, ha van két különböző véges szó,  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$  és  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_\ell)$ , melyekre

$$\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_k} = \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_\ell}. \quad (1.13)$$

Nyilván való, hogy pontos átfedések okozhatják a dimenzió esését. A következő két kérdés régóta foglalkoztatja a kutatókat (pl. a lenti ' -es kérdést megtalálhatjuk a [33, Question 2.6] cikkben):

**1-es kérdés** Igaz-e, hogy csak úgy fordulhat elő, hogy egy önhasonló mérték az egyenesen kisebb Hausdorff dimenziós, mint 1-nekés az hasonlósági dimenziójának minimuma, ha van pontos átfedése?

**2-es kérdés** Igaz-e egy  $\nu$  egyenesen lévő önhasonló mértékre, melynek a hasonlósági dimenziója szigorúan nagyobb, mint 1, hogy  $\nu$  pontosan akkor szinguláris, ha van pontos átfedése?

A kutatók többsége egyetért, hogy az 1-es kérdésre "igen" a válasz, és bizonyos esetekben ez már igazolt is [22]. Más felől, Nazarov, Peres és Shmerkin egy munkája sugallja, hogy a 2-es kérdésre a válasz feltehetően "nem". Konkrétan a [32] cikk szerzői konstruálnak egy 1-nél nagyobb dimenziós önaffin halmazt, melyre az  $\alpha$  szögű vetületei a halmaz természetes mértékének szingulárisak  $\alpha$  szögek egy sűrű  $G_\delta$  halmazán. Ezek viszont nem önhasonló mértékek.

Magasabb dimenzióban az azonos kérdést nem nehéz megválaszolni, mivel vannak síkbeli önhasonló mértékek, melyek hasonlósági dimenziója  $> 2$ , szingulárisak, és nincs pontos átfedésük (lásd pl. [4]), és egy ilyen példa könnyen kiterjeszthető magasabb dimenzióba, csupán  $[0, 1]^k$ -nal kell a kereszt szorzatát vennünk.

### Átfedő cylinder halmazok: A mi eredményeink

Sikerült megválaszolnunk a 2-es kérdést negatívan, mely disszertációm legerősebb eredménye. Itt csak a legegyszerűbb formájában mondjuk ki a fő eredményt, és később részletesebben is tárgyaljuk ezt az eredményt.

**1.11. Tétel ([40]).** *Tekintsük a  $\text{proj}_\alpha \alpha$  szögű vetületeit az  $S$  Sierpiński szőnyegnek. Legyen  $\nu_\alpha$  a  $\text{proj}_\alpha S$  természetes mértéke. Megjegyezzük, hogy  $\dim_{\mathbb{H}} S > 1$ . Ekkor*

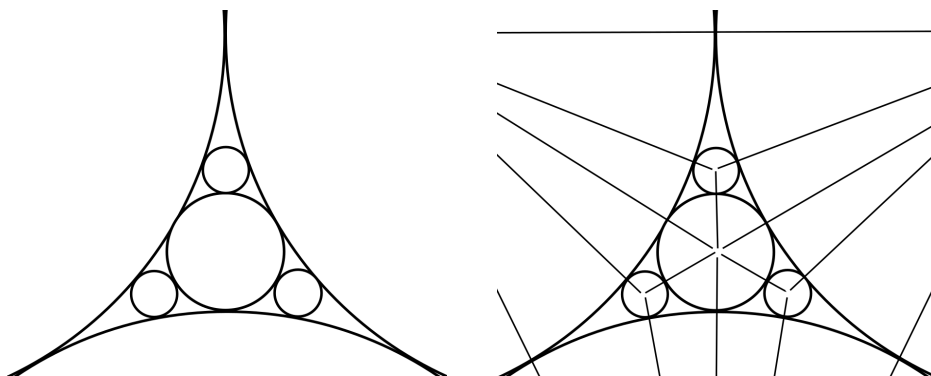
$$\{\alpha \in (0, \pi/2) : \nu_\alpha \perp \mathcal{L}eb\} \text{ egy sűrű } G_\delta \text{ halmaz} \quad (1.14)$$

és

$$\dim_{\mathbb{H}} (\{\alpha \in (0, \pi/2) : \nu_\alpha \not\ll \mathcal{L}eb\}) = 0. \quad (1.15)$$

Megjegyezzük, hogy  $\nu$  önhasonló mértékekre vagy  $\nu \ll \mathcal{L}eb$ , vagy  $\nu \perp \mathcal{L}eb$ . A tétel második fele, (1.15) Shmerkin és Solomyak [37] eredménye egy kis módosítással (az úgynevezett nem-degenerációs feltétel [37, Theorem A]-ban nem teljesül, Tétel 1.11 bizonyításában erről többet is szólunk még). Nyilván való, hogy ebből az is következik, hogy a Sierpiński szőnyeg 1.5 tétel szerinti kivételes irányai nem csak nullmértékűek, hanem 0 Hausdorff dimenziósak is. Ezzel szemben (1.14) azt jelenti, hogy ez a kivételes halmaz topológiai értelemben viszont óriási.

