



VÁMOS PÉTER

ADAPTÍV MEGSZORÍTÁSOS KÓDOLÁS

című PhD értekezésének tézisei

2013.

Az értekezés eredeti címe: **Adaptive Constrained Coding**
PhD Thesis by Peter Vámos

A teljes értekezés elérhető: alpha.tmit.bme.hu/~vamos/Thesis.pdf

Az angol nyelvű tézisfüzet elérhető: alpha.tmit.bme.hu/~vamos/Leaflet.pdf

A magyar nyelvű tézisfüzet elérhető: alpha.tmit.bme.hu/~vamos/Leaflet.hu.pdf

1. Bevezetés

A digitális hírközlés és a számítástechnika elterjedésével az információ források és nyelők is átalakultak, az információt ma már szinte kizárólag digitálisan kezelik. Ezzel szemben a digitális hírközlés kezdetei óta meglévő ellentmondás, hogy a fizikai csatorna analóg maradt, elsődleges átviteli tulajdonságait analóg jellemzők határozzák meg. Ezen jellemzők közül a frekvencia átviteli függvény a legfontosabb. Ahhoz, hogy az átvitel során jól ki tudjuk használni a csatorna adottságait elengedhetetlen, hogy illesszük az átvinni kívánt digitális jel spektrumát a csatorna tulajdonságaihoz. Ez alapvetően jelformálással, vagy kódolással valósítható meg. Számos alkalmazás során (ilyenek pl. az optikai adatátvitel, vagy a mágneses/optikai jelfrögzítés) ahol nem lehetséges, vagy túlságosan körülményes a jelformálás a moduláló adatfolyam kódolása az egyetlen mód a digitális jel spektrumának befolyásolására [1, 2, 3]. A spektrális követelményeken túl, fontos és gyakori megszorítás még a moduláló jelsorozat futamhosszainak, vagyis az egymást követő azonos szimbólumok számának korlátozása. A futamhossz felső korlátja (k -kötés) a megbízható órajel kinyerést szolgálja, míg az alsó határ előírása (d -kötés) a szimbólum közti áthallást csökkenti [4].

A forráskódból a fenti előírásoknak megfelelő csatornakód kialakítása redundáns bitek hozzáadását igényli. Az átkódolás során alkalmazhatunk fix hosszúságú, állandó redundanciájú blokkokat [5, 1], vagy valamilyen adaptív eljárást, mikor is a kódoló a pillanatnyi csatorna állapotnak megfelelően redundáns biteket iktat a forráskódba, hogy az előírt megszorítások kielégüljenek [10]. Blokk kódot alkalmazva már az egyszerűbb spektrális követelményeknek eleget tevő kódok is csak meglehetősen bonyolult konstrukcióval állíthatók elő [7]. Az adaptív eljárás előnye a csatorna kóddal szemben támasztott követelmények egyszerű implementálhatósága, és ebből fakadóan a kódoló egyszerű felépítése, mely alkalmas többféle megkötés akár egyidejű kielégítésére is. Az eljárás további előnye az általában elérhető jó kódhatékonyság [C5], hátránya viszont, hogy pufferelement igényel és hajlamos a hibaterjedésre.

Értekezésemben egy általam kifejlesztett, új, adaptív kódstruktúrát, egy hurokszűrővel ellátott visszacsatolás vezérelt bitbeszűrős kódolót vizsgálok. Ez a struktúra hatékony spektrumformálást tesz lehetővé, és emellett alkalmas a futamhossz korlátra vonatkozó megkötések egyidejű kielégítésére is. Az egyszerű digitális jelfeldolgozási technikával megvalósítható hurokszűrőnek köszönhetően a kódoló rugalmasan konfigurálható, a hibaterjedés pedig megfelelő szűrő alkalmazásával korlátozható.

2. Alapfogalmak és kutatási célok

2.1. A futó digitális összeg fogalmának általánosítása

A spektrumformáló kódolás egyik leggyakoribb alkalmazási területe a galvanikus csatolásmentes (AC csatolt) csatorna kódolása [15, 2, 16]. Ezen csatornák erős egyenszint elnyomással rendelkeznek, ami a vevőben a jelszint lassú fluktuációját okozhatja. Ahhoz, hogy elkerüljük ezt a jelenséget, a modulált jelnek se szabad kisfrekvenciás komponenseket tartalmaznia, vagyis el kell nyomni az kisfrekvenciás kódkomponenseket. Ezt általában valamilyen töltés korlátozott kód alkalmazásával oldják meg, amelyeknél a futó digitális összeg (running digital sum, RDS), vagyis a halmozott töltés minden időpillanatban korlátos. Az $Y_i \in \{-1, +1\}$, $i = 0, 1, \dots$; and $Y_{i < 0} = 0$ szimbólumokkal jellemzett kódra a futó digitális összeg:

$$C_n = \sum_{i=0}^{\infty} Y_{n-i} \quad \text{és} \quad |C_n| \leq c. \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1)$$

Látható, hogy a futó digitális összeg pillanatnyi értékét, C_n -t egy aluláteresztő szűrő állítja elő:

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} Y(z). \quad (2)$$

Az RDS korlátozása tehát egy aluláteresztő szűrő kimenő szintjének korlátozását jelenti. Így a vonali jel kisfrekvenciás komponensei, melyeket a szűrő kiemel, el lesznek nyomva. Ez a jelenség adja az ötletet, hogy valamilyen más karakterisztikájú szűrőt alkalmazva egy RDS-szerű mennyiség létrehozására, azt korlátozva szintén képes az alkalmazott szűrőnek megfelelő spektrumformálásra. E célból általánosítottam az RDS fogalmát, definiálva a *súlyozott futó digitális összeget* (weighted running digital sum, WRDS) [C3, Th2.1*]:

$$W_n = \sum_{i=0}^{\infty} h_i Y_{n-i} \quad (h_i \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}), \quad \text{vagy} \quad W(z) = H(z) Y(z).$$

Azon kódokat, melyeknél a WRDS limitált *általánosított töltés* vagy *spektrum korlátozott kódnak* neveztem el [C2, Th2.1].

Értekezésemben két ilyen *általánosított töltés korlátozott kód* tulajdonságait vizsgáltam részletesebben. Az elsőnél a súlyozott futó digitális összeget az aluláteresztő $H(z) = \sum_{i=0}^{w-1} z^{-i}$ véges impulzusválaszú (finite pulse response, FIR) szűrővel képeztem:

$$W_n = \sum_{i=0}^{w-1} Y_{n-i}, \quad \text{vagy} \quad W(z) = \frac{1 - z^{-w}}{1 - z} Y(z).$$

Ez egy mozgó ablak mentén korlátozza a töltést:

$$\left| \sum_{i=0}^{w-1} Y_{n-i} \right| \leq c \quad (n = 0, 1, \dots; \quad (w-c) \bmod 2 \equiv 0)$$

* A Th jelű hivatkozások az értekezés adott fejezetére vonatkoznak.

és ezért ezt a fajta megszorítást *ablak-töltés* (window-charge), vagy röviden (w, c) kötésnek neveztem el [Th3.2].

A másik megszorítás esetében a $H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z^{-i}$ ($0 < \alpha < 1$) aluláteresztő karakterisztikájú végtelen impulzusválaszú (infinite pulse response, IIR) szűrőt alkalmaztam:

$$W_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Y_{n-i}, \quad \text{or} \quad W(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} Y(z).$$

Az ennek megfelelő

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Y_{n-i} \right| < c \quad \left(n = 0, 1, \dots; \quad \frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha} < c < \frac{1}{1 - \alpha} \right)$$

megszorítást α -töltés, vagy röviden, (α, c) kötésnek neveztem el [Th4.1].

Mindkét fenti definícióban a súlyozott futó digitális összeget – (1)-gyel ellentétben – véges vagy elhaló memóriájú szűrővel képezzük. Ez lehetővé teszi a töltés (WRDS) függő dekódolást anélkül, hogy végtelen hibaterjedés lépne fel. Ez esetben a töltésállapot maga is információt hordoz, ami javítja a kódhatékonyságot [Th2.1].

2.2. Futamhossz korlátolt csatornák

A *futam* egy csupa azonos szimbólumból álló részsorozat. Egy véges állapotterű folyamathoz mindig hozzárendelhető egy futamhossz-folyamat:

Legyenek t_i -k az Y folyamat átment időpontjai

$$t_i = \min\{j > t_{i-1} | Y_j \neq Y_{j-1}\} \quad \text{és} \quad t_0 = 0.$$

Az egyes futamok hossza a $T_i = t_i - t_{i-1}$ különbségekkel adható meg, magát a $T(Y)$ folyamatot pedig az Y -hoz tartozó *futamhossz-folyamatnak* hívjuk.

Az alkalmazások jelentős részében a futamok hosszát korlátozzák [5, 1]:

- Az alsó határt az u.n. d -kötés szabja meg: $T \geq d+1$, vagyis minden futam legalább $d+1$ szimbólum hosszúságú kell hogy legyen.
- A k -kötés pedig a futamhossz felső korlátját írja elő: $T \leq k+1$, vagyis egy futam se lehet $k+1$ szimbólumnál hosszabb.

A k -kötés a megbízható órajel kinyerést garantálja, míg a d -kötés a szimbólum közti áthallást csökkenti. A fenti megszorításokat előíró csatornákat (d, k) kötött, vagy másnéven *futamhossz korlátolt* (run-length limited, RLL) csatornáknak nevezzük.

A (d, k) kötött csatorna az 7. ábrán látható futamhossz gráffal írható le. A csúcsok címkézései a pillanatnyi futamhosszaknak felelnek meg. Változó szimbólumhosszakat megengedve, mikor is a gráf élei különböző hosszúságú átmeneteket reprezentálhatnak [23, 24], az állapotátmenet diagram egy egycsúcsú gráfra redukálható (8. ábra). Vegyük észre, hogy az azonos

szimbólumhosszú leírás egy elsőrendű egyenletekből álló differenciaegyenlet rendszernek, míg a változó szimbólumhosszú, egyetlen, k -ad rendű differenciaegyenletnek felel meg.

Értekezésem 5. fejezetében általánosítottam a futamhossz korlátolt csatornát, bevezetve a gyengén futamhossz korlátoltság fogalmát fogalmát:

Egy csatornát *gyengén futamhossz korlátoltnak* nevezek, ha a futamhossz alsó vagy felső korlátja nem állandó, hanem a csatorna állapotának függvénye:

$$T_i \geq d(T_1, T_2, \dots, T_{i-1}) + 1 \quad \text{and} \quad T_i \leq k(T_1, T_2, \dots, T_{i-1}) + 1,$$

vagy röviden, $d = d(Y)$ és $k = k(Y)$ [C2, Th5.2].

Minthogy az általánosított töltés-korlát egy digitális szűrőn keresztül szintén a csatorna pillanatnyi állapotának megfelelően szabályozza a csatornára kerülő szimbólumokat, így minden ilyen korlát általánosított futamhossz korlátként is leírható. Azonban a fenti állítás megfordítása már nem igaz, pl. a d -kötésnek nincs általánosított töltés-korlát megfelelője.