Mint azt már megjegyeztük, (1.14) alapján azt is tudjuk, hogy a 2-es kérdésre "nem" a válasz. Ahhoz, hogy ezt megértsük azt kell tudnunk, hogy azok az  $\alpha$  szögek, melyekre a  $\text{proj}_\alpha S$  önhasonló halmaznak pontos átfedése van legfeljebb megszámlálhatóan sokan lehetnek. Valójában, ha  $S$  a Sierpiński szőnyeg,  $\text{proj}_\alpha S$ -nek csak



5. ábra. Apolloniai kör pakolás pár lépés után, 7 körrel; és a hozzá kapcsolódó apollóniai hálózat 7 csúccsal (körök), ahol az éleket egyenes vonalakkal jelöltük.

abban az esetben lehet pontos átfedése, ha  $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$ . Ezzel szemben egy  $(0, \pi/2)$ -n sűrű  $G_\delta$  halmaz nem megszámlálható, így vannak  $\alpha$  szögek, melyekre  $\nu_\alpha \perp \mathcal{L}$ , de ennek az oka nem pontos átfedés.

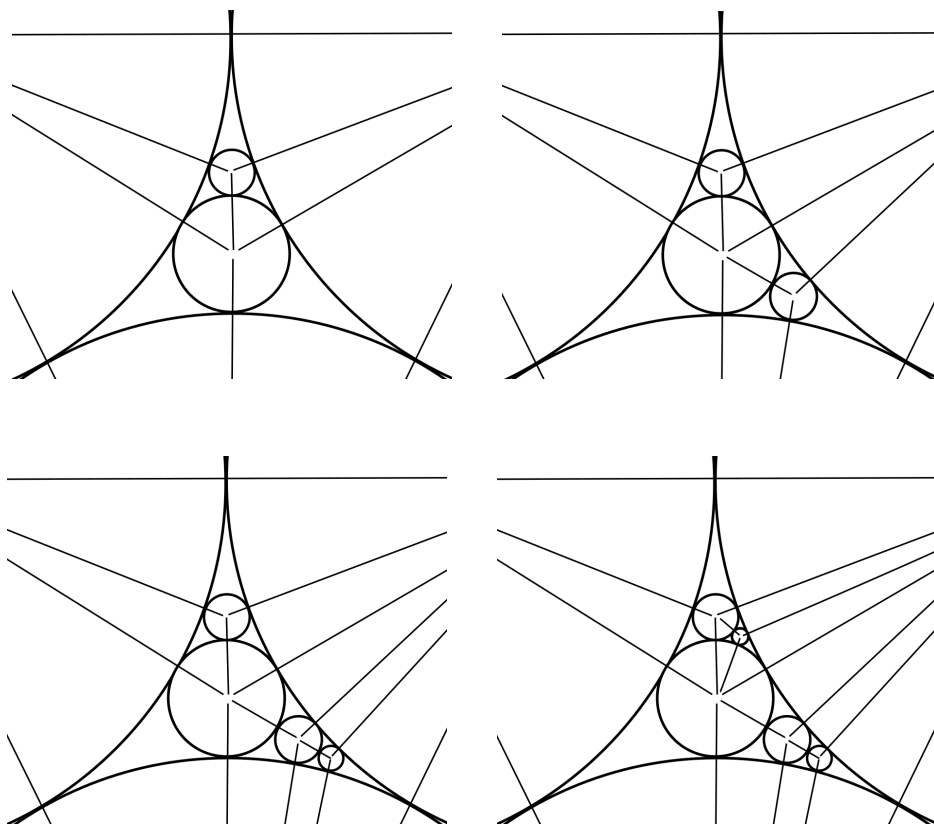
## 2. Véletlen és evolúciós apollóniai hálózatok fokszám-eloszlása

A továbbiakban két véletlenül fejlődő gráf modellt vizsgálunk melyek az apollóniai hálózatok családjába tartoznak. A soron következő eredményeink mindegyike a Kolossváry Istvánnal és Komjáthy Júliával közös [25] cikkben jelent meg.

### 2.1. Jelölések, háttér

A véletlen apollóniai hálózatok konstrukciója az apollóniai kör pakolásból ered: három páronként érintő egyforma méretű körből kiindulva beillesztünk az általuk közrezárt területre egy negyedik, kisebb kört úgy, hogy mindhármat érintse: ezt a negyedik kört belső Soddy körnek hívjuk. Iteratíván, minden így megjelent új közrezárt területre beillesztünk egy kört hasonlóan. Végtelen sok lépés után egy apollóniai szőnyeget kapunk [7, 21].

Egy apollóniai hálózat (AH) az a gráf, melyet a kör pakolásból kapunk, ha a köröket csúcsokkal helyettesítjük, és ezeket akkor kötjük össze egy éllel, ha a kapcsolódó körök érintik egymást, lásd az 5-ös ábrát. Ezt a modelt Andrade és társszerzői [2], illetve Doye és Massen [12] függetlenül vezették be valós hálózatok, mint például az internet, kollaborációs hálózatok, vagy épp fehérje hálózatok modellezésére. Apollóniai hálózatokkal modellezhetünk ilyen hálózatokat, hiszen azok sok fontos jellemvonása megtalálható ezeken a modelleken: hatványrendben lecsengő fokszám-eloszlás, magas klaszterezettségi együttható, rövid távolságok, melyeket együttesen kis világ tulajdonságnak hívunk. Továbbá, a konstrukcióból adódóan az apollóni-



6. ábra. A  $\text{RAN}_2$  gráf első pár lépésének egy realizációja.

ai hálózatok hierarchikusak: ezt a tulajdonságot például szociális hálózatokon is megfigyelhetjük.

Könnynen általánosítható a konstrukció magasabb dimenziókba páronként érintő  $d$ -dimenziós gömbökkel. Hasonlóan, ha a gömbökre csúcsokként tekintünk, melyeket összekötünk, ha a hozzájuk tartozó gömbök érintik egymást, akkor egy  $d$ -dimenziós AH-ot kapunk (lásd [41, 42]).

Az így kapott hálózat determinisztikus. Zhou és társszerzői [45] úgy véletlenítették ezt a konstrukciót, hogy minden lépésben pontosan egy új csúcsot adtak a modellhez, melyet egyenletes eloszlással választanak a lehetőségek közül. Így egy  $d$ -dimenziós véletlen apollóniai hálózatot kapunk (VAH) [43], lásd a 6-os ábrát. Később részletesen is definiáljuk ezt a hálózatot. Heurisztikus, vagy percíz érvelések mentén a [1, 9, 10, 13, 20, 43, 45] cikkek megmutatják, hogy a VAH-ok teljesítik a korábban említett tulajdonságait a valós hálózatoknak.

Egy más módon véletlenített verzióját is megismerhetjük AH-oknak Zhang és társszerzői [44] cikkében, melyet evolúciós apollóniai hálózatoknak (EAH) nevezünk, ahol minden lépésben minden egyes közrezárt területre beilleszthetünk egy új csúcsot egymástól és mindentől függetlenül  $q$  valószínűséggel. Ha egy lépésben egy helyre nem került új csúcs, akkor később még lehetséges oda csúcsot helyezni. A  $q$  paramétert *elfoglalási paraméternek* hívjuk. A  $q = 1$  esetben a determinisztikus AH modellt kapjuk. A [44] cikkben megfogalmazzák azt a sejtést, hogy ha az

EAH modell  $q$  paraméterére  $q \rightarrow 0$ , akkor a VAH-hoz hasonló modellt kell kapnunk. Ahhoz, hogy ezt belássuk, a helyett, hogy EAH-ok egy sorozatát vennénk csökkenő paraméterrel, inkább egy EAH viselkedését kutatjuk úgy, hogy az egyes lépésekben megengedjük, hogy a paraméter változzon. Azaz,  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  elfoglalási paraméterek egy sorozatát vesszük úgy, hogy az  $n$ -edik lépésben a  $q_n$  paramétert használjuk, és feltesszük, hogy  $q_n$  0-hoz tart. Most az érdekes kérdés az, hogy mi  $q_n$ -nek az a csökkenési üteme, amivel az EAH a VAH-hoz tart valamilyen értelemben.

A hátra levő részben pontosan definiáljuk a VAH és EAH gráfokat és bevezetünk néhány további jelölést, hogy kimondhassuk ennek a résznek a fő eredményeit.