2.3. Kiegyenlítetlen források kódolása

Ha az X forrássorozat kiegyenlítetlen, – vagyis, ha $\mathbb{P}(X = +1) = p$ és $\mathbb{P}(X = -1) = q$ valószínűségek különbözőek, – a bemenő jelsorozat spektruma egy, a $b = p - q$ kiegyenlítetlenséggel arányos diszkrét DC komponenset fog tartalmazni, ami szinte egyetlen alkalmazásnál se megengedett [1]. Ennek a problémának bevett megoldása a kiegyenlítetlen forrássorozat előkódolása [14, Th5.1]:

$$X' \{-1, +1\} : \quad X'_m = X_m X'_{m-1}.$$

A $+1 \rightarrow 0$ és $-1 \rightarrow 1$ hozzárendeléssel az előkódolás egy mod 2 integrálásnak feleltethető meg: $X'_m = X_m \oplus X'_{m-1}$. Ha az X forrássorozat független és azonos eloszlású (i.i.d.), akkor az előkódolt jelsorozat egy szintén független, azonos, geometriai eloszlású futamhossz folyamattal jellemezhető: $\mathbb{P}(T(X') = i) = qp^{i-1}$, az ilyen folyamatoknak pedig valóban nincsenek diszkrét spektrális komponensei. Kiegyenlített forrás esetén, amikor $p = q = 1/2$, az X és X' sorozatok statisztikai tulajdonságai megegyezők.

2.4. Kutatási célok és metodológia

Kutatásom célja egy könnyen identifikálható, rugalmasan konfigurálható spektrumformáló kódoló megalkotása volt, ami képes a spektrum befolyásolása mellett a futamhosszra tett megkötések kielégítésére is. A futó digitális összeg (RDS) fogalmának általánosításával egy olyan mennyiséget, a súlyozott futó digitális összeget (WRDS) definiáltam, ami közvetlen kapcsolatot teremt egy bináris sorozat spektrális és időtartománybeli tulajdonságai között. A WRDS korlátolt bitsorozatok előállítására az **1.1. Tézisben** vázolt adaptív kódstruktúrát, egy hurokszűrővel ellátott, visszacsatolás vezérelt bitbeiktatásos kódolót javasoltam.

Az értekezés 2. fejezetében jelfeldolgozási módszerek alkalmazásával demonstráltam az adaptív kódoló spektrumformáló tulajdonságát, és korrelálatlan bemenő sorozat esetére egy közelítő formulát adtam meg a kimenő jelsorozat spektrális sűrűségére (1.2. és 1.3. Tézisek). Ezenfelül kimutattam, hogy a kódoló működése a szigma-delta konverterekéhez hasonló.

A 3. fejezetben a véges impulzusválaszú (FIR) hurokszűrővel felépített kódolókat vizsgáltam. Az ilyen kódolók véges automataként (FSM) modellezhetők és működésük a kapcsolt diszkrét Markov-modell analízisével vizsgálható. Kimutattam, hogy az állapotátmenet mátrix centroszimmetrikus (2.1. Tézis). Az ilyen mátrixok speciális tulajdonságai [22, Th3.1] lehetővé tették az állapot tér jelentős redukcióját, és így a kódsebesség, a csatorna kapacitás, valamint a kimenő jel spektrális sűrűségének meghatározását. A 3.5. alfejezetben részletesen foglalkozom azzal az esettel, amikor egyidejűleg spektrális és futamhossz (d, k) kötés is előírt. Hipergráfok és az ezek leírását segítő hipermátrixok segítségével fel tudtam írni a megszorításos csatorna szomszédsági, illetve a kódoló állapotátmenet mátrixát, ezek alapján pedig a futamhosszak generátorfüggvényét. Ezek segítségével mind a csatornkapacitás, mind a kódsebesség, valamint a kimenő jel spektrális sűrűsége is kiszámítható (2.4. és 2.5. Tézisek).

A 4. fejezetben a $H(z) = 1/(1 - \alpha z^{-1})$ aluláteresztő IIR hurokszűrővel szabályozott kódolót vizsgáltam. Mivel a súlyozott futó digitális összeg ez esetben végtelen sok különböző értéket vehet fel, így a kódoló és a kapcsolódó megszorításos csatorna végesautomataként már nem írható le, a beszúrásokat vezérlő W folyamat pedig nem stabil Markov-láncként viselkedik. Ezért a csatorna és a kódoló leírásához függvényegyenleteket használtam. (3.1–3.4. Tézisek) Ezeknek az egyenleteknek a zárt alakú megoldása nem ismeretes. A numerikus megoldás vagy szukceszív approximációval, vagy az állapotter diszkrétizációjával történhet. Én az utóbbi módszert választottam, mivel egy Markov-folyamat állapotterének diszkrétizálása egy véges terű Markov-lánchoz vezet, ami a FIR szűrővel működő kódolóokra alkalmazott mátrix módszerrel kezelhető.

Az *ablak-* és *α -töltés kötött* kódok jellemzőinek (csatornkapacitás, kódsebesség, spektrum) kiszámítására MATLAB** szkripteket készítettem. Ezen felül számos MATLAB szimulációt végeztem különböző szűrőkkel előállított általánosított töltés-korlátozott kódok spektrumának meghatározására. Ahol mód volt, ezeket az eredményeket összevettem a számított és a becsült eredményekkel is.

** A MathWorks Inc. védjegye

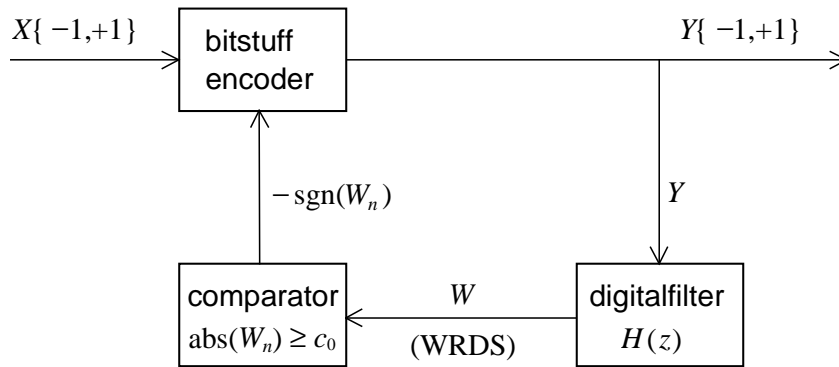
3. Tézisek

1. Téziscsoport. A kódoló felépítése és működése

1.1. Tézis. Az adaptív kódoló felépítése

A súlyozott futó digitális összeg (WRDS) korlátolt csatornák kódolására egy adaptív kódoló struktúrát, egy hurokszűrővel ellátott, visszacsatolt bitbeszűrásos kódolót alkalmaztam és meghatároztam az ilyen kódolók véges hibaterjedésének szükséges és elégséges feltételét. [J1, C3, Th2.2]

A bitbeszűrásos kódolónak két állapota van: vagy egy bitet áttesz a bemenetről a kimenetre, vagy egy redundáns bitet iktat be a kimenő bitfolyamba. A redundáns bitek beillesztését a hurokszűrővel ellátott visszacsatoló hurok vezérli. Amikor a hurokszűrő kimenetén a jelszint



1. ábra. Visszacsatolás-vezérelt bitbeszűrásos kódoló.

eléri a c_0 küszöbértéket, a kódoló a szűrő kimenőjelével ellentétes előjelű bitet illeszt a kimenő folyamba:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} X_{m+1}, & \text{ha } |W_n| < c_0; \\ -\text{sgn}(W_n), & \text{ha } |W_n| \geq c_0, \end{cases} \quad (3)$$

ahol $X_i, Y_i \in \{-1, +1\}$ és $W_n = \sum_{i=0}^{\infty} h_i Y_{n-i}$. A bemenet (X) és a kimenet (Y) indexelése a beszűrt bitek miatt eltérő: $n = m + N_s(X^m)$, ahol $N_s(X^m)$ az X_m -ig beszűrt bitek számát jelöli. A c_0 küszöbértékre teljesülnie kell, hogy

$$c_0 > c_m = \min_{\epsilon_i} |\sum \epsilon_i h_i|, \quad \epsilon_i \in \{-1, +1\}$$

$$c_0 \leq c_M = \sum |h_i|.$$

$c_0 \leq c_m$ esetén a kódsebesség nulla lenne (hasznos bitek nem kerülnének átvitelre), míg $c_0 > c_M$ esetén 1 lenne a kódsebesség, vagyis beszűrt bitek híjján nem történne spektrumformálás. A fenti struktúra valójában egy negatív visszacsatolást valósít meg. A kódoló beavatkozásaival alacsonyan próbálja tartani egy $\tilde{H}(z) = 1 + z^{-1}H(z)$ karakterisztikával jellemezhető szűrő kimenetét. Ez úgy valósul meg, hogy a beszűrésokat vezérlő jelben azok a komponensek lesznek

dominánsak, melyeket a hurokszűrő kiemel, és így a kódoló beavatkozásaival ezek teljesítményét csökkenti.

A dekódolás egy hasonló, ugyanilyen hurokszűrővel ellátott, de előrecsatolt struktúrával oldható meg. A hibaterjedést megfelelő szűrőválasztással tarthatjuk kézben, korlátozva a szűrő memóriáját:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| = c_M < \infty.$$

Ez a feltétel biztosítja, hogy a kód tág értelemben minddig dekódolható legyen [17], vagyis pozitív hibaváltszínűség mellett nem okoz végtelen hibaterjedést [C1].

Az előkódolót, az egyszerű implementálhatóság érdekében integráltam a bitbeszúrásos kódolóval, oly módon, hogy a (3) kódolási szabályban a "nem beszúrás" estében alkalmazott $Y_{n+1} = X_{m+1}$ szabályt megváltoztattam:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} X_{m+1}Y_n, & \text{ha } |W_n| < c_0; \\ -\text{sgn}(W_n), & \text{ha } |W_n| \geq c_0. \end{cases} \quad (4)$$

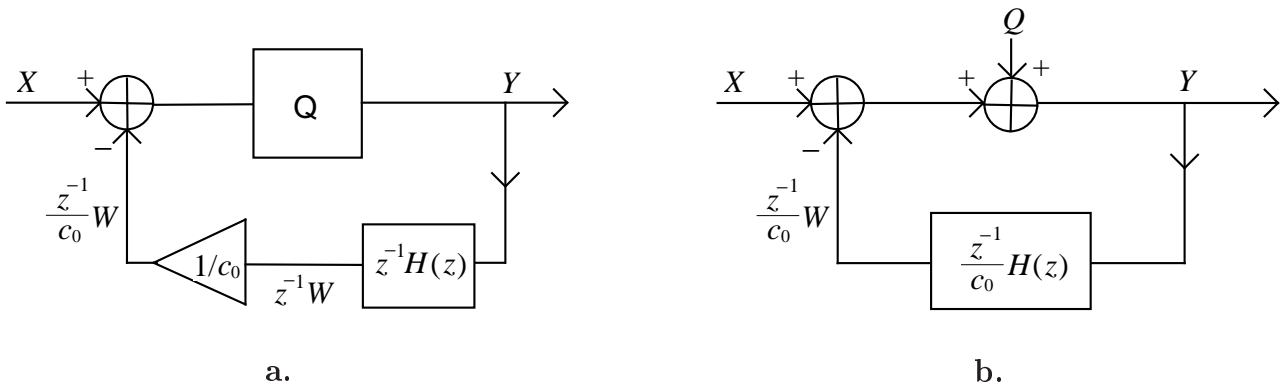
Az új kódolási szabály, ha bitbeiktatás nem történik, "+1" érkezése esetén folytatja a megkezdett futamot, míg "-1" érkezése esetén egy ellenkező előjelű, új futamot indít.