### Véletlen apollóniai hálózatok

A  $\text{RAN}_d(n)$   $d$ -dimenziós véletlen apollóniai hálózatokat a következőképpen konstruáljuk. Az  $n = 0$  lépéskor a gráf  $d + 2$  csúcsú,  $\mathbb{R}^d$ -be beágyazott úgy, hogy  $d + 1$  közülük egy  $d$ -dimenziós szimplexet alkot, és a  $(d + 2)$ -dik csúcs a szimplex belsejében helyezkedik el, melyet összekötünk a szimplex összes csúcsával. Ez a csúcs így  $d + 1$  darab új  $d$ -szimplexet formál a korábbi csúcsokkal: kezdetben ezeket a szimplexeket ‘aktív’ státuszúnak, *aktív klikkeknek* hívjuk. Az  $n \geq 1$ -edik lépésben *egyenletes eloszlással* választunk egy  $C_n$  klikket  $\text{RAN}_d(n - 1)$  aktív klikkjei közül,  $C_n$  belsejébe egy új  $v_n$  csúcsot illesztünk  $v_n$ -t összekötjük  $C_n$  minden csúcsával. Az új  $v_n$  csúcs  $C_n$  bármely  $d$  csúcsával egy új simplexet formál. Ez után  $C_n$  státuszát ‘inaktívrá’ változtatjuk, és az új  $d$ -szimplexek pedig ‘aktívak’ lesznek. Így kapjuk a  $\text{RAN}_d(n)$  gráfot. Könnyen látható, hogy az  $n$ -edik lépésben a  $\text{RAN}_d(n)$  gráfnak  $n + d + 2$  csúcsa és  $nd + d + 1$  aktív klikkje van.

### Evolúciós apollóniai hálózatok

Ha adott egy  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $0 \leq q_n \leq 1$  sorozata elfoglalási paramétereknek, akkor egy  $\text{EAN}_d(n, \{q_n\}) = \text{EAN}_d(n)$   $d$ -dimenziós evolúciós apollóniai hálózatot a következőképpen definiálunk, iteratívan. Ugyan abból a gráfból indulunk ki, mint  $\text{RAN}_d(0)$  esetében, és ugyan úgy  $d + 1$  klikkünk van. Az  $n \geq 1$ -edik lépésben  $\text{EAN}_d(n - 1)$  minden egyes aktív klikkjét egymástól és mindentől függetlenül  $q_n$  valószínűséggel választunk ki. A kiválasztott  $C_n$  aktív klikkek mindegyike inaktív lesz (de a ki nem választottak aktívak maradnak) és minden  $C \in \mathcal{C}_n$  klikkre beillesztünk egy új  $v_n(C)$  csúcsot  $C$  belsejébe, melyet  $C$  minden csúcsával összekötünk. Egy ilyen új  $v_n(C)$  csúcs minden  $C$ -ből választott csúcs  $d$ -essel összesen  $d + 1$  új klikket alkot: ezek az új klikkek minden  $C \in \mathcal{C}_n$ -re aktívak lesznek. Így kapjuk a  $\text{EAN}_d(n)$  gráfot. A  $q_n \equiv q$  esetet vizsgálták a [44] cikkben, ahol megfogalmazzák a szerzők azt a sejtést is, hogy  $q \rightarrow 0$  esetén a gráf hasonló kell legyen  $\text{RAN}_d(n)$ -hez. Igazoljuk a sejtésüket olyan értelemben, hogy az EAH gráfok fokszámeloszlása ugyan olyan hatvány rendben cseng le, mint a VAH-oké abban az esetben, ha  $q_n \rightarrow 0$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$ .

2.1. *Megjegyzés.* Megjegyezzük, hogy mind a VAH, mind pedig az EAH modellek esetében van egy 1-1 értelmű megfeleltetés a gráf klikkjei és csúcsai/jövő beli csúcsai között: egy  $v$  csúcs párba állítható azzal a  $C$  klikkkel, amely inaktív lett akkor maikor a  $v$  csúcsot a  $C$  klikk belsejébe helyeztük. Ilyen értelemben nevezhetjük a lehelyezett csúcsokat *inaktív csúcsoknak*, és az aktív klikkekre *aktív csúcsokként is hivatkozunk*: azaz ezek a csúcsok még nincsenek jelen a gráfban, de a következő lépésben oda kerülhetnek.

## További jelölések

Ahhoz, hogy a VAH és EAH modellek fokszámoszlásával kapcsolatos eredményeinket kimondhasuk bevezetünk néhány további jelölést.