1.2. Tézis. A kódoló spektrumformáló képességének demonstrálása

Demonstráltam a kódoló spektrumformáló képességét és megmutattam, hogy a kódoló a szigma-delta konverterekhez hasonlóan működik. A kódoló kimenő jelének spektrumára egy közelítő formulát vezettem le. [J1, C3, Th2.2]

Tételezzük fel, hogy a bejövő bitsorozat független, azonos eloszlású (i.i.d.) valószínűségi változók sorozata, vagyis bináris fehérzaj. E feltétel mellett, a kimenő jel statisztikai tulajdonságaira vonatkozóan nincs különbség, hogy a kódoló beszúr egy bitet, vagy felülírja az éppen soronkövetkezőt. Ezért (3) helyett elvben a következő kódolási szabályt is követhetjük:

$$Y_{n+1} = \text{sgn}(X_{n+1} - \frac{1}{c_0} W_n) = \text{sgn}(X_{n+1} - \frac{1}{c_0} \sum_{i=0}^{\infty} h_i Y_{n-i}).$$



2. ábra. A kódoló nemlineáris ekvivalense (a); és linearizációja (b).

A **2.a. ábrán** látható, a fenti kódolási szabályhoz tartozó nemlineáris rendszer vizsgálatához az egybites kvantálót egy kvantálási zajgenerátorral helyettesítettem (**2.b. ábra**). Az ábra alapján a kódoló kimenő jelére az alábbi összefüggést írtam fel:

$$Y(z) = \frac{X(z) + Q(z)}{1 + \frac{z^{-1}}{c_0} H(z)}. \quad (5)$$

Feltételezve, hogy a Q kvantálási zaj korrelálatlan fehérzaj [18], – ami többé-kevésbé teljesül, ha $(c_0 - c_m)/(c_M - c_m) \ll 1$, fennáll, vagyis ha a küszöb távol esik a működési tartomány határától – a kimenő jel spektrális sűrűségére az alábbi közelítést kaptam:

$$S_Y(f) \approx \frac{1}{\left| 1 + \frac{e^{-j2\pi f/f_0}}{c_0} H(e^{-j2\pi f/f_0}) \right|^2}. \quad (6)$$

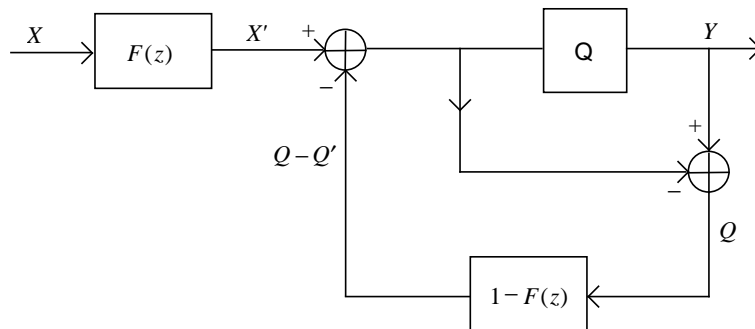
Az (5) összefüggésből látható, hogy a kódoló az X bemenőjelet és a kvantálási zajt (Q) egyaránt formázza. Az alábbi jelöléseket alkalmazva

$$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{z^{-1}}{c_0} H(z)} \quad \text{and} \quad X'(z) = \frac{X(z)}{1 + \frac{z^{-1}}{c_0} H(z)} = F(z) X(z),$$

valamint a

$$Q'(z) = Y(z) - X'(z) = F(z) Q(z)$$

rekvantálási zajt bevezetve átalakítottam a **2.a. ábra** elrendezését. Az eredmény a **3. ábrán** látható. Az ábra bal szélén található visszacsatolt kvantáló egy szigma-delta konverter, amit széles körben alkalmaznak a kvantálási zaj spektrumának formálására [19]. Az ábra jól szemlélteti a kódoló működését: A bejövő bináris jelet az előírt spektrális követelményeknek megfelelően szűrjük, majd az így nyert, immár nem bináris jelet egy kvantálóval ujrakvantáljuk, ami a kvantálási zaj spektrumát is a kívánalmakhoz igazítja.



3. ábra. A szigma-delta működés szemléltetése.

1.3. Tézis. Futamhossz korlátolt csatornák kódolása

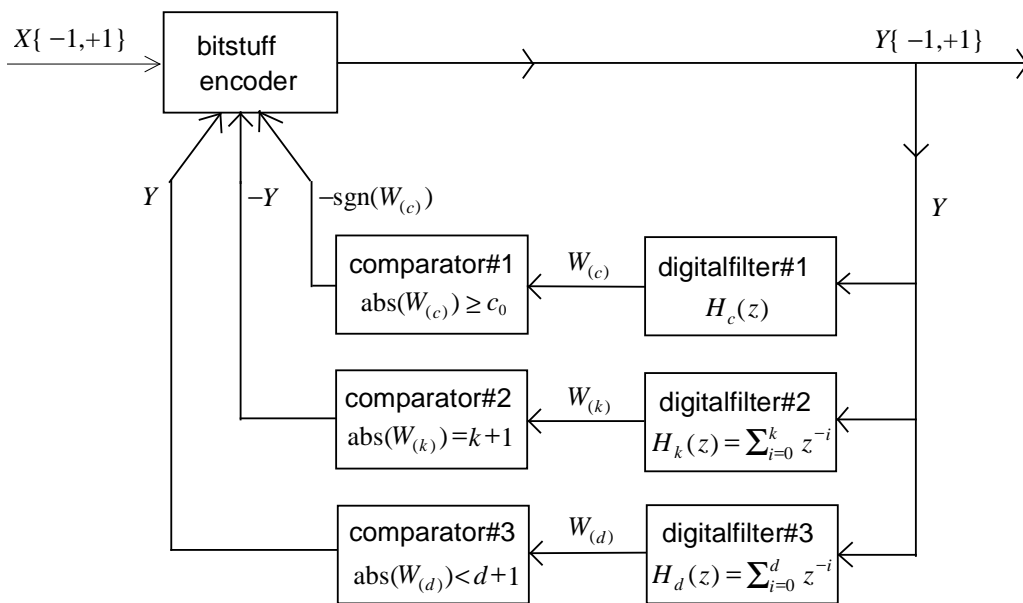
További visszacsatoló hurkok beiktatásával a kódolót képessé tettem egyidejűleg futam és spektrum korlátolt kódok előállítására. Közelítő formulát adtam a k -kötött spektrum korlátolt kódok spektrumára. [J1, C3, Th2.3]

A futamhossz korlátok implementálásához újabb két visszacsatoló hurkot illesztettem a kódolóhoz (4. ábra), melyekhez az alábbi kódolási szabályt alkalmaztam:

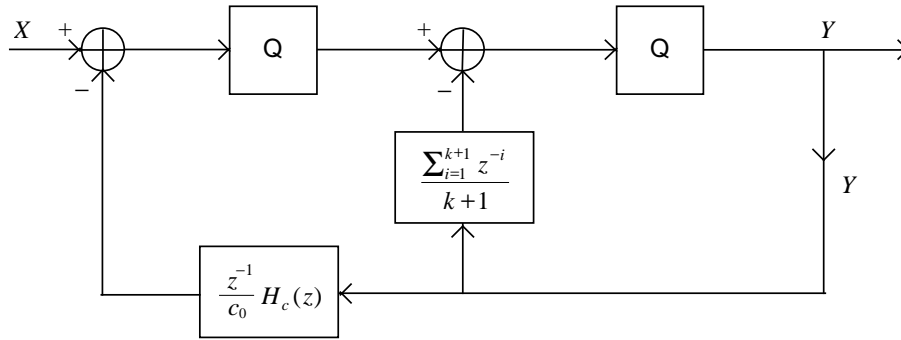
$$Y_{n+1} = \begin{cases} -\text{sgn}(W_n), & \text{ha } |W_n| \geq c_0; & (\text{töltés korlát}) \\ -Y_n, & \text{ha } |\sum_{i=0}^k Y_{n-i}| = k + 1; & (k\text{-kötés}) \\ Y_n, & \text{ha } |\sum_{i=0}^d Y_{n-i}| < d + 1; & (d\text{-kötés}) \\ X_{m+1}Y_n, & \text{egyébként} & (\text{nincs beszúrás}). \end{cases} \quad (7)$$

Egyes esetekben előfordulhat a töltés és futamhossz korlátok ütközése, vagyis, hogy a különböző kötések a kódolót azonos időben különböző bitek beszúrására készítik. Az ilyen esetek kialakulását vagy kiegészítő megszorításokkal megakadályozzuk, vagy pedig a megszorítások kielégítésére prioritási szabályt állítunk fel. Az előbbi megoldásra az értekezés 3.5 fejezetében található példa. Ha az ütközések feloldására prioritási szabályt állítunk fel, úgy általában célszerű a futamhossz korlátokat előnyben részesíteni, mivel azok a detektálás szempontjából kritikusabbak, viszont a spektrum szempontjából fals beszúrások ez utóbbit általában nem befolyásolják számottevően.

A 4. ábrából látható, hogy a visszacsatoló hurokban a futamhossz figyelésére mind d -, mind pedig k -kötés esetében aluláteresztő szűrőt használtam. Ezenfelül, k -kötésnél még a kódolási



4. ábra. Futamhossz korlátok implementálása.



5. ábra. A 4. ábrán látható kódoló linearizált ekvivalense a spektrum becsléséhez, $d=0$ esetben.

szabály is megfelel a töltés korlátozott csatornák esetében alkalmazott (3) szabálynak. Ekép k -kötés esetében is követhető az 1.2. Tézisben a spektrum becslésre alkalmazott közelítés. A bitbeszűrásos kódoló összegzővel és kvantálóval való helyettesítésével kapott linearizált elrendezés az 5. ábrán látható. Ennek alapján a kimenő jel spektruma bináris fehérzaj bemenőjel mellett

$$S_Y(z) \approx \frac{1}{\left| 1 + \frac{z^{-1}}{c_0} H_c(z) + \frac{z^{-1}}{k+1} \frac{1-z^{-(k+1)}}{1-z^{-1}} \right|^2} \quad (8)$$

alakban becsülhető. Ez a becslés valamivel rosszabb, mint (6), mivel k -kötés esetén a küszöbértéket $k+1$ -re állítjuk, és így a kódoló működési határán fog üzemelni.

2. Téziscsoport. Kódolás FIR hurokszűrővel

A FIR hurokszűrővel működő kódolók belső állapotainak száma véges, és így végesautomata modellel, és ebből felírható állapotátmenet mátrixsal leírhatók. Értékzésekben egy általános eljárást ismertetek az ilyen kódolók állapotterének szimmetria tulajdonságokon alapuló redukciójára és a redukált állapotátmenet mátrix meghatározására. Ez a módszer, a töltés korláton felül, alkalmas a futamhosszakra tett (d, k) kötések figyelembevételére is. Az eljárást értekezésben az *ablak-töltés* korlátolt kódok jellemzőinek meghatározásával szemléltetem. Egy (w, c) paraméterű *ablak-töltés* korlátolt kód a $H(z) = \sum_{i=0}^{w-2} z^{-i}$ karakterisztikájú $w-2$ -ed fokú ablakozó hurokszűrővel állítható elő, $c_0 = c + 1$ küszöbérték mellett [Th3.2].

2.1. Tézis. Az állapotátmenet mátrix speciális tulajdonságai

Kimutattam, hogy a kódoló állapotátmenet mátrixa mindig megadható centroszimmetrikus alakban. A mátrix szimmetria tulajdonságainak segítségével redukáltam az állapot tér méretét és modelleztem az egyidejűleg futam és spektrum korlátolt kódoló esetét. [J1, Th3.1]

A véges állapottal leírható adaptív adaptív kódolók állapotátmenet mátrixára az alábbi tulajdonságokat bizonyítottam be:

1. TULAJDONSÁG. Jelölje N a kódoló belső állapotainak számát és \bar{S}_i az S_i állapot bitenkénti inverzét. Ekkor az

$$\bar{S}_i = S_{N+1-i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

címkezésével az adaptív kódoló állapotátmenet mátrixa centroszimmetrikus:

$$\mathbb{P}(S_i \rightarrow S_j) = \mathbb{P}(\bar{S}_i \rightarrow \bar{S}_j) = \mathbb{P}(S_{N+1-i} \rightarrow S_{N+1-j}), \quad (10)$$

és az alábbi alakban írható fel [22]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \mathbf{J} \\ \mathbf{J} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{J} \mathbf{Q}_1 \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. TULAJDONSÁG. Egy mátrix akkor, és csak akkor centroszimmetrikus, ha sajátvektorai két, egymásra ortogonális, invariáns alteret határoznak meg. Egy a $\mathbf{v}_e = [\mathbf{v}, \mathbf{v} \mathbf{J}]$ alakú páros vektorok által kifeszített (\mathcal{E}) páros alteret:

$$\mathbf{v}_e \mathbf{Q} = [\mathbf{v}(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2), \mathbf{v}(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{J}] = [\mathbf{v} \mathbf{Q}_e, \mathbf{v} \mathbf{Q}_e \mathbf{J}]; \quad (11.a)$$

és egy (\mathcal{O}) páratlan alteret, melyet a $\mathbf{v}_o = [\mathbf{v}, -\mathbf{v} \mathbf{J}]$ alakú páratlan vektorok feszítenek ki:

$$\mathbf{v}_o \mathbf{Q} = [\mathbf{v}(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2), -\mathbf{v}(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) \mathbf{J}] = [\mathbf{v} \mathbf{Q}_o, -\mathbf{v} \mathbf{Q}_o \mathbf{J}]. \quad (11.b)$$

A fenti két tulajdonság fontos következményei:

- A (10) összefüggés alapján látható, hogy inverz állapotok leszármazottai is egymás inverzei lesznek. Ezért minden állapot összevonható saját bitenkénti inverzével, és így az állapottér mérete a felére csökkenthető. A redukált állapotátmenet mátrix $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_e$ alakú lesz.
- Minthogy a mátrix és bármely hatványának sajátvektorai megegyeznek, így ha \mathbf{Q} centroszimmetrikus, $\mathbf{Q}^{\pm n}$ is az, és hatványokra fennáll, hogy $(\mathbf{Q}^{\pm n})_e = \mathbf{Q}_e^{\pm n}$ és $(\mathbf{Q}^{\pm n})_o = \mathbf{Q}_o^{\pm n}$.

3. TULAJDONSÁG. Az utolsó kilépő bit, Y_n szerint címkézve az állapotokat, vagyis

$$\begin{aligned} 1 &\leq i \leq N/2, & \text{ha} & \quad Y_n = -1; \\ N/2 < i &\leq N, & \text{ha} & \quad Y_n = +1; \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{Q}_1 és \mathbf{Q}_2 tényleges fizikai jelentést nyernek. \mathbf{Q}_1 azokat az átmeneteket fogja reprezentálni, mikor a kódoló megismétli az utoljára kiadott bitet, vagyis folytatja az aktuális futamot, míg \mathbf{Q}_2 azokat az átmeneteket reprezentálja, mikor az utoljára leadottal ellentétes előjelű bit kerül kiadásra, amivel a kódoló egy új futamot indít.

Közönségesen a legegyszerűbb címkezés, ami mind az 1., mind a 3. tulajdonságnak megfelel, az állapotok lexikografikus rendezése, vagyis egy r -ed rendű FIR szűrő esetében:

$$i = 1 + \sum_{k=0}^{r-1} (1 + Y_{n-k}) 2^{r-k-1},$$

$$\text{azaz} \quad S_1 = [-1, \dots, -1], \dots, S_{2^{r+1}} = [+1, \dots, +1].$$

2.2. Tézis. Kódsebesség és csatornkapacitás

Meghatároztam a FIR hurokszűrővel működő kódoló kódsebességét és a megfelelő kötött csatorna kapacitását. Vizsgáltam az ablak-töltés korlátolt kódok hibaterjedését. [J1, Th3.3]

A kódsebesség az átlagos redundanciából, vagyis a P_{stuff} bitbeiktatási valószínűségből határozható meg:

$$R = 1 - P_{\text{stuff}}.$$

A bitbeiktatási valószínűséget azon az állapotok valószínűségének összege adja, amelyekben bitbeszúrás történik:

$$P_{\text{stuff}} = \sum_{|\text{WRDS}(S_i)| \geq c_0, i \leq \frac{N}{2}} \pi_i,$$

ahol π_i az S_i állapot stacionárius valószínűsége, vagyis a \mathbf{Q}_e állapotátmenet mátrix 1 sajátértékéhez tartozó $\boldsymbol{\pi}_e$ sajátvektor adott komponense. (A szimmetria miatt az eredeti \mathbf{Q} állapotátmenet mátrixhoz tartozó $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\pi}_e, \boldsymbol{\pi}_e \mathbf{J}]$ stacionárius eloszlásvektor páros, és így \mathbf{Q}_e által meghatározott.)

Mivel az adaptív kód eljárás egy mohó algoritmus, vagyis az előírt kötések kielégítő összes kódsorozatot képes (nem feltétlenül az optimális valószínűséggel) generálni, ezért a kapcsolódó megszorításos csatorna szomszédsági mátrixa a kódoló állapotátmenet mátrixából meghatározható oly módon, hogy az állapotátmenet mátrix nem nulla elemeit egyesekkel helyettesítjük: *** $\mathbf{A} = [\mathbf{Q} \neq 0]$. Mivel az \mathbf{A} szomszédsági mátrix is centroszimmetrikus, redukált mátrixa, $\mathbf{A}_e = [\mathbf{Q}_e \neq 0]$ pedig nemnegatív, így örökli a redukálatlan mátrixtól annak legnagyobb sajátértékét, λ_{\max} -t, amelyik a csatornkapacitást határozza meg: $C = \log_2 \lambda_{\max}$ [13, 1].

2.3. Tézis. A kimenő jel spektrális sűrűsége

Egy mátrix formulát adtam meg, amivel a FIR szűrővel működő kódoló kimenő jelének spektruma az állapotátmenet mátrix függvényében számítható. [J1, Th3.4]

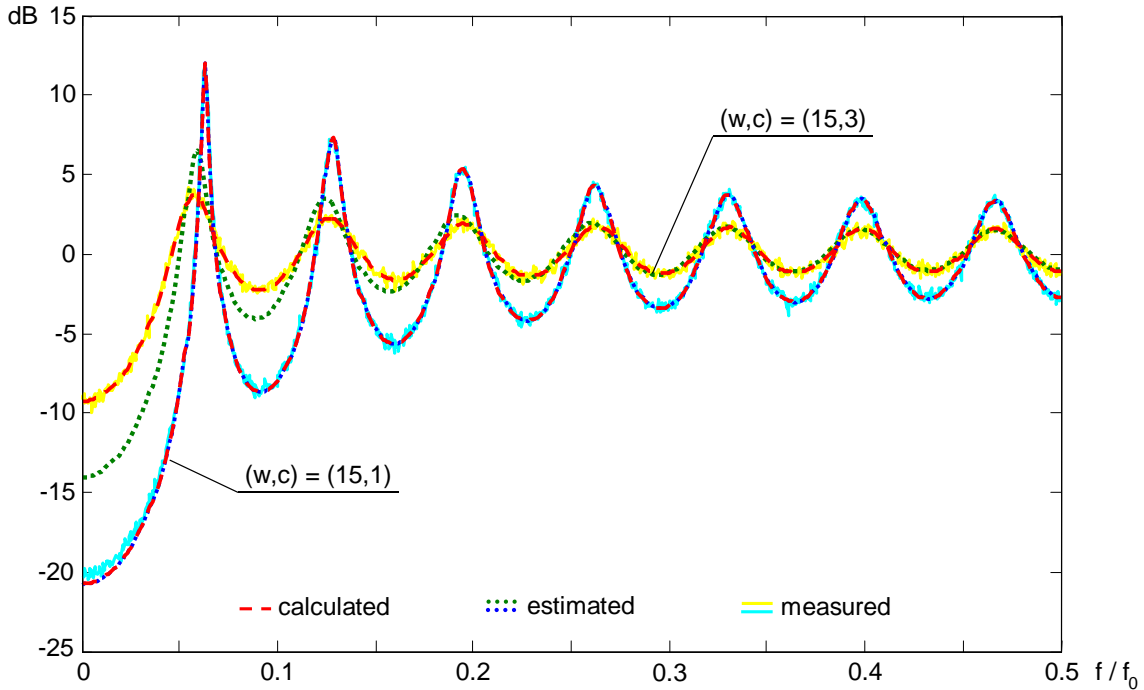
Egy Markov-lánc spektrális sűrűsége az autokorrelációs együtthatók sorozatának Fourier transzformáltjaként definiált:

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-j2\pi k f / f_0} \quad (13)$$

A kimenő jel spektrumához először tehát az $R_Y(k) = \mathbb{E}(Y_n Y_{n+k})$ autokorrelációs együtthatókat kellett meghatároznom. Kihhasználva, hogy a kódoló állapotai, a 3. tulajdonságnak megfelelően, akképp lettek sorbarendezve, hogy az S_i állapot utolsó bitje, $Y_n = +1$, ha $i \leq N/2$ és $Y_n = -1$, ha $i > N/2$, valamint a $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlásvektor szimmetriáját, az autokorrelációra írhatjuk, hogy

$$R_Y(k) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\pi}_e, -\boldsymbol{\pi}_e \mathbf{J}] \mathbf{Q}^{|k|} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix},$$

*** Itt, és a továbbiakban az "==" és a "!=" logikai relációs műveleteket vektor és mátrix operandusokkal fogom használni. A műveleteket elemenként értelmezem és eredményük az operandusok dimenziójával megegyező dimenziójú 0 és 1 elemű vektor/mátrix. Az eredmény 1, ha a reláció teljesül és 0, hogyha nem.