$D_v(n)$ -nel jelöljük a  $v$  csúcs fokát az  $n$ -edik lépés után. Továbbá  $\tilde{N}_k(n)$  és  $\tilde{p}_k(n)$  jelöli a  $k$  fokú csúcsok számát és tapasztalati hányadát  $n$ -kor a  $\text{VAH}_d(n)$  gráfban, azaz

$$\tilde{p}_k(n) := \frac{\tilde{N}_k(n)}{n+d+2} := \frac{1}{n+d+2} \sum_{i=1}^{n+d+2} \mathbb{1}\{D_i(n) = k\}. \quad (2.1)$$

Hasonlóan a  $\text{EAN}_d(n, \{q_n\})$  gráf esetén  $N_k(n)$  és  $p_k(n)$  legyen

$$p_k(n) := \frac{N_k(n)}{N(n)} = \frac{1}{N(n)} \sum_{i \in V(n)} \mathbb{1}\{D_i(n) = k\}, \quad (2.2)$$

ahol  $V(n)$  a csúcsok halmaza  $n$  lépés után és  $N(n) = |V(n)|$ .

Az  $\mathcal{E}_n$  események sorozata *nagy valószínűséggel* történik, ha  $\lim_n \mathbb{P}(\mathcal{E}_n) = 1$ . Ugyen azt szokták úgy is mondani, hogy ‘asszimptotikusan majdnem biztosan’ (amb). Továbbá, egy  $A$  eseményre  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára vett feltételes valószínűségére fenn áll a  $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}]$  egyenlőség, ahol  $\mathbb{1}_A$  az  $A$  esemény indikátora, ami 1-et vesz fel, ha  $A$  teljesül, egyébként 0-t. Néha  $\mathcal{F}$  helyett valószínűségi változók egy listáját írjuk, ekkor nem írjuk ki a  $\sigma$ -algebra lejlését, de ebben az esetben is a valószínűségi változók által generált  $\sigma$ -algebrára feltételezünk.

## 2.2. Eredményeink

A most következő eredmények a [25] cikkünkéből vannak.

### 2.2.1. Degree distribution

Első tételünkben a  $\text{VAH}_d(n)$  gráfok  $\tilde{p}_k(n)$  empirikus fokszámoszlására látjuk be, hogy egy determinisztikus, hatványrendben lecsengő eloszláshoz tartanak az  $\ell_\infty$  mértékben:



**2.2. Tétel** (VAH-ok fokszám eloszlása). Minden  $d \geq 2$  esetén létezik egy  $\{p_k\}_{k=d+1}^\infty$  valószínűségi változó és egy  $c$  konstans, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_k |\tilde{p}_k(n) - p_k| \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}} \right) = 0.$$

Továbbá  $p_k$  hatványrendben cseng le  $(2d-1)/(d-1) \in (2, 3]$  exponenssel, pontosabban

$$p_k = \frac{d}{2d+1} \frac{\Gamma(k-d+\frac{2}{d-1})}{\Gamma(1+\frac{2}{d-1})} \frac{\Gamma(2+\frac{d+2}{d-1})}{\Gamma(k+1-d+\frac{d+2}{d-1})} = C(d)k^{-\frac{2d-1}{d-1}}(1+o_k(1)), \quad (2.3)$$

ahol  $o_k(1)$  nullához tart amint  $k \rightarrow \infty$ ,  $C(d)$  csak  $d$ -től függő konstans, és  $\Gamma(x)$  a Gamma függvény.

**2.3. Megjegyzés.** Fent  $p_k$  aszimptotikus viselkedésének meghatározásához használtuk, hogy  $\Gamma(t+a)/\Gamma(t) = t^a(1+o(1))$ .

Ahhoz, hogy  $\text{EAN}_d(n, \{q_n\})$  aszimptotikus fokszámeloszlását meghatározzuk fel kell még tennünk a következőt  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -ről.

**2.4. Feltevés.** Tegyük fel, hogy  $q_n \rightarrow 0$  és  $\sum_{i=1}^\infty q_n \rightarrow \infty$ . Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan  $c_1, C_1$  csak  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ -től függő konstansok, melyekre

$$c_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n q_i^2 \prod_{j=1}^i (1+dq_j)}{q_n \prod_{j=1}^n (1+dq_j)} \leq C_1, \quad (2.4)$$

és bármely  $\varepsilon > 0$ -ra,

$$\sum_{n=1}^\infty \exp \left\{ -\varepsilon q_n e^{d \sum_{j=0}^n q_j} \right\} < \infty. \quad (2.5)$$

**2.5. Tétel** (EAH-ok fokszámeloszlása). Legyen  $d \geq 2$  és  $\{q_n\}_{n=0}^\infty$  olyan melyre a 2.4-es feltevés teljesül. Ekkor az aszimptotikus empirikus fokszámeloszlás ugyan ahhoz a  $\{p_k\}_{k=d+1}^\infty$ -hoz tart, mint  $\text{VAH}_d(n)$  esetében, lásd (2.3). Pontosabban, létezik  $C_0 > 0$  konstans és egy  $\eta < \infty$  valószínűségi változó, hogy bármely  $k \in \mathbb{N}$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_{i < k} |p_i(n) - p_i| \geq C_0 k! \eta^k q_n \right) = 0.$$

Így például  $i < k = k(n)$ -re a fokszámeloszlás pontonként konvergál bármely  $k(n)$ -re, melyre  $C_0 k! \eta^k q_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .

A következő lemmában meghatározzuk olyan  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatokat, melyre a 2.4-es feltevés teljesül.

**2.6. Lemma** (Szabályosan változó sorozatok). Legyen  $L(x)$  végtelenben lassan változó függvény, azaz bármely  $c > 0$ -ra  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(cx)/L(x) = 1$ . Ekkor a 2.4-es feltevés teljesül a következő esetekben:

1.  $q_n = L(n)/n^\alpha$  valamely  $\alpha \in (0, 1)$ -re,

2.  $q_n = (b + o(n^{-\delta}))/n$ , ahol  $b > 1/d$  és  $\delta > 0$ .

2.7. *Megjegyzés.* Nyilván a 2.6-as lemma (2)-es pontja nem határoz meg minden olyan szabályosan változó függvényt, melyre  $\alpha = 1$  és a 2.4-es feltevés fenn áll: látható, hogy pl. a  $q_n = b + b'/\log n$  esetben is teljesül, ahol  $b > 1/d$  és  $b' \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Más felől más esetek, ahol  $q_n = L(n)/n$  és  $L(n) \rightarrow \infty$  nem teljesítik a feltételt, pl.  $q_n = b/(n \log n)$  nem teljesíti (2.4)-et.

Most pedig a VAH és EAH hálózatok klaszterezettségét határozzuk meg.

### 2.2.2. Klaszterezettségi együttható

Egy csúcs klaszterezettségi együtthatója a szomszédai között létesített élek aránya a közöttük létesíthető összes élhez képest. Mi a teljes gráf klaszterezettségét vizsgáljuk, ami a csúcsok klaszterezettségének átlaga. Ezek a  $p_k$  fokszámeloszlásra vonatkozó eredmények közvetlen következményei, így következményként mondjuk ki ezeket. Ez a következmény hasonló [43, 4.2-es fejezet] eredményéhez, de most a fokszámeloszlás ismeretében ez már egy bizonyítás. Először vegyük észre, hogy egy  $k$ -adfokú csúcs fokszámeloszlása nem függ a véletlentől és a VAH és EAH gráfok esetében is a következővel egyenlő:

$$\frac{d(2k - d - 1)}{k(k - 1)} \sim \frac{2d}{k}.$$

Ennek az oka, hogy amikor egy  $v$  csúcs foka nő eggyel, mert egy új  $w$  csúcsot kötöttünk be hozzá, akkor a  $v$  és szomszédai közötti élek száma pontosan  $d$ -vel nő, hiszen  $w$ -t  $d$  másik csúcshoz kötjük be, melyek mindegyike szomszédja  $v$ -nek is. A [43] cikk szerzői szimulációkkal és heurisztikus érvelés mentén állították korábban, hogy a klaszterezettségi együttható egy pozitív konstanshoz kell tartson. A most következő következményben pontosan meghatározzuk ezt a konstans mindkét modell esetében:

**2.8. Következmény** (Clustering coefficient). *A  $\text{RAN}_d(n)$  gráf átlagos klaszterezettségi együtthatója egy pozitív számhoz konvergál midőn  $n \rightarrow \infty$ , melyet a következő formula határoz meg:*

$$\begin{aligned} Cl_d &:= \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{d(2k - d - 1)}{k(k - 1)} p_k \\ &= \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{d(2k - d - 1)}{k(k - 1)} \cdot \frac{d}{2d + 1} \frac{\Gamma(k - d + \frac{2}{d-1})}{\Gamma(1 + \frac{2}{d-1})} \frac{\Gamma(1 + \frac{2d+1}{d-1})}{\Gamma(k - d + \frac{2d+1}{d-1})}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Továbbá, az  $\text{EAN}_d(n, \{q_n\})$  modell klaszterezettségi együtthatója is ugyan ehhez a számhoz konvergál, ha  $q_n \rightarrow 0$  és  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q_n = \infty$ .