6. ábra. 13 fokú FIR szűrővel generált *ablak-töltés* korlátolt kódok spektrumai. A kódsebesség valamint a csatornakapacitás $c=1$ esetén: $R=0.53$ és $C=0.63$; míg $c=3$ esetén: $R=0.83$ és $C=0.89$.

ahol $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^*$. Mivel a baloldalon szereplő vektor páratlan, így az autokorreláció, (11.b) alapján, tisztán csak \mathbf{Q}_o függvénye lesz:

$$R_Y(k) = \frac{1}{2} [\pi_e \mathbf{Q}_o^{|k|}, -\pi_e \mathbf{Q}_o^{|k|} \mathbf{J}] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \pi_e \mathbf{Q}_o^{|k|} \mathbf{1}. \quad (14)$$

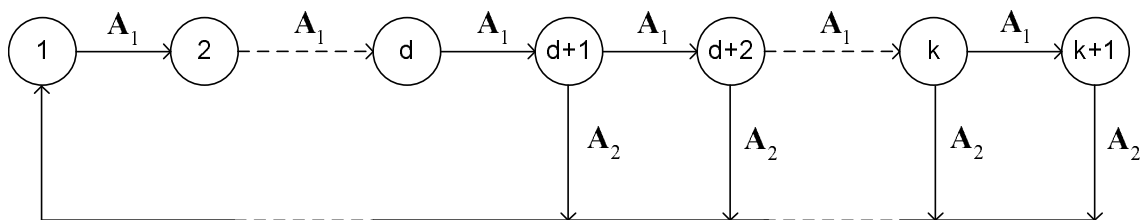
Fenti eredményünket (13)-ba helyettesítve, a kimenő jel spektrumára az alábbi összefüggést nyertem:

$$S_Y(z) = \pi_e [(\mathbf{I} - z\mathbf{Q}_o)^{-1} + (\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{Q}_o)^{-1} - \mathbf{I}] \mathbf{1}.$$

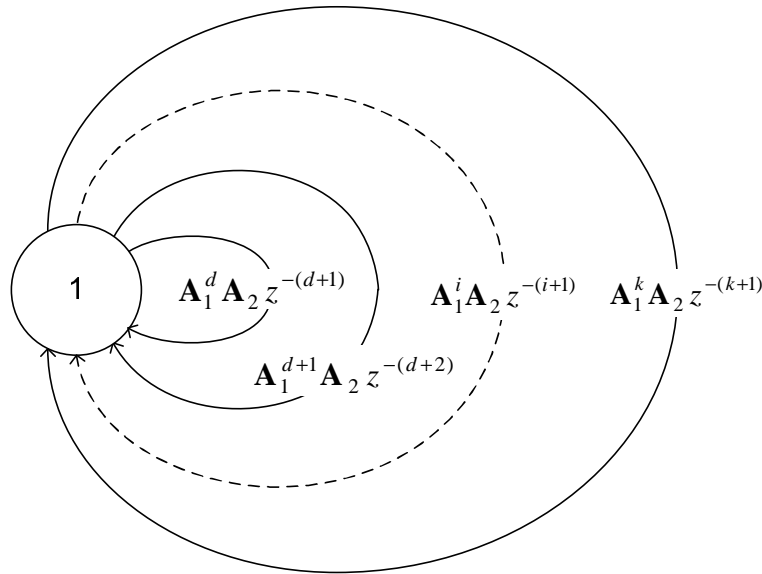
2.4. Tézis. A végesállapotú futamhossz korlátolt csatorna kapacitása

Eljárást adtam az egyidejűleg futam és spektrum korlátolt csatorna átmeneti mátrixának konstrukciójára és a csatorna kapacitás számítására. [J1, Th3.5]

Az egyidejűleg általánosított töltés- és (d, k) korlátolt csatorna leírásához a futamhossz korlátolt csatorna 7. ábrán látható állapotátmenet grájfjából indultam ki. A gráf csúcsainak címkézése a pillanatnyi futamhossznak felel meg. A töltés-korlátot is figyelembe véve egy hipergráf-



7. ábra. Futamhossz korlátolt csatorna állapot átmenet grájfa.



8. ábra. Az egyidejűleg általánosított töltés- és futamhossz korlátolt csatorna változó hosszúságú állapotátmenet gráfja.

hoz jutottam. Mindegyik csúcs állapotok olyan vektorait tartalmazza, melyekben a pillanatnyi futamhossz, a csúcsnak megfelelően, azonos. Minden élhez egy él szomszédsági mátrix van hozzárendelve, amelyik a szomszédos csúcsok állapotvektorainak kapcsolatát írja le. kétféle ilyen él-mátrix van: \mathbf{A}_1 , amelyik folytatja a futamot, és \mathbf{A}_2 , amelyik lezárja és egy új futamot indít. A \mathbf{Q}_1 és \mathbf{Q}_2 mátrixok a töltés-korlát figyelebevételével éppen ezt teszik a kódolóban, úgyhogy belőlük, a nem nulla elemek egyesekre cserélésével, az él-szomszédsági mátrixok származtathatók:

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{Q}_1 \neq 0] \quad (\text{a futam folytatódik});$$

$$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{Q}_2 \neq 0] \quad (\text{új futam kezdődik}).$$

Az élekhez különböző hosszúságú szimbólumsorozatokot rendelve [23, 24] az állapotátmenet diagram a 8. ábrán látható egycsúcsú gráffá redukálható, amit az alábbi változó hosszúságú szomszédsági mátrix jellemez:

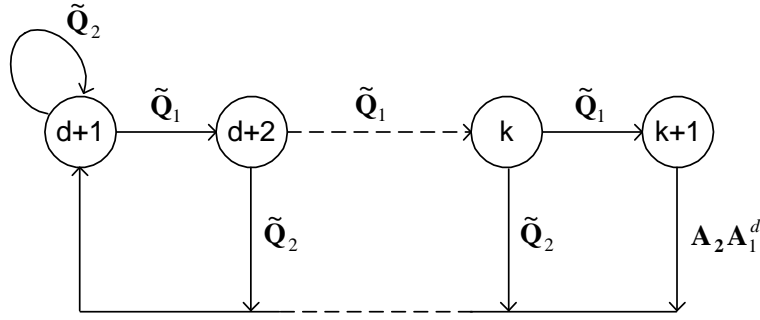
$$\mathbf{A}_{d,k}(z) = \sum_{i=d}^k z^{-(i+1)} \mathbf{A}_1^i \mathbf{A}_2.$$

A csatornkapacitás a változó szimbólumhosszúságú szomszédsági mátrix $\det[\mathbf{A}_{d,k}(z) - \mathbf{I}]$ karakterisztikus polinomja domináns gyökének kettes alapú logaritmusaként adódik [13, 23].

2.5. Tézis. Az adaptívan generált végesállapotú RLL kódok tulajdonságai

A változó szimbólumhosszúságú reprezentáció segítségével általános módszert adtam adaptívan generált végesállapotú futamhossz korlátolt kódok kódsebességének és spektrumának meghatározására. [J1, Th3.5]

Az egyidejűleg általánosított töltés- és (d, k) korlátolt csatornát kódoló adaptív kódoló állapotátmenet diagramja a 9. ábrán látható. Ez szintén egy hipergráf. A $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ él-mátrix a futam folytatását, míg $\widetilde{\mathbf{Q}}_2$ a futam lezárását és d darab ellenkező előjelű bit beiktatásával új futam



9. ábra. A kódoló állapotátmenet diagramja.

indítását jelenti: $\tilde{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_1^d$. A $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ mátrixot \mathbf{Q}_1 kis módosításával nyerhetjük, mivel $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ és $\tilde{\mathbf{Q}}_2$ összegének mindenképpen sztochasztikus mátrixot kell eredményeznie. Felhasználva, hogy sztochasztikus mátrixok sorösszege mindig 1, valamint, hogy mind \mathbf{Q}_1 -nek, mind \mathbf{Q}_2 -nek soronként legfeljebb egy nem nulla eleme lehet, $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ -re az következő kifejezést kapjuk:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \text{diag}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{1}) \mathbf{A}_1.$$

A fenti kifejezés valójában az **1.3. Tézisben** említett kiegészítő megszorítás figyelembevétele, ami például az *ablak-töltés* kötött csatornánál az alábbiként fest:

$$Y_{n+1} = Y_n, \quad \text{ha} \quad Y_n \cdot \sum_{i=0}^{w-d-2} Y_{n-i} \leq d - c_0.$$

Ezt a szabályt kell még hozzávenni a (7) kódolási szabályhoz, annak érdekében, hogy rövid futamok után elkerüljük a (w, c) és d -kötések ütközését. A kiegészítő kötés ilyen esetekben a kódolót a futam meghosszabbítására kényszeríti.

A **9. ábra** alapján megszerkesztettem a kódoló változó hosszúságú állapotátmenet mátrixát:

$$\mathbf{Q}_{d,k}(z) = \sum_{i=0}^{k-d-1} z^{d+1+i} \tilde{\mathbf{Q}}_1^i \tilde{\mathbf{Q}}_2 + z^{k+1} \tilde{\mathbf{Q}}_1^{k-d} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^d$$

Jelölje $\boldsymbol{\pi}_{d,k} = \boldsymbol{\pi}_{d,k} \mathbf{Q}_{d,k}(1)$ a "d + 1" jelű csúcshoz tartozó stacionárius eloszlás vektorát, vagyis a stacionárius eloszlást azon feltétel mellett, hogy éppen egy új futam kezdődött. Ezek ismeretében megadható a futamhosszeloszlás generátorfüggvénye:

$$g(z) = \boldsymbol{\pi}_{d,k} \mathbf{Q}_{d,k}(z) \mathbf{1}. \tag{15}$$

A kódsebesség meghatározásához először az átlagos futamhosszat határoztam a kódoló kimenetén:

$$\bar{N}_{\text{out}} = g'(1) = \boldsymbol{\pi}_{d,k} \left[\sum_{i=0}^{k-d-1} (d+1+i) \tilde{\mathbf{Q}}_1^i \tilde{\mathbf{Q}}_2 + (k+1) \tilde{\mathbf{Q}}_1^{k-d} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^d \right] \mathbf{1}.$$

Bevezetve az $\mathbf{i} = \mathbf{1} - [\tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathbf{1} == 1] - [\tilde{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{1} == 1]$ indikátor vektort, amelyik megmutatja, hogy mely állapotokban nem történik bitbeszúrás, vagyis amikor a kódoló hasznos bitet küld, az egy

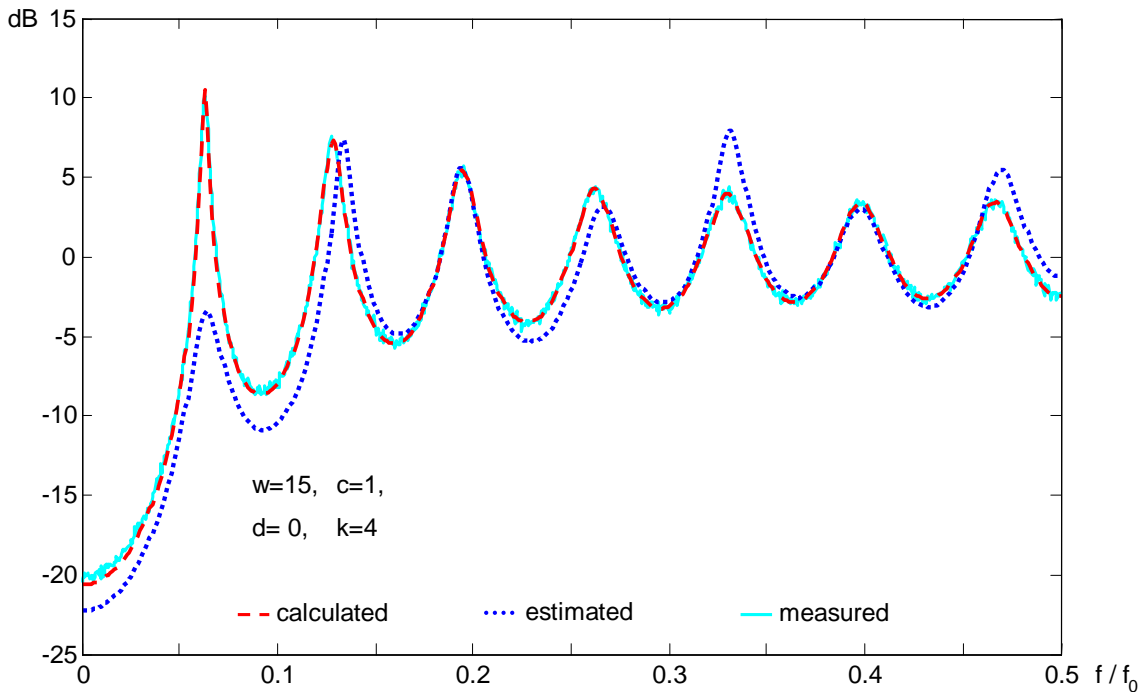
futamra eső hasznos bitek számára az alábbi kifejezést írtam fel:

$$\bar{N}_{\text{in}} = \pi_{d,k} \sum_{i=0}^{k-d-1} \tilde{\mathbf{Q}}_1^i \mathbf{i}.$$

\bar{N}_{in} és \bar{N}_{out} ismeretében a kódsebesség már egyszerűen számítható: $R = \bar{N}_{\text{in}}/\bar{N}_{\text{out}}$.

A kimenő jel spektrális sűrűsége a (15) generátorfüggvény segítségével, a [25]-ben közölt formula alapján határozható meg:

$$S_Y(z) = \frac{4}{\bar{N}_{\text{out}} |1 - z|^2} \pi_{d,k} [(\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{d,k}(z))^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{d,k}(z^{-1}))^{-1} - \mathbf{I}] \mathbf{1}.$$



10. ábra. Egyidejűleg *ablak-töltés* és *k*-kötött kód spektruma. A kódsebesség és a csatornkapacitás $R = 0.54$, illetve $C = 0.63$.

3. Téziscsoport. Kódolás IIR hurokszűrővel

Az IIR szűrővel működő kódolók és a kapcsolódó csatorna általában már nem írhatók le végesautomataként, mivel a súlyozott futó digitális összeg ez esetben végtelen sok különböző értéket vehet fel és így az állapottér végtelenné válik. További nehézséget jelent, hogy ez esetben a kapcsolódó végtelen Markov-lánc stabilitása se biztosított. Ezért a leíráshoz a WRDS-t mint folytonos állapotváltozót tekintettem és stacionárius eloszlására függvényegyenletet írtam fel. Mivel a rendszer állapotváltozóinak száma az alkalmazott IIR szűrő fokszámával egyezik meg, ezért csak az első fokú szűrőt tartalmazó kódolót vizsgáltam, ami az α -töltés korlátnak felel meg.

Az egyszerűbb tárgyalhatóság érdekében bevezettem az *irányított súlyozott futó digitális összeg* (RWRDS) fogalmát [Th4.1], ami WRDS folyó futam előjelével normált változata:

$$\widehat{W}_n = Y_n W_n = Y_n \sum_{i=0}^{\infty} h_i Y_{n-i}.$$

Mivel az RWRDS egy futam alatt monoton növekszik, így elegendő ha értékét csak felülről korlátozzuk.

3.1. Tézis. Csatorna kapacitás

Függvényegyenlet segítségével meghatároztam az α -töltés korlátolt csatorna kapacitását. [J1, Th4.1]

Az α -töltés korlátolt csatorna vizsgálatához tekintsük az n dimenziós bináris vektorok \mathcal{A}^n halmazát: $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $a_i \in \{-1, +1\}$. Értelmezzük a halmaz elemein a \widehat{W} irányított súlyozott futó digitális összeget (RWRDS):

$$\widehat{W}_i = a_i \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j a_{i-j} = 1 + \frac{a_i}{a_{i-1}} \alpha \widehat{W}_{i-1}; \quad (i = 2, \dots, n) \quad \text{és} \quad \widehat{W}_1 = 1, \quad (16)$$

Tekintsük most \mathcal{A}^n azon \mathcal{A}_c^n részhalmazát, melyen az RWRDS korlátolt: $\widehat{W}_1, \dots, \widehat{W}_n < c$. (16) alapján látható, hogy \mathcal{A}_c^n elemein az RWRDS értéke alulról is korlátos: $\widehat{W} < 1 - \alpha c = c'$. Jelölje $S(n)$ \mathcal{A}_c^n elemeinek számát, $F_n(x)$ pedig az RWRDS eloszlását a halmazon, vagyis hogy \mathcal{A}_c^n egy véletlenül kiválasztott elemére $\mathbb{P}(\widehat{W}_n < x)$. Ezekkel a jelölésekkel azoknak a sorozatoknak a száma, melyeknél $\widehat{W}_n < x$:

$$S(n) F_n(x) = S(n-1) F_{n-1}\left(\frac{x-1}{\alpha}\right) + S(n-1) [1 - F_{n-1}\left(-\frac{x-1}{\alpha}\right)]. \quad (17)$$

Speciálisan, ha $x = c$, $F_n(c) = 1$, míg a jobb oldal második kifejezésének argumentumára $(1-c)/\alpha < c'$, és így $F_{n-1}\left(-\frac{c-1}{\alpha}\right) = 0$. Tehát $x = c$ esetén (17) az alábbi alakú:

$$S(n) = S(n-1) [1 + F_{n-1}\left(\frac{c-1}{\alpha}\right)]. \quad (18)$$

Innen $S(n)$ -t (17)-ba helyettesítve az $F_n(x)$ eloszlások sorozatára az alábbi rekurziót kaptam:

$$F_n(x) = \frac{F_{n-1}\left(\frac{x-1}{\alpha}\right) + [1 - F_{n-1}\left(-\frac{x-1}{\alpha}\right)]}{1 + F_{n-1}\left(\frac{c-1}{\alpha}\right)}.$$

Ezek alapján a $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ stacionárius eloszlásnak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 - \alpha c = c'; \\ \frac{1 + F\left(\frac{x-1}{\alpha}\right) - F\left(-\frac{x-1}{\alpha}\right)}{1 + F\left(\frac{c-1}{\alpha}\right)}, & \text{ha } c' < x \leq c; \\ 1, & \text{ha } x > c. \end{cases} \quad (19)$$

A (18) összefüggés szerint \mathcal{A}_c^n elemeinek száma nagy n -ekre exponenciálisan növekszik:

$$S(n) \asymp [1 + F(\frac{c-1}{\alpha})]^n.$$

Ezzel a csatornakapacitás:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 S(n)}{n} = \log_2 [1 + F(\frac{c-1}{\alpha})] = \log_2 [1 + F(c_0)].$$

3.2. Tézis. Kódsebesség

Meghatároztam az adaptívan generált α -töltés korlátolt kód kódsebességét. [J1, Th4.1]

Irányított WRDS használva az α -töltés korlátolt csatorna kódolási szabálya $c_0 = (c - 1)/\alpha$ küszöbérték mellett az alábbi lesz:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} -Y_n, & \text{ha } \widehat{W}_n \geq c_0; \\ X_{m+1}Y_n, & \text{ha } \widehat{W}_n < c_0. \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X = +1) = p$ és $\mathbb{P}(X = -1) = q$ szimbólum-valószínűségekkel i.i.d. forrásfolyamatot feltételezve az RWRDS $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\widehat{W}_n < x)$ stacionárius eloszlására az alábbi, (19)-hez hasonló függvényegyenletre jutottam:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 - \alpha c = c'; \\ 1 - G(-\frac{x-1}{\alpha}), & \text{ha } c' < x \leq 1 - \alpha c_0 = 2 - c; \\ pG(\frac{x-1}{\alpha}) + q[1 - G(-\frac{x-1}{\alpha})] + p[1 - G(c_0)], & \text{ha } 2 - c < x \leq c; \\ 1, & \text{ha } x > c. \end{cases} \quad (20)$$

A függvényegyenletet megoldva a kódsebesség a $\mathbb{P}(\widehat{W} \geq c_0)$ bitbeszúrási valószínűségből számolható:

$$R = 1 - P_{\text{stuff}} = 1 - \mathbb{P}(\widehat{W} \geq c_0) = G(c_0).$$

3.3. Tézis. A futamhossz korlátolt csatorna kapacitása

Meghatároztam az egyidejűleg futamhossz és α -töltés korlátolt csatorna kapacitását. [Th4.2]

Az egyidejűleg (α, c) and (d, k) kötött csatorna kapacitásának meghatározásához \mathcal{A}^n azon $\mathcal{A}_{d,k,c}^n$ részhalmazát tekintetem, amelyiken a súlyozott futó digitális összeg korlátozott:

$$\left. \begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j a_{i-j} \right| < c, & (i = 1, 2, \dots, n); \\ & \left| \sum_{j=0}^{k+1} a_{i-j} \right| \leq k + 1, & (i = k + 2, k + 3, \dots, n); \\ & \left| \sum_{j=0}^d a_{i-j} \right| = d + 1, & \text{ha } a_i = a_{i-d}, \quad (i = d + 1, d + 2, \dots, n). \end{aligned} \right\}$$