### 2.3. Kapcsolódó irodalom

Számos apollóniai hálózatokkal kapcsolatos eredmény ismert. Könnyen látható, hogy ha egy csúcson  $k$  aktív klikkje van, akkor annak a vószínűsége, hogy az a csúcson nő eggyel egy adott lépésben  $k$ -val arányos: így ezek a modellek a *Preferential attachment* modellek családjába tartoznak [3, 5, 6]. Így néhány klasszikus ide kapcsolódó eredmény használható ezeknél a modelleknél is.

Zhang és társszerzői [43] heurisztikus érvelések mentén meghatározzák, hogy a hatvány lecsengés exponense  $\frac{2d-1}{d-1} \in (2, 3]$  kell legyen, melyet szimulációkkal is alátámasztanak. A [25] cikk írása közben tudtuk meg, hogy Frieze and Tsourakakis [20] is most vezették le a VAH gráfok aszimptotikus fokszámeloszlását. Habár a munkánk független az övéktől, a használt módszerek hasonlóak: ez annak köszönhető, hogy ők is az irodalomban fellelhető módszereket [6, 23] módosították a jelen probléma megoldására. Azért, hogy ne ismételjük meg az ő bizonyításukat az egyező részeket csak vázlatosan mondjuk el, míg más részek, mint pl. az EAH-ok fokszámeloszlása teljesen új eredmények.

A [25] cikkünkben teljesen új, hogy az EAH modelleket precízen vizsgáljuk. Az EAH gráfok fokszámaára vonatkozóan csak heurisztikus érvelések voltak ismertek korábban. Zhang, Rong és Zhou [44] vizsgálták a  $EAN_d(n)$  gráfok sorozatát rögzített  $q$  paraméter mellett. Levezették az aszimptotikus fokszámeloszlás exponensét heurisztikus érvelések mentén, melyet szimulációkkal is alátámasztottak. Továbbá feltételezik, hogy a  $q \rightarrow 0$  esetben a  $EAN_d(n)$  modell feltehetően a  $RAN_d(n)$ -hez tart valamilyen értelemben. Mi ezt megerősítjük úgy, hogy levezetjük a  $EAN_d(n, \{q_n\})$  gráf aszimptotikus fokszámeloszlását, ahol  $q_n \rightarrow 0$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$ , és ez a fokszámeloszlás megegyezik a VAH gráféval. Ez által analitikusan is bizonyítjuk amit Zhang és társszerzői korábban megsejtettek.

### 3. Hivatkozások

- [1] Marie Albenque and Jean-Francois Marckert. Some families of increasing planar maps. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 56, 1624–1671, 2008.
- [2] José S. Andrade, Hans J. Herrmann, Roberto F. S. Andrade, and Luciano R. da Silva. Apollonian Networks: Simultaneously Scale-Free, Small World, Euclidean, Space Filling, and with Matching Graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 94:018702, 2005.
- [3] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.

- [4] Balázs Bárány, Michał Rams, and Károly Simon. Dimension theory of some non-markovian repellers part I: A gentle introduction.
- [5] B. Bollobás and O. Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, 24:5–34, 2004.
- [6] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, and G. Tusnády. The degree sequence of a scalefree random graph process. *Random Structures and Algorithms*, 18:279–290, 2001.
- [7] D.W. Boyd. The Sequence of Radii of the Apollonian Packing. *Mathematics of Computation*, 19:249 – 254, 1982.
- [8] J. T. Chayes, L. Chayes, and R. Durrett. Connectivity properties of mandelbrot’s percolation process. *Probab. Theory Related Fields*, 77:307–324, 1988.
- [9] C. Cooper, A. Frieze, and R. Uehara. The height of random  $k$ -trees and related branching processes. *Random Struct. Alg.*, 45:675–702, 2014.
- [10] A. Darrasse and M. Soria. Degree distribution of RAN structures and Boltzmann generation fo trees. In *Conference on Analysis of Algorithms, AofA 07, DMTCS Proceedings*, pages 1–14, 2007.
- [11] H. Don. New methods to bound the critical probability in fractal percolation. *Random Structures & Algorithms*, 47:710–730, 2015.
- [12] J.P.K Doye and C.P Massen. Self-similar disk packings as model spatial scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 71:016128, 2005.
- [13] E. Ebrahimzadeh, L. Farczadi, P. Gao, A. Mehrabian, C. M. Sato, N. Wormald, and J. Zung. On the Longest Paths and the Diameter in Random Apollonian Networks. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 43:355–365, 2013.
- [14] K. Falconer, J. Fraser, and X. Jin. Sixty years of fractal projections. *Fractal Geometry and Stochastics V. Progress in Probability, Birkhäuser, Cham*, 70, 2015.
- [15] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1985.
- [16] K. J. Falconer and G. R. Grimmett. On the geometry of random cantor sets and fractal percolation. *J. Theoret. Probab.*, 5:465–485, 1992.
- [17] K. J. Falconer and G. R. Grimmett. On the geometry of random cantor sets and fractal percolation. correction. *J. Theoret. Probab.*, 7:209–210, 1994.