Figyelembe véve, hogy egy i hosszú futam alatt az RWRDS változása

$$x' = \frac{1 - \alpha^i}{1 - \alpha} - \alpha^i x, \quad (21)$$

valamint, hogy a legrövidebb megengedett futamhossz $d+1$, az RWRDS értéke egy futam végén az alábbi intervallumba eshet:

$$c' = \frac{1 - \alpha^{d+1}}{1 - \alpha} - \alpha^{d+1} c < \widehat{W}_n < c.$$

Jelölje $S^{d,k}(n)$ az $\mathcal{A}_{d,k,c}^n$ -beli elemek számát és $F_n^{d,k}(x)$ \widehat{W}_n eloszlását a halmazon. Az $\mathcal{A}_{d,k,c}^n$ halmaz elemei akképp származtathatók az $\mathcal{A}_{d,k,c}^{n-d-1}, \mathcal{A}_{d,k,c}^{n-d-2}, \dots, \mathcal{A}_{d,k,c}^{n-k-1}$ halmazokéból, hogy a $+1$ -re végződő sorozatok elé rendre a $-1^{d+1}, -1^{d+2}, \dots, -1^{k+1}$ szekvenciákat, míg a -1 -re végződőek elé ezek inverzeit írjuk. Ez a felírási mód lehetővé teszi az $S^{d,k}(n)$ értékek rekurzív meghatározását. Azon sorozatok számára, melyek végén az RWRDS kisebb, mint x , az alábbi rekurziót írtam fel:

$$S^{d,k}(n) F_n^{d,k}(x) = \sum_{i=d+1}^{k+1} S^{d,k}(n-i) \left[1 - F_{n-i}^{d,k} \left(-\alpha^{-i} x - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha} \right) \right].$$

A rekurzió jobb oldalán $F_n^{d,k}(\cdot)$ argumentuma (21) inverze, az RWRDS előző futamvégi értékét adja abban az esetben, amikor egy pontosan i hosszúságú futam került átvitelre. A rekurzió alapján a $z = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{d,k}(n+1)/S^{d,k}(n)$ jelöléssel az RWRDS határeloszlásra az alábbi függvényegyenletet kaptam:

$$F^{d,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq x_{\min}; \\ \sum_{i=d+1}^{k+1} \frac{1}{z^i} \left[1 - F^{d,k} \left(-\alpha^{-i} x - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha} \right) \right], & \text{ha } x_{\min} < x \leq c; \\ 1, & \text{ha } x > c. \end{cases} \quad (22)$$

Innen az $F^{d,k}(c) = 1$ feltételből z -re egy karakterisztikus polinom adódik.

$$1 - \sum_{i=d+1}^{k+1} \frac{1}{z^i} \left[1 - F^{d,k} \left(-\alpha^{-i} c - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha} \right) \right] = 0.$$

A csatornkapacitást ezen polinom legnagyobb gyökének kettes alapú logaritmusá adja:

$$C = \log_2 z_{\max}$$

3.4. Tézis. Futamhossz korlátolt csatornák egy kódolási tétele

Általánosítottam a futamhossz korlát fogalmát és az ilyen csatornákat kódoló bit beszűrős kódolók kódsebességére egy tételt állítottam fel. A tétel jól használható a csatorna kapacitás becslésénél és segítségével könnyen meghatároztam az egyidejűleg (α, c) és (d, k) kötött kód sebességét is. [J2, C2, Th5.2, Th4.2]

Egy csatornát *gyengén futamhossz korlátoltnak* nevezek, ha a futamhossz alsó vagy felső korlátja nem állandó, hanem a csatorna állapotának függvénye: $T_{\max} = k(Y)+1$ and $T_{\min} = d(Y)+1$.

($0 \leq d(Y) \leq k(Y)$ is always required.) Az ilyen tulajdonságokkal bíró csatornák alkalmasak arra, hogy bitbeszúrásos adaptív algoritmust használjunk a csatornakód előállításához. A kódolási szabály megállapításához először a $\text{run}(Y_n)$ függvényt definiáltam, amely a futam pillanatnyi hosszát tartja nyilván a kimeneten:

$$\text{run}(Y_n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } Y_n \neq Y_{n-1}; \\ \text{run}(Y_{n-1})+1, & \text{ha } Y_n = Y_{n-1}, \end{cases} \quad (23)$$

Ezzel a kódolási szabály:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} -Y_n, & \text{ha } \text{run}(Y_n) = k(Y); \\ Y_n, & \text{ha } \text{run}(Y_n) < d(Y); \\ X_{m+1} Y_n, & \text{(nincs beszúrás) egyébként.} \end{cases} \quad (24)$$

A forrásfolyamatról csak annyit feltételezünk, hogy i.i.d., de nem feltétlenül kiegyenlített, vagyis a $\mathbb{P}(X = +1) = p$ and $\mathbb{P}(X = -1) = q$ valószínűségek nem szükségszerűen azonosak. Így, az előkódolást is figyelembe véve, egy geometriai eloszlású, i.i.d. futamhossz folyamatot kódolunk. Ilyen feltételek mellett a (23) és (24) szabályokkal által definiált adaptív kódoló kódsebességére vonatkozóan az alábbi tételt bizonyítottam:

TÉTEL. *Egy i.i.d. forrást gyengén futamhossz korlátolt csatornára kódoló adaptív kódoló kódsebessége megadható $d(T)$ várható értékével, valamint azzal az s valószínűséggel, hogy egy futam a kimeneten bitbeszúrással zárul:*

$$R = \frac{1 - s}{1 + q\mathbb{E}[d(T)] - ps}, \quad (25)$$

A fenti összefüggés segítségével egy viszonylag könnyen számítható felső becslés adható a gyengén futamhossz korlátolt csatorna kapacitására:

$$C \geq \max_p h(p)R(p) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2[1 - s(\frac{1}{2})]}{2 + \mathbb{E}[d(T)] - s(\frac{1}{2})}.$$

A tétel alkalmazására jó példa az adaptívan generált egyidejűleg (α, c) és (d, k) kötött kódsebességének meghatározása. A kötésnek megfelelően a kódoló c_0 beavatkozási küszöbét $(c - 1)/\alpha$ -nak választva a kódolási szabály:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} -Y_n, & \text{ha } |\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Y_{n-i}| \geq c_0; \\ -Y_n, & \text{ha } |\sum_{i=0}^k Y_{n-i}| = k + 1; \\ Y_n, & \text{ha } |\sum_{i=0}^d Y_{n-i}| < d + 1; \\ X_{m+1} Y_n, & \text{(nincs beszúrás) egyébként.} \end{cases}$$

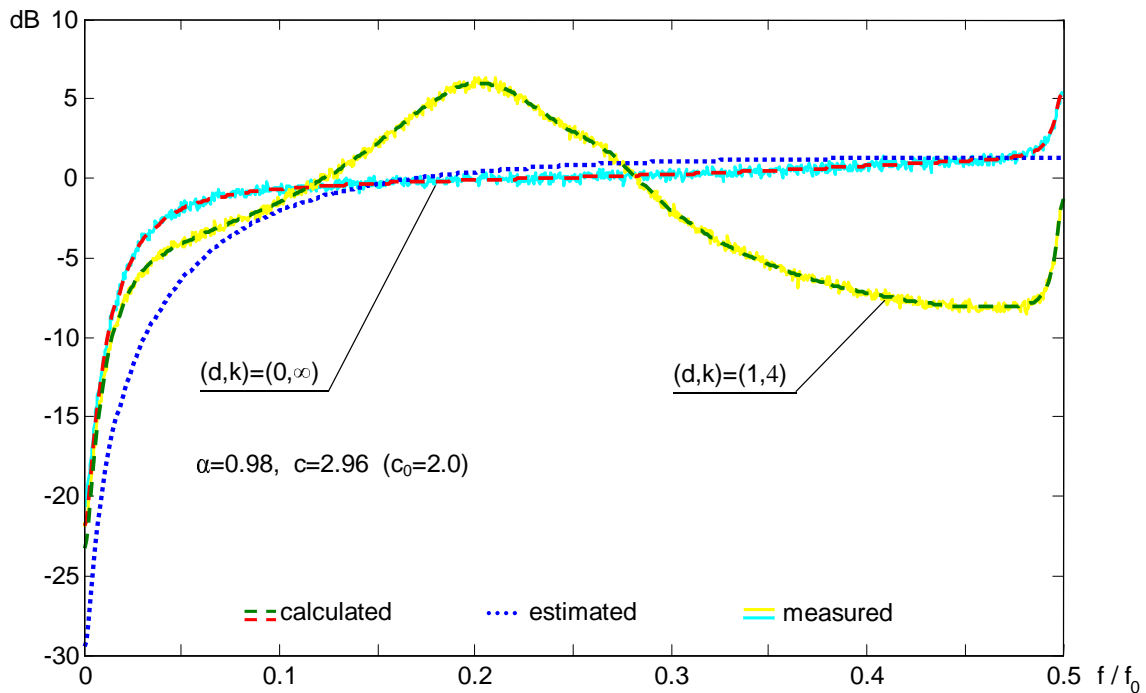
Ennek alapján az irányított WRDS stacionárius eloszlására a (20), illetve (22) összefüggéshez hasonló függvényegyenletet vezettem le:

$$G^{d,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -\alpha^{d+1}c + \frac{1-\alpha^{d+1}}{1-\alpha} = c'; \\ \left. \begin{aligned} &1 - \sum_{i=d+1}^k qp^{i-(d+1)} G^{d,k}\left(-\alpha^{-i}x - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha}\right) - \\ &- p^{k-d} G^{d,k}\left(-\alpha^{-(k+1)}x - \frac{1-\alpha^{-(k+1)}}{1-\alpha}\right), \end{aligned} \right\} & \text{ha } c' < x \leq c_0; \\ \left. \begin{aligned} &1 - \sum_{i=d+1}^{k+1} p^{i-(d+1)} G^{d,k}\left(-\alpha^{-i}x - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha}\right) + \\ &+ \sum_{i=d+1}^k p^{i-d} G^{d,k}\left(-\alpha^{-i}c_0 - \frac{1-\alpha^{-i}}{1-\alpha}\right), \end{aligned} \right\} & \text{ha } c_0 < x \leq c; \\ 1, & \text{ha } x > c. \end{cases}$$

A futamhossz alsó korlátja konstans: $\mathbb{E}[d(T)] = d$, a bitbeszúrési valószínűsége pedig

$$s = 1 - G^{d,k}(c_0) + p^{k-d} \left[1 - G^{d,k}\left(-\alpha^{-(k+1)}c_0 - \frac{1-\alpha^{-(k+1)}}{1-\alpha}\right) \right]$$

adódik. Ezek alapján a kódsebesség a (25) összefüggés segítségével határozható meg.



11. ábra. α -töltés korlátolt kód spektruma futamhossz korláttal és anélkül. A kódsebesség és a csatornkapacitás $R=0.81$ és $C=0.89$ a futamhossz korlát nélküli esetben, illetve $R=0.47$ és $C=0.5$ a $(d, k) = (1, 4)$ paraméterű futamhossz korláttal.

4. Alkalmazások

A spektrumformáló kódolás a digitális adatátvitel, illetve tárolás minden területén alkalmazható a digitális jel spektrumának a csatorna fizikai tulajdonságaihoz illesztéséhez. Optikai rendszerekben (pl. CD, DVD [1], optical fiber transmission [2, 3]), ahol nem állnak rendelkezésre hatékony optikai impulzusformáló eszközök, a digitális jel spektrumának befolyásolására a kódolás az egyetlen eszköz.

A spektrumformálás egyik legfontosabb alkalmazása az AC-csatolt (galvanikusan leválasztott) csatornák kódolása [15, 2, 16]. Az ilyen csatornáknak, a nulla frekvencián fekvő zérus miatt, a jelben erős kismagyaságú levágást okoznak. A kismagyaságú komponensek eltűnése a vevőoldalon a jelszint lassú ingadozását okozza, ami rontja a hibamentes detektálás esélyét. Ahhoz, hogy elkerülhessük ezt a kedvezőtlen hatást a kódolt vonali jel spektruma se tartalmazhat jelentős mennyiségben kismagyaságú komponenseket. Az adaptív kódolóban aluláteresztő típusú hurokszűrőt alkalmazva csatornakód spektruma a (6) összefüggés értelmében ki fogja elégíteni ezt a követelményt. Az értekezés 3. és 4. fejezetében FIR, illetve IIR típusú aluláteresztő szűrőket használtam elnyomott egyenszintű (DC-suppressed) kódok létrehozására. Mindkét esetben részletes foglalkoztam a kódoló működésének analízisével és kiszámítottam a legfontosabb kódparamétereket, a kódsebességet, a kódhatékonyságot, és a spektrumot, valamint ezen belül is az egyenszint tartalmát.

Egy másik kurrens alkalmazás bevágások létrehozása, vagyis bizonyos spektrum komponensek keskeny sávban történő eltüntetése, ahová azután különböző kiegészítő jelzések telpepíthetők [9]. Ilyenre példa a digitális mágnes és optikai tárolás, ahol a fejpozicionáló szinkronjelet fűzik így módon a kód spektrumába [1]. Egy kevésbé egzotikus alkalmazása a spektrumbevágásnak amikor az elnyomást az átviteli sáv tetején, a bitfrekvencia felénél alkalmazzuk. Ez – hasonlóan az AC-csatolt csatornához – védelmet jelent az u.n. sávszéli torzítással (band-edge filter distortion) szemben. Az ilyen sávzáró jellegű kódspektrumokat sáváteresztő hurokszűrőkkel hozhatunk létre. Az értekezés 6. fejezete több ilyen, még egyenszint elnyomással kombinált példát is bemutat.

A csatornakódoknak rendszerint még a futamhosszal kapcsolatos megkötéseknek is eleget kell tenniük. A futamhossz alsó korlátja, a d kötés, ami a szimbólumközi áthallást mérsékli [5, 1], elsősorban optikai/mágneses tároló rendszerekben, illetve ritkábban optikai átviteli rendszerekben előírás. A felső korlát, a k kötés a megbízható órajel kinyerést biztosítja és szinte minden kóddal szemben előírás [5]. Ahogy ezt az **1.3. Tézisben** bemutattam, az adaptív kódoló szinte egyedülállóan egyszerű módon képes a futamhosszra és a spektrumra tett megkötéseket egyaránt kielégítő kódok létrehozására.

A távközlés mellett, különböző, előírt spektrumú digitális mérőjelesorozatok előállításával, a mérés technika jelenthet széles alkalmazási területet az adaptív spektrumformálás számára [27].

Témával kapcsolatos publikációk

Folyóiratok

- [J1] P. Vámos, „A novel algorithm for spectral shaping of binary data streams,” *Infocommunications Journal*, vol. iv, pp. 1–12, April 2012. [6](#), [7](#), [9](#), [10](#), [12](#), [13](#), [14](#), [17](#), [18](#)
- [J2] P. Vámos, „A joint coding concept for run-length and charge limited channels,” *Periodica Polytechnica - Electrical Engineering*, vol. 53, No. 1-2, pp. 31–36, 2009. [19](#)
- [J3] P. Vámos, „Nagyhatékonyságú kód eljárások intenzitás-modulált optikai összeköttetésekhez,” („High efficiency coding for intensity modulated optical links”), *Posta Kísérleti Intézet Közleményei*, No. 39, 1991, pp. 207–237.

Konferencia kiadványok

- [C1] P. Vámos and L. Osváth, „The error propagation of bit-stuff coding systems,” in *Proceedings of IEEE Symp. on Inform. Theory*, Seattle, WA, July 2006, pp. 1763–1767. [7](#)
- [C2] P. Vámos, „A coding theorem of runlength limited channel,” in *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, Washington, DC, June 24–29, 2001, p.66. [2](#), [4](#), [19](#)
- [C3] P. Vámos, L. Osváth and M. Telek, „A new method for spectral shaping coding,” in *Proceedings of IEEE 1998 International Information Theory Workshop*, San Diego, CA, Feb. 1998, p. 73. [2](#), [6](#), [7](#), [9](#)
- [C4] P. Vámos and L. Osváth, „Adaptive spectral shaping coding – a new approach,” presented at the *Hungarian–Swedish Networkshop 96 Spring International Workshop on ATM*, Balatonfüred, Hungary, May 1996.
- [C5] P. Vámos, „On the distribution of waiting time for runs of given length,” in *Proc. IEEE Symp. on Inform. Theory*, Trondheim, Norway, June 1994, p. 183. [1](#)
- [C6] P. Vámos, „Asymptotical efficiency of an adaptively generated constrained code family,” in *Proceedings of COST 229 WGs 3+5+6 Workshop on intelligent terminals and source and channel coding*, Budapest, Sept. 1993, p. 181.

Irodalom

- [1] K.A.S. Immink, *Coding Techniques for Digital Recorders*. London: Prentice Hall, 1991. [1](#), [3](#), [4](#), [12](#), [22](#)
- [2] A.X. Widmer and P.A. Franaszek, „Transmission code for high-speed fiber-optic data networks,” *Electronics Letters*, vol. 19, pp. 202–203, March 1983. [1](#), [2](#), [22](#)
- [3] Y.L. Hsueh, M.S. Rogge, et al., „Smooth upgrade of existing passive optical networks with spectral-shaping line-coding service overlay,” *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, vol. 23, No. 5, pp. 2629–2637, Sept. 2005. [1](#), [22](#)
- [4] D.T. Tang and L.R. Bahl, „Block codes for a class of constrained noiseless channels,” *Information and Control*, vol. 17, pp. 436–461, 1970. [1](#)
- [5] H. Kobayashi, „A survey of coding schemes for transmission or recording of digital data,” *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-19, pp. 1067–1100, Dec. 1971. [1](#), [3](#), [22](#)
- [6] K.A.S. Immink, *Codes for Mass Data Storage Systems*. Eindhoven, The Netherlands: Shannon Foundation Publishers, 2004.
- [7] B.H. Marcus and P.H. Siegel, „On codes with spectral nulls at rational submultiples of the symbol frequency,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-33, pp. 557–568, July 1987. [1](#)
- [8] I.J. Fair, W.D. Grover, W.A. Krzymien and R.I. McDonald, „Guided scrambling: A new line coding technique for high bit rate fiber optic transmission systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-39, pp. 289–236, Feb. 1991.
- [9] J.C. Cavers and R.F. Marchetto, „A new coding technique for spectral shaping of data,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-40, pp. 1418–1422, Sept. 1992. [22](#)
- [10] P.E. Bender and J.K. Wolf, „A universal algorithm for generating optimal and nearly optimal run-length-limited charge-constrained binary sequences,” in *Proc. IEEE Symp. on Inform. Theory*, San Antonio, Texas, Jan. 1993, p. 6. [1](#)
- [11] Y. Sankarasubramaniam and S.W. McLaughlin, „Capacity achieving code constructions for two classes of (d, k) constraints,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-52, pp. 3333–3343, July 2006.
- [12] S. Aviran, P.H. Siegel and J.K. Wolf, „Optimal parsing trees for run-length coding of biased data,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-54, pp. 841–849, Feb. 2008.
- [13] C.E. Shannon, „A mathematical theory of communication,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pt. I, pp. 379–423, 1948; pt. II, pp. 623–656, 1948. [12](#), [14](#)

- [14] W.H. Kautz, „Fibonacci codes for synchronization control,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-11, pp. 284–292, April 1965. 4
- [15] K.A.S. Immink, „Performance of simple binary DC-constrained codes,” *Philips J. Res.*, vol. 40, No. 1, pp. 1–21, 1985. 2, 22
- [16] G.L. Pierobon, „Codes for zero spectral density at zero frequency,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 435–439, March 1984. 2, 22
- [17] I. Csiszár and J. Körner, *Information Theory*. New York: Academic Press, 1981. 7
- [18] R.M. Gray, „Quantization noise spectra,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-36, pp. 1220–1244, Nov. 1990. 8
- [19] H.A. Spang and P.M. Schulthess, „Reduction of quantizing noise by use of feedback,” *IRE Trans. Commun. Systems*, vol. COM-10, pp. 373–380, Dec. 1962. 8
- [20] H. Waldman and C.A.M. Pingarilho, „Spectral shaping codes,” in *Proc. IEEE Symp. on Inform. Theory*, Trondheim, Norway, June 1994, p. 209.
- [21] F.R. Gantmacher, *Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Co., 1960.
- [22] A.R. Collar, „On centrosymmetric and centroskew matrices,” *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.*, vol. 15, pp. 265–281, 1962. 5, 11
- [23] C.D. Heegard, B.H. Marcus and P.H. Siegel, „Variable-length state splitting with applications to average runlength-constrained (ARC) codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-37, pp. 759–777, May 1991. 3, 14
- [24] K.J. Kerpez, A. Gallopoulos and C.D. Heegard, „Maximum entropy charge-constrained run-length codes,” *IEEE Journ. Sel. Areas Commun.*, vol. 10, pp. 242–253, Jan. 1992. 3, 14
- [25] A. Gallopoulos, C.D. Heegard and P.H. Siegel, „The power spectrum of run-length-limited codes,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-37, pp. 906–917, Sept. 1989. 16
- [26] P. Erdős, I. Joó and V. Komornik, „On the sequence of numbers of the form $\epsilon_0 + \epsilon_1q + \dots + \epsilon_nq^n$, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$,” *Acta Arithmetica*, vol. 83, pp. 201–210, 1998.
- [27] D.A. Lampasi, L. Podesta, P. Carbone, „Binary Sequences With Good Spectral Properties Obtained by Genetic Algorithms,” *IEEE Trans. Instrum. and Meas.*, vol. IM-56, No. 1, pp. 126–132, Feb. 2007. 22
- [28] C. Jamieson, I.J. Fair, „DC-free codes with complex-valued signalling constellations,” *IET Communications*, vol. 7, No. 2, pp. 91–97, Jan. 2013.