- [18] Kenneth Falconer. *Fractal geometry - mathematical foundations and applications*. Wiley, 1990.
- [19] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.
- [20] Alan Frieze and Charalampos E. Tsourakakis. On certain properties of random Apollonian networks. In *Proceedings of the 9th international conference on Algorithms and Models for the Web Graph, WAW'12*, pages 93–112. Springer-Verlag, 2012.
- [21] Ronald L. Graham, Jeffrey C. Lagarias, Colin L. Mallows, Allan R. Wilks, and Catherine H. Yan. Apollonian circle packings: number theory. *Journal of Number Theory*, 100(1):1 – 45, 2003.
- [22] Michael Hochman. On self-similar sets with overlaps and inverse theorems for entropy. *Ann. of Math. (2)*, 180(2):773–822, 2014.
- [23] Remco van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*. 2014.
- [24] John E. Hutchinson. Fractals and self similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [25] István Kolossváry, Júlia Komjáthy, and Lajos Vágó. Degrees and distances in random and evolving apollonian networks. *Advances in Applied Probability*, 48(3):865–902, 2016.
- [26] Benoit B. Mandelbrot. *Fractals*. Freeman San Francisco, 1977.
- [27] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, CA, 1982.
- [28] Anthony Manning and Károly Simon. Dimension of slices through the sierpinski carpet. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(1):213–250, 2013.
- [29] J. M. Marstrand. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 4:257–302, 1954.
- [30] P. Mattila. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A Math.*, 1:227–244, 1975.
- [31] R. Daniel Mauldin and S. C. Williams. On the hausdorff dimension of some graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 298(2):793–803, 1986.

- [32] Fedor Nazarov, Yuval Peres, and Pablo Shmerkin. Convolutions of cantor measures without resonance. *Israel Journal of Mathematics*, 187(1):93–116, 2012.
- [33] Yuval Peres and Boris Solomyak. Problems on self-similar sets and self-affine sets: an update. In *Fractal Geometry and Stochastics II*, pages 95–106. Springer, 2000.
- [34] J. Peyrière. Mandelbrot random beadsets and birthprocesses with interaction. *IBM Research Report*, pages RC-7417, 1978.
- [35] M. Rams and K. Simon. Projections of fractal percolations. *Erg. Th. and Dyn. Sys.*, 35:530–545, 2015.
- [36] M. Rams and Károly Simon. The dimension of projections of fractal percolations. *J. Stat. Phys.*, 154:633–655, 2014.
- [37] Pablo Shmerkin and Boris Solomyak. Absolute continuity of self-similar measures, their projections and convolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368:5125–5151, 2015.
- [38] Károly Simon and Lajos Vágó. Projections of mandelbrot percolation in higher dimensions. In Christoph Bandt, Michael Barnsley, Robert Devaney, Kenneth J. Falconer, V. Kannan, and Vinod Kumar P.B., editors, *Fractals, Wavelets, and their Applications*, volume 92, pages 175–190. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2014.
- [39] Károly Simon and Lajos Vágó. Fractal percolations. *Banach Center Publications*, 115:183–196, 2018.
- [40] Károly Simon and Lajos Vágó. Singularity versus exact overlaps for self-similar measures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147(5):1971–1986, 2019.
- [41] Zhongzhi Zhang, Lichao Chen, Shuigeng Zhou, Lujun Fang, Jihong Guan, and Tao Zou. Analytical solution of average path length for Apollonian networks. *Phys. Rev. E*, 77:017102, 2008.
- [42] Zhongzhi Zhang, Francesc Comellas, Guillaume Fertin, and Lili Rong. High-dimensional Apollonian networks. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(8):1811, 2006.
- [43] Zhongzhi Zhang, Lili Rong, and Francesc Comellas. High-dimensional random Apollonian networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 364:610 – 618, 2006.
- [44] Zhongzhi Zhang, Lili Rong, and Shuigeng Zhou. Evolving Apollonian networks with small-world scale-free topologies. *Phys. Rev. E*, 74:046105, 2006.

- [45] Tao Zhou, Gang Yan, and Bing-Hong Wang. Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution. *Phys. Rev. E*, 71:046141, 2005